ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 430, № 5, с. 596–599

МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ v-ДОСТАТОЧНОСТИ СТРУЙ В КЛАССАХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОЙ ГЛАДКОСТИ

© 2010 г. В. С. Козякин

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 14.09.2009 г.

Поступило 15.09.2009 г.

Многие задачи нелинейного анализа могут быть сведены к исследованию структуры множества решений недоопределенных нелинейных уравнений

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

в которых $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \ge m$ и $f(0) = 0$. К сожалению, исследование решений нелинейных уравнений даже в малой окрестности нулевого решения часто оказывается достаточно сложным, и поэтому соответствующие уравнения приходится каким-либо способом упрощать. Одним из наиболее распространенных способов такого упрощения является так называемое "усечение" уравнения (1). Формально, для C^k-гладкого отображения f под r-усечением при $r \le k$ понимается его отрезок разложения Тейлора в нуле $f^{(r)}(x)$, в котором удержаны только слагаемые степеней, не превосходящих r. Переход к усеченным уравнениям аналогичен анализу устойчивости по первому приближению, анализу бифуркаций переходом к линеаризованным уравнениям и т.п.

Простые примеры показывают, что множества решений уравнения (1) и усеченного уравнения

$$f^{(r)}(x) = 0 \tag{2}$$

могут оказаться топологически различными. Тогда естественно возникает вопрос о том, при каких условиях множества решений уравнений (1) и (2) локально топологически эквивалентны друг другу. Этот вопрос тесно связан с проблемой достаточности струй отображений. Грубо говоря, достаточность струи – это свойство, при котором все отображения с одинаковым усечением имеют одинаковую топологическую структуру.

v-ДОСТАТОЧНОСТЬ СТРУЙ ОТОБРАЖЕНИЙ

Напомним основные определения и результаты, относящиеся к теории достаточности струй. Ниже $\mathscr{E}_{[k]}(n, m)$ обозначает множество ростков отображений $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ гладкости C^k. Если $r \le k$, то $j^r f(0)$ обозначает r-струю отображения $f \in \mathscr{E}_{[k]}(n, m)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$, которую можно отождествить с полиномом $f^{(r)}$; через $J^r(n, m)$ будет обозначаться множество всех r-струй в $\mathscr{E}_{[k]}(n, m)$. Отображения $f, g \in \mathscr{E}_{[k]}(n, m)$ называются C^0-эквивалентными, если существует такой локальный гомеоморфизм $h\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, что $f = g \circ h$. Отображения $f, g \in \mathscr{E}_{[k]}(n, m)$ называются v-эквивалентными (соответственно sv-эквивалентными), если росток в нуле множества $f^{-1}(0)$ гомеоморфен ростку в нуле множества $g^{-1}(0)$ (соответственно, существует такой локальный гомеоморфизм $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, что $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$). Если $r \le k$, то r-струя $w \in J^r(n, m)$ является C^0-достаточной (соответственно v-достаточной, sv-достаточной) в $\mathscr{E}_{[k]}(n, m)$, если любые два отображения $f, g \in \mathscr{E}_{[k]}(n, m)$, для которых $j^r f(0) = j^r g(0) = w$, являются C^0-эквивалентными (соответственно v-эквивалентными, sv-эквивалентными).

Очевидно, C^0-достаточность струй влечет sv-достаточность, а последнее свойство влечет v-достаточность. На самом деле [1], v-достаточность эквивалентна sv-достаточности.

Когда речь идет о функциях ($m = 1$), критерий C^0-достаточности, называемый критерием Койпера–Куо, был получен в [2–4]. Согласно этому критерию, струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathscr{E}_{[r]}(n, 1)$ является C^0-достаточной в $\mathscr{E}_{[r]}(n, 1)$, если и только если существуют такие числа $C, \varepsilon > 0$, что

$$|\operatorname{grad} f(x)| \ge C|x|^{r-1} \tag{3}$$

при $|x| < \varepsilon$. Струя $j^r f(0)$ отображения $f \in \mathscr{E}_{[r+1]}(n, 1)$ является C^0-достаточной в $\mathscr{E}_{[r+1]}(n, 1)$, если и только если существуют такие числа $C, \delta, \varepsilon > 0$, что

$$|\operatorname{grad} f(x)| \ge C|x|^{r-\delta} \tag{4}$$

при $|x| < \varepsilon$.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской Академии наук, Москва

В [5] доказано, что условие (3) равносильно следующему условию Тома: существуют такие числа K, $\varepsilon > 0$, что

$$\sum_{i<j}\left|x_i\frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 + |f(x)|^2 \ge K|x|^{2r} \qquad (5)$$

при $|x| < \varepsilon$.

