

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.14, 515.16

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

ТОПОЛОГИЯ И КОМБИНАТОРИКА ДЕЙСТВИЙ ТОРОВ

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант:
член-корреспондент РАН
БУХШТАБЕР Виктор Матвеевич

Москва — 2009

Оглавление

Введение	5
История предмета исследований, его актуальность	5
Содержание диссертации и основные результаты	9
Благодарности	16
Глава 1. Основные комбинаторные и геометрические понятия	17
1.1. Выпуклые многогранники	17
1.2. f -векторы и соотношения Дена–Соммервилля	23
1.3. Вееры	27
1.4. Симплициальные комплексы и кусочно-линейные отображения	29
1.5. Барицентрическое подразбиение	32
1.6. Двойственность Александра	34
1.7. Симплициально клеточные комплексы и симплициальные частично упорядоченные множества	39
1.8. Кубические комплексы	41
Глава 2. Кольца граней	47
2.1. Кольца граней симплициальных комплексов	48
2.2. Гомологические свойства колец граней: Тог-алгебры и числа Бетти	51
2.3. Симплициальные комплексы Коэна–Маколея	54
2.4. Горенштейновы комплексы и соотношения Дена–Соммервилля	57
2.5. Кольца граней симплициальных частично упорядоченных множеств	59
2.6. Симплициально клеточные комплексы Коэна–Маколея	63
2.7. Горенштейновы симплициально клеточные комплексы	70
2.8. Обобщенные соотношения Дена–Соммервилля	73
Глава 3. Торические многообразия	75
3.1. Классическая конструкция	75
3.2. Торические многообразия многообразия как факторпространства: конструкция Батырева–Кокса	81
3.3. Гамильтоновы действия тора и симплектическая редукция	85
3.4. Пространство орбит действия компактного тора	92
Глава 4. Квазиторические многообразия	97

4.1.	Определение и конструкция квазиторических многообразий Дэвиса–Янушкевича	97
4.2.	Полиориентации и комбинаторные квазиторические данные	100
4.3.	Канонические гладкости и стабильно комплексные структуры	104
4.4.	Весы действия тора и знаки неподвижных точек	106
4.5.	Когомологии и характеристические классы квазиторических многообразий	109
4.6.	Роды Хирцебруха квазиторических многообразий	111
4.7.	Пример: многообразии ограниченных флагов	118
4.8.	Квазиторические представители в классах кобордизмов	124
4.9.	Торические и квазиторические многообразия	136
4.10.	Башни Ботта	138
Глава 5.	Локально стандартные T -многообразия	161
5.1.	Предварительные результаты о когомологиях T -многообразий	163
5.2.	Характеристические подмногообразия	166
5.3.	Пространства орбит и многообразия с углами	169
5.4.	Кольца граней многообразий с углами	172
5.5.	Когомологии локально стандартных T -многообразий	175
5.6.	T -многообразия над гомотопическими многогранниками	182
5.7.	T -многообразия над границиклическими многообразиями с углами	188
5.8.	Графы весов	193
5.9.	Раздутия T -многообразий и T -графов	203
Глава 6.	Момент-угол-комплексы и многообразия	207
6.1.	Общая конструкция момент-угол-комплекса \mathcal{Z}_K	210
6.2.	Конструкция Бореля и пространство Дэвиса–Янушкевича	214
6.3.	Клеточное разбиение момент-угол-комплекса	219
6.4.	Кольцо когомологий момент-угол-комплекса	221
6.5.	Биградуированные числа Бетти комплекса \mathcal{Z}_K	229
6.6.	Конфигурации координатных подпространств	237
6.7.	Момент-угол-комплекс как множество Кемпфа–Несс	242
Приложение I.	Резольвенты и функтор Tor	249
Приложение II.	Регулярные последовательности и алгебры Коэна–Маколея	257
Приложение III.	Действия групп и эквивариантные когомологии	263

Приложение IV. Стабильно комплексные структуры и комплексные кобордизмы	267
Неориентированные бордизмы	267
Ориентированные и комплексные бордизмы	268
Структурные результаты	273
Мультипликативные образующие	274
Приложение V. Формальные группы и роды Хирцебруха	279
Элементы теории формальных групп	279
Формальная группа геометрических кобордизмов	280
Роды Хирцебруха	283
Инвариантные стабильно комплексные структуры	287
Приложение VI. Необходимые сведения из геометрической теории инвариантов	289
Литература	291

Введение

История предмета исследований, его актуальность

Теория действий тора имеет длинную историю развития и образует важную область алгебраической топологии. За последние 15 лет на стыке эквивариантной топологии, алгебраической и симплектической геометрии, комбинаторики, коммутативной и гомологической алгебры возникла новая область исследований — *торическая топология*, которая быстро привлекла внимание большого числа специалистов из разных областей и активно развивается в настоящее время.

В центре внимания торической топологии находятся действия тора, пространства орбит которых несут богатую комбинаторную структуру. Такие действия естественно возникают в самых различных областях, а изучение их алгебраических, комбинаторных и топологических свойств приводит к новым взаимосвязям и интересным постановкам задач. Благодаря торической топологии фундаментальные результаты ряда областей математики получили новое развитие и нашли неожиданные замечательные приложения.

Первоначальный импульс этому развитию придала *торическая геометрия* — теория *торических многообразий* в алгебраической геометрии [Хо77, Да78]. Эта теория устанавливает взаимно однозначное соответствие между алгебраическими многообразиями с действием комплексного тора, имеющим плотную орбиту, и комбинаторными объектами — *веерами*. При помощи вееров алгеброгеометрические свойства торических многообразий полностью переводятся на язык комбинаторной геометрии. Торическая геометрия предоставляет богатый источник явных примеров алгебраических многообразий и имеет богатые приложения в таких областях, как теория особенностей и математическая физика. Пространство орбит неособого проективного торического многообразия по действию компактного тора T^n представляет собой выпуклый простой многогранник P .

В симплектической геометрии, после появления теоремы выпуклости Атья–Гиймина–Стернберга [At82] и формулы Дуистермаата–Хекмана [DH82] в начале 1980-х годов, активно изучались гамильтоновы действия групп. В работе Делзанта [De88] было показано, что в случае действия тора размерности, равной половине

размерности многообразия, образ отображения моментов определяет многообразие с точностью до эквивариантного симплектоморфизма. В симплектической геометрии, как и в торической геометрии, различные геометрические конструкции имеют комбинаторную интерпретацию в терминах многогранников.

Имеется тесная взаимосвязь между алгебраическими и симплектическими многообразиями с действием тора: проективное вложение неособого торического многообразия определяет симплектическую форму и отображение моментов. Образом отображения моментов является многогранник, двойственный к вееру. Как в алгебраической, так и в симплектической ситуации, действие компактного тора локально изоморфно стандартному действию тора T^n на \mathbb{C}^n покоординатными вращениями. Факторпространство многообразия по такому действию тора представляет собой многообразие с углами, которое несёт комбинаторную структуру, отражающую структуру частично упорядоченного множества стационарных подгрупп. Это позволяет полностью восстановить многообразие и действие. Замечательно, что такой подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространства с действием тора удаётся интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически. Оказалось, что данная специфика алгебраических торических многообразий имеет чисто топологическую природу, что вызвало глубокое проникновение идей и методов торической и симплектической геометрии в алгебраическую топологию с начала 1990-х годов.

Дальнейшие исследования выявили ряд важных классов многообразий с действием тора, происхождение которых восходит к торическим или симплектическим многообразиям. Эти более общие многообразия как правило не являются алгебраическими или симплектическими, но в то же время обладают важнейшими топологическими свойствами их алгебраических или симплектических предшественников. Таким образом, была существенно расширена область приложений методов торической топологии в комбинаторике и коммутативной алгебре. Опишем некоторые из этих классов.

Подход Дэвиса–Янушкиевича [DJ91] к изучению торических многообразий с топологической точки зрения привёл к появлению *квазиторических многообразий*. Этот класс многообразий определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление T^n в комплексном пространстве \mathbb{C}^n , а пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. (Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии.) Работы Бухштабера–Рэя [BR98], [BR01] показали, что квазиторические многообразия играют важную роль в теории комплексных кобордизмов — классической области алгебраической топологии [St68]. В отличие от

торических многообразий, квазиторические многообразия могут не быть комплексными или почти комплексными, однако они всегда допускают *стабильно комплексную структуру*, которая определяется в чисто комбинаторных терминах — при помощи так называемой *характеристической функции*, сопоставляющей гиперграням многогранника примитивные векторы целочисленной решётки. Характеристическая функция играет роль веера, сопоставляемого торическому многообразию в алгебраической геометрии.

Хаттори и Масуда ввели в [НМ03] намного более широкий класс *тор-многообразий*, которые также можно рассматривать как далеко идущее обобщение торических многообразий. Тор-многообразии M представляют собой $2n$ -мерное гладкое компактное многообразие с эффективным локально стандартным действием тора T^n , множество неподвижных точек которого непусто (заметим, что оно всегда конечно). Несмотря на достаточную общность этого класса, тор-многообразия допускают комбинаторное описание, аналогичное описанию торических многообразий в терминах вееров или многогранников. Роль последних играют так называемые *мультивееры* и *мультимногогранники*.

Пространство орбит Q квазиторического или тор-многообразия является многообразием с углами, а его грани образуют относительно обратного включения симплициальное частично упорядоченное множество \mathcal{S} . В случае квазиторического многообразия последнее представляет собой множество граней симплициального комплекса \mathcal{K} , двойственного к простому многограннику Q .

Комбинаторный подход к изучению гамильтоновых действий тора привёл к понятию *ГКМ-многообразий*. Согласно [GZ99], компактное $2n$ -мерное многообразие M с эффективным действием тора T^k ($k \leq n$) называется ГКМ-многообразием, если множество неподвижных точек конечно, M обладает инвариантной почти комплексной структурой, и веса представлений тора T^k в касательных пространствах к неподвижным точкам попарно линейно независимы. Эти многообразия были названы в честь Горески, Коттвица и Макферсона, которые впервые ввели их в [GKM98]. Там же было показано, что «1-остов» такого многообразия M , т.е. множество точек, имеющих стационарную подгруппу коразмерности не больше 1, может быть описано при помощи графа с метками (Γ, α) . Этот граф, называемый *графом весов* (или *ГКМ-графом*), позволяет вычислять важные топологические инварианты многообразия M , такие как его числа Бетти или кольцо эквивариантных когомологий. Изучение таких графов приобрело самостоятельный комбинаторный интерес благодаря работам Гиллёмна–Зары [GZ99] и других. Отметим, что в топологии идея сопоставления графа с метками многообразию с действием окружности использовалась начиная с 1970-х годов, см., например, работу Мусина [Му80].

Стенли был одним из первых, кто осознал большой потенциал торических действий для комбинаторных приложений, используя его для доказательства *гипотезы Макмюллена* о числах граней симплициальных многогранников и *гипотезы о верхней границе* для триангуляций сфер. Его результаты и методы легли в основу известной монографии [St96] и предопределили дальнейшие приложения коммутативной алгебры и гомологических методов в комбинаторной геометрии.

Многие идеи Стенли находят и топологическое применение; в частности, *кольцо граней* (или *кольцо Стенли–Риснера*) $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ симплициального комплекса \mathcal{K} является важной составляющей в вычислении кольца когомологий квазиторического многообразия M . В ходе вычисления этого кольца Дэвис и Янушкевич сопоставили некоторое вспомогательное T^m -пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ каждому комплексу \mathcal{K} с t вершинами, и рассмотрели его гомотопическое факторпространство (или *конструкцию Бореля*) $DJ(\mathcal{K})$. Определение пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ идейно связано с конструкцией Винберга [Ви71] универсального пространства для групп отражений и аналогично определению *комплекса Кокстера*. В [DJ91] показано, что кольцо когомологий пространства $DJ(\mathcal{K})$ (или *эквивариантные когомологии* многообразия M) изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ для любого \mathcal{K} . Кольцо обычных когомологий $H^*(M)$ получается из $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ факторизацией по идеалу, порождённому некоторыми линейными формами, в точности как и для торических многообразий.

С появлением понятия кольца граней стало ясно, что многие тонкие комбинаторные свойства комплексов \mathcal{K} можно интерпретировать алгебраически. Изучение колец граней получило самостоятельное развитие и привело к новому классу *колец Коэна–Маколея*, имеющему геометрическую природу. В частности, возникло новое топологическое понятие *симплициального комплекса Коэна–Маколея* \mathcal{K} , для которого $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ является кольцом Коэна–Маколея. Подробное изложение этих понятий можно найти в монографии [ВН98], где также подчёркивается важность гомологического подхода. Например, в [St96] и [ВН98] рассматриваются размерности биградуированных компонент векторных пространств $\text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$, называемые *алгебраическими числами Бетти* кольца $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, для любого поля \mathbf{k} . Эти числа являются весьма тонкими инвариантами: они зависят от комбинаторики \mathcal{K} , а не только от топологии его реализации $|\mathcal{K}|$, и полностью определяют «обычные» топологические числа Бетти для $|\mathcal{K}|$. Теорема Хохстера [Ho77] выражает алгебраические числа Бетти через симплициальные когомологии полных подкомплексов в \mathcal{K} .

Более подробно ознакомиться с основными этапами развития торической топологии можно по работе [DJ91], монографии [БП04-2] и недавнему обзору Бухштабера–Рэя [BR08].

Содержание диссертации и основные результаты

Результаты диссертации опубликованы в двух монографиях [ВР02], [ББП04] и 21 работе [БП98], [БП99], [БП00-2], [БП00-3], [БП00-4], [БП04-1], [БП04-2], [МП08], [Па97], [Па98-1], [Па98-2], [Па99], [Па01], [Па08], [ВР00], [ВРР07], [ММР07], [МР06], [Ра08], [РР08], [РРВ04].

Диссертация состоит из введения, 6 глав и приложений. Главы включают разделы и подразделы; все главы и большинство разделов содержат отдельные введения. Объём диссертации — 250 стр., объём приложений — 50 стр., список литературы включает 104 наименования.

Глава 1 носит вводный характер и содержит описание используемых в диссертации комбинаторных понятий — многогранников, вееров, симплициальных и кубических комплексов, симплициально клеточных комплексов и симплициальных частично упорядоченных множеств. Новой здесь является лишь комбинаторная интерпретация двойственности Александера в разделе 1.6 и её обобщение — двойственность между когомологиями полных подкомплексов и гомологиями линков (предложение 1.6.12). Этот результат находит приложение в разделе 6.6 при описании когомологий дополнений конфигураций подпространств.

Отметим также раздел 1.8, в котором описаны канонические кубические разбиения простых многогранников и симплициальных комплексов. Эти конструкции не являются принципиально новыми; их различные версии неоднократно появлялись в литературе и скорее являются частью математического фольклора. Наше изложение направлено на приложения этих кубических разбиений в конструкциях момент-угол-комплексов и многообразий в главе 6.

Глава 2 посвящена кольцам граней (также известным по названием *колец Стенли–Риснера*) — одному из основных алгебраических инструментов торической топологии. В первых двух разделах вводятся определения колец граней и их алгебраических чисел Бетти; особое внимание здесь уделяется функториальным свойствам этих инвариантов, которые играют важную роль в топологических приложениях. Разделы 2.3 и 2.4 посвящены важным классам комплексов Коэна–Маколея и Горенштейна. Эта первая часть главы также носит вводный характер и содержит описание известных конструкций и результатов.

Во второй части главы 2 изучаются симплициально клеточные комплексы \mathcal{S} (или симплициальные частично упорядоченные множества) и их кольца граней. Среди новых результатов здесь отметим характеризацию симплициально клеточных комплексов Коэна–Маколея в терминах их колец граней (теорема 2.6.9). Это даёт полный ответ на вопрос, поставленный в работе Стенли [St91].

Другим новым результатом главы 2 являются обобщённые соотношения Дена–Соммервилля (см. раздел 2.8) для симплицально клеточных комплексов. Эти соотношения обобщают соотношения Дена–Соммервилля для эйлеровых частично упорядоченных множеств [St86, (3.40)]. Важнейшим частным случаем являются соотношения для симплицально клеточных разбиений многообразий, которые были впервые получены в [БП00-2] и [БП04-1].

Результаты о симплицально клеточных комплексах, полученные в главе 2, получают приложения и дальнейшее развитие в главе 5 при изучении локально стандартных действий тора.

В главе 3 описываются различные подходы к определению алгебраических торических многообразий и приводятся результаты, которые используются в топологических приложениях.

В первом разделе мы описываем классическую конструкцию торических многообразий через вееры, и отдельно обсуждаем нормальные вееры многогранников и соответствующие им проективные многообразия. Во втором разделе обсуждается конструкция Батырева–Кокса торических многообразий как факторпространств дополнений конфигураций координатных подпространств в \mathbb{C}^m по действию подгрупп алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^m$. В разделе 3.3 обсуждается конструкция неособых проективных торических многообразий при помощи симплектической редукции — как факторпространств поверхности уровня отображения моментов для гамильтоновых действий торических подгрупп в T^m на \mathbb{C}^m . Новым здесь является подраздел 3.3.2, где получено общее описание поверхности уровня отображения моментов как невырожденного пересечения вещественных квадрик в \mathbb{C}^m . Этот подход приводит к одной из основных конструкций момент-угол-многообразия \mathcal{Z}_P и построению на нём канонической эквивариантной гладкой структуры. В разделе 3.4 изучаются топологические свойства торических многообразий и их пространств орбит; этот раздел можно рассматривать как подготовительный для различных топологических обобщений торических многообразий в последующих двух главах.

Глава 4 посвящена квазиторическим многообразиям — одному из важнейших топологических обобщений торических многообразий, введённых в [DJ91]. В разделе 4.2 вводится набор комбинаторных данных, полностью описывающий квазиторическое многообразие. Это описание аналогично описанию проективных торических многообразий через нормальные вееры многогранников.

В разделе 4.3 на основе конструкции момент-угол-многообразия и комбинаторных данных на квазиторических многообразиях вводятся канонические эквивариантные гладкости и стабильно комплексные структуры. Конструкции этого раздела можно рассматривать как топологическое обобщение конструкции торических многообразий при помощи симплектической редукции.

В разделе 4.4 вводится понятие знака неподвижной точки действия тора на полиориентированном квазиторическом многообразии. Эти знаки определяются эквивариантной стабильно комплексной структурой и играют важную роль при вычислении инвариантов класса кобордизма квазиторических многообразий.

В разделе 4.5 дано описание кольца когомологий и характеристических классов квазиторического многообразия. Мы включили эти известные результаты для полноты изложения.

В разделе 4.6 получены формулы, вычисляющие ряд важных родов Хирцебруха квазиторических многообразий в терминах их комбинаторных данных. Эти формулы переносят на случай квазиторических многообразий известные результаты торической геометрии, опирающиеся на теорему Римана–Роха–Хирцебруха. В случае старшего числа Чженя c_n и рода Тодда полученные результаты приводят к препятствиям к существованию эквивариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии.

Раздел 4.7 играет двойную роль. Результаты и конструкции предыдущих разделов хорошо иллюстрируются на примере *многообразий ограниченных флагов*. В то же время, эти многообразия играют важнейшую роль в приложениях квазиторических многообразий в теории кобордизмов. Этим приложениям посвящён раздел 4.8. Основным результатом здесь является теорема 4.8.15 о том, что в каждом классе комплексных бордизмов содержится полиориентированное квазиторическое многообразие (с канонической эквивариантной стабильно комплексной структурой).

