



Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Программа дисциплины ОД.А.05 «Введение в модальную логику»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук
ИПТИ РАН**

Рабочая программа дисциплины

ОД.А.05 «Введение в модальную логику»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

Разработчик программы:
К.ф.-м.н. Шапировский

Одобрена на заседании УС
«03» сентябрь 2018 г.

Председатель УС

В.И.Венец

(подпись)



Москва,
2018 г.



Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения аспиранта и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа ОД.А.05 «Введение в модальную логику» предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину, аспирантов для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- ФГОС ВО по направлению 01.06.01 «Математика и механика» для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».
- Учебным планом института по образовательной программе для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Модальная логика – активно развивающаяся дисциплина на стыке математики и информатики. Цель курса – ознакомить слушателя с базовым математическим аппаратом модальной логики и её основными приложениями. Курс состоит из двух частей. В первой части рассматриваются общие алгоритмические и теоретико-модельные вопросы. Во второй части мы используем описанный общий аппарат, чтобы познакомить слушателя с некоторыми конкретными приложениями модальной логики.

Курс рассчитан на слушателя с базовым уровнем подготовки в области математической логики и теории алгоритмов.

2. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц (180 час.).

2.1. Структура дисциплины

| № п/п | Наименование дисциплины | Объем учебной работы (в часах) | | | | | | Вид итогового контроля | |
|-------|-----------------------------|--------------------------------|--------------|---------------|------|-------|-----|------------------------|-------------|
| | | Всего | Всего аудит. | Из аудиторных | | | | | Сам. работа |
| | | | | Лекц. | Лаб. | Прак. | КСР | | |
| 1. | Введение в модальную логику | 180 | 90 | 45 | | 45 | | 90 | экзамен |

2.2. Содержание курса:

I. Основные понятия модальной логики

1. Семантика Крипке Шкалы и модели Крипке. Понятие нормальной модальной логики. Теорема корректности. Теорема о канонической модели; канонические логики и их полнота по Крипке. Фи-



нитная аппроксимируемость и разрешимость модальных логик. Склеивающая фильтрация; финитная аппроксимируемость логик K , T , $K4$, $S4$. Лемма Файна о максимальном элементе. Селективная фильтрация; финитная аппроксимируемость логики Гёделя-Лёба GL . Развертка и r -морфизмы. Полнота относительно деревьев логик K , $S4$ и GL . Расширения $K4$ и характеристические формулы Янкова-Файна. Логика конечной глубины. Логика конечных шкал.

2. Сильные семантики Булевы алгебры с операторами (модальные алгебры). Алгебраическая семантика. Алгебра Линденбаума; её связь с канонической моделью. Обобщенные шкалы Крипке. Теорема Йонсона-Тарского о представлении модальных алгебр. Окрестностная и топологическая семантика.

3. Обогащенные модальные языки Полимодальные языки. Теорема Макинсона; пример непротиворечивой бимодальной логики с пустым многообразием шкал. Соединение логик; теорема о переносе свойств (полноты по Крипке, финитной аппроксимируемости и разрешимости). Универсальная модальность и модальность неравенства. Временные логики. Модальные произведения. Поливалентные модальности.

4. Определимость Стандартный перевод. Бисимуляция. Элементарные и модально определимые классы шкал. Теорема Ван Бенгема-Розена. Теорема Голдблатта-Томасона. Дескриптивные шкалы и d -упорность. Теоремы Салквиста и Крахта (без доказательств). Теорема Ван Бенгема-Файна (без доказательства).

5. Алгоритмические свойства модальных логик NP -полнота проблемы выполнимости логик $S5$ и $S4.3$. Теорема Ладнера о $PSPACE$ трудных логиках. $PSPACE$ -полнота логик $K4$, $S4$, $S4.2$. Примеры неразрешимых и неперечислимых модальных логик.

II. Некоторые приложения модальных логик

1. Модальные логики и верификация моделей программ Системы переходов как модели Крипке. Темпоральные языки. Спецификации программ на модальном языке. Проверка темпоральных формул на конечных моделях. Логика LTL , CTL , CTL^* и их свойства.