Проверка как условий Койпера–Куо (3) и (4), так и условий Тома (5), сводится к задаче оценки скорости роста полинома в окрестности его корней, которая равносильна вычислению так называемого локального показателя Лоясиевича полинома. Напомним, что согласно теореме Лоясиевича [6, 7] для любого полинома p: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющего $p(0) = 0$, существуют такие константы C, $\kappa > 0$, что $|p(x)| \ge C|x|^\kappa$ в некоторой окрестности нуля. Наименьшее κ, для которого справедлива указанная оценка, называется локальным показателем Лоясиевича для p и обозначается $\mathcal{L}_0(p)$. Если нулевой корень полинома p изолирован, то величина κ существует и рациональна [6–8]. Более того, в этом случае $\mathcal{L}_0(p) \le (d-1)^n + 1$ [9], где d обозначает степень многочлена p. Вопросу вычисления показателя Лоясиевича посвящена обширная литература, см., например, [9–11] и библиографию в этих публикациях.

В общем случае ($n \ge m$, где m произвольно) критерий v-достаточности (sv-достаточности) был получен Куо [12]. Согласно этому критерию при $n \ge m$ струя $j^r f(0)$ отображения $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathscr{E}_{[r]}(n, m)$ является v-достаточной (sv-достаточной) в $\mathscr{E}_{[r]}(n, m)$, если и только если существуют такие числа C, ε, $\sigma > 0$, что

$$\mathfrak{D}(\mathrm{grad} f_1^{(r)}(x), \mathrm{grad} f_2^{(r)}(x), \ldots, \mathrm{grad} f_m^{(r)}(x)) \ge C|x|^{r-1} \qquad (6)$$

при $x \in \mathcal{H}_r(f^{(r)}; \sigma) \cap \{|x| < \varepsilon\}$. Струя $j^r f(0)$ отображения $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathscr{E}_{[r+1]}(n, m)$ является v-достаточной (sv-достаточной) в $\mathscr{E}_{[r+1]}(n, m)$, если и только если для каждого полинома $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ степени $r + 1$, удовлетворяющего $j^r g(0) = j^r f(0)$, найдутся такие числа C, δ, ε, $\sigma > 0$ (зависящие от g), что

$$\mathfrak{D}(\mathrm{grad} f_1^{(r)}(x), \mathrm{grad} f_2^{(r)}(x), \ldots, \mathrm{grad} f_m^{(r)}(x)) \ge C|x|^{r-\delta} \qquad (7)$$

при $x \in \mathcal{H}_{r+1}(g; \sigma) \cap \{|x| < \varepsilon\}$.

В приведенной формулировке критерия Куо $\mathcal{H}_s(f; \sigma)$ обозначает так называемую рогообразную окрестность $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \sigma|x|^s\}$ множества $f^{-1}(0)$, а величина $\mathfrak{D}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ для набора векторов $v_1, v_2, \ldots, v_m$ определяется как наименьшее по $i = 1, 2, \ldots, m$ расстояние от вектора v_i до линейной оболочки V_i векторов v_j при $j \ne i$.

Проверка условий Куо (6) и (7) существенно сложнее, чем проверка условий Койпера–Куо (3), (4) или условия Тома (5). Одна из причин этого связана с тем, что функция $\mathfrak{D}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ определяется с помощью достаточно сложной формулы, работа с которой на практике весьма затруднительна. Более серьезной проблемой является то, что оценка значений функции $\mathfrak{D}$ в условиях (6) и (7) должна производиться в некоторых рогообразных окрестностях множеств $(f^{(r)})^{-1}(0)$ или $g^{-1}(0)$, которые, вообще говоря, a priori неизвестны! Наконец, в случае v-достаточности в $\mathscr{E}_{[r+1]}(n, m)$ проверку условия (7) необходимо выполнять не в какой-то одной рогообразной окрестности, а в бесконечном числе таких окрестностей, определяемых всеми возможными полиномами g степени $r + 1$, удовлетворяющими соотношению $j^r g(0) = j^r f(0)$.

Целью настоящей работы является формулировка таких аналогов условий Куо (6), (7), которые позволили бы избежать необходимости проверки каких-либо неравенств в рогообразных окрестностях a priori неизвестного множества $f^{-1}(0)$. Другой целью работы является замена функции $\mathfrak{D}$ в условиях (6), (7) чем-либо более легко вычислимым в приложениях.

КВАЛИФИЦИРОВАННАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ И ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

Введем некоторые понятия и обозначения. Через $\langle\cdot, \cdot\rangle$ будем обозначать евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ – соответствующую евклидову норму. Если $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение, то $df(x) = \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ – его производная, а $(df)^*(x)$ – матрица, сопряженная к $df(x)$, состоящая из m векторов-столбцов $\mathrm{grad} f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Каждому отображению f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и каждому целому $p \ge 1$ сопоставим две вспомогательные функции переменных $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{R}_p(f; x, y) = |f(x)|^p|y|^p + |(df)^*(x)y|^p|x|^p,$$

$$\mathcal{T}_p(f; x, y) = \mathcal{R}_p(f; x, y) - |\langle(df)^*(x)y, x\rangle|^p.$$

Отметим, что обе функции $\mathcal{R}_p(f; x, y)$ и $\mathcal{T}_p(f; x, y)$ неотрицательны и однородны по y. Они являются полиномами по x и y, если f – полином и p четное.