В разделе 4.9 подробно обсуждаются взаимосвязи между различными классами торических и квазиторических многообразий, и приводятся соответствующие примеры.

Раздел 4.10 посвящён изучению *башен Ботта* — важного класса проективных торических многообразий, представляющих собой тотальные пространства башен расслоений над CP^1 со слоями CP^1 . Многогранник в пространстве орбит башни Ботта по действию тора комбинаторно эквивалентен кубу (размерности, равной высоте башни). Мы показываем, что квазиторическое многообразие над кубом с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками является башней Ботта (действие группы называется полусвободным, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек). Затем мы показываем, что такая башня Ботта топологически тривиальна, т.е. гомеоморфна произведению 2-мерных сфер. Это обобщает недавний результат Ильинского [Ил06], согласно которому неособое компактное торическое многообразие с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками гомеоморфно произведению 2-мерных сфер, и является дальнейшим продвижением в проблеме Хаттори о полусвободных действиях окружности. Кроме того, мы

показываем, что если кольцо когомологий квазиторического многообразия (или башни Ботта) изоморфно кольцу когомологий произведения 2-мерных сфер, то само многообразие гомеоморфно такому произведению.

В главе 5 изучаются общие локально стандартные действия тора T на многообразиях M . В отличие от квазиторических многообразий, рассматриваемых в главе 4, здесь не предполагается, что пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. При этом пространство орбит является многообразием с углами, и исследование его комбинаторики является одним из основных инструментов для описания топологических свойств многообразия и действия тора.

Важную роль играет класс локально стандартных T -многообразий M , у которых когомологии обращаются в нуль в нечётных размерностях. Этот класс характеризуется тем, что эквивариантные когомологии такого многообразия являются кольцом Коэна–Маколея — свободным конечно порождённым модулем над кольцом эквивариантных когомологий точки (см. лемму 5.1.2, где это утверждение доказано для более общих действий тора). Также в разделе 5.1 доказано, что свойство обращения в нуль нечётномерных когомологий и свойство порождённости кольца когомологий двумерными классами наследуются связными компонентами множества неподвижных точек (леммы 5.1.3 и 5.1.4). В разделе 5.2 для эффективных действий тора половинной размерности введено понятие характеристического подмногообразия и полиориентации (по аналогии с квазиторическими многообразиями), получены некоторые структурные результаты о кольцах когомологий.

Собственно изучению локально стандартных действий посвящены разделы 5.3–5.7, где получен ряд результатов о взаимосвязи когомологических свойств локально стандартных T -многообразий M и комбинаторики их пространств орбит Q , которые являются многообразиями с углами. В разделе 5.3 вводятся понятия границиклического многообразия с углами Q (когда все грани, включая само Q , ациклически) и гомологического многогранника (когда дополнительно предполагается, что все непустые пересечения граней связны). В разделе 5.4 на основе построений раздела 2.5 вводится понятие кольца граней многообразия с углами и описываются его алгебраические свойства.

Среди основных результатов отметим следующие. Кольцо когомологий локально стандартного T -многообразия M порождается элементами степени два тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гомологическим многогранником (теорема 5.6.5). В этом случае само кольцо когомологий $H^*(M)$ описывается таким

же образом, как кольцо когомологий неособого компактного торического многообразия. Пространство орбит локально стандартного T -многообразия M с $H^{odd}(M) = 0$ не обязательно является гомологическим многогранником, как показывает простой пример действия тора на чётномерной сфере. Доказано, что $H^{odd}(M) = 0$ тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является графнеациклическим (теорема 5.7.5). При этом кольцо эквивариантных когомологий $H_T^*(M)$ оказывается изоморфным кольцу граней $\mathbb{Z}[Q]$ пространства орбит (теорема 5.5.12), имеется также описание кольца обычных когомологий $H^*(M)$ (теорема 5.5.13). Таким образом в торической топологии возникает класс колец Коэна–Маколея, более широкий, чем кольца граней многогранников или симплициальных комплексов. Отметим, что эти кольца, вообще говоря, не порождаются элементами степени два.

Комбинаторные данные, необходимые для восстановления локально стандартного n -мерного T -многообразия M с $H^{odd}(M) = 0$, можно задать при помощи регулярного n -валентного графа Γ с векторными метками на рёбрах, который мы называем T -графом. T -граф является частным случаем общего понятия *графа весов*, который сопоставляется многообразиям с действием тора в работах различных авторов, начиная с 1980-х годов. Другим важным классом графов весов являются так называемые *ГКМ-графы*, введённые в работе Горески–Котвица–Макферсона [GKM98] для формализации комбинаторных структур в пространствах орбит гамильтоновых действий тора на симплектических многообразиях. По аналогии с ГКМ-графами, в разделе 5.8 мы вводим понятие кольца эквивариантных когомологий T -графа. Каждому T -графу Γ сопоставляется симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}(\Gamma)$, и основным результатом здесь является теорема 5.8.13 о том, что кольцо эквивариантных когомологий T -графа Γ изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$. Эта теорема обобщает наше вычисление эквивариантных когомологий локально стандартных T -многообразий (заметим, что не любой T -граф реализуется действием на многообразии). В отличие от соответствующей теоремы для ГКМ-графов, наш результат даёт полное описание кольца эквивариантных когомологий образующими и соотношениями. Теорема 5.8.13 также применима к специальному подклассу *n -независимых* ГКМ-графов. Кроме того, мы даём частичную характеристику симплициальных частично упорядоченных множеств, возникающих из T -графов (теорема 5.8.15).

Последний раздел главы 5 посвящён изучению раздутий T -многообразий и T -графов. Здесь мы связываем воедино топологическую конструкцию раздутия вдоль T -инвариантного подмногообразия, геометрическую конструкцию «срезания грани» простого

многогранника и комбинаторную конструкцию звёздного подразбиения симплициального или симплициально клеточного комплекса.

Глава 6 посвящена изучению момент-угол-комплексов и многообразий, которые являются одним из основных инструментов приложений торической топологии. В разделе 6.1 мы приводим общую конструкцию момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующего симплициальному комплексу \mathcal{K} с m вершинами. Мы определяем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ как некоторое \mathbb{T}^m -инвариантное подмножество в единичном комплексном полидиске $(\mathbb{D}^2)^m \subset \mathbb{C}^m$ при помощи конструкций кубических комплексов из раздела 1.8. Наша конструкция момент-угол-комплекса, с одной стороны, обобщает понятие момент-угол-многообразия \mathcal{Z}_P , возникшего в разделе 3.3 при построении проективных торических многообразий при помощи симплектической редукции, а, с другой стороны, эквивалентна конструкции вспомогательного \mathbb{T}^m -пространства, рассматриваемого при изучении квазиторических многообразий в [DJ91]. Также в разделе 6.1 мы обсуждаем некоторые дальнейшие обобщения момент-угол-комплексов.

В разделе 6.2 изучаются гомотопические свойства момент-угол-комплексов. Наряду с \mathbb{T}^m -пространством $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, в [DJ91] было рассмотрено его гомотопическое факторпространство (конструкция Бореля) $E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, которую мы называем *пространством Дэвиса–Янушкевича* и обозначаем $DJ(\mathcal{K})$. В [DJ91] было доказано, что когомологии пространства $DJ(\mathcal{K})$ (т.е. эквивариантные когомологии момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$) изоморфны кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, что затем было использовано для вычисления кольца когомологий квазиторического многообразия. Мы показываем (в теореме 6.2.3), что пространство $DJ(\mathcal{K})$ реализуется, с точностью до гомотопической эквивалентности, в виде простого клеточного подкомплекса в стандартном клеточном разбиении классифицирующего пространства $B\mathbb{T}^m$ (которое представляет собой произведение m экземпляров $\mathbb{C}P^\infty$). Таким образом, момент-угол-комплекс представляется в виде гомотопического слоя простого вложения клеточных комплексов (следствие 6.2.4). Этот результат играет ключевую роль в дальнейшем описании гомотопических типов момент-угол-комплексов, соответствующих различным сериям симплициальных комплексов \mathcal{K} . Результат Дэвиса–Янушкевича об эквивариантных когомологиях момент-угол-комплекса также непосредственно вытекает из нашего описания $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в виде гомотопического слоя (следствие 6.2.5). Наконец, мы получаем некоторую информацию о гомотопических группах момент-угол-комплексов (предложение 6.2.7), из которой в частности вытекает, что все они являются 2-связными.

В разделе 6.3 строится каноническое клеточное разбиение момент-угол-комплексов. Соответствующий комплекс клеточных цепей приобретает вторую градуировку, и тем самым можно рассматривать биградуированные клеточные когомологии и числа

Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ момент-угол-комплексов. Доказывается, что соответствие $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ задаёт функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений. Оно также индуцирует естественное преобразование между функтором симплициальных коцепей на \mathcal{K} и функтором клеточных коцепей на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. При этом все отображения сохраняют клеточную биградуировку, так что биградуированные когомологии и числа Бетти момент-угол-комплексов также функториальны.

В разделе 6.4 даётся описание кольца когомологий момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Основным результатом здесь является теорема 6.4.6, устанавливающая изоморфизм между кольцом целочисленных когомологий момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и Тог-алгеброй симплициального комплекса \mathcal{K} . Как отмечалось в разделе 2.2, мультипликативная структура в Тог-алгебре допускает эффективное описание при помощи соответствующего комплекса Кошуля. Доказательство теоремы 6.4.6 основано на анализе биградуированных клеточных коцепей и построении специальной клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta: \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, обладающей нужными функториальными свойствами. Таким образом, алгебраические биградуированные числа Бетти кольца граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ отождествляются с топологическими биградуированными числами Бетти момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Из нашего описания когомологий комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ также вытекает теорема Хохстера [Ho77], описывающая алгебраические биградуированные числа Бетти через когомологии полных подкомплексов в \mathcal{K} ; кроме того, умножение в когомологиях момент-угол-комплекса также допускает описание через полные подкомплексы в \mathcal{K} (теорема 6.4.9).

В разделе 6.5 описываются свойства биградуированных чисел Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, как в общем случае, так и для момент-угол-комплексов, соответствующих различным специальным классам симплициальных комплексов. Доказано, что числа граней симплициального комплекса \mathcal{K} выражаются через биградуированные числа Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ (теорема 6.5.2). Если \mathcal{K} является симплициальным разбиением сферы, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является многообразием, и двойственность Пуанкаре в когомологиях $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ сохраняет биградуированную структуру в когомологиях. Это приводит к дополнительным соотношениям на числа $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ (предложение 6.5.5). В более общем случае, доказано, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является пространством с двойственностью Пуанкаре тогда и только тогда, когда \mathcal{K} является горенштейновым комплексом (теорема 6.5.7). Наконец, явно вычислены числа Бетти и умножение в когомологиях момент-угол-многообразий, соответствующих многоугольникам (теорема 6.5.7).

В разделе 6.6 доказано, что момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является деформационным ретрактом дополнения $U(\mathcal{K})$ конфигурации

комплексных координатных подпространств, соответствующей \mathcal{K} (теорема 6.6.5). В частности, пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и $U(\mathcal{K})$ гомотопически эквивалентны. Это позволяет непосредственно перенести все результаты предыдущих разделов о гомотопических свойствах и кольцах когомологий момент-угол-комплексов на дополнения комплексных координатных конфигураций. Из полученного описания кольца $H^*(U(\mathcal{K}))$ и комбинаторной двойственности Александера вытекает известная формула Горески–Макферсона для размерностей групп когомологий дополнений конфигураций (в случае координатных подпространств, см. предложение 6.6.8).

В разделе 6.7 показано, что полученные ранее свойства момент-угол-комплекса позволяют интерпретировать его как множество Кемпфа–Несс для действия алгебраического тора на алгебраическом многообразии $U(\mathcal{K})$. Классическое понятие множества Кемпфа–Несс используется в теории действий алгебраических групп на аффинных многообразиях и позволяет заменить категориальное факторпространство на факторпространство по действию максимальной компактной подгруппы. Хотя дополнение $U(\mathcal{K})$ не является аффинным многообразием (оно лишь квазиаффинно), момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \subset U(\mathcal{K})$ обладает всеми свойствами аффинных множеств Кемпфа–Несс. Это позволяет поместить наши конструкции момент-угол-комплексов в контекст теории действий алгебраических групп и геометрической теории инвариантов. В качестве иллюстрации наших методов, мы рассматриваем конкретный пример момент-угол-комплекса, рассматриваемого как множество типа Кемпфа–Несс для некоторого действия алгебраического тора. Как показывают вычисления, это множество является гладким многообразием с достаточно сложной топологией.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту члену-корреспонденту РАН Виктору Матвеевичу Бухштаберу за многолетнее плодотворное сотрудничество, поддержку и внимание к данной работе. Автор чрезвычайно признателен всем сотрудникам кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за тёплую и дружескую атмосферу, которая весьма способствовала работе над диссертацией, а также лично академику РАН С. П. Новикову, Л. А. Аланин, А. А. Гайфуллину, И. А. Дынникову и Д. В. Миллионщикову за полезные обсуждения и замечания о результатах диссертации. Автор также выражает благодарность российским и зарубежным коллегам и соавторам, среди которых стоит особо выделить И. В. Аржанцева, Н. Э. Добринскую, М. Масуду и Н. Рэя.

Основные комбинаторные и геометрические понятия

1.1. Выпуклые многогранники

Комбинаторные и геометрические аспекты теории выпуклых многогранников изложены в большом количестве учебников и монографий, среди которых мы отметим классическую монографию Грюнбаума [Gr67] и более современные лекции Циглера [Zi95]. В этом разделе мы лишь кратко изложим основные определения и конструкции, используемые в диссертации в дальнейшем.

Имеется два алгоритмически различных способа определить выпуклый многогранник в n -мерном аффинном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n со скалярным произведением (\cdot, \cdot) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. *Выпуклым многогранником* называется выпуклая оболочка конечного набора точек в некотором пространстве \mathbb{R}^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2. *Выпуклым полиэдром* называется пересечение P конечного набора полупространств в некотором \mathbb{R}^n :

$$(1.1) \quad P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i \geq 0 \quad \text{при } 1 \leq i \leq m \},$$

где $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ — некоторые векторы и $b_i \in \mathbb{R}$. Ограниченный выпуклый полиэдр называется (*выпуклым*) *многогранником*.

Два предыдущих определения приводят к одному и тому же геометрическому объекту, т.е. подмножество в \mathbb{R}^n является выпуклой оболочкой конечного набора точек тогда и только тогда, когда оно является пересечением конечного набора полупространств и ограничено. Этот классический факт доказывается во многих учебниках по многогранникам и выпуклой геометрии, см., например, [Zi95, теорема 1.1].

Размерность многогранника — это размерность его аффинной оболочки. Если не оговорено противное, мы будем предполагать, что любой n -мерный многогранник, или просто *n -многогранник*, P является подмножеством в n -мерном объемлющем подпространстве \mathbb{R}^n . Аффинная гиперплоскость H , пересекающая многогранник P , называется *несущей гиперплоскостью*, если многогранник целиком содержится в одном из двух определяемых ей замкнутых

полупространств. В этом случае пересечение $P \cap H$ называется *гранью* многогранника. Сам многогранник P также считается гранью; остальные его грани называются *собственными*. Объединение всех собственных граней называется *границей* многогранника и обозначается ∂P . Каждая грань n -многогранника в свою очередь является многогранником размерности $\leq n$. Нульмерные грани называются *вершинами*, одномерные грани — *рёбрами*, а грани коразмерности один — *гипергранями*.

Два многогранника $P_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $P_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ одной размерности называются *аффинно эквивалентными* (или *аффинно изоморфными*), если существует аффинное отображение $\mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$, устанавливающее взаимно-однозначное соответствие между точками двух многогранников. Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если имеется взаимно-однозначное соответствие между их множествами граней, сохраняющее отношение включения.

Заметим, что любые два аффинно изоморфных многогранника комбинаторно эквивалентны, но не наоборот. Грани многогранника P всех размерностей относительно вложения образуют частично упорядоченное множество. Два многогранника комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их множества граней изоморфны как частично упорядоченные множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3. Под *комбинаторным многогранником* мы будем понимать класс комбинаторно эквивалентных выпуклых многогранников.

СОГЛАШЕНИЕ. Пусть многогранник P задан как в (1.1), т.е. как пересечение полупространств. В дальнейшем мы будем предполагать, что среди неравенств $(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i \geq 0$ в этом представлении нет лишних, то есть удаление любого из неравенств в (1.1) изменяет задаваемый ими многогранник. В этом случае многогранник P имеет в точности m гиперграней F_i , $1 \leq i \leq m$, которые являются пересечениями гиперплоскостей $(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i = 0$ с P . Вектор \mathbf{a}_i ортогонален гиперграней F_i и направлен внутрь многогранника.

ПРИМЕР 1.1.4 (симплекс и куб). *Симплексом* Δ^n размерности n называется выпуклая оболочка набора из $(n + 1)$ точек в \mathbb{R}^n , не лежащих в одной аффинной гиперплоскости. Все грани n -симплекса являются симплексами размерности $\leq n$. Любые два n -симплекса аффинно эквивалентны. Пусть

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0) \quad 1 \leq k \leq n,$$

— стандартный базис в \mathbb{R}^n . *Стандартным* n -симплексом называется выпуклая оболочка концов векторов $\mathbf{0}$ и $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в \mathbb{R}^n . Эквивалентно, стандартный n -симплекс задаётся $(n + 1)$ неравенствами

$$(1.2) \quad x_i \geq 0 \quad \text{при } 1 \leq i \leq n \quad \text{и} \quad -x_1 - \dots - x_n \geq -1.$$

Правильным n -симплексом называется выпуклая оболочка концов векторов e_1, \dots, e_{n+1} в \mathbb{R}^{n+1} .

Стандартным n -кубом называется выпуклый многогранник $\mathbb{I}^n \subset \mathbb{R}^n$, задаваемый как

$$(1.3) \quad \mathbb{I}^n = [0, 1]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ при } 1 \leq i \leq n\}.$$

Эквивалентно, стандартный n -куб есть выпуклая оболочка 2^n точек $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1 для $1 \leq i \leq n$. В случаях, когда речь будет идти о комбинаторных многогранниках, мы будем называть *кубом* любой многогранник, комбинаторно эквивалентный стандартному кубу, и обозначать его I^n .

Куб \mathbb{I}^n имеет $2n$ гиперграней; обозначим через F_k^0 гипергрань, задаваемую уравнением $x_k = 0$, а через F_k^1 — гипергрань, задаваемую уравнением $x_k = 1$, для $1 \leq k \leq n$. В обозначениях из предыдущего соглашения мы имеем $F_k = F_k^0$ и $F_{n+k} = F_k^1$.

Следующая конструкция показывает, что любой выпуклый n -мерный многогранник с m гипергранями аффинно эквивалентен пересечению *положительного конуса*

$$(1.4) \quad \mathbb{R}_{\geq}^m = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m\} \subset \mathbb{R}^m$$

с некоторой n -мерной плоскостью.