2. Пропозициональная динамическая логика PDL Язык пропозициональной динамической логики. Стандартная модель. Модальности как атомарные программы. Аксиоматика PDL . Теорема корректности. Каноническая модель, теорема о полноте и разрешимости.

3. Логика Гёделя-Лёба и доказуемость в арифметике Модальность как доказуемость в формальной арифметике. Арифметическая интерпретация; теорема корректности. Теорема Соловея о полноте GL относительно PA (без доказательства).

4. Произведения модальных логик и фрагменты логики первого порядка Логика K_n и $S5_n$. Финитная аппроксимируемость произведениями. Кубический перевод. Произведения с диагональю. Построение разрешимых фрагментов логики предикатов с помощью произведений.

3. Образовательные технологии

В качестве образовательных технологий применяются активные образовательные технологии (лекции), а также самостоятельная работа аспирантов под контролем научного руководителя.



4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Конспекты лекций и экзаменационные задания находятся тут:
<https://www.mccme.ru/iium/s16/s16-elagin.html>

Самостоятельная работа подкрепляется учебно-методическим и информационным обеспечением, включающим учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций. Основные виды самостоятельной работы: в читальном зале библиотеки, в домашних условиях с доступом к ресурсам Интернет.

Контроль знаний осуществляется в процессе индивидуальной работы с научным руководителем, а также в процессе участия в аудиторных занятиях (доклады, обсуждения).

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Литература:

1. Modal Logic — Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Volume 53, Cambridge University Press, 2001.
2. Modal Logic — Alexander Chagrov and Michael Zakharyashev. Oxford Logic Guides, Volume 35, Oxford University Press, 1997.
3. Logics of Time and Computation, 2nd Edition — Robert Goldblatt. CSLI Lecture Notes, No. 7. CSLI Publications, 1992.
4. The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications, 2nd Edition — Franz Baader, Diego Calvanese, Deborah L. McGuinness, Daniele Nardi, and Peter F. Patel-Schneider, editors. Cambridge University Press, 2007.
5. Верификация моделей программ: model checking — Э.М.Кларк мл., Д.Пелед, О.Грамберг. Переводчики: В.Захаров, Р.Кончаков, Д.Царьков, Р.Смелянский. Издательство МЦНМО, 2002.
6. Шапировский И., Шехтман В. Современная модальная логика: между математикой и информатикой // Современная логика: основания, предмет и перспективы развития. Сборник научных статей / Под ред. Д. Зайцев. — М.: ИД «ФОРУМ», 2018. — С.265–305
7. Е.Е.Золин, И.Б.Шапировский Модели неклассических логик (годовой спецкурс, 2015—2016) <http://lpcs.math.msu.su/~zolin/ml/index.html#ml2015>



Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Программа дисциплины ОД.А.05 «Теория полей»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук
ИППИ РАН**

Рабочая программа дисциплины

ОД.А.05 «Теория полей»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

Разработчик программы:
К.ф.-м.н. А.Д.Елагин

Одобрена на заседании УС
«*05*» *сентября* 2018 г.

Председатель УС

В.И.Венец (подпись)



Москва, 2018 г.



Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения аспиранта и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа ОД.А.05 «Теория полей» предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину, аспирантов для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- ФГОС ВО по направлению 01.06.01 «Математика и механика» для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».
- Учебным планом института по образовательной программе для специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Начиная со своего возникновения алгебра понималась как наука о решении уравнений или систем уравнений сначала для чисел, позднее для других конкретных математических объектов. В настоящее время основной объект исследования алгебры — свойства операций, производимых над объектами произвольной природы. Возникающие на этом пути абстрактные алгебраические системы достаточно универсальны, чтобы конкретные их реализации можно было найти в разных областях как математики, так и других наук. Группы и поля — первые алгебраические системы, возникшие в математике в связи с решением алгебраических уравнений. Сегодня теория групп и теория полей наиболее развиты в алгебре, а полученные в них результаты наиболее используются в других областях математики

2. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единицы (180 час.).