Положительность функции $\mathcal{R}_p(f; x, y)$ при $y \ne 0$ и малых $x \ne 0$ означает, что $|(df)^*(x)y| > 0$ при $y \ne 0$ для всех малых ненулевых решений x уравнения (1), т.е. производная отображения $f(x)$ регулярна на малых ненулевых решениях уравнения (1). Таким образом, неравенство $\mathcal{R}(f; x, y) > 0$ при x, $y \ne 0$ может трактоваться как условие регулярности малых ненулевых решений уравнения (1). Тогда неравенство

$$\mathcal{R}_p(f; x, y) \geq C|x|^{pq}|y|^p, \tag{8}$$

справедливое при некоторых C, $q > 0$ для малых x и всех y, может быть названо условием квалифицированной регулярности малых ненулевых решений уравнения (1).

Аналогично, положительность функции $\mathcal{T}_p(f; x, y)$ при $y \neq 0$ и малых $x \neq 0$ означает, что $|(df)^*(x)y| \cdot |x| > |\langle (df)^*(x)y \rangle, x|$ при $y \neq 0$ для всех малых ненулевых решений x уравнения (1). Последнее неравенство является алгебраическим выражением того факта, что множество решений уравнения (1) трансверсально всем достаточно малым сферам $|x| = \varepsilon$. А тогда неравенство

$$\mathcal{T}_p(f; x, y) \geq C|x|^{pq}|y|^p, \tag{9}$$

справедливое при некоторых C, $q > 0$ для малых x и всех y, может быть названо условием квалифицированной трансверсальности множества решений уравнения (1) малым сферам.

Согласно следующей лемме, для полиномиальных отображений f функции $\mathcal{R}_p(f;\ x,\ y)$ и $\mathcal{T}_p(f; x, y)$ в естественном смысле сравнимы при малых x.

Лемма 1. *Если отображение f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(0) = 0$, является полиномом, то для каждого натурального p найдется такое $\mu_p > 0$, что*

$$2^{1-p}\mathcal{R}_1^p(f; x, y) \leq \mathcal{R}_p(f; x, y) \leq 2\mathcal{R}_1^p(f; x, y),$$
$$\mu_p\mathcal{R}_p(f; x, y) \leq \mathcal{T}_p(f; x, y) \leq \mathcal{R}_p(f; x, y)$$

при малых x и всех y.

Если отображение f полиномиально, то множество малых ненулевых решениях уравнения (1) регулярно тогда и только тогда, когда оно трансверсально малым сферам [13]. Согласно же лемме 1 для полиномиальных отображений f множество малых ненулевых решений уравнения (1) квалифицированно регулярно (с некоторым параметром q) тогда и только тогда, когда оно квалифицированно трансверсально (с тем же самым параметром q) малым сферам. Более того, все условия (8) и (9) с одним и тем же $q > 0$, но различными p равносильны друг другу.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Струя $j^rf(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r]}(n, m)$, $n \geq m$, v-достаточна (sv-достаточна) в $\mathcal{E}_{[r]}(n, m)$, если и только если для произвольного натурального p найдется такое число $q > 0$, что*

$$\mathcal{K}(f^{(r)}; x, y) \geq q|x|^{pr}|y|^p \tag{10}$$

при малых x и всех y, где $\mathcal{K}$ – любая из функций $\mathcal{R}_p$ или $\mathcal{T}_p$.

Струя $j^rf(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$, $n \geq m$, v-достаточна (sv-достаточна) в $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, m)$, если и только если для произвольного натурального p

$$\frac{\mathcal{K}(f^{(r)}; x, y)}{|x|^{pr+p}|y|^p} \to \infty \tag{11}$$

при $x \to 0$, $x \neq 0$ равномерно по $y \neq 0$, где $\mathcal{K}$ – любая из функций $\mathcal{R}_p$ или $\mathcal{T}_p$.

Для случая $p = 2$ теорема 1 была доказана в [14; 15, гл. 8].

Стандартные рассуждения [7, 8] показывают, что (11) эквивалентно следующему условию, аналогичному (7): существуют такие числа q, $\delta > 0$, что $\mathcal{K}(f^{(r)}; x, y) \geq q\,|x|^{pr+p-\delta}|y|^p$ при малых x и всех y. Для проверки последнего неравенства можно воспользоваться техникой оценки показателей Лоясиевича, упоминавшейся выше.