КОНСТРУКЦИЯ 1.1.5. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый n -многогранник, заданный в виде (1.1). Образует $m \times n$ -матрицу A_P , строками которой являются векторы \mathbf{a}_i , записанные в стандартном базисе \mathbb{R}^n , т.е. $(A_P)_{ij} = (\mathbf{a}_i)_j$. Заметим, что матрица A_P имеет ранг n . Кроме того, положим $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m$. Тогда мы можем переписать (1.1) в виде

$$(1.5) \quad P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (A_P \mathbf{x} + \mathbf{b})_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m\},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ — столбец координат. Рассмотрим аффинное отображение

$$(1.6) \quad i_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i_P(\mathbf{x}) = A_P \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Это мономорфизм, образом которого является некоторая n -мерная плоскость в \mathbb{R}^m , и $i_P(P)$ есть пересечение этой плоскости с положительным конусом \mathbb{R}_{\geq}^m , см. (1.5). Пусть C — матрица размера $(m-n) \times m$, строки которой образуют базис в пространстве линейных зависимостей между векторами \mathbf{a}_i . Другими словами, C есть матрица ранга $(m-n)$, удовлетворяющая условию $CA_P = 0$. Тогда

$$(1.7) \quad i_P(P) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : C\mathbf{y} = C\mathbf{b}, y_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m\}.$$

Многогранники P и $i_P(P)$ аффинно эквивалентны.

ПРИМЕР 1.1.6. Рассмотрим стандартный n -симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, определяемый неравенствами (1.2). Он имеет $m = n+1$ гиперграней и может быть задан в виде (1.1) с $\mathbf{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)^t, \dots, \mathbf{a}_n =$

$(0, \dots, 0, 1)^t$, $\mathbf{a}_{n+1} = (-1, \dots, -1)^t$, $b_1 = \dots = b_n = 0$, $b_{n+1} = 1$. Мы можем положить $C = (1, \dots, 1)$ в конструкции 1.1.5. Тогда $C\mathbf{y} = y_1 + \dots + y_m$, $C\mathbf{b} = 1$, и мы имеем

$$i_{\Delta^n}(\Delta^n) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}: y_1 + \dots + y_{n+1} = 1, y_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq n\}.$$

Это — правильный n -симплекс в \mathbb{R}^{n+1} .

Два определения выпуклых многогранников приводят к двум различным понятиям многогранников *общего положения*.

Набор из $m > n$ точек \mathbb{R}^n находится в *общем положении*, если никакие $n + 1$ из них не лежат на одной аффинной гиперплоскости. Тогда, с точки зрения определения 1.1.1, выпуклый многогранник является многогранником общего положения, если он является выпуклой оболочкой набора точек в общем положении. Все собственные грани такого многогранника являются симплексами, то есть любая гипергрань имеет минимальное возможное число вершин (а именно, n). Такие многогранники называются *симплициальными*.

С другой стороны, скажем, что набор из $m > n$ гиперплоскостей $(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i = 0$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, находится в *общем положении*, если никакая точка не содержится более чем в n гиперплоскостях из этого набора. С точки зрения определения 1.1.2, выпуклый многогранник P является многогранником общего положения, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении. В каждой вершине такого многогранника P сходится в точности n гиперграней. Многогранники с таким свойством называются *простыми*. Заметим, что каждая грань простого многогранника есть снова простой многогранник.

Для любого выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ определим его *полярное множество* $P^* \subset \mathbb{R}^n$ как

$$P^* = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n: (\mathbf{u}, \mathbf{x}) \geq -1 \text{ для всех } \mathbf{x} \in P\}.$$

(Часто бывает удобно рассматривать рассматривают многогранники P , лежащие в произвольном объемлющем линейном пространстве V , не обязательно в \mathbb{R}^n . Тогда полярное множество естественно лежит в двойственном пространстве V^* .) В выпуклой геометрии хорошо известно, что полярное множество P^* является выпуклым полиэдром. Более того, если P содержит 0 в своей внутренности, то P^* является выпуклым многогранником (т.е. ограничено) и $(P^*)^* = P$, см., например, [Zi95, §2.3]. В этом случае частично упорядоченное множество граней многогранника P^* получается из множества граней P обращением отношения порядка; в частности, комбинаторный тип P^* определяется комбинаторным типом P . Тогда многогранник P^* называется *полярным* (или *двойственным*) к P . Если P — простой многогранник, то P^* — симплициальный, и наоборот.

ПРИМЕР 1.1.7. Любой многоугольник (2-многогранник) является одновременно простым и симплицальным. В размерностях больше 2 единственным многогранником, обладающим этим свойством, является симплекс. Куб является простым многогранником. Полярным многогранником для симплекса снова является симплекс. Полярный многогранник для n -куба называют *крест-многогранником*. Чтобы описать его, мы зададим куб как $[-1, 1]^n$ (стандартное представление (1.3) не годится, так как 0 не содержится во внутренности). Тогда полярное множество представляет собой выпуклую оболочку концов $2n$ векторов $\pm e_k$, $1 \leq k \leq n$. В частности, 3-мерный крест-многогранник является октаэдром.

КОНСТРУКЦИЯ 1.1.8 (произведение многогранников). Для любых двух простых многогранников P_1 и P_2 , их *произведение* $P_1 \times P_2$ снова является простым многогранником. Двойственная операция на симплицальных многогранниках может быть описана следующим образом. Пусть $S_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $S_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ — два симплицальных многогранника. Предположим, что оба многогранника содержат 0 в своих внутренностях. Тогда определим

$$S_1 \circ S_2 := \text{conv}(S_1 \times 0 \cup 0 \times S_2) \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

(здесь conv обозначает взятие выпуклой оболочки). Легко видеть, что $S_1 \circ S_2$ есть симплицальный многогранник, и для любых двух простых многогранников P_1, P_2 , содержащих 0 в своих внутренностях, имеет место равенство

$$P_1^* \circ P_2^* = (P_1 \times P_2)^*.$$

КОНСТРУКЦИЯ 1.1.9 (связная сумма). Пусть P и Q — два n -мерных простых многогранника с выделенными вершинами v и w соответственно. Неформально, *связная сумма* $P \#_{v,w} Q$ многогранника P в v с многогранником Q в w получается следующим образом. «Срежем» вершину v у многогранника P и w у Q , затем, после подходящего проективного преобразования мы можем «приклеить» оставшуюся часть P к оставшейся части Q вдоль вновь образованных граней-симплексов. Результат этой операции и есть $P \#_{v,w} Q$. Ниже мы введем строгое определение, следуя [BR01, §6].

Вначале введем n -мерный полиэдр Γ , получаемый как произведение стандартного $(n-1)$ -симплекса Δ^{n-1} в подпространстве $\{\mathbf{x} : x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ и первой координатной оси. Гиперграни G_r , $1 \leq r \leq n$, полиэдра Γ имеют вид $\mathbb{R} \times D_r$, где D_r — гиперграни симплекса Δ^{n-1} . Полиэдр Γ и все его гиперграни G_r разделены на две части, положительную и отрицательную, в зависимости от знака координаты x_1 .

Обозначим гиперграни многогранника P , сходящиеся в вершине v , через E_1, \dots, E_n , а гиперграни многогранника Q , сходящиеся в

w , через F_1, \dots, F_n (заметим, что тем самым мы также зафиксировали порядок этих гиперграней). Обозначим дополнительные множества гиперграней через \mathcal{C}_v и \mathcal{C}_w соответственно; таким образом, гиперграни из \mathcal{C}_v не содержат v , а гиперграни из \mathcal{C}_w не содержат w .

Выберем теперь два проективных преобразования φ_P и φ_Q пространства \mathbb{R}^n , которые переводят вершины v и w соответственно в бесконечно удалённую точку на оси x_1 . Мы также потребуем, чтобы преобразование φ_P отображало P внутрь полиэдра Γ и удовлетворяло двум условиям: во-первых, гиперплоскость, содержащая гипергрань E_r , переходит в гиперплоскость, содержащую G_r , для любого $r = 1, \dots, n$, и, во-вторых, образы гиперплоскостей, содержащих гиперграни из множества \mathcal{C}_v , пересекают полиэдр Γ в его отрицательной части. Аналогично, преобразование φ_Q переводит гиперплоскость, содержащую гипергрань F_r , в гиперплоскость, содержащую гипергрань G_r , для любого $r = 1, \dots, n$, но образы гиперплоскостей, содержащих гиперграни из \mathcal{C}_w , пересекают полиэдр Γ в его положительной части. Определим теперь *связную сумму* $P \#_{v,w} Q$ многогранника P в вершине v с многогранником Q в w как простой многогранник, ограничиваемый образами гиперплоскостей, соответствующих гиперграням из \mathcal{C}_v и \mathcal{C}_w , и n гиперплоскостями, содержащими гиперграни G_r , $1 \leq r \leq n$. Связная сумма определена лишь с точностью до комбинаторной эквивалентности; более того, она, вообще говоря, зависит от выбора вершин v и w и от упорядочивания гиперграней E_r и F_r . Если этот выбор определяется контекстом, или же если для данных P и Q результат не зависит от этого выбора, то мы будем использовать сокращённое обозначение $P \# Q$. Таким образом, операция взятия связной суммы простых многогранников даёт новый простой многогранник.

ПРИМЕР 1.1.10. 1. Пусть P есть m_1 -угольник, а Q есть m_2 -угольник. Тогда $P \# Q$ есть $(m_1 + m_2 - 2)$ -угольник.

2. Если P есть n -симплекс, то связная сумма $P \#_{v,w} Q$ есть результат «срезания» вершины w многогранника Q гиперплоскостью, которая отделяет w от остальных вершин.

3. Если оба многогранника P и Q являются n -симплексами, то мы имеем $P \# Q = \Delta^{n-1} \times I^1$ (произведение $(n-1)$ -симплекса и отрезка, или *призма*). Комбинаторный тип связной суммы $\Delta^n \# \Delta^n$ не зависит от выбора вершин и порядка гиперграней. У получающейся призмы $\Delta^{n-1} \times I^1$ все вершины эквивалентны, и поэтому комбинаторный тип связной суммы $\Delta^n \# \Delta^n \# \Delta^n$ также не зависит от выбора вершин и порядка гиперграней. Но уже в случае связной суммы четырёх симплексов результат зависит от выбора вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.11. Симплициальный многогранник S называется *k -смежностным*, если любые k его вершин порождают

некоторую грань. Аналогично, простой многогранник P называется *двойственно k -смежностным*, если любые k его гиперграней имеют непустое пересечение (которое в этом случае является гранью коразмерности k). Очевидно, любой симплицальный (простой) многогранник является 1-смежностным (двойственно 1-смежностным). Ниже мы покажем (см. пример 1.2.5), что если S является k -смежностным симплицальным n -многогранником и $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то S есть n -симплекс. Отсюда вытекает, что любой 2-смежностный симплицальный 3-многогранник есть симплекс. В то же время, существуют симплицальные n -многогранники с произвольным числом вершин, которые являются $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -смежностными. Такие многогранники называются просто *смежностными*. В частности, существует симплицальный 4-многогранник, отличный от 4-симплекса, любые две вершины которого соединены ребром.

ПРИМЕР 1.1.12 (смежностный 4-многогранник). Пусть $P = \Delta^2 \times \Delta^2$ — произведение двух треугольников. Тогда P есть простой многогранник, и легко видеть, что любые две его гиперграницы пересекаются по некоторой 2-границе. Таким образом, P является двойственно 2-смежностным. Полярный многогранник P^* является смежностным симплицальным 4-многогранником.

В следующем примере описывается смежностный многогранник с произвольным числом вершин.

ПРИМЕР 1.1.13 (циклические многогранники). Введем *кривую моментов* в \mathbb{R}^n как

$$\mathbf{x}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) = (t, t^2, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Определим *циклический многогранник* $C^n(t_1, \dots, t_m)$ как выпуклую оболочку m различных точек $\mathbf{x}(t_i)$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, на кривой моментов. Из тождества для определителя Вандермонда вытекает, что никакие $(n + 1)$ точек на кривой моментов не лежат на одной аффинной гиперплоскости. Таким образом, $C^n(t_1, \dots, t_m)$ является симплицальным n -многогранником. Можно показать (см. [БП04-2, теорема 1.15]), что $C^n(t_1, \dots, t_m)$ имеет в точности m вершин $\mathbf{x}(t_i)$, комбинаторный тип циклического многогранника на зависит от выбора параметров t_1, \dots, t_m , и $C^n(t_1, \dots, t_m)$ является смежностным симплицальным n -многогранником. Мы будем обозначать комбинаторный циклический n -многогранник с m вершинами через $C^n(m)$.

1.2. f -векторы и соотношения Дена–Соммервилля

Понятие f -вектора (или вектора граней) является одним из основных в комбинаторной теории многогранников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Пусть S — симплицальный n -мерный многогранник. Обозначим через f_i число его i -мерных граней. Целочисленный вектор $\mathbf{f}(S) = (f_0, \dots, f_{n-1})$ называется f -вектором многогранника S . Для дальнейшего нам удобно также положить $f_{-1} = 1$. Введём также h -вектор многогранника S как целочисленный вектор (h_0, h_1, \dots, h_n) , определяемый из уравнения

$$(1.8) \quad h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}.$$

Для простого n -многогранника P определим его f -вектор как f -вектор полярного симплицального многогранника: $\mathbf{f}(P) := \mathbf{f}(P^*)$, и аналогично для h -вектора. Таким образом, $\mathbf{f}(P) = (f_0, \dots, f_{n-1})$, где f_i — число граней многогранника P коразмерности $(i+1)$ (т.е. размерности $(n-i-1)$). В частности, f_0 есть число гиперграней, которое мы часто будем обозначать $m(P)$ или просто m . Теперь наше соглашение $f_{-1} = 1$ оправдывается тем фактом, что сам многогранник P является гранью коразмерности 0.

По определению, f -вектор является комбинаторным инвариантом многогранника P , т.е. зависит лишь от его комбинаторного типа. Для удобства все многогранники далее в этом разделе предполагаются комбинаторными, если не оговорено противное.

Заметим, что f -вектор и h -вектор несут одну и ту же информацию о многограннике и выражаются друг через друга при помощи линейных соотношений, а именно,

$$(1.9) \quad h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_{n-i}^{n-k} f_{i-1}, \quad f_{n-1-k} = \sum_{q=k}^n C_q^k h_{n-q}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

В частности, $h_0 = 1$ и $h_n = (-1)^n (1 - f_0 + f_1 + \dots + (-1)^n f_{n-1})$. В силу теоремы Эйлера (см., например, [Br83, Теорема 16.1]),

$$(1.10) \quad f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

что эквивалентно соотношению $h_n = h_0$. В случае простых многогранников формула Эйлера допускает следующее обобщение.

ТЕОРЕМА 1.2.2 (соотношения Дена–Соммервилля). *Для любого простого (или симплицального) n -многогранника h -вектор симметричен, т.е. имеют место соотношения*

$$h_i = h_{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Имеется множество различных способов доказательства соотношений Дена–Соммервилля. Мы приводим доказательство «в духе теории Морса», взятое нами из [Br83].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2.2. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — простой многогранник. Выберем линейную функцию $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, принимающую различные значения на всех вершинах P . Для этой функции φ найдётся вектор $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{x} \rangle$. Заметим, что

вектор ν не параллелен ни одному ребру многогранника P . Теперь будем рассматривать φ как функцию высоты на P . При помощи φ превратим 1-остов многогранника P в ориентированный граф, направляя каждое ребро так, чтобы функция φ возрастала вдоль него. Для каждой вершины v многогранника P определим ее ин-

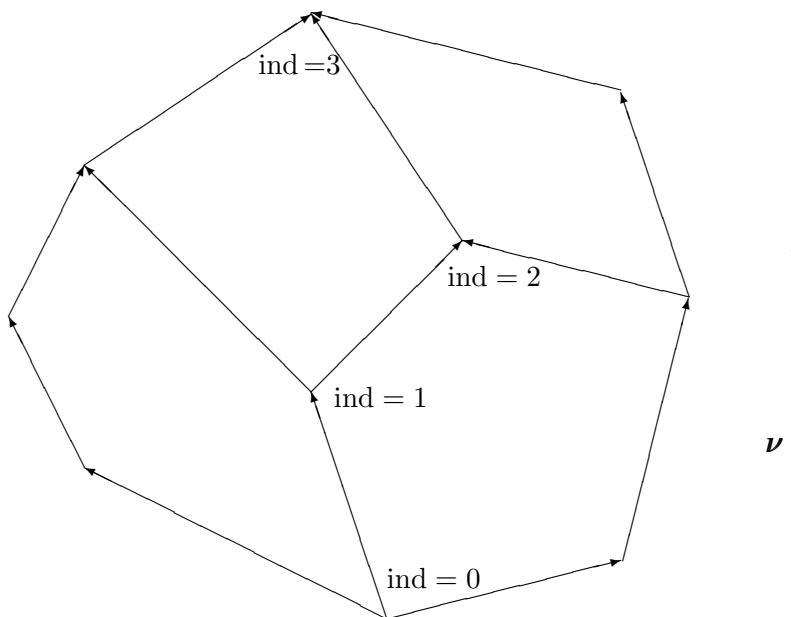


Рис. 1.1. Ориентированный 1-остов многогранника P и индексы вершин.