2.1. Структура дисциплины

| № п/п | Наименование дисциплины | Объем учебной работы (в часах) | | | | | | Вид итогового контроля | |
|-------|-------------------------|--------------------------------|--------------|---------------|------|-------|-------------|------------------------|---------|
| | | Всего | Всего аудит. | Из аудиторных | | | Сам. работа | | |
| | | | | Лекц. | Лаб. | Прак. | | | КСР |
| 1. | Теория полей | 180 | 72 | 36 | | 36 | | 108 | экзамен |

2.2. Содержание курса:

1. Алгебраическое замыкание поля.
2. Основная теорема алгебры.
3. Сепарабельные расширения.
4. Автоморфизмы поля.
5. Нормальные расширения.
6. Группы Галуа.



7. Теория Галуа.
8. Конечные поля.
9. Автоморфизм Фробениуса.
10. Разрешимость уравнений в радикалах. Целые алгебраические числа. Норма, след числа.

3. Образовательные технологии

В качестве образовательных технологий применяются активные образовательные технологии (лекции), а также самостоятельная работа аспирантов под контролем научного руководителя.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Конспекты лекций и листки с задачами находятся тут: <https://www.mccme.ru/iium/f14/f14-AG-1-Elagin.html>

Самостоятельная работа подкрепляется учебно-методическим и информационным обеспечением, включающим учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций. Основные виды самостоятельной работы: в читальном зале библиотеки, в домашних условиях с доступом к ресурсам Интернет.

Контроль знаний осуществляется в процессе индивидуальной работы с научным руководителем, а также в процессе участия в аудиторных занятиях (доклады, обсуждения).

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Литература:

1. С. Ленг «Алгебра», С. Ленг «Алгебра» М.: Наука, 1965. - 431 с.
2. Э. Б. Винберг «Курс алгебры», М.: Факториал Пресс, 2001.
3. А. И. Кострикин «Введение в алгебру» (части 1,2,3), Учебник для вузов. М.: Физико-математическая литература, 2000, 272 стр



Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Программа дисциплины ОД.А.04 «Методология научных исследований»
Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»
аспирантура

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук
ИППИ РАН**

Рабочая программа дисциплины

ОД.А.04 «Методология научных исследований»
Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»
аспирантура

Разработчик программы: д.ф.-м. н. А.М. Красносельский

Одобрена на заседании УС
«03» сентября 2019г.

Председатель УС

В.И.Венец

(подпись)



Москва, 2019 г.



Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Программа дисциплины ОД.А.05 «Алгебраическая геометрия»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича
Российской академии наук
ИППИ РАН**

Рабочая программа дисциплины

ОД.А.05 «Алгебраическая геометрия»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

Разработчик программы:
К.ф.-м.н. Елагин А.Д.

Одобрена на заседании УС
«03» сентября 2018 г.

Председатель УС

В.И.Венец (подпись)



Москва, 2018 г.



Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения аспиранта и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа ОД.А.05 «Алгебраическая геометрия» предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину, аспирантов для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- ФГОС ВО по направлению 01.06.01 «Математика и механика» для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».
- Учебным планом института по образовательной программе для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Курс представляет собой краткое введение в алгебраическую геометрию. Он предназначен для начинающих изучать предмет и не предполагает специальной подготовки. Цель курса – обзор понятий по алгебраической геометрии и её основных понятий, методов и задач, расширение математического кругозора. Необходимые для понимания курса знания – начальный курс алгебры (линейная алгебра, кольца, поля, модули, гомоморфизмы). Также будет полезно знакомство с началами матанализа и аналитической геометрией. В курсе сделан акцент на изучение алгебраических кривых, для которых обсуждаемые понятия более наглядны, а доказательства во многих случаях технически проще. Лекции сопровождаются проведением семинарских занятий, на которых слушателям предлагаются для решения задачи для закрепления материала и изучения примеров.

2. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единицы (180 час.).

