Новое доказательство теоремы Брунна–Минковского

Ф.М. Малышев (МИАН)

Для минимального выпуклого тела G в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, расположенного между параллельными гиперплоскостями L_0, L_1 с заданными n-мерными многогранниками $P_0 = L_0 \cap G$, $P_1 = L_1 \cap G$ одинакового объёма v, сечение $P = L \cap G$ гиперплоскостью L, параллельной L_0, L_1 и расположенной строго между ними, имеет объём $w \geqslant v$ (условно теорема Брунна), а равенство $w = v$ (наиболее трудный случай) имеет место только в случае цилиндра G (условно теорема Минковского).

Предлагается сразу доказывать неравенство $w > v$, когда P_1 не получается из P_0 параллельным переносом, причём вначале для многогранников P_0, разбиваемых на симплексы (полностью исчерпывая объём v), а не на традиционные параллелепипеды, только приближающимися "снизу" к телу P_0. Элементарными геометрическими средствами (без привлечения симметризации Штейнера) доказывается существование многогранника P_1' (вместо P_1), для которого $w' < w$. В результате удаётся избежать "трудный случай" и значительно сократить имевшееся несоответствие очевидной (по мнению Б.Н. Делоне) теоремы имевшимся существенно неэлементарным её доказательствам. В случае симплекса P_0 используется цепочка из вложенных многогранников, начинающаяся с минимального содержащего P_1 симплекса $\widehat{P}_0$, гомотетичного P_0, и заканчиающаяся многогранником P_1. Очередной многогранник получается отсечениями от предыдущего опорными гиперплоскостями P_1, параллельными i-мерным граням $\widehat{P}_0$, $i = n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0$.

Будут приведены мало известные оптимизационные задачи прикладного характера, относящиеся к неравенству Брунна–Минковского.