декс $\text{ind } v$ как число рёбер, входящих в v . Обозначим число вершин индекса i через $I_\nu(i)$. Мы утверждаем, что $I_\nu(i) = h_{n-i}$. Действительно, каждая грань P имеет единственную верхнюю вершину (максимум функции высоты φ , ограниченной на грань) и единственную нижнюю вершину (минимум φ). Пусть F^k — некоторая k -грань и v_F — её верхняя вершина. Так как многогранник P простой, в вершине v_F сходятся в точности k рёбер из грани F^k , т.е. $\text{ind } v_F \geq k$. С другой стороны, каждая вершина индекса $q \geq k$ является верхней вершиной для C_q^k граней размерности k . Отсюда следует, что f_{n-1-k} (число k -граней) может быть вычислено как

$$f_{n-1-k} = \sum_{q \geq k} C_q^k I_\nu(q).$$

Второе из тождеств (1.9) показывает, что $I_\nu(q) = h_{n-q}$, что и требовалось. В частности, число $I_\nu(q)$ не зависит от ν . С другой стороны, так как $\text{ind}_\nu(v) = n - \text{ind}_{-\nu}(v)$ для любой вершины v , мы имеем

$$h_{n-q} = I_\nu(q) = I_{-\nu}(n - q) = h_q.$$

□

В силу соотношений Дена–Соммервилля, многочлен $F(t)$ в правой части соотношения (1.8) удовлетворяет соотношению $F(t) = t^n F(1/t)$. Вычисляя коэффициент при $(t-1)^{n-k}$ в обеих частях этого равенства, мы можем переписать соотношения Дена–Соммервилля в терминах f -вектора:

$$(1.11) \quad f_{k-1} = \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} C_j^k f_{j-1}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

ПРИМЕР 1.2.3. Пусть $P_1^{n_1}$ и $P_2^{n_2}$ — два простых многогранника. Из определения f -вектора мы получаем соотношение

$$f_k(P_1 \times P_2) = \sum_{i=-1}^{n_1-1} f_i(P_1) f_{k-i-1}(P_2), \quad -1 \leq k \leq n_1 + n_2 - 1,$$

так как любая грань многогранника $P_1 \times P_2$ размерности $n_1 + n_2 - k - 1$ есть произведение некоторой грани P_1 (скажем, размерности $n_1 - i - 1$) на грань P_2 (которая в этом случае имеет размерность $n_2 - k + i$). Положим

$$(1.12) \quad h(P; t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n.$$

Тогда из предыдущей формулы и (1.8) вытекает соотношение

$$(1.13) \quad h(P_1 \times P_2; t) = h(P_1; t) h(P_2; t).$$

ПРИМЕР 1.2.4. Выразим f -вектор и h -вектор связной суммы $P \# Q$ в терминах f -векторов и h -векторов простых многогранников P и Q . Как следует из конструкции 1.1.9,

$$\begin{aligned} f_i(P \# Q) &= f_i(P) + f_i(Q) - C_n^{i+1}, \quad 0 \leq i \leq n-2; \\ f_{n-1}(P \# Q) &= f_{n-1}(P) + f_{n-1}(Q) - 2. \end{aligned}$$

Тогда из (1.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} h_0(P \# Q) &= h_n(P \# Q) = 1; \\ h_i(P \# Q) &= h_i(P) + h_i(Q), \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.2.5. Пусть S — некоторый q -смежностный симплицальный n -многогранник (см. определение 1.1.11), отличный n -симплекса. Тогда $f_{k-1}(S) = C_m^k$ при $k \leq q$. Из (1.9) получаем

$$(1.14) \quad h_k(S) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_{n-i}^{k-i} C_m^i = C_{m-n+k-1}^k, \quad k \leq q.$$

Последнее равенство получается вычислением коэффициента при t^k в обеих частях тождества

$$\frac{1}{(1+t)^{n-k+1}} (1+t)^m = (1+t)^{m-n+k-1}.$$

Мы имеем $m > n + 1$, так как S не является симплексом. Тогда из (1.14) следует, что $h_0 < h_1 < \dots < h_q$. Эти неравенства вместе с

соотношениями Дена–Соммервилля дают верхнюю оценку $q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, упомянутую в определении 1.1.11.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.6 (Кли [К164]). *Соотношения Дена–Соммервилля являются наиболее общими линейными уравнениями, которым удовлетворяют f -векторы всех простых (или симплицальных) многогранников.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [К164] это утверждение было доказано непосредственно, в терминах f -векторов. Однако, использование h -векторов существенно упрощает доказательство. Достаточно показать, что аффинная оболочка h -векторов (h_0, h_1, \dots, h_n) простых n -многогранников представляет собой $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -мерную плоскость (напомним, что $h_0 = 1$ всегда). Это можно сделать, например, указав $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ простых многогранников с аффинно независимыми h -векторами. Положим $Q_k := \Delta^k \times \Delta^{n-k}$, $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Так как $h(\Delta^k; t) = 1 + t + \dots + t^k$ (см. (1.12)), формула (1.13) даёт

$$h(Q_k; t) = \frac{1 - t^{k+1}}{1 - t} \cdot \frac{1 - t^{n-k+1}}{1 - t}.$$

Отсюда вытекает, что разность $h(Q_{k+1}; t) - h(Q_k; t)$ представляется в виде суммы t^{k+1} и членов более высокого порядка, при $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Таким образом, векторы $h(Q_k)$, $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, аффинно независимы. \square

1.3. Вееры

Хотя вееры изучались в выпуклой геометрии и ранее, особый интерес они привлекли благодаря их тесной взаимосвязи с торическими многообразиями, открытой в начале 1970-х годов. Мы подробно рассмотрим эту взаимосвязь в разделе 3.1, а здесь дадим необходимые определения и конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1 (Терминология вееров). Пусть $N \cong \mathbb{Z}^n$ — целочисленная решётка ранга n и $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ — объемлющее векторное пространство. Для каждого набора векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in N_{\mathbb{R}}$ определим порождённый ими *выпуклый многогранный конус* σ :

$$(1.15) \quad \sigma = \{ \mu_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{a}_k : \mu_i \in \mathbb{R}, \mu_i \geq 0 \}.$$

Конус σ называется *рациональным*, если его образующие $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ можно выбрать из целочисленной решётки N , и называется *сильно выпуклым*, если он не содержит ни одной прямой. Далее мы будем рассматривать только сильно выпуклые рациональные конусы σ , если не оговорено противное. Конус называется *симплицальным* (соответственно, *неособым*) если он порождается частью базиса пространства $N_{\mathbb{R}}$ (соответственно, решётки N). *Гранью* конуса σ называется пересечение $\sigma \cap H$ конуса с гиперплоскостью H , для

которой σ целиком содержится в одном из определяемых ею полупространств. Грань конуса снова является конусом. Единственная 0-мерная грань называется *вершиной*, а 1-мерные грани — *лучами* (или *рёбрами*) конуса. Если конус является неособым, то он порождается целочисленными примитивными векторами вдоль его рёбер.

Веером называется набор Σ конусов в $N_{\mathbb{R}}$ такой, что грань каждого конуса из Σ также содержится в Σ , и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Веер Σ называется *полным* если объединение всех конусов из Σ есть всё пространство $N_{\mathbb{R}}$. Веер Σ называется *симплициальным* (соответственно, *неособым*) если все его конусы являются симплициальными (соответственно, неособыми).

Пусть $N^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ и $N_{\mathbb{R}}^*$ — двойственные решётка и пространство. Определим *двойственный конус* $\check{\sigma}$ как

$$(1.16) \quad \check{\sigma} = \{\mathbf{u} \in N_{\mathbb{R}}^* : \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \in \sigma\}$$

Можно проверить, что $\check{\sigma}$ действительно является выпуклым рациональным конусом, однако $\check{\sigma}$ является строго выпуклым только если размерность конуса σ равна n .

Следующая конструкция сопоставляет веер каждому выпуклому многограннику с вершинами в точках решётки.

КОНСТРУКЦИЯ 1.3.2 (Нормальный веер). Пусть в пространстве $N_{\mathbb{R}}^* \cong \mathbb{R}^n$ задан n -многогранник P (1.1), вершины которого лежат в точках решётки N^* . Такие многогранники называются *целочисленными* (или *решёточными*). Тогда векторы $\mathbf{a}_i \in N_{\mathbb{R}}$ в (1.1), $1 \leq i \leq m$, можно выбрать целочисленными (т.е. из N) и примитивными, а значения b_i — целочисленными. Рассматривая $N_{\mathbb{R}}^*$ как евклидово пространство, мы можем считать, что вектор \mathbf{a}_i нормален к гипергранни

$$F_i = \{\mathbf{x} \in P : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i = 0\}.$$

Для каждой грани $Q \subset P$ определим конус

$$\sigma_Q = \{\mathbf{x} \in N_{\mathbb{R}} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{u}', \mathbf{x} \rangle \text{ для всех } \mathbf{u} \in Q \text{ и } \mathbf{u}' \in P\}.$$

В силу (1.16), двойственный конус $\check{\sigma}_Q$ порождён векторами $\mathbf{u}' - \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in Q$ и $\mathbf{u}' \in P$. Другими словами, $\check{\sigma}_Q$ представляет собой «многогранный угол» при грани Q , порождённый всеми векторами, соединяющими некоторую точку из Q с некоторой точкой из P . Скажем, что вектор \mathbf{a}_i *нормален* к грани Q , если $Q \subset F_i$. Тогда конус σ_Q порождается всеми нормальными векторами к грани Q .

Набор конусов $\{\sigma_Q : Q \text{ грань в } P\}$ является полным веером в $N_{\mathbb{R}}$, который обозначается Σ_P и называется *нормальным веером* многогранника P . Если 0 содержится во внутренней многогранника, то веер Σ_P состоит из конусов над гранями полярного многогранника P^* .

Нормальный веер Σ_P является симплициальным тогда и только тогда, когда многогранник P является простым. В этом случае конусы веера Σ_P порождены такими подмножествами $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}\}$, для которых пересечение $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ непусто. Наконец, Σ_P является неособым тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$ образуют базис решётки N для любого набора n гиперграней F_{i_1}, \dots, F_{i_n} , имеющих общую вершину.

Как показывают простые примеры, далеко не любой полный веер получается как нормальный веер для некоторого выпуклого многогранника (см. пример 3.1.9).

1.4. Симплициальные комплексы и кусочно-линейные отображения

Симплициальный комплекс является наиболее простой абстрактной структурой, позволяющей переводить геометрические и топологические свойства объектов на язык комбинаторики.

Пусть \mathcal{M} — конечное множество. Для каждого подмножества $\omega \subset \mathcal{M}$ мы будем обозначать его число элементов через $|\omega|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.1. (Абстрактным) *симплициальным комплексом* на множестве \mathcal{M} называется такой набор $\mathcal{K} = \{\sigma\}$ подмножеств $\sigma \subset \mathcal{M}$, что для каждого $\sigma \in \mathcal{K}$ все подмножества в σ также принадлежат \mathcal{K} . Мы также считаем, что \mathcal{K} всегда содержит пустое подмножество \emptyset . Подмножество $\sigma \in \mathcal{K}$ называется (абстрактным) *симплексом* комплекса \mathcal{K} . Одноэлементные подмножества называются *вершинами* комплекса \mathcal{K} . Если \mathcal{K} содержит все одноэлементные подмножества в \mathcal{M} , то мы будем говорить, что \mathcal{K} является симплициальным комплексом *на множестве вершин* \mathcal{M} . Определим *размерность* симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ как $\dim \sigma = |\sigma| - 1$. Размерностью симплициального комплекса называется максимальная размерность его симплексов. Симплициальный комплекс \mathcal{K} называется *чистым*, если все его максимальные симплексы имеют одну и ту же размерность. Поднабор $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, который также является симплициальным комплексом, называется *подкомплексом* в \mathcal{K} .

СОГЛАШЕНИЕ. Как правило, в наших конструкциях можно без опасений зафиксировать порядок на \mathcal{M} и отождествить \mathcal{M} с множеством индексов $[m] = \{1, \dots, m\}$. Это делает обозначения более прозрачными; однако, в некоторых случаях удобно использовать неупорядоченные множества. Далее мы будем обозначать одноэлементные подмножества $\{i\} \in [m]$ просто через i .

Ранее мы называли симплексами многогранники, являющиеся выпуклыми оболочками наборов аффинно независимых точек. Чтобы отличать их от абстрактных симплексов, в дальнейшем

мы будем иногда называть такие многогранники *геометрическими симплексами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.2. *Геометрическим симплициальным комплексом* называется набор \mathcal{P} геометрических симплексов произвольных размерностей, лежащих в некотором \mathbb{R}^n , удовлетворяющий следующим двум условиям:

- а) каждая грань симплекса из \mathcal{P} лежит в \mathcal{P} ;
- б) пересечение любых двух симплексов из \mathcal{P} является гранью каждого из них.

Симплексы из набора \mathcal{P} также называются *гранями*; как обычно, 0-мерные грани называются *вершинами*. Объединение всех симплексов из набора \mathcal{P} , рассматриваемое как подмножество в \mathbb{R}^n , называется *полиэдром*. Далее мы не будем различать геометрические симплициальные комплексы и их полиэдры. Размерностью полиэдра называется максимальная размерность его граней.

СОГЛАШЕНИЕ. Понятие полиэдра, введённое ранее в определении 1.1.2, очевидно, отличается от введённого в определении 1.4.2. Первое из значений термина «полиэдр» (т.е. «неограниченный многогранник») принято в выпуклой геометрии, в то время как второе значение (т.е. «геометрический симплициальный комплекс») используется в комбинаторной топологии. Мы как правило будем использовать термин «полиэдр» в смысле определения 1.4.2. В любом случае, из контекста будет всегда ясно, какой из «полиэдров» имеется в виду.

СОГЛАШЕНИЕ. В зависимости от контекста, мы будем обозначать через Δ^{m-1} три различных объекта: абстрактный симплициальный комплекс $2^{[m]}$, содержащий все подмножества в $[m]$; геометрический симплекс (выпуклый многогранник); а также геометрический симплициальный комплекс, состоящий из всех граней геометрического симплекса.

Пусть \mathcal{K} — некоторый симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Полиэдр \mathcal{P} называется *геометрической реализацией* комплекса \mathcal{K} , если существует взаимно однозначное соответствие между множеством $[m]$ и множеством вершин полиэдра \mathcal{P} , при котором симплексы комплекса \mathcal{K} переходят в наборы вершин симплексов полиэдра \mathcal{P} .

Если не заботиться о размерности объемлющего пространства, то геометрическую реализацию произвольного симплициального комплекса можно построить следующим образом.

КОНСТРУКЦИЯ 1.4.3. Пусть \mathcal{K} — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Рассмотрим стандартный базис e_1, \dots, e_m в \mathbb{R}^m и для каждого подмножества $\omega \subset [m]$ обозначим через Δ_ω

выпуклую оболочку концов векторов e_i с $i \in \omega$. Тогда Δ_ω является (правильным, геометрическим) симплексом. Полиэдр

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta_\sigma \subset \mathbb{R}^m$$

является геометрической реализацией комплекса \mathcal{K} . Это отражает тот факт, что любой симплициальный комплекс на множестве $[m]$ является подкомплексом в симплексе Δ^{m-1} .

ПРИМЕР 1.4.4. Пусть S — симплициальный n -многогранник. Тогда его граница ∂S является (геометрическим) симплициальным комплексом, гомеоморфным $(n-1)$ -мерной сфере.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.5. Понятия f -вектора и h -вектора $(n-1)$ -мерного симплициального комплекса \mathcal{K} вводятся аналогично тому, как это делалось для симплициальных многогранников. А именно, $\mathbf{f}(\mathcal{K}) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$, где f_i — число i -мерных симплексов в \mathcal{K} , а $\mathbf{h}(\mathcal{K}) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$, где компоненты h_i определяются формулой (1.8). Здесь мы также полагаем $f_{-1} = 1$. Если \mathcal{K} представляет собой границу симплициального n -многогранника S , то мы очевидно имеем $\mathbf{f}(\mathcal{K}) = \mathbf{f}(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.6. Пусть \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 — симплициальные комплексы на множествах $[m_1]$ и $[m_2]$ соответственно, а \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — их геометрические реализации. Говорят, что отображение множеств $\varphi: [m_1] \rightarrow [m_2]$ индуцирует *симплициальное отображение* между \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 , если $\varphi(\sigma) \in \mathcal{K}_2$ для любого $\sigma \in \mathcal{K}_1$. Симплициальное отображение φ называется *невыврожденным*, если $|\varphi(\sigma)| = |\sigma|$ для любого $\sigma \in \mathcal{K}_1$. На геометрическом уровне, симплициальное отображение продолжается линейно на гранях полиэдра \mathcal{P}_1 до отображения $\varphi: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ (которое мы для простоты обозначаем тем же символом). Симплициальное отображение, для которого существует симплициальное обратное, называется *симплициальным изоморфизмом*. Полиэдр \mathcal{P}' называется *подразбиением* полиэдра \mathcal{P} , если каждый симплекс полиэдра \mathcal{P}' содержится в некотором симплексе полиэдра \mathcal{P} и каждый симплекс из \mathcal{P} представляется в виде конечного объединения симплексов из \mathcal{P}' . *Кусочно-линейным отображением* $\varphi: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ называется отображение, которое является симплициальным отображением некоторого подразделения полиэдра \mathcal{P}_1 в некоторое подразбиение полиэдра \mathcal{P}_2 . *Кусочно-линейным гомеоморфизмом* называется кусочно-линейное отображение, для которого существует кусочно-линейное обратное. Таким образом, два полиэдра \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 являются кусочно-линейно гомеоморфными тогда и только тогда, когда существует полиэдр \mathcal{P} , изоморфный подразбиению каждого из них.

ПРИМЕР 1.4.7. Для любого симплицеального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ существует симплицеальное отображение (вложение) $\mathcal{K} \hookrightarrow \Delta^{m-1}$.

Имеется очевидный симплицеальный изоморфизм между любыми двумя геометрическими реализациями данного симплицеального комплекса \mathcal{K} . Это оправдывает наше единое обозначение $|\mathcal{K}|$ для всех геометрических реализаций комплекса \mathcal{K} . Когда это возможно, мы не будем различать абстрактные симплицеальные комплексы и их геометрические реализации. Например, мы будем говорить «симплицеальный комплекс \mathcal{K} кусочно-линейно гомеоморфен X », имея ввиду «геометрическая реализация комплекса \mathcal{K} кусочно-линейно гомеоморфна X ».

1.5. Барицентрическое подразбиение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.1. *Барицентрическим подразбиением* абстрактного симплицеального комплекса \mathcal{K} называется симплицеальный комплекс \mathcal{K}' , определяемый следующим образом. Множеством вершин комплекса \mathcal{K}' является множество $\{\sigma \in \mathcal{K} : \sigma \neq \emptyset\}$. Симплексами комплекса \mathcal{K}' являются цепи вложенных непустых симплексов комплекса \mathcal{K} . Таким образом, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\} \in \mathcal{K}'$ тогда и только тогда, когда $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots \subset \sigma_r$ в \mathcal{K} (после возможного переупорядочивания) и $\sigma_1 \neq \emptyset$.

Барицентром симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами v_1, \dots, v_{n+1} называется точка $\text{bc}(\Delta^n) = \frac{1}{n+1}(v_1 + \dots + v_{n+1}) \in \Delta^n$. *Барицентрическое подразбиение* \mathcal{P}' полиэдра \mathcal{P} определяется следующим образом. Множество вершин полиэдра \mathcal{P}' состоит из барицентров симплексов полиэдра \mathcal{P} . Набор барицентров $\{\text{bc}(\Delta_1^{i_1}), \dots, \text{bc}(\Delta_r^{i_r})\}$ порождает симплекс полиэдра \mathcal{P}' тогда и только тогда, когда $\Delta_1^{i_1} \subset \dots \subset \Delta_r^{i_r}$ в \mathcal{P} . Очевидно, $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}|'$ для любого абстрактного симплицеального комплекса \mathcal{K} .

В дальнейшем нам понадобятся явные формулы преобразования f - и h -векторов симплицеального комплекса при переходе к его барицентрическому подразбиению. Введём матрицу

$$B = (b_{ij}), \quad 0 \leq i, j \leq n-1; \quad b_{ij} = \sum_{k=0}^i (-1)^k C_{i+1}^k (i-k+1)^{j+1}.$$

Можно показать, что $b_{ij} = 0$ при $i > j$ и $b_{ii} = (i+1)!$, т.е. B — невырожденная верхнетреугольная матрица.

ЛЕММА 1.5.2. Пусть \mathcal{K}' — барицентрическое подразбиение симплицеального комплекса \mathcal{K} размерности $(n-1)$. Тогда f -векторы комплексов \mathcal{K} и \mathcal{K}' связаны соотношением:

$$f_i(\mathcal{K}') = \sum_{j=i}^{n-1} b_{ij} f_j(\mathcal{K}), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

т.е. $f(\mathcal{K}') = Bf(\mathcal{K})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим барицентрическое подразбиение j -мерного симплекса Δ^j , и пусть b'_{ij} есть число i -симплексов в $(\Delta^j)'$, не лежащих в $\partial\Delta^j$. Тогда мы имеем $f_i(\mathcal{K}') = \sum_{j=i}^{n-1} b'_{ij} f_j(\mathcal{K})$. Докажем, что $b_{ij} = b'_{ij}$. Действительно, легко видеть, что число b'_{ij} удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$b'_{ij} = (j+1)b'_{i-1,j-1} + C_{j+1}^2 b'_{i-1,j-2} + \dots + C_{j+1}^{j-i+1} b'_{i-1,i-1}.$$

Отсюда по индукции легко выводится, что b'_{ij} задаётся той же формулой, что и b_{ij} . \square

Теперь введём матрицу

$$D = (d_{pq}), \quad 0 \leq p, q \leq n; \quad d_{pq} = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{n+1}^k (p-k)^q (p-k+1)^{n-q}$$

(здесь мы полагаем $0^0 = 1$).