2.1. Структура дисциплины

| № п/п | Наименование дисциплины | Объем учебной работы (в часах) | | | | | | Вид итогового контроля | |
|-------|--------------------------|--------------------------------|--------------|---------------|------|-------|-----|------------------------|-------------|
| | | Всего | Всего аудит. | Из аудиторных | | | | | Сам. работа |
| | | | | Лекц. | Лаб. | Прак. | КСР | | |
| 1. | Алгебраическая геометрия | 180 | 90 | 45 | | 45 | | 90 | экзамен |

2.2. Содержание курса:

- 1) Аффинные алгебраические множества
- 2) Аффинные многообразия
- 3) Локальные свойства плоских кривых
- 4) Проективные многообразия
- 5) Проективные плоские кривые



6) Многообразия, морфизмы, и рациональные отображения

7) Разрешение особенностей

8) Теорема Римана-Роха

Темы практических занятий:

1) Первый листок

2) Прямые и коники

3) Бесконечно удалённые точки

4) Многообразия и регулярные отображения

5) Квадрики

6) Образы, прообразы и полюса

7) Особенности плоских кривых

8) Особенности кривых – 2

9) Многочлен Гильберта

10) Кубики

11) Дивизоры

3. Образовательные технологии

В качестве образовательных технологий применяются активные образовательные технологии (лекции), а также самостоятельная работа аспирантов под контролем научного руководителя.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Конспекты лекций и листки с задачами находятся тут: <https://www.mccme.ru/ium/f14/f14-AG-1-Elagin.html>

Самостоятельная работа подкрепляется учебно-методическим и информационным обеспечением, включающим учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций. Основные виды самостоятельной работы: в читальном зале библиотеки, в домашних условиях с доступом к ресурсам Интернет.

Контроль знаний осуществляется в процессе индивидуальной работы с научным руководителем, а также в процессе участия в аудиторных занятиях (доклады, обсуждения).

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Литература:

1. И.Р. Шафаревич «Основы алгебраической геометрии», МЦНМО, 2007г.

2. Дж. Харрис «Алгебраическая геометрия. Начальный курс», МЦНМО, 2005 г



Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Программа дисциплины ОД.А.03 «Алгебра»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича
Российской академии наук
ИПИИ РАН**

Рабочая программа дисциплины

ОД.А.03 «Алгебра»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

Разработчик программы:
К.ф.-м.н.А.Д.Елагин

Одобрена на заседании УС
«03» *сентября* 2018 г.

Председатель УС

В.И.Венец (подпись)



Москва, 2018 г.



Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения аспиранта и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа ОД.А.03 «Алгебра» предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину, аспирантов для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- ФГОС ВО по направлению 01.06.01 «Математика и механика» для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».
- Учебным планом института по образовательной программе для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Курс включает в себя, помимо лекций, листки с задачами – их предполагает решать самостоятельно и обсуждать решения на семинарских занятиях с преподавателями. В задачах закрепляется теоретический лекционный материал, а также излагаются отдельные темы и разбираются примеры. В курсе вводятся и изучаются основные понятия алгебры – группы, кольца, поля, модули и векторные пространства.

2. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 час.).

2.1. Структура дисциплины

| № п/п | Наименование дисциплины | Объем учебной работы (в часах) | | | | | | Вид итогового контроля | |
|-------|-------------------------|--------------------------------|--------------|---------------|-----|----|-------------|------------------------|---------|
| | | Всего | Всего аудит. | Из аудиторных | | | Сам. работа | | |
| Лекц. | Лаб. | | | Прак. | КСР | | | | |
| 1. | Алгебра 1 | 108 | 36 | 18 | | 18 | | 72 | экзамен |

2.2. Содержание курса:

Часть 1:

1) Многочлены

Многочлены, степень, деление с остатком. Теорема Безу. НОД, алгоритм Евклида для многочленов. Неприводимые многочлены. Единственность разложения на простые множители. Лемма Гаусса. Единственность разложения для целых коэффициентов или нескольких переменных. Критерий Эйзенштейна. Основная теорема алгебры. Неприводимые многочлены над \mathbb{R} и \mathbb{C} .