Каждая из функций $\mathcal{K}(f^{(r)}; x, y)$ в теореме 1 является однородным по y полиномом переменных x и y. Это позволяет упростить формулировку теоремы 1 в случае функций ($m = 1$). Положим

$$\mathcal{R}_p^*(f^{(r)}; x) = (f^{(r)}(x))^p + \left|\mathrm{grad} f^{(r)}(x)\right|^p|x|^p,$$
$$\mathcal{T}_p^*(f^{(r)}; x) = \mathcal{R}_p^*(f^{(r)}; x) - \left|\langle \mathrm{grad} f^{(r)}(x), x\rangle\right|^p.$$

Теорема 2. *Струя $j^rf(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r]}(n,\ 1)$ v-достаточна (sv-достаточна) в $\mathcal{E}_{[r]}(n, 1)$, если и только если для произвольного натурального p найдется такое число $q > 0$, что*

$$\mathcal{K}^*(f^{(r)}; x) \geq q|x|^{pr} \tag{12}$$

при малых x, где $\mathcal{K}^*$ – любая из функций $\mathcal{R}_p^*$ или $\mathcal{T}_p^*$.

Струя $j^rf(0)$ отображения $f \in \mathcal{E}_{[r+1]}(n, 1)$ v-достаточна (sv-достаточна) в $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, 1)$, если и только если для произвольного натурального p

$$\frac{\mathcal{K}^*(f^{(r)}; x)}{|x|^{pr+p}} \to \infty \tag{13}$$

при $x \to 0$, $x \neq 0$, где $\mathcal{K}^*$ – любая из функций $\mathcal{R}_p^*$ или $\mathcal{T}_p^*$.

Для каждого аналитического ростка h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющего условию $h(0) = 0$, и каждого $0 < \theta < 1$ при всех достаточно малых x справедливо неравенство Бочнака–Лоясиевича $|\mathrm{grad}\,h(x)| \cdot |x| \geq \theta|h(x)|$ [4, Lemma 2]. Следовательно, для полинома $f^{(r)}(x)$ в теореме 2 найдется такое число $\gamma > 0$, что

$$\gamma\mathcal{R}_1^*(f^{(r)}; x) \leq \left|\mathrm{grad} f^{(r)}(x)\right| \cdot |x| \leq \mathcal{R}_1^*(f^{(r)}; x)$$

при малых x. Последнее неравенство означает, что условия (12) и (13) с функцией $\mathcal{K}^* = \mathcal{R}_1^*$ эквивалентны условиям Койпера–Куо (3) и (4). Поэтому условия (10) и (11) в теореме 1 могут трактоваться как естественное обобщение условий Койпера—Куо (3) и (4) соответственно.

Непосредственная проверка показывает, что

$$\mathcal{T}_2^*(f^{(r)};x) = \sum_{i<j}\left|x_i\frac{\partial f^{(r)}}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial f^{(r)}}{\partial x_i}\right|^2 + \left|f^{(r)}(x)\right|^2,$$

а значит условие (12) с функцией $\mathcal{K}^* = \mathcal{T}_2^*$, есть не что иное, как условие Тома (5) для отображения $f^{(r)}$. Поэтому условия (10) и (11) в теореме 1 могут трактоваться также как естественное обобщение для случая отображений ($m > 1$) условия Тома (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.5048) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10—01—00175).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trotman D.J.A., Wilson L.C.* // Proc. London Math. Soc. 3. 1999. V. 78. № 2. P. 334—368.
2. *Kuo T.C.* // Topology. 1969. V. 8. P. 167—171.
3. *Kuiper N.H.* // Ann. Math. Stud. 1972. № 69. P. 199—218.
4. *Bochnak J., Łojasiewicz S.* // Lect. Notes Math. 1971. V. 192. P. 254—261.
5. *Bekka K., Koike S.* // Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku. 1996. № 952. P. 41—49.
6. *Łojasiewicz S.* // Stud. math. 1959. V. 18. P. 87—136.
7. *Łojasiewicz S.* Introduction to Complex Analytic Geometry. Basel: Birkhäuser, 1991.
8. *Горин Е.А.* // УМН. 1961. Т. 16. № 1 (97). С. 91—118.
9. *Gwoz'dziewicz J.* // Comment. math. helv. 1999. V. 74. № 3. P. 364—375.
10. *García Barroso E., Płoski A.* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2003. V. 336. № 7. P. 585—588.
11. *Abderrahmane O.M.* // Kodai Math. J. 2005. V. 28. № 1. P. 106—110.
12. *Kuo T.C.* // Topology. 1972. V. 11. P. 115—131.
13. *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
14. *Козякин В.С.* // АиТ. 1984. № 10. С. 38—43.
15. *Бобылев Н.А., Болтянский В.Г., Всехсвятский С.Ю. и др.* Математическая теория систем. М.: Наука, 1986.