ЛЕММА 1.5.3. *h -векторы комплексов \mathcal{K} и \mathcal{K}' связаны соотношением:*

$$h_p(\mathcal{K}') = \sum_{q=0}^n d_{pq} h_q(\mathcal{K}), \quad p = 0, \dots, n; \quad h(\mathcal{K}') = Dh(\mathcal{K}).$$

Кроме того, матрица D невырождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это устанавливается рутинной проверкой с использованием леммы 1.5.2, соотношений (1.8) и ряда тождеств для биномиальных коэффициентов. Если к f -вектору добавить компоненту $f_{-1} = 1$ и соответствующим образом изменить матрицу B , то мы будем иметь соотношение $D = C^{-1}BC$, где C — матрица перехода от h -вектора к f -вектору (её явный вид легко устанавливается из соотношений (1.8)). Отсюда вытекает невырожденность матрицы D . \square

Таким образом, переход к барицентрическому подразбиению индуцирует линейные невырожденные преобразования B и D на f - и h -векторах симплицальных комплексов.

ПРИМЕР 1.5.4 (порядковый комплекс). Пусть \mathcal{S} — произвольное частично упорядоченное множество. Его *порядковым комплексом* $\text{ord}(\mathcal{S})$ называется набор всех цепей $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, $x_i \in \mathcal{S}$. Очевидно, что $\text{ord}(\mathcal{S})$ является симплицальным комплексом. Порядковый комплекс частично упорядоченного (относительно вложения) множества непустых симплексов произвольного симплицального комплекса \mathcal{K} есть его барицентрическое подразбиение \mathcal{K}' . Если добавить пустой симплекс, то получается конус над барицентрическим подразбиением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.5. Симплициальный комплекс \mathcal{K} называется *флаговым*, если любой набор его вершин, которые попарно соединены рёбрами, порождает симплекс. Минимальный флаговый комплекс, содержащий данный симплициальный комплекс \mathcal{K} , называется *флагозацией* комплекса \mathcal{K} и обозначается $\text{fl}(\mathcal{K})$. *Недостающей гранью* комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ называется подмножество $\omega \subset [m]$ такое, что $\omega \notin \mathcal{K}$, но любое собственное подмножество в ω является симплексом в \mathcal{K} . Тогда комплекс \mathcal{K} является флаговым тогда и только тогда, когда каждая его недостающая грань имеет две вершины.

ПРИМЕР 1.5.6. 1. Порядковый комплекс любого частично упорядоченного множества (в частности, барицентрическое подразбиение симплициального комплекса) является флаговым комплексом. С другой стороны, граница 5-угольника является флаговым комплексом, но не является порядковым комплексом.

2. Комплекс $\partial\Delta^{n-1}$ не является флаговым при $n > 2$.

1.6. Двойственность Александра

КОНСТРУКЦИЯ 1.6.1 (соединение симплициальных комплексов). Пусть \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 — симплициальные комплексы на множествах \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 соответственно. *Соединением* (или *джойном*) комплексов \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 называется симплициальный комплекс

$$\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 := \{ \sigma \subset \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 : \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2, \sigma_1 \in \mathcal{K}_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}_2 \}$$

на множестве $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

ПРИМЕР 1.6.2. 1. Если $\mathcal{K}_1 = \Delta^{m_1-1}$, $\mathcal{K}_2 = \Delta^{m_2-1}$, то $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 = \Delta^{m_1+m_2-1}$.

2. Симплициальный комплекс $\Delta^0 * \mathcal{K}$ (соединение комплекса \mathcal{K} и точки) называется *конусом* над \mathcal{K} и обозначается $\text{cone}(\mathcal{K})$.

3. Пусть $S^0 = \partial\Delta^1$ — пара точек (0-мерная сфера). Тогда $S^0 * \mathcal{K}$ называется *надстройкой* над \mathcal{K} и обозначается $\Sigma\mathcal{K}$.

Геометрические реализации комплексов $\text{cone}(\mathcal{K})$ и $\Sigma\mathcal{K}$ суть соответственно топологические конус и надстройка над $|\mathcal{K}|$.

4. Пусть P_1 и P_2 — простые многогранники. Тогда

$$\partial((P_1 \times P_2)^*) = \partial(P_1^* \circ P_2^*) = (\partial P_1^*) * (\partial P_2^*).$$

(см. конструкцию 1.1.8).

КОНСТРУКЦИЯ 1.6.3 (связная сумма симплициальных комплексов). Пусть \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 — два $(n-1)$ -мерных симплициальных комплекса. Выберем два максимальных симплекса $\sigma_1 \in \mathcal{K}_1$, $\sigma_2 \in \mathcal{K}_2$ и зафиксируем некоторое отождествление σ_1 с σ_2 . Определим *связную сумму* полиэдра $|\mathcal{K}_1|$ с полиэдром $|\mathcal{K}_2|$ относительно симплексов σ_1 и σ_2 как полиэдр $|\mathcal{K}_1 \#_{\sigma_1, \sigma_2} \mathcal{K}_2|$, получаемый склеиванием

полиэдров $|\mathcal{K}_1|$ и $|\mathcal{K}_2|$ вдоль граней σ_1 и σ_2 и последующим удалением грани σ , получаемой при отождествлении σ_1 с σ_2 . В случае, когда выбор симплексов σ_1, σ_2 определяются контекстом, мы будем использовать сокращённое обозначение $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$.

ПРИМЕР 1.6.4. Конструкция связной суммы симплицальных комплексов следующим образом связана со связной суммой простых многогранников (см. конструкцию 1.1.9). Пусть P_1 и P_2 — простые многогранники. Положим $\mathcal{K}_1 = \partial(P_1^*), \mathcal{K}_2 = \partial(P_2^*)$. Тогда

$$\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2 = \partial((P_1 \# P_2)^*).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.5. *Линк* и *звезда* симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ определяются как подкомплексы

$$\begin{aligned} \text{lk}_{\mathcal{K}} \sigma &:= \{ \tau \in \mathcal{K} : \sigma \cup \tau \in \mathcal{K}, \sigma \cap \tau = \emptyset \}; \\ \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma &:= \{ \tau \in \mathcal{K} : \sigma \cup \tau \in \mathcal{K} \}. \end{aligned}$$

Определим также подкомплекс

$$\partial \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma := \{ \tau \in \mathcal{K} : \sigma \cup \tau \in \mathcal{K}, \sigma \not\subset \tau \}.$$

Тогда мы имеем последовательность вложений

$$\text{lk}_{\mathcal{K}} \sigma \subset \partial \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma \subset \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma.$$

Для любой вершины $v \in \mathcal{K}$ подкомплекс $\text{st}_{\mathcal{K}} v$ можно отождествить с конусом над $\text{lk}_{\mathcal{K}} v = \partial \text{st}_{\mathcal{K}} v$. Полиэдр $|\text{st}_{\mathcal{K}} v|$ состоит из всех граней полиэдра $|\mathcal{K}|$, содержащих v . Мы будем опускать индекс \mathcal{K} в обозначениях линка и звезды, когда это допускается контекстом.

Подкомплексы $\text{lk} \sigma$ определяют топологическую структуру полиэдра $|\mathcal{K}|$ вблизи каждой его точки. В частности, следующее утверждение описывает «локальные гомологии» полиэдра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.6. *Пусть x — внутренняя точка некоторого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$. Тогда*

$$H_i(|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}| \setminus x) \cong \tilde{H}_{i-\dim \sigma - 1}(\text{lk} \sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$\begin{aligned} H_i(|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}| \setminus x) &\cong H_i(\text{st} \sigma, (\text{st} \sigma) \setminus x) \cong H_i(\text{st} \sigma, (\partial \sigma) * (\text{lk} \sigma)) \cong \\ &\cong \tilde{H}_{i-1}((\partial \sigma) * (\text{lk} \sigma)) \cong \tilde{H}_{i-\dim \sigma - 1}(\text{lk} \sigma). \end{aligned}$$

Здесь в первом изоморфизме мы воспользовались свойством вырезания, во втором — тем фактом, что $(\partial \sigma) * (\text{lk} \sigma)$ является деформационным ретрактом для $(\text{st} \sigma) \setminus x$, в третьем — гомологической последовательностью пары и, наконец, в четвёртом — изоморфизмом надстройки. \square

Для любого подкомплекса $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ определим его (замкнутую) комбинаторную окрестность $U_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})$ как следующий подкомплекс:

$$U_{\mathcal{K}}(\mathcal{L}) := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{L}} \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma.$$

Эквивалентно, комбинаторная окрестность $U_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})$ состоит из всех симплексов комплекса \mathcal{K} , вместе со всеми их гранями, содержащими некоторый симплекс из \mathcal{L} в качестве грани. Введём также *открытую комбинаторную окрестность* $\overset{\circ}{U}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})$ полиэдра $|\mathcal{L}|$ в $|\mathcal{K}|$ как объединение внутренних частей всех граней из $|\mathcal{L}|$, содержащих некоторый симплекс из $|\mathcal{L}|$ в качестве грани.

Пусть \mathcal{K} — симплицальный комплекс на множестве \mathcal{M} и $\omega \subset \mathcal{M}$ — подмножество. Определим *полный подкомплекс* \mathcal{K}_{ω} как

$$(1.17) \quad \mathcal{K}_{\omega} := \{\sigma \in \mathcal{K} : \sigma \subset \omega\}.$$

Положим $\text{core } \mathcal{M} = \{v \in \mathcal{M} : \text{st } v \neq \mathcal{K}\}$. Ядром комплекса \mathcal{K} называется подкомплекс $\text{core } \mathcal{K} = \mathcal{K}_{\text{core } \mathcal{M}}$. Таким образом, ядро есть максимальный подкомплекс, содержащий все вершины, звёзды которых не совпадают с \mathcal{K} . Тогда \mathcal{K} представляется в виде $\mathcal{K} = \text{core}(\mathcal{K}) * \Delta^{s-1}$, где Δ^{s-1} — симплекс на множестве вершин $\mathcal{M} \setminus \text{core } \mathcal{M}$.

ПРИМЕР 1.6.7. 1. $\text{lk}_{\mathcal{K}} \emptyset = \mathcal{K}$.

2. Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta^3$ — граница тетраэдра на четырёх вершинах 1, 2, 3, 4 и $\sigma = \{1, 2\}$. Тогда $\text{lk } \sigma$ есть подкомплекс, состоящий из двух точек 3 и 4.

3. Пусть \mathcal{K} — конус с вершиной v над некоторым комплексом \mathcal{L} . Тогда $\text{lk } v = \mathcal{L}$, $\text{st } v = \mathcal{K}$ и $\text{core } \mathcal{K} \subset \mathcal{L}$.

КОНСТРУКЦИЯ 1.6.8 (двойственный комплекс). Пусть \mathcal{K} — симплицальный комплекс на множестве \mathcal{M} , отличный от полного симплекса на \mathcal{M} . Положим

$$\widehat{\mathcal{K}} := \{\omega \subset \mathcal{M} : \mathcal{M} \setminus \omega \notin \mathcal{K}\}.$$

Тогда $\widehat{\mathcal{K}}$ есть снова симплицальный комплекс на \mathcal{M} . Он называется *двойственным комплексом* к \mathcal{K} .

Конструкция двойственного симплицального комплекса $\widehat{\mathcal{K}}$ позволяет дать следующую симплицальную интерпретацию *двойственности Александра* для канонического вложения симплицального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ в $(m-2)$ -мерную сферу $\partial\Delta^{m-1}$. Рассмотрим барицентрическое подразделение $(\partial\Delta^{m-1})'$. По определению, грани комплекса $(\partial\Delta^{m-1})'$ соответствуют цепям $\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r$ вложенных подмножеств в $[m]$, удовлетворяющим $|\sigma_1| \geq 1$ и $|\sigma_r| \leq m-1$. Обозначим соответствующие грани через $\Delta_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r}$. (Например, $\Delta_{\{i\}}$ есть вершина $v = \{i\}$ симплекса Δ^{m-1} ,

рассматриваемая как вершина комплекса $(\partial\Delta^{m-1})'$.) Тогда полиэдр

$$\bigcup_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r, \sigma_r \in \mathcal{K}} \Delta_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r}$$

является геометрической реализацией комплекса \mathcal{K}' . Положим $\hat{i} = [m] \setminus \{i\}$ и $\hat{\sigma} = [m] \setminus \sigma$ для каждого подмножества $\sigma \subset [m]$. Введём следующий подкомплекс в $(\partial\Delta^{m-1})'$:

$$D(\mathcal{K}) = \bigcup_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r, \hat{\sigma}_r \notin \mathcal{K}} \Delta_{\hat{\sigma}_r \subset \dots \subset \hat{\sigma}_1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.9. *Для любого симплицального комплекса $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$ на множестве $[m]$, полиэдр $D(\mathcal{K})$ является геометрической реализацией барицентрического подразделения двойственного комплекса:*

$$D(\mathcal{K}) = |\hat{\mathcal{K}}'|.$$

Кроме того, если барицентрическое подразделение комплекса \mathcal{K} реализовано канонически как подполиэдр в $(\partial\Delta^{m-1})'$, то

$$|\hat{\mathcal{K}}'| = (\partial\Delta^{m-1})' \setminus \overset{\circ}{U}_{(\partial\Delta^{m-1})'}(|\mathcal{K}'|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отобразим вершину $\{i\}$ комплекса $\hat{\mathcal{K}}$ в вершину \hat{i} (точнее, $\Delta_{\hat{i}}$) комплекса $(\partial\Delta^{m-1})'$, а барицентр грани $\sigma \in \hat{\mathcal{K}}$ — в вершину $\Delta_{\hat{\sigma}}$. Тогда весь комплекс $\hat{\mathcal{K}}$ перейдет в подкомплекс

$$\bigcup_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r, \sigma_r \in \hat{\mathcal{K}}} \Delta_{\hat{\sigma}_r \subset \dots \subset \hat{\sigma}_1},$$

который есть не что иное как $D(\mathcal{K})$. Второе утверждение также непосредственно вытекает из определений.

Приведём иллюстрирующий пример (рис. 1.2). Здесь \mathcal{K} есть граница 4-угольника с вершинами 1, 2, 3, 4. Тогда $\hat{\mathcal{K}}$ состоит из двух несвязных отрезков. На рисунке \mathcal{K}' и $\hat{\mathcal{K}}'$ изображены как подкомплексы в $(\partial\Delta^3)'$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.10. *Для любого симплицального комплекса $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$ на множестве $[m]$ имеет место изоморфизм*

$$\tilde{H}^j(\mathcal{K}) \cong \tilde{H}_{m-3-j}(\hat{\mathcal{K}}), \quad -1 \leq j \leq m-2,$$

Здесь мы используем соглашение $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \tilde{H}^{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется симплицальное отображение

$$\alpha: (\partial\Delta^{m-1})' \rightarrow |\mathcal{K}'| * |\hat{\mathcal{K}}'|,$$

которое строится следующим образом. Множества вершин комплексов $|\mathcal{K}'|$ и $|\hat{\mathcal{K}}'|$ не пересекаются, а их объединение есть множество всех вершин комплекса $(\partial\Delta^{m-1})'$, так что отображение α однозначно определено на вершинах. Проверим, что это — действительно симплицальное отображение. Пусть $\Delta_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r} \subset (\partial\Delta^{m-1})'$ —

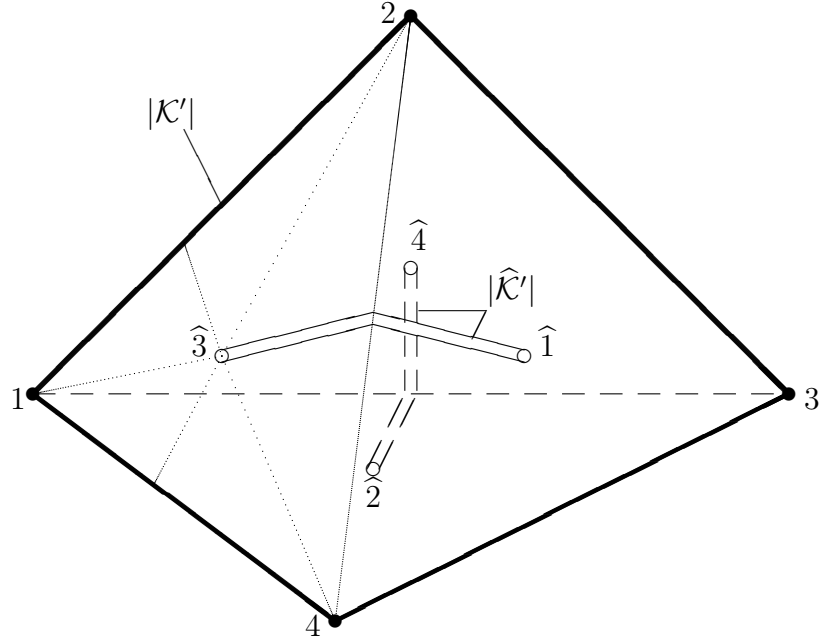


РИС. 1.2. Двойственный подкомплекс и двойственность Александера.

некоторая грань. Тогда найдется такое i , что $\sigma_i \in \mathcal{K}$, $\sigma_{i+1} \notin \mathcal{K}$. В этом случае, очевидно,

$$\alpha(\Delta_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r}) = \Delta_{\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_i} * \Delta_{\sigma_{i+1} \subset \dots \subset \sigma_r} \subset |\mathcal{K}'| * |\widehat{\mathcal{K}}'|.$$

Отображение α индуцирует отображение в когомологиях

$$\widetilde{H}^p(|\mathcal{K}'|) \otimes \widetilde{H}^q(|\widehat{\mathcal{K}}'|) \rightarrow \widetilde{H}^{p+q+1}((\partial\Delta^{m-1})') = \widetilde{H}^{p+q+1}(S^{m-2}),$$

которое является невырожденным спариванием при $p + q = m - 3$, что доказывает утверждение. \square

СЛЕДСТВИЕ 1.6.11 (двойственность Александера). *Для любого полиэдра \mathcal{P} , вложенного в сферу S^{m-2} имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}^j(\mathcal{P}) \cong \widetilde{H}_{m-3-j}(S^{m-2} \setminus \mathcal{P}), \quad -1 \leq j \leq m - 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно вытекает из предложений 1.6.9 и 1.6.10. \square

Предложение 1.6.10 допускает следующее обобщение, которое понадобится нам в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.12. *Пусть $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$ — симплициальный комплекс на $[m]$ и $\sigma \notin \mathcal{K}$, т.е. $\widehat{\sigma} = [m] \setminus \sigma \in \widehat{\mathcal{K}}$. Тогда имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}^j(\mathcal{K}_\sigma) \cong \widetilde{H}_{|\sigma|-3-j}(\text{lk}_{\widehat{\mathcal{K}}} \widehat{\sigma}),$$

где \mathcal{K}_σ — полный подкомплекс в \mathcal{K} , введенный в (1.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предложение 1.6.10 к комплексу \mathcal{K}_σ , рассматриваемому как симплициальный комплекс на множестве σ из $|\sigma|$ элементов. Из определений вытекает, что двойственный комплекс совпадает с $\text{lk}_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\sigma}$, который также можно рассматривать как симплициальный комплекс на множестве σ . \square

ПРИМЕР 1.6.13. Пусть \mathcal{K} — граница 5-угольника. Тогда $\hat{\mathcal{K}}$ является лентой Мёбиуса, триангулированной как показано на рис. 1.3.