2) Общая алгебра

Кольца, поля. Идеалы (левые, правые, двусторонние), их сумма, пересечение. Делители нуля. Факторкольцо. Гомоморфизмы колец. Теорема о гомоморфизме. Китайская теорема об остатках для взаимно простых идеалов. Случай кольца целых чисел. Случай кольца многочленов. Интерполяция. Модули. Свободные модули. Пересечение и сумма подмодулей. Прямая сумма модулей. Гомомор-



физмы. Циклические модули. Коммутативные кольца. Главные идеалы. Простые и максимальные идеалы, факторы по ним. Конечно порождённые модули над евклидовыми кольцами. Приведение матрицы соотношений к диагональному виду.

3) Арифметика

Алгоритм Евклида и ОТА. Наибольший общий делитель. Евклидовы кольца. Простые и обратимые элементы. ОТА в евклидовых кольцах. Кольца главных идеалов. Факториальные кольца. Арифметика остатков. Группы обратимых элементов, цикличность мультипликативной группы поля. Гауссовы числа. Простые гауссовы и простые целые. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Разложение целых чисел в суммы квадратов. Простые в целых и гауссовых числах.

4) Теория групп

Группы перестановок. Циклы, транспозиции, чётность. Беспорядки. Порядок перестановки. Сопряжение. Разложение в циклы. Группы. Подгруппы. Смежные классы, индекс. Теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы. Группы преобразований. Порядок элемента. Циклические группы. Их подгруппы и порождающие. Конечнопорождённые абелевы группы, две структурные теоремы. Свободные абелевы группы.

5) Линейная алгебра

Системы линейных уравнений, метод Гаусса, элементарные преобразования, ступенчатая форма, пространство решений. Матрицы, алгебраические операции с ними, элементарные преобразования. Умножение на вектор. Векторные пространства, координатное пространство, линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства, их сумма и пересечение. Линейные отображения, их матрицы. Ядро, образ, ранг отображения. Обратимость отображения. Определитель матрицы. Явная формула и определение через свойства. Определитель произведения. Разложение по строке и по столбцу. Миноры, алгебраические дополнения. Результат и дискриминант. Обратная матрица, её вычисление.

Темы листков:

- 1) Многочлены
- 2) Кольца – простейшие свойства
- 3) Гауссовы числа
- 4) Кольца и идеалы
- 5) Сравнения по модулю и уравнения в целых числах
- 6) Симметрическая группа
- 7) Группы: абелевы и неабелевы
- 8) Строение конечных групп
- 9) Определители

Часть 2:

1. Линейная алгебра

Двойственное пространство, невырожденные спаривания. Сопряжённое линейное отображение. Двойственный базис.

2. Операторы. След. Собственные векторы и значения. Диагонализуемые операторы. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Корневые подпространства. Нормальная форма Жордана.

3. Билинейные и квадратичные формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Ортогонализация Грама-Шмидта. Квадратичные формы над \mathbb{R} .



4. Операторы в евклидовых пространствах. Сопряжённый оператор, ортогональные, унитарные и самосопряжённые операторы. Квадратичные формы в евклидовых пространствах. Главные оси, главные значения.
5. Тензорное произведение модулей. Тензоры. Операторы, билинейные формы как тензоры, структурный тензор алгебры. Свёртка.
6. Градуированные кольца, идеалы и модули.
7. Тензорная алгебра векторного пространства. Симметрическая и внешняя алгебры. Симметрическая и внешняя степени векторного пространства.
8. Теория представлений
Линейные представления группы. Неприводимые и вполне приводимые представления. Операции с представлениями. Лемма Шура. Теорема Машке.
9. Представления простейших групп.
10. Гомоморфизмы представлений, регулярное представление. Групповая алгебра, её строение. Формула Бернсайда.
11. Характеристики представлений, соотношения ортогональности. Число неприводимых представлений над алгебраически замкнутым полем.
12. Теория полей
Расширения полей. Алгебраичность элемента. Конечные, алгебраические расширения. Степень расширения. Башня расширений.
13. Минимальный многочлен элемента, присоединения корня. Поле разложения многочлена. Сепарабельные расширения.
14. Ассоциативные алгебры
Алгебры над полем. Кватернионы, алгебры с делением, теорема Фробениуса.
15. Простые и полупростые модули. Полупростые алгебры. Критерии полупростоты.