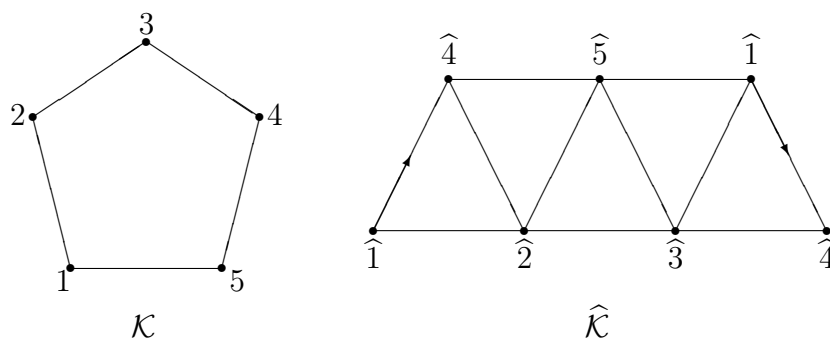


Рис. 1.3. Граница 5-угольника и её двойственный комплекс.

1.7. Симплициально клеточные комплексы и симплициальные частично упорядоченные множества

В этом разделе мы рассмотрим комбинаторные структуры более общие, чем симплициальные комплексы, — симплициальные частично упорядоченные множества, а также соответствующие им геометрические объекты — симплициально клеточные комплексы. Эти понятия будут играть важную роль в топологических приложениях, связанных с действиям тора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.1. Частично упорядоченное множество \mathcal{S} с отношением порядка \leq называется *симплициальным*, если оно содержит наименьший элемент $\hat{0}$ и для любого $\sigma \in \mathcal{S}$ отрезок

$$[\hat{0}, \sigma] = \{\tau \in \mathcal{S} : \hat{0} \leq \tau \leq \sigma\}$$

изоморфно частично упорядоченному множеству граней симплекса. Для каждого элемента $\sigma \in \mathcal{S} \setminus \hat{0}$ положим $\text{rank } \sigma = k$ если $[\hat{0}, \sigma]$ является множеством граней $(k - 1)$ -симплекса и положим $\text{rank } \hat{0} = 0$. Положим также $\dim \mathcal{S} = \max_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{rank } \sigma - 1$. Наконец, определим *вершины* множества \mathcal{S} как элементы ранга 1.

Очевидно, что множество всех симплексов некоторого симплициального комплекса является симплициальным частично упорядоченным множеством относительно включения. Однако далеко не

все симплициальные частично упорядоченные множества получают таким образом (см. пример 1.7.2 ниже).

Напомним, что *клеточным комплексом* называется хаусдорфово топологическое пространство X , представленное в виде объединения $\bigcup e_i^q$ попарно непересекающихся множеств e_i^q (называемых *клетками*) таким образом, что для каждой клетки e_i^q существует отображение q -мерного замкнутого шара D^q в X (*характеристическое отображение*), ограничение которого на внутренность шара D^q есть гомеоморфизм на e_i^q . (Здесь, как обычно, считается, что внутренность точки есть сама эта точка.) При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы.

- (C) Граница клетки e_i^q содержится в объединении конечного числа клеток e_j^r размерности $r < q$.
- (W) Подмножество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто пересечение $Y \cap \bar{e}_i^q$.

Далее в этом разделе \mathcal{S} будет обозначать симплициальное частично упорядоченное множество. Каждому элементу $\sigma \in \mathcal{S} \setminus \hat{0}$ сопоставим геометрический симплекс, множеством граней которого является $[\hat{0}, \sigma]$, и склеим все эти геометрические симплексы в соответствии с отношением порядка в \mathcal{S} . Тогда мы получим клеточный комплекс, замыкание каждой клетки которого отождествляется с симплексом с сохранением структуры граней, причём все характеристические отображения являются вложениями. Мы будем называть этот комплекс *симплициально клеточным комплексом* и обозначать его $|\mathcal{S}|$. В случае, когда \mathcal{S} является множеством симплексов некоторого симплициального комплекса \mathcal{K} , пространство $|\mathcal{S}|$ совпадает с полиэдром (геометрической реализацией) $|\mathcal{K}|$.

ПРИМЕР 1.7.2. Клеточный комплекс, получаемый отождествлением двух $(n - 1)$ -мерных симплексов по их границам (с сохранением структуры граней) является симплициально клеточным. Соответствующее симплициальное частично упорядоченное множество не является множеством граней никакого симплициального комплекса при $n > 1$.

На рис. 1.4 а)–в) изображены три клеточных разбиения окружности. Первое из них не является симплициально клеточным комплексом. Второе является симплициально клеточным комплексом, но не является симплициальным комплексом (это — в точности построенный выше в этом примере симплициально клеточный комплекс для $n = 2$). Наконец, третье разбиение является симплициальным комплексом.

Очевидным образом определяется *барицентрическое подразбиение* симплициально клеточного комплекса, которое снова является симплициально клеточным комплексом.

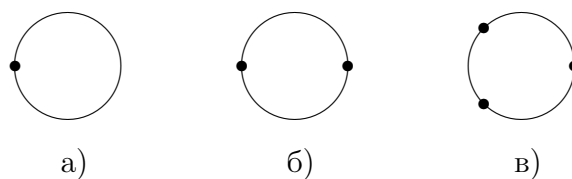


Рис. 1.4. Клеточные разбиения окружности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7.3. *Барицентрическое подразбиение симплицально клеточного комплекса \mathcal{S} является полнэдром (т.е. геометрической реализацией симплицального комплекса).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, мы можем отождествить рассматриваемое барицентрическое подразбиение с геометрической реализацией порядкового комплекса $\text{ord}(\mathcal{S} \setminus \hat{0})$ (см. определение 1.5.4) для соответствующего симплицально частично упорядоченного множества \mathcal{S} . \square

В дальнейшем мы не будем различать симплицальные частично упорядоченные множества и симплицально клеточные комплексы и будем называть порядковый комплекс $\text{ord}(\mathcal{S} \setminus \hat{0})$ *барицентрическим подразбиением* симплицального частично упорядоченного множества и обозначать его \mathcal{S}' .

1.8. Кубические комплексы

В ряде приложений, связанных с действиями тора, наряду с симплицальными и симплицально клеточными комплексами оказывается полезно рассматривать кубические комплексы. Здесь мы вводим необходимые определения и конструкции.

Как и в случае симплицальных комплексов, имеется два подхода к определению кубического комплекса, абстрактный и геометрический.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8.1. *Абстрактным кубическим комплексом* называется конечное частично упорядоченное множество (\mathcal{C}, \subset) , содержащее наименьший элемент \emptyset и удовлетворяющее следующим двум условиям:

- для любого элемента $G \in \mathcal{C}$ отрезок $[\emptyset, G]$ изоморфен частично упорядоченному множеству граней куба;
- для любых двух элементов $G_1, G_2 \in \mathcal{C}$ существует единственная точная нижняя грань, т.е. среди всех элементов $H \in \mathcal{C}$, удовлетворяющих $H \subset G_1$ и $H \subset G_2$, существует единственный максимальный элемент.

Элементы $G \in \mathcal{C}$ называются *гранями* кубического комплекса. Если $[\emptyset, G]$ является множеством граней куба \mathbb{I}^k , то говорят, что грань

G имеет размерность k . Для любых двух граней G_1, G_2 их точная нижняя грань называется *пересечением* и обозначается $G_1 \cap G_2$.

Далее мы введём понятие геометрической (вернее, топологической) реализации абстрактного кубического комплекса. Определим *топологический куб* размерности q как q -мерный шар, для которого фиксирован гомеоморфизм со стандартным кубом \mathbb{I}^q . При помощи этого гомеоморфизма топологический куб разбивается на грани, где под *гранями* мы подразумеваем гомеоморфные образы граней куба \mathbb{I}^q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8.2. *Топологическим кубическим комплексом* называется набор \mathcal{U} топологических кубов произвольных размерностей, лежащих в некотором \mathbb{R}^n и удовлетворяющий следующим двум условиям:

- а) каждая грань куба из \mathcal{U} лежит в \mathcal{U} ;
- б) пересечение любых двух кубов из \mathcal{U} является гранью каждого из них.

Кубы из набора \mathcal{U} также называются *гранями* комплекса \mathcal{U} ; как обычно, 0-мерные грани называются *вершинами*. *Размерностью* кубического комплекса \mathcal{U} называется максимальная размерность его граней.

По каждому абстрактному кубическому комплексу \mathcal{C} можно построить его *геометрическую реализацию* — топологический кубический комплекс \mathcal{U} , грани которого образуют относительно включения частично упорядоченное множество, изоморфное \mathcal{C} . Это можно сделать, например, взяв несвязное объединение топологических кубов, соответствующих отрезкам $[\emptyset, G] \subset \mathcal{C}$, и произведя отождествления граней в соответствии с отношением частичного порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение 1.8.2 аналогично определению 1.4.2 симплициального полиэдра с той разницей, что в данном случае мы реализуем абстрактные кубы не многогранниками, а топологическими кубами. Заметим, что это ослабление существенно: как показывают простые примеры [БП04-2, §5.1], далеко не всякий абстрактный кубический комплекс допускает реализацию в виде *кубического полиэдра*, т.е. путём склейки из выпуклых многогранников, комбинаторно эквивалентных кубам. В частности, не любой кубический комплекс является подкомплексом в стандартном кубе.

В дальнейшем мы не будем различать абстрактные кубические комплексы и их топологические реализации.

Далее мы приводим примеры кубических комплексов, которые будут играть ключевую роль в наших дальнейших построениях (в частности, в определении момент-угол-комплексов).

Для каждой пары $\sigma \subset \tau$ вложенных подмножеств в $[m]$ (возможно, пустых) мы определим следующую грань куба \mathbb{I}^m :

(1.18)

$$C_{\sigma\subset\tau} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{I}^m : y_i = 0 \text{ при } i \in \sigma, y_i = 1 \text{ при } i \notin \tau\}.$$

Легко видеть, что любая грань куба \mathbb{I}^m получается таким образом. Мы также положим $C_\tau := C_{\emptyset\subset\tau}$ для упрощения обозначений.

КОНСТРУКЦИЯ 1.8.3 (каноническая триангуляция для \mathbb{I}^m). Для краткости введём обозначение $\Delta = \Delta^{m-1}$. Сопоставим каждому подмножеству $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ вершину $v_\sigma := C_{\sigma\subset\sigma}$ куба \mathbb{I}^m . В явном виде, $v_\sigma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, где $\varepsilon_i = 0$ если $i \in \sigma$ и $\varepsilon_i = 1$ иначе. Рассматривая подмножества σ как вершины барицентрического подразделения симплекса Δ , мы можем продолжить соответствие $\sigma \mapsto v_\sigma$ до кусочно-линейного вложения $i_c: \Delta' \rightarrow \mathbb{I}^m$. При этом вложения вершины симплекса Δ отображаются в вершины куба \mathbb{I}^m , имеющие лишь одну нулевую координату, в то время как барицентр симплекса Δ отображается в $(0, \dots, 0) \in \mathbb{I}^m$ (см. рис. 1.5). Образ $i_c(\Delta')$ представляет собой объединение m граней куба \mathbb{I}^m , сходящихся в вершине $(0, \dots, 0)$. Для каждой пары $\sigma \subset \tau$ непустых подмножеств в $[m]$ все симплексы из Δ' вида $\sigma = \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots \subset \sigma_k = \tau$ отображаются в одну и ту же грань $C_{\sigma\subset\tau} \subset \mathbb{I}^m$. Вложение $i_c: \Delta' \rightarrow \mathbb{I}^m$ продолжается на $\text{cone}(\Delta')$ путём отображения вершины конуса в $(1, \dots, 1) \in \mathbb{I}^m$. Образом полученного вложения $\text{cone}(i_c)$ является весь куб \mathbb{I}^m . Таким образом, $\text{cone}(i_c): \text{cone}(\Delta') \rightarrow \mathbb{I}^m$ есть кусочно-линейный гомеоморфизм, линейный на симплексах из $\text{cone}(\Delta')$. Это определяет *каноническую триангуляцию куба \mathbb{I}^m* .

Таким образом, каноническая триангуляция куба \mathbb{I}^m получается из отождествления куба с конусом над барицентрическим подразбиением симплекса Δ^{m-1} .

КОНСТРУКЦИЯ 1.8.4 (разбиение простого многогранника на кубы). Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — простой n -многогранник с m гипергранями F_1, \dots, F_m . Пусть \mathcal{S} — множество барицентров граней многогранника P , включая вершины и барицентр самого многогранника. Тогда $|\mathcal{S}| = 1 + f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}$, где $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ — \mathbf{f} -вектор многогранника. Построим абстрактный кубический комплекс $\mathcal{C}(P)$ с множеством вершин \mathcal{S} , реализация которого будет задавать разбиение многогранника на кубы. Грани этого кубического комплекса суть множества барицентров всех граней многогранника P , лежащих между данными двумя гранями. Грань кубического комплекса, соответствующую паре граней G_1 и G_2 многогранника P , мы обозначим через $C_{G_1\subset G_2}$. В частности, максимальные (n -мерные) грани кубического комплекса $\mathcal{C}(P)$ соответствуют парам вида $G_1 = v, G_2 = P$, где v — вершина многогранника P . Для максимальных граней мы введём сокращённое обозначение $C_v := C_{v\subset P}$.

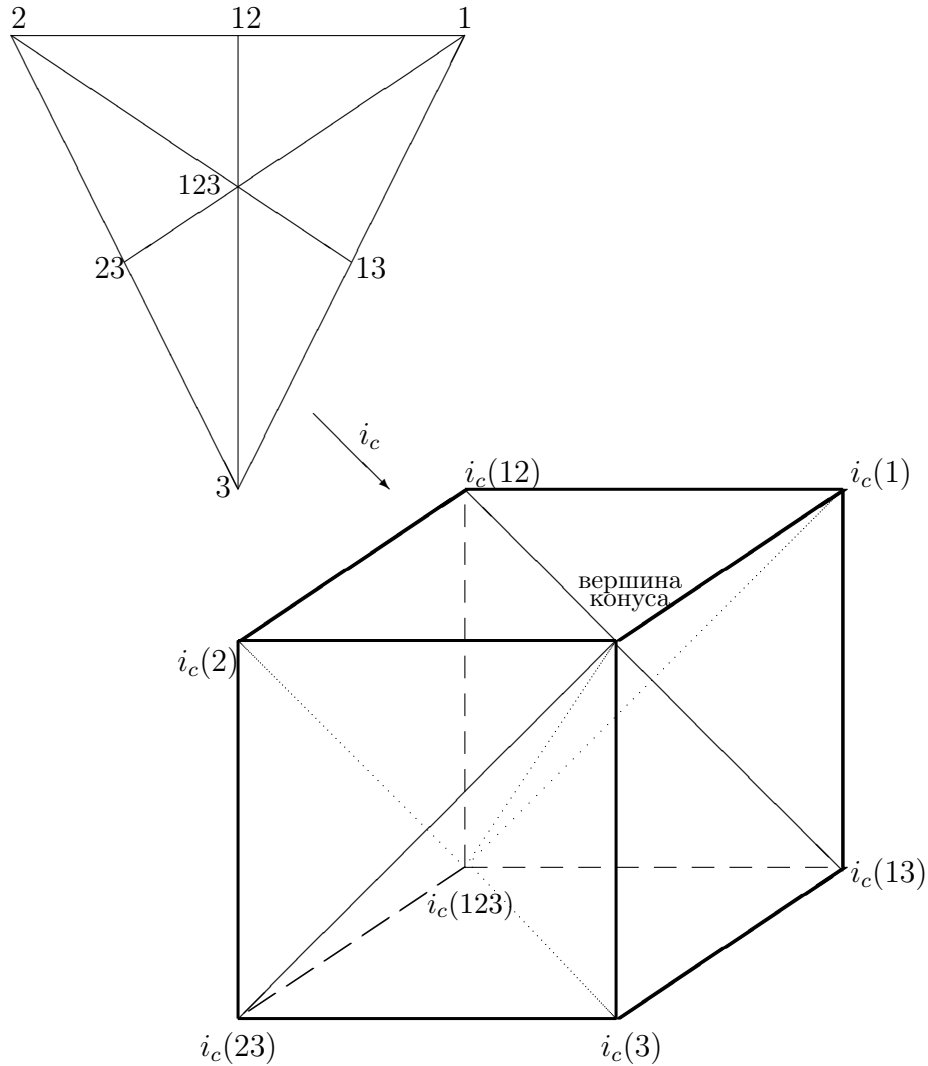


Рис. 1.5. Конус над Δ' как стандартная триангуляция куба.

Построим теперь каноническое вложение комплекса $\mathcal{C}(P)$ в \mathbb{I}^m следующим образом. Каждая $(n-k)$ -грань G многогранника P есть пересечение k гиперграней: $G = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$. Отобразим барицентр грани G , в вершину $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathbb{I}^m$, где $\varepsilon_i = 0$ если $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ и $\varepsilon_i = 1$ иначе. Тем самым мы получим отображение из множества вершин кубического комплекса $\mathcal{C}(P)$ в множество вершин куба \mathbb{I}^m . Используя каноническую триангуляцию куба (конструкция 1.8.3), мы продолжим это отображение до кусочно-линейного вложения $c_P: \mathcal{C}(P) \rightarrow \mathbb{I}^m$. Для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \in P$ имеем

$$(1.19) \quad c_P(C_v) = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{I}^m : y_j = 1 \text{ при } j \notin \{i_1, \dots, i_n\}\},$$

т.е. $c_P(C_v) = C_{\{i_1, \dots, i_n\}} \subset \mathbb{I}^m$ в обозначениях (1.18). Вложение $c_P: P \rightarrow \mathbb{I}^m$ в случае $n = 2$, $m = 3$ показано на рис. 1.6.