3. Образовательные технологии

В качестве образовательных технологий применяются активные образовательные технологии (лекции), а также самостоятельная работа аспирантов под контролем научного руководителя.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины



Задачи с листками находятся тут:

<https://www.mccme.ru/iium/f17/f17-algebra1.html>

Самостоятельная работа подкрепляется учебно-методическим и информационным обеспечением, включающим учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций. Основные виды самостоятельной работы: в читальном зале библиотеки, в домашних условиях с доступом к ресурсам Интернет.

Контроль знаний осуществляется в процессе индивидуальной работы с научным руководителем, а также в процессе участия в аудиторных занятиях (доклады, обсуждения).

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Литература:

- 1) Э. Б. Винберг «Курс алгебры» М.: МЦНМО, 2011. — 592 с. — ISBN 978-5-94057-685-3 — АвтоOCR.
- 2) А. И. Кострикин «Введение в алгебру» (части 1,2,3) Учебник для вузов. М.: Физико-математическая литература, 2000
- 3) И. М. Гельфанд «Линейная алгебра» М.: Добросвет, МЦНМО, 1998
- 4) А. И. Кострикин, Ю. И. Манин «Линейная алгебра и геометрия» Учебное пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986
- 5) С. Ленг «Алгебра» М.: Наука, 1965. - 431 с.

Автор: А.Д. Елагин к.ф.-м.н



Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Программа дисциплины ОД.А.04 «Гомологическая алгебра»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича
Российской академии наук
ИППИ РАН**

Рабочая программа дисциплины

ОД.А.04 «Гомологическая алгебра»
Специальность 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
аспирантура

Разработчик программы:
К.ф.-м.н.А.Д.Елагин

Одобрена на заседании УС
«*Вз*» *сентябрь* 2018 г.

Председатель УС

В.И.Венец

(подпись)



Москва,
2018 г.



Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения аспиранта и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа ОД.А.04 «Гомологическая алгебра» предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину, аспирантов для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- ФГОС ВО по направлению 01.06.01 «Математика и механика» для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».
- Учебным планом института по образовательной программе для специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Полугодовой курс представляет собой введение в гомологическую алгебру, производные и триангулированные категории. В основном, он следует книге С.И.Гельфанда и Ю.И.Манина «Методы гомологической алгебры». Он состоит из двух частей, первая из них - элементарное введение в основные понятия классической гомологической алгебры – комплексы, когомологии, резольвенты, точные функторы, функторы Ext и Tor. Для понимания этой части достаточно знакомства с основными понятиями алгебры в размере любого начального курса (многочлены нескольких переменных, линейная алгебра, кольца, модули, гомоморфизмы). Также будет полезно знакомство идеями дифференциальной или алгебраической геометрии. Во второй части обсуждаются основы теории категорий, абелевы категории, производные категории от абелевых, производные функторы, абстрактные триангулированные категории, локализация категорий и функторов. Эта часть не требует предварительных знаний, отличных от первой части курса, но более насыщена и предполагает готовность слушателей помимо лекций работать самостоятельно. В целом, курс носит вводный, ознакомительный характер: в нём затрагивается довольно много тем, но большинство из них систематически не изучаются. Предполагается, что курс станет стимулом для последующего изучения гомологической алгебры и производных категорий и поможет сориентироваться в них.

2. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 час.).

2.1. Структура дисциплины

| № п/п | Наименование дисциплины | Объем учебной работы (в часах) | | | | | | Вид итогового контроля | |
|-------|-------------------------|--------------------------------|--------------|---------------|------|-------|-----|------------------------|-------------|
| | | Всего | Всего аудит. | Из аудиторных | | | | | Сам. работа |
| | | | | Лекц. | Лаб. | Прак. | КСР | | |
| 1. | Гомологическая алгебра | 108 | 36 | 18 | | 18 | | 72 | экзамен |



2.2. Содержание курса:

1. Комплексы и когомологии.