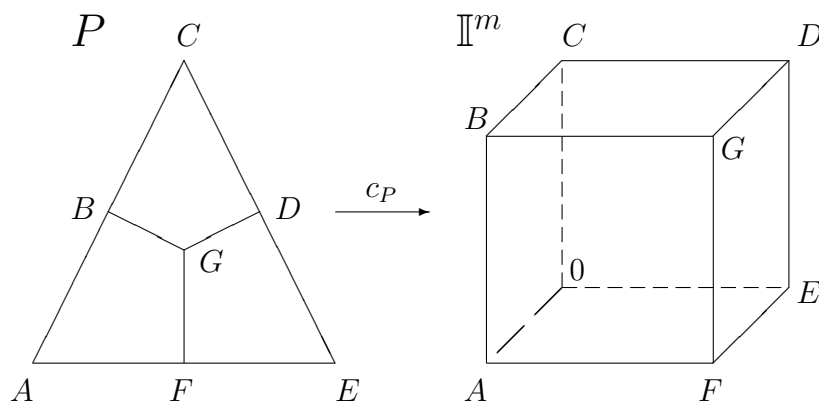


Рис. 1.6. Вложение $c_P: \mathcal{C}(P) \rightarrow \mathbb{I}^m$ для $n = 2$, $m = 3$.

Свойства предыдущей конструкции собраны ниже в одном утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8.5. *Простой многогранник P с t гипергранями допускает кубическое разбиение на кубы C_v , соответствующие вершинам $v \in P$. Получаемый кубический комплекс $\mathcal{C}(P)$ канонически вкладывается в границу куба \mathbb{I}^m , как описано в (1.19).*

КОНСТРУКЦИЯ 1.8.6 (кубическое разбиение симплициального комплекса). Пусть \mathcal{K} — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Тогда \mathcal{K} канонически вкладывается как подкомплекс в Δ^{m-1} , а \mathcal{K}' — как подкомплекс в $(\Delta^{m-1})'$. Ограничивая кусочно-линейное вложение из конструкции 1.8.3 на \mathcal{K}' , мы получаем вложение $i_c|_{\mathcal{K}'}: |\mathcal{K}'| \rightarrow \mathbb{I}^m$. Его образ есть некоторый кубический подкомплекс в \mathbb{I}^m , который мы обозначим $\text{sub}(\mathcal{K})$. Тогда

$$(1.20) \quad \text{sub}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\emptyset \neq \sigma \subset \tau \in \mathcal{K}} C_{\sigma \subset \tau} \subset \mathbb{I}^m,$$

т.е. $\text{sub}(\mathcal{K})$ есть объединение граней $C_{\sigma \subset \tau} \subset \mathbb{I}^m$ по всем парам $\sigma \subset \tau$ непустых симплексов из \mathcal{K} .

КОНСТРУКЦИЯ 1.8.7. Так как $\text{cone}(\mathcal{K}')$ является подкомплексом в $\text{cone}((\Delta^{m-1})')$, конструкция 1.8.3 также даёт вложение

$$\text{cone}(i_c)|_{\text{cone}(\mathcal{K}')}: |\text{cone}(\mathcal{K}')| \rightarrow \mathbb{I}^m.$$

Образ этого вложения есть кубический подкомплекс в \mathbb{I}^m , который мы обозначим $\text{ss}(\mathcal{K})$. Легко видеть, что

$$(1.21) \quad \text{ss}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\tau \in \mathcal{K}} C_{\sigma \subset \tau} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{K}} C_{\tau}.$$

Ниже сведены результаты предыдущих конструкций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8.8. Для любого симплицального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ имеется кусочно-линейное вложение полиэдра $|\mathcal{K}|$ в куб \mathbb{I}^m , линейное на симплексах из \mathcal{K}' . Образ этого вложения есть кубический подкомплекс (1.20). Более того, имеется кусочно-линейное вложение полиэдра $|\text{cone } \mathcal{K}|$ в \mathbb{I}^m , линейное на симплексах из $\text{cone}(\mathcal{K}')$, образ которого есть кубический подкомплекс (1.21).

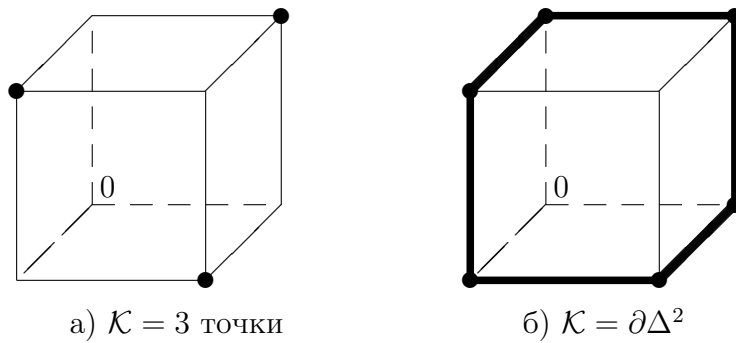


Рис. 1.7. Кубический комплекс $\text{sub}(\mathcal{K})$.

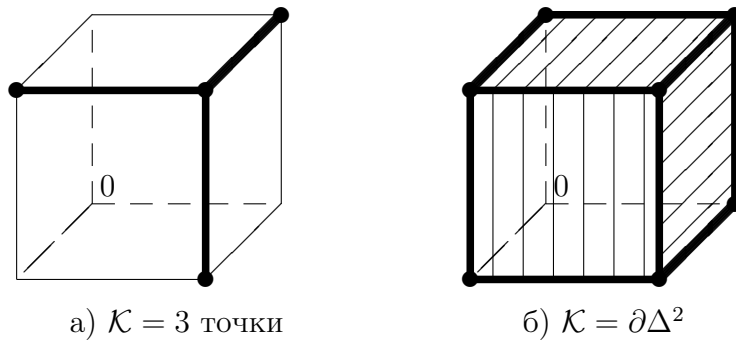


Рис. 1.8. Кубический комплекс $\text{ss}(\mathcal{K})$.

ПРИМЕР 1.8.9. Кубический комплекс $\text{sub}(\mathcal{K})$ в случае, когда \mathcal{K} представляет собой набор из трёх точек, показан на рис. 1.7 а). На рис. 1.7 б) показан тот же кубический комплекс в случае, когда $\mathcal{K} = \partial\Delta^2$ — граница 2-симплекса. Соответствующие кубические комплексы $\text{ss}(\mathcal{K})$ показаны на рис. 1.8 а) и б).

Пусть P — простой n -многогранник и \mathcal{K}_P — симплицальный комплекс, получаемый как граница полярного симплицального многогранника P^* . Тогда кубический комплекс $\text{ss}(\mathcal{K}_P)$ совпадает с комплексом $\mathcal{C}(P)$ из конструкции 1.8.4, а точнее $\text{ss}(\mathcal{K}_P) = c_P(\mathcal{C}(P))$.

Кольца граней

Эта глава посвящена алгебраической теории колец граней (кольца Стенли–Риснера) симплициальных комплексов и их обобщений на симплициальные частично упорядоченные множества (симплициально клеточные комплексы). Здесь собрано большинство алгебраических сведений и конструкций, необходимых для последующих топологических приложений. Алгебраические сведения, не имеющие непосредственного отношения к кольцам граней (резольвенты и функтор Tor , кольца Коэна–Маколея), собраны в конце работы в виде отдельных приложений.

В этой главе начинается переход от изложения вводного материала и необходимых конструкций и определений к изложению результатов автора (частично полученных совместно с коллегами). Материал разделов 2.1–2.5, в целом, не является новым; здесь излагаются известные алгебраические конструкции и результаты. Возможно, изложение ведётся с нестандартной для алгебраической литературы точки зрения; это объясняется направленностью на топологические приложения. В разделе 2.6 излагается доказательство теоремы характеристики симплициальных частично упорядоченных множеств Коэна–Маколея в терминах их колец граней, полученное в работе [ММР07] Маэды, Масуды и автора. В разделе 2.7 приводится теорема характеристики h -векторов горенштейновых симплициальных частично упорядоченных множеств. Это утверждение было доказано Стенли в [St91] за исключением одного пункта, который оставался открытым и был сформулирован в [St91] в качестве гипотезы. Частичное доказательство этой гипотезы было получено в работе [МР06] Масуды и автора, а полное — позднее в работе Масуды [Ма05]. В разделе 2.8 приводится доказательство обобщённых соотношений Дена–Соммервилля для триангулированных многообразий. Эти соотношения в таком виде впервые были получены в работе [БП00-2] В. М. Бухштабера и автора как следствие биградуированной двойственности Пуанкаре для момент-угол-комплексов. Здесь же мы излагаем чисто комбинаторное доказательство из работы [МР06] Масуды и автора.

Понятие кольца граней симплициального комплекса, введённое в начале 1970-х годов, открыло новые пути комбинаторных приложений развитого к тому времени мощного аппарата коммутативной и гомологической алгебры. В основу были положены результаты, описывающие взаимосвязи колец граней и таких ключевых алгебраических понятий как регулярные последовательности, кольца Козна–Маколея и Горенштейна, Тог-алгебры, локальные когомологии и т.д. Основным источником по теории колец граней и её приложениям является монография Стенли [St96].

Далее, говоря об основном кольце \mathbf{k} , мы будем иметь ввиду некоторое поле или кольцо целых чисел. Если не оговорено противное, в этой главе мы под алгеброй мы будем подразумевать с градуированную коммутативную конечно порождённую алгебру $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ над \mathbf{k} , а все A -модули M у нас будут градуированными и конечно порождёнными. Мы всегда будем предполагать алгебру A связной, т.е. $A^0 = \mathbf{k}$. Тогда отображение аугментации $A \rightarrow \mathbf{k}$, тождественное на A^0 и переводящее элементы из A^+ (т.е. положительной степени) в нуль, задаёт в \mathbf{k} структуру A -модуля. Для того, чтобы не использовать термин «модуль» в разных контекстах, мы будем часто говорить о « \mathbf{k} -векторных пространствах», имея ввиду абелевы группы в случае $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$. Таким образом, каждая градуированная компонента M^i модуля M является конечномерным \mathbf{k} -векторным пространством. Кроме того, мы будем считать, что алгебры имеют нетривиальные градуированные компоненты только в чётных размерностях (этого всегда можно достичь удвоением градуировки). Дело в том, что в последующих главах мы будем иметь дело с топологическими приложениями, где возникают алгебры, которые коммутативны в градуированном, а не в обычном, смысле. В соответствии с этим соглашением, говоря далее об алгебрах, порождённых линейными элементами, мы будем иметь ввиду алгебры, порождённые элементами из A^2 .

Мы часто будем использовать сокращённое обозначение $\mathbf{k}[m]$ для градуированной алгебры многочленов $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$. Если не оговорено противное, мы будем считать, что образующие v_i имеют степень два. Для каждого подмножества $\omega = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ моном $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ будем обозначать через v_ω .

2.1. Кольца граней симплициальных комплексов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. *Кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Риснера*) симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ называется факторкольцо

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] / \mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ — однородный идеал, порождённый мономами v_{ω} , для которых ω не является симплексом в \mathcal{K} . Идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ называется *идеалом Стенли–Риснера* комплекса \mathcal{K} .

Заметим, что идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ является *мономиальным* и имеет базис из мономов v_{ω} , соответствующих недостающим граням ω комплекса \mathcal{K} . Все такие мономы в своей записи не содержат квадратов.

ПРИМЕР 2.1.2. 1. Пусть \mathcal{K} — 2-мерный симплициальный комплекс, изображённый на рис. 2.1. Тогда

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (v_1v_5, v_3v_4, v_1v_2v_3, v_2v_4v_5).$$

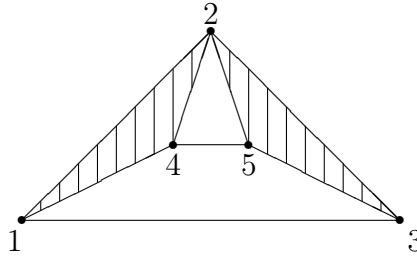


Рис. 2.1

2. Кольцо Стенли–Риснера $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является *квадратичной алгеброй* (т.е. идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ порождён квадратичными мономами) тогда и только тогда, когда \mathcal{K} — флаговый комплекс (см. определение 1.5.5).

3. Пусть $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$ — соединение \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 (см. конструкцию 1.6.1). Тогда

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2] = \mathbf{k}[\mathcal{K}_1] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}_2].$$

Здесь и далее \otimes обозначает тензорное произведение над \mathbf{k} .

Пусть P — простой n -многогранник, P^* — его полярный многогранник, и \mathcal{K}_P — граница P^* . Тогда \mathcal{K}_P является симплициальным комплексом, гомеоморфным $(n-1)$ -мерной сфере. Определим *кольцо граней* $\mathbf{k}[P]$ многогранника P как кольцо граней комплекса \mathcal{K}_P . В явном виде,

$$\mathbf{k}[P] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] / \mathcal{I}_P,$$

где \mathcal{I}_P — идеал, порожденный всеми мономами $v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_s}$ такими, что $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_s} = \emptyset$ в P , $i_1 < \dots < i_s$.

ПРИМЕР 2.1.3. 1. Пусть P есть n -симплекс (рассматриваемый как простой многогранник). Тогда

$$\mathbf{k}[P] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_{n+1}] / (v_1v_2 \dots v_{n+1}).$$

2. Пусть P есть трехмерный куб I^3 . Тогда

$$\mathbf{k}[P] = \mathbf{k}[v_1, v_2, \dots, v_6] / (v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6).$$

3. Пусть P^2 есть m -угольник, $m \geq 4$. Тогда

$$\mathcal{I}_{P^2} = (v_i v_j : i - j \neq 0, \pm 1 \pmod{m}).$$

4. Для любых двух простых многогранников P_1 и P_2 мы имеем

$$\mathbf{k}[P_1 \times P_2] = \mathbf{k}[P_1] \otimes \mathbf{k}[P_2].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.4. Пусть $\varphi: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ — симплициальное отображение (см. определение 1.4.6) между комплексами \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 на множествах вершин $[m_1]$ и $[m_2]$ соответственно. Определим отображение $\varphi^*: \mathbf{k}[w_1, \dots, w_{m_2}] \rightarrow \mathbf{k}[v_1, \dots, v_{m_1}]$ как

$$\varphi^*(w_j) := \sum_{i \in \varphi^{-1}(j)} v_i.$$

Тогда φ^* индуцирует гомоморфизм $\mathbf{k}[\mathcal{K}_2] \rightarrow \mathbf{k}[\mathcal{K}_1]$, который мы также будем обозначать φ^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо установить, что $\varphi^*(\mathcal{I}_{\mathcal{K}_2}) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{K}_1}$. Предположим, что $\tau = \{j_1, \dots, j_s\} \subset [m_2]$ не является симплексом в \mathcal{K}_2 . Мы имеем

$$\varphi^*(w_{j_1} \dots w_{j_s}) = \sum_{i_1 \in \varphi^{-1}(j_1), \dots, i_s \in \varphi^{-1}(j_s)} v_{i_1} \dots v_{i_s}.$$

Нам надо проверить, что правая часть этого равенства лежит в $\mathcal{I}_{\mathcal{K}_1}$, т.е. для любого монома $v_{i_1} \dots v_{i_s}$ в правой части множество $\sigma = \{i_1, \dots, i_s\}$ не является симплексом в \mathcal{K}_1 . Действительно, иначе мы бы имели $\varphi(\sigma) = \tau \in \mathcal{K}_2$ по определению симплициального отображения, что противоречит предположению. \square

Для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ мы имеем $\mathcal{K}_\sigma = \Delta^{|\sigma|-1}$ и $\mathbf{k}[\mathcal{K}_\sigma]$ есть кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_i : i \in \sigma]$ от $|\sigma|$ образующих. Вложение $\mathcal{K}_\sigma \subset \mathcal{K}$ индуцирует гомоморфизм ограничения s_σ из $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ в кольцо многочленов, который отображает v_i тождественно если $i \in \sigma$ и в нуль иначе.

Следующее простое утверждение используется в ряде важных алгебраических и топологических конструкций, и мы не раз ещё вернёмся к нему в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.5. Сумма $s := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}} s_\sigma$ отображений ограничения задаёт мономорфизм

$$s: \mathbf{k}[\mathcal{K}] \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathbf{k}[v_i : i \in \sigma].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию отображений

$$\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{p} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \xrightarrow{s} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathbf{k}[v_i : i \in \sigma],$$

где p — каноническая проекция на факторкольцо. Предположим, что $sp(Q) = 0$, где $Q = Q(v_1, \dots, v_m)$ — некоторый многочлен. Тогда для каждого монома $v_{i_1}^{\alpha_1} \dots v_{i_k}^{\alpha_k}$, входящего в Q с ненулевым коэффициентом мы имеем $\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}$. Следовательно, $p(Q) = 0$ и s — мономорфизм. \square

Напомним, что *рядом Пуанкаре* градуированного \mathbf{k} -векторного пространства M называется ряд

$$F(M; t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_{\mathbf{k}} M^i) t^i.$$

ЛЕММА 2.1.6 (Стенли). Пусть \mathcal{K} — симплицальный комплекс размерности $(n-1)$ с f -вектором (f_0, \dots, f_{n-1}) и h -вектором (h_0, \dots, h_n) . Тогда ряд Пуанкаре кольца $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ имеет вид

$$F(\mathbf{k}[\mathcal{K}]; t) = \sum_{i=-1}^{n-1} \frac{f_i t^{2(i+1)}}{(1-t^2)^{i+1}} = \frac{h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n}}{(1-t^2)^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо граней $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ имеет аддитивный базис из мономов $v_{i_1}^{\alpha_1} \dots v_{i_{k+1}}^{\alpha_{k+1}}$, где $\{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ — симплекс в \mathcal{K} , а $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ — некоторые натуральные числа. Следовательно, каждый k -симплекс из \mathcal{K} вносит слагаемое $\frac{t^{2(k+1)}}{(1-t^2)^{k+1}}$ в ряд Пуанкаре, что доказывает первое равенство. Второе равенство является очевидным следствием из (1.8). \square

ПРИМЕР 2.1.7. 1. Пусть $\mathcal{K} = \Delta^{n-1}$. Тогда $f_i = C_n^{i+1}$ для $-1 \leq i \leq n-1$, а $h_0 = 1$ и $h_i = 0$ при $i > 0$. Так как любое подмножество в $[n]$ является симплексом в Δ^{n-1} , мы имеем $\mathbf{k}[\Delta^{n-1}] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_n]$ и $F(\mathbf{k}[\Delta^{n-1}]; t) = (1-t^2)^{-n}$, что соответствует формуле из леммы 2.1.6.

2. Пусть \mathcal{K} — граница n -симплекса. Тогда $h_i = 1$, $i = 0, 1, \dots, n$, и $\mathbf{k}[\mathcal{K}] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_{n+1}]/(v_1 v_2 \dots v_{n+1})$. Из леммы 2.1.6 получаем

$$F(\mathbf{k}[\partial\Delta^n]; t) = \frac{1 + t^2 + \dots + t^{2n}}{(1-t^2)^n}.$$

2.2. Гомологические свойства колец граней: Тог-алгебры и числа Бетти

Кольцо Стенли–Риснера $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ обладает канонической структурой модуля над кольцом многочленов $\mathbf{k}[m]$, задаваемой проекцией $\mathbf{k}[m] \rightarrow \mathbf{k}[\mathcal{K}]$. В этом разделе мы описываем свойства Тог-модулей

колец Стенли–Риснера:

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = \bigoplus_{i,j=0}^m \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$$

(определение и свойства Тор-модулей можно найти в приложении I). Определим *биградуированные числа Бетти* кольца $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ как

$$(2.1) \quad \beta^{-i, 2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) := \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}), \quad 0 \leq i, j \leq m.$$

Мы также положим

$$\beta^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = \sum_j \beta^{-i, 2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]).$$

Рассмотрим минимальную резольвенту для $\mathbf{k}[m]$ -модуля $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ (конструкция I.2). Тогда $R_{\min}^0 \cong 1 \cdot \mathbf{k}[m]$ есть свободный модуль с одной образующей степени 0. Образующие свободного модуля R_{\min}^{-1} задаются элементами минимального базиса в $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ и соответствуют недостающим граням комплекса \mathcal{K} . Обозначим через v_{i_1, \dots, i_k} образующую модуля R_{\min}^{-1} , отвечающую недостающей грани $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$. Тогда отображение $d: R_{\min}^{-1} \rightarrow R_{\min}^0$ переводит v_{i_1, \dots, i_k} в $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$.