Комплексы. Морфизмы комплексов. Точные последовательности. Длинная точная последовательность когомологий. Гомотопии. Конус морфизма. Примеры вычисления когомологий.

2. Категории и функторы.

Представимые функторы, лемма Йонеды. Точные функторы, точные слева и справа функторы. Функторы гомоморфизмов и тензорного умножения. Проективные и инъективные объекты.

3. Классические производные функторы.

Проективные и инъективные резольвенты, их свойства. Производные функторы – явная конструкция. Длинная точная последовательность производных функторов. Дельта-функтор. Аксиоматическое определение производных функторов, его равносильность явному. Вычисление производных функторов при помощи ациклических резольвент.

4. Примеры и применения производных функторов.

Проективные и инъективные модули над кольцом, их свойства. Функторы Ext и Tor. Проективная и инъективная размерность модуля. Глобальная размерность кольца. Кольца глобальной размерности 0 и 1. Сравнение комплекса и его когомологий. Эквивалентность определений Ext и Tor по двум аргументам. Ext¹ и расширения. Tor и кручение. Tor и кратность пересечения.

5. Абелевы категории.

Аддитивные категории и функторы. Ядра и коядра. Абелевы категории, точные функторы. Сопряжённые функторы. Эквивалентности и строго полные функторы. Расслоенные и ко-расслоенные произведения. Диаграммный поиск и язык стрелок.

6. Производная категория.

Категория комплексов. Гомотопическая категория комплексов. Квазиизоморфизмы. Универсальное свойство. Локализация категорий. Арифметика дробей. Условия Ore. Категория домиков. Проверка условий Ore для гомотопической категории. Производная категория как локализация гомотопической.

7. Триангулированные категории.

Выделенные треугольники в гомотопической категории, их свойства. Длинные точные последовательности в когомологиях. Аксиомы триангулированной категории и их следствия. Проверка аксиом для гомотопической категории. Точные функторы. Локализация триангулированных категорий. Производная категория триангулированна.

8. Морфизмы в производной категории.

Локализация и факторизация триангулированных категорий. Ациклические комплексы. Проективные и инъективные резольвенты как сопряжённые функторы к проекции. Полуортогональные разложения. Случай неограниченных производных категорий.

Абелева категория как категория 0-комплексов. Группы Ext как морфизмы между i -комплексами. Ext по Йонедде. Умножение в Ext.

9. Производный функтор.

Определения производного функтора – явное и аксиоматическое. Локализация функтора, условия её существования. Построение производного функтора с помощью проективных и инъективных резольвент. Построение производного функтора с помощью ациклических резольвент. Связь с классическими производными функторами. Производный функтор композиции.

10. Спектральные последовательности.

Определение: набор данных. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Спектральная последовательность двойного комплекса. Резольвента Картана-Эйленберга. Спектральная последовательность композиции производных функторов. Примеры спектральных последовательностей.



3. Образовательные технологии

В качестве образовательных технологий применяются активные образовательные технологии (лекции), а также самостоятельная работа аспирантов под контролем научного руководителя.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Конспекты лекций и экзаменационные задания находятся тут:
<https://www.mccme.ru/iium/s16/s16-elagin.html>

Самостоятельная работа подкрепляется учебно-методическим и информационным обеспечением, включающим учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций. Основные виды самостоятельной работы: в читальном зале библиотеки, в домашних условиях с доступом к ресурсам Интернет.

Контроль знаний осуществляется в процессе индивидуальной работы с научным руководителем, а также в процессе участия в аудиторных занятиях (доклады, обсуждения).

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Литература:

С.И.Гельфанд, Ю.И.Манин «Методы гомологической алгебры. Введение в когомологии и производные категории» М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат, лит., том 1, 1988.

Автор: А.Д. Елагин к.ф.-м.н