Согласно (I.6), мы получаем

$$(2.2) \quad \beta^{-i, 2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \mathrm{rank} R_{\min}^{-i, 2j}.$$

ПРИМЕР 2.2.1. Пусть \mathcal{K} — граница 4-угольника. Тогда

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] \cong \mathbf{k}[v_1, \dots, v_4]/(v_1v_3, v_2v_4).$$

Построим минимальную резольвенту для $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ и найдём соответствующие числа Бетти. Модуль R^0 имеет одну образующую 1 (степени 0), а мономы v_1v_3 и v_2v_4 образуют минимальный базис в ядре эпиморфизма $R^0 \rightarrow \mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Следовательно, R^{-1} имеет две образующие v_{13} и v_{24} степени 4, а отображение $d: R^{-1} \rightarrow R^0$ переводит v_{13} в v_1v_3 и v_{24} в v_2v_4 . Минимальный базис в ядре отображения $R^{-1} \rightarrow R^0$ состоит из одного элемента $v_2v_4v_{13} - v_1v_3v_{24}$. Поэтому R^{-2} имеет одну образующую степени 8, которую мы обозначим a , а отображение $d: R^{-2} \rightarrow R^{-1}$ мономорфно и переводит a в $v_2v_4v_{13} - v_1v_3v_{24}$. Итак, минимальная резольвента имеет вид

$$0 \longrightarrow R^{-2} \longrightarrow R^{-1} \longrightarrow R^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где $\mathrm{rank} R^0 = \beta^{0,0}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 1$, $\mathrm{rank} R^{-1} = \beta^{-1,4}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 2$, $\mathrm{rank} R^{-2} = \beta^{-2,8}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 1$.

Числа Бетти $\beta^{-i, 2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ являются важными комбинаторными инвариантами симплицального комплекса \mathcal{K} . Следующий результат сводит их вычисление к вычислению групп когомологий полных подкомплексов в \mathcal{K} .

ТЕОРЕМА 2.2.2 (Хохстер [Ho77] или [St96, Th. 4.8]). *Имеет место формула*

$$\beta^{-i,2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \sum_{\omega \subset [m]: |\omega|=j} \dim_{\mathbf{k}} \tilde{H}^{j-i-1}(\mathcal{K}_{\omega}; \mathbf{k}),$$

где \mathcal{K}_{ω} — полный подкомплекс в \mathcal{K} , соответствующий подмножеству $\omega \subset [m]$. Здесь мы полагаем $\tilde{H}^{-1}(\emptyset; \mathbf{k}) = \mathbf{k}$.

Исходное доказательство этого утверждения, полученное Хохстером, опирается на достаточно сложную комбинаторную и алгебраическую технику. Далее в разделе 6.4 мы дадим топологическую интерпретацию чисел $\beta^{-i,2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ как биградуированных чисел Бетти некоторого пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ (момент-угол-комплекс) и приведём новое доказательство теоремы Хохстера.

ПРИМЕР 2.2.3. Пусть снова \mathcal{K} — граница 4-угольника. На этот раз мы вычислим числа Бетти $\beta^{-i,2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ на основе теоремы Хохстера. Среди двухэлементных подмножеств в $[m]$, наряду с симплексами, имеется два несимплекса, а именно $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$. Симплексы вносят тривиальный вклад в сумму для $\beta^{-1,4}(\mathbf{k}[\mathcal{K}])$, в то время как каждый из несимплексов вносит 1. Следовательно, $\beta^{-1,4}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 2$. Далее, каждый из четырёх полных подкомплексов с тремя вершинами стягиваем, поэтому $\beta^{-i,6}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 0$ для всех i . Наконец, полный подкомплекс \mathcal{K}_{ω} с $|\omega| = 4$ есть сам \mathcal{K} . Следовательно, $\beta^{-i,8}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \dim_{\mathbf{k}} \tilde{H}_{4-i-1}(\mathcal{K}_{\omega}; \mathbf{k})$, что равно 1 при $i = 2$ и 0 в остальных случаях.

Числа Бетти кольца $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ можно также вычислять при помощи резольвенты Кошуля (см. конструкцию I.3). Покажем, как при помощи этой резольвенты вводится каноническая мультипликативная структура в Тог-модуле. Рассмотрим дифференциальную биградуированную алгебру $[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], d]$, где дифференциал d определяется как в (I.3).

ЛЕММА 2.2.4. $\text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$ является алгеброй, и имеет место изоморфизм алгебр

$$\text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \cong H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], d].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя резольвенту Кошуля при определении Тог и предложение I.4 г), мы вычисляем

$$\begin{aligned} \text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) &\cong \text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \\ &= H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \otimes_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]} \mathbf{k}[\mathcal{K}]] \cong \\ &\cong H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]]. \end{aligned}$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.5. Алгебра $\text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$ (с канонической биградуировкой) называется *Тог-алгеброй* симплициального комплекса \mathcal{K} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, модуль $\text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(M, N)$ при $N \neq \mathbf{k}$ не имеет канонической мультипликативной структуры даже если M и N являются алгебрами.

ЛЕММА 2.2.6. *Симплициальное отображение $\varphi: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ между симплициальными комплексами на множествах вершин $[m_1]$ и $[m_2]$ соответственно индуцирует гомоморфизм*

$$(2.3) \quad \varphi_t^*: \text{Тог}_{\mathbf{k}[w_1, \dots, w_{m_2}]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_2], \mathbf{k}) \rightarrow \text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_{m_1}]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}_1], \mathbf{k})$$

соответствующих Тог-алгебр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает непосредственно из предложений 2.1.4 и I.4 б). \square

Таким образом, $\text{Тог}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$ является контравариантным функтором из категории симплициальных комплексов.

КОНСТРУКЦИЯ 2.2.7 (мультиградуированная структура в Тог-алгебре). Наделим кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ мультиградуировкой (точнее, \mathbb{N}^m -градуировкой), положив $\text{mdeg } v_1^{i_1} \dots v_m^{i_m} = (2i_1, \dots, 2i_m)$. Так как $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является факторкольцом кольца многочленов по мономиальному идеалу, в нём сохраняется мультиградуированная структура. Мы также можем предполагать, что все модули в резольвенте (I.1) мультиградуированы и дифференциалы сохраняют эту структуру. Тогда алгебра $\text{Тог}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$ приобретает каноническую $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}^m$ -градуировку, т.е.

$$\text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = \bigoplus_{i \geq 0, j \in \mathbb{N}^m} \text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}).$$

С учётом этой структуры, теорема 2.2.2 допускает следующее уточнение. Для любого подмножества $\omega \subset [m]$ положим

$$\text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2\omega}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = \text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2j_1, \dots, 2j_m}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$$

где $j_k = 1$ если $k \in \omega$ и $j_k = 0$ иначе. Тогда

$$\text{Тог}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2\omega}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = \tilde{H}_{|\omega| - i - 1}(\mathcal{K}_\omega)$$

и $\text{Тог}_{\mathbf{k}[m]}^{-i, j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = 0$ если $j \neq 2\omega$ для некоторого $\omega \subset [m]$.

2.3. Симплициальные комплексы Коэна–Маколея

Необходимые сведения из общей теории колец Коэна–Маколея изложены в приложении II. Наличие свойства Коэна–Маколея у кольца граней симплициального комплекса приводит к важным комбинаторно-геометрическим и топологическим последствиям.

Вначале мы опишем системы параметров в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ на основе конструкции мономорфизма ограничения $s: \mathbf{k}[\mathcal{K}] \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]$ (см. предложение 2.1.5).

ЛЕММА 2.3.1. *Пусть \mathcal{K} — симплициальный комплекс размерности $n - 1$. Набор элементов $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ однородных (линейных) элементов кольца $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является однородной (линейной) системой параметров тогда и только тогда, когда для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ набор $s_\sigma(\mathbf{t})$ является однородной (линейной) системой параметров в кольце многочленов $\mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что \mathbf{t} — линейная система параметров. Так как $\mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]/s_\sigma(\mathbf{t})$ вкладывается в качестве \mathbf{k} -подпространства в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]/(\mathbf{t})$, мы имеем

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]/s_\sigma(\mathbf{t}) \leq \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}]/(\mathbf{t}) < \infty.$$

Это означает по определению, что $s_\sigma(\mathbf{t})$ — система параметров в $\mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]$.

Пусть теперь для каждого $\sigma \in \mathcal{K}$ набор $s_\sigma(\mathbf{t})$ является системой параметров в $\mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]$. Тогда мы имеем

$$\dim_{\mathbf{k}} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]/s_\sigma(\mathbf{t}) < \infty.$$

Отсюда и из того, что $s: \mathbf{k}[\mathcal{K}] \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathbf{k}[v_i: i \in \sigma]$ — мономорфизм, вытекает, что $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}]/(\mathbf{t}) < \infty$ (см. [ВН98, Lemma 4.7.1]). Таким образом, \mathbf{t} является системой параметров в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. \square

Заметим, что набор линейных элементов в кольце многочленов является системой параметров тогда и только тогда, когда он порождает всё кольцо многочленов (что эквивалентно тому, что этот набор является базисом в пространстве линейных элементов). В частности, если \mathcal{K} — чистый комплекс (все максимальные симплексы имеют размерность $n - 1$), то последовательность t_1, \dots, t_n является линейной системой параметров тогда и только тогда, когда её ограничение на каждый $(n - 1)$ -симплекс даёт базис в пространстве линейных элементов (над \mathbf{k}).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.2. Симплициальный комплекс \mathcal{K} называется *комплексом Коэна–Маколея* над \mathbf{k} , если $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является алгеброй Коэна–Маколея.

Если \mathcal{K} является комплексом на множестве $[m]$, то кольцо $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является $\mathbf{k}[m]$ -модулем. Для любого элемента $t \in \mathbf{k}[m]$ обозначим через \bar{t} его образ при проекции $\mathbf{k}[m] \rightarrow \mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Очевидно, что последовательность \mathbf{t} элементов из $\mathbf{k}[m]$ является $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ -регулярной тогда и только тогда, когда таковой является последовательность $\bar{\mathbf{t}}$ элементов из $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. В частности, $\text{dr } \mathbf{k}[\mathcal{K}] = \text{dr}_{\mathbf{k}[m]} \mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Ввиду этого в дальнейшем мы не будем различать эти два понятия регулярных последовательностей.

Легко видеть, что $\dim \mathbf{k}[\mathcal{K}] = \dim \mathcal{K} + 1$, причём образующие, соответствующие вершинам любого симплекса, алгебраически независимы.

ПРИМЕР 2.3.3. Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta^2$. Тогда мы имеем $\mathbf{k}[\mathcal{K}] = \mathbf{k}[v_1, v_2, v_3]/(v_1v_2v_3)$. Элементы $v_1, v_2 \in \mathbf{k}[\mathcal{K}]$ являются алгебраически независимыми, но не образуют однородную систему параметров, так как $\dim \mathbf{k}[\mathcal{K}]/(v_1, v_2) = 1$. С другой стороны, элементы $t_1 = v_1 - v_3, t_2 = v_2 - v_3$ образуют однородную систему параметров, так как $\mathbf{k}[\mathcal{K}]/(t_1, t_2) \cong \mathbf{k}[t]/t^3$. Легко видеть, что $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является свободным $\mathbf{k}[t_1, t_2]$ -модулем с одной 0-мерной образующей 1, одной 1-мерной образующей v_1 и одной 2-мерной образующей v_1^2 . Таким образом, $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является кольцом Коэна–Маколея, и (t_1, t_2) — регулярная последовательность.

Следующая фундаментальная теорема даёт комбинаторную характеристику комплексов Коэна–Маколея.

ТЕОРЕМА 2.3.4 (Риснер [Re76]). *Симплициальный комплекс \mathcal{K} является комплексом Коэна–Маколея над \mathbf{k} тогда и только тогда, когда для любого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ (включая $\sigma = \emptyset$) и $i < \dim(\text{lk } \sigma)$ имеет место равенство $\tilde{H}_i(\text{lk } \sigma; \mathbf{k}) = 0$.*

Следующая переформулировка теоремы Риснера показывает, что свойство Коэна–Маколея является чисто топологической характеристикой симплициального комплекса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.5 (Манкрс). *Комплекс \mathcal{K} является комплексом Коэна–Маколея над \mathbf{k} тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in |\mathcal{K}|$ имеет место равенство $\tilde{H}_i(|\mathcal{K}|; \mathbf{k}) = H_i(|\mathcal{K}|, |\mathcal{K}| \setminus x; \mathbf{k}) = 0$ при $i < \dim \mathcal{K}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно вытекает из предложения 1.6.6. \square

СЛЕДСТВИЕ 2.3.6. *Симплициальное разбиение сферы является комплексом Коэна–Маколея.*

Комплексы Коэна–Маколея могут быть охарактеризованы при помощи чисел Бетти следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.7. *Симплициальный комплекс \mathcal{K} размерности $n - 1$ с t вершинами является комплексом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда $\beta^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 0$ при $i > t - n$. В этом случае имеем $\beta^{-(m-n)}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению свойства Коэна–Маколея, $\text{depth } \mathbf{k}[\mathcal{K}] = n$. В силу теоремы II.4 это эквивалентно условию $\text{hd } \mathbf{k}[\mathcal{K}] = t - n$. Теперь утверждение вытекает из предложения I.5. \square

2.4. Горенштейновы комплексы и соотношения Дена–Соммервилля

В коммутативной гомологической алгебре наряду с кольцами Коэна–Маколея важное место занимает класс горенштейновых колец. Их общая теория изложена в [ВН98, Ch.3]. Как и в случае колец Коэна–Маколея, в комбинаторике большой интерес представляют симплициальные комплексы, кольца граней которых являются горенштейновыми. Нижеследующее определение не является стандартным определением горенштейнового кольца, однако эквивалентно ему в случае колец граней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1. Комплекс Коэна–Маколея \mathcal{K} размерности $n - 1$ на множестве $[m]$ называется *горенштейновым*, если $\beta^{-(m-n)}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 1$, т.е. $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-(m-n)}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}$. (Заметим, что $\beta^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 0$ при $i > m - n$ в силу предложения 2.3.7.) Если, кроме того, $\mathcal{K} = \mathrm{core} \mathcal{K}$ (см. определение 1.6.5), то \mathcal{K} называется *горенштейновым**.

Так как $\mathcal{K} = \mathrm{core}(\mathcal{K}) * \Delta^{s-1}$ для некоторого s , мы имеем $\mathbf{k}[\mathcal{K}] = \mathbf{k}[\mathrm{core}(\mathcal{K})] \otimes \mathbf{k}[s]$. Тогда из следствия II.3 получаем

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m-s]}^{-i}(\mathbf{k}[\mathrm{core} \mathcal{K}], \mathbf{k}).$$

Отсюда вытекает, что \mathcal{K} является горенштейновым тогда и только тогда, когда таковым является $\mathrm{core} \mathcal{K}$.

Следующая теорема даёт комбинаторно-топологическую характеристику горенштейновых* симплициальных комплексов.

ТЕОРЕМА 2.4.2 ([St96, §II.5]). *Симплициальный комплекс \mathcal{K} является горенштейновым* над \mathbf{k} тогда и только тогда, когда для любого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ (включая $\sigma = \emptyset$) подкомплекс $\mathrm{lk} \sigma$ имеет гомологии сферы размерности $\dim(\mathrm{lk} \sigma)$.*

Имеется также очевидный аналог предложения 2.3.5. В топологии полиэдры, удовлетворяющие условию из предыдущей теоремы иногда называются *обобщёнными гомологическими сферами*. В частности, симплициальные разбиения сфер и гомологических сфер (т.е. многообразий, имеющих гомологии как у сферы) являются горенштейновыми* комплексами. Однако свойство горенштейновости* не гарантирует, что комплекс является триангуляцией многообразия.

Из теорем 2.2.2 и 2.4.2 вытекает, что если \mathcal{K} — горенштейнов* комплекс, то

$$(2.4) \quad \beta^{-(m-n)}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \beta^{-(m-n), 2m}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = 1.$$

Градуированно-коммутативная конечномерная над \mathbf{k} связная алгебра $H = \bigoplus_{i=0}^d H^i$ называется *алгеброй Пуанкаре*, если \mathbf{k} -линейные отображения $H^i \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^{d-i}, H^d)$, $a \mapsto \varphi_a$, $\varphi_a(b) = ab$

являются изоморфизмами при $0 \leq i \leq d$. Название объясняется тем, что соответствующее свойство для когомологий многообразий есть не что иное как *двойственность Пуанкаре*.

Для произвольных нётеровых локальных колец имеет место фундаментальный результат Аврамова–Голода, согласно которому кольцо является горенштейновым тогда и только тогда, когда его Тор-алгебра является алгеброй Пуанкаре. Мы будем использовать градуированный аналог этого результата для колец граней симплициальных комплексов.

ТЕОРЕМА 2.4.3 (Аврамов–Голод, [ВН98, Th. 3.4.5]). *Симплициальный комплекс \mathcal{K} является горенштейновым тогда и только тогда, когда алгебра $A = \bigoplus_{i=0}^d A^i$, где $A^i = \text{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$ и $d = \max\{j : \text{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \neq 0\}$, является алгеброй Пуанкаре.*

СЛЕДСТВИЕ 2.4.4. *Пусть \mathcal{K} — $(n-1)$ -мерный горенштейнов* комплекс на множестве $[m]$. Тогда имеются следующие соотношения для чисел Бетти и ряда Пуанкаре Тор-алгебры:*

$$\beta^{-i, 2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \beta^{-(m-n)+i, 2(m-j)}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]), \quad 0 \leq i \leq m-n, \quad 0 \leq j \leq m,$$

$$F(\text{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}); t) = t^{2m} F(\text{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-(m-n)+i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}); \frac{1}{t}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как \mathcal{K} является горенштейновым*, из (2.4) следует, что $d = m-n$ и $A^d = \text{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-(m-n), 2m}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}$ в обозначениях теоремы 2.4.3. Так как умножение в Тор-алгебре согласовано с биградуированной структурой, изоморфизмы $A^i \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{m-n-i}, A^{m-n})$ из определения алгебры Пуанкаре задают изоморфизмы

$$A^{i, 2j} \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{m-n-i, 2(m-j)}, A^{m-n, 2m}),$$

где $A^{m-n, 2m} \cong \mathbf{k}$. Отсюда вытекает первое тождество, а второе является его следствием. \square

В качестве дальнейшего следствия мы получаем соотношение типа двойственности для ряда Пуанкаре самого кольца граней.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.5. *Если \mathcal{K} является горенштейновым* комплексом размерности $n-1$, то*

$$F(\mathbf{k}[\mathcal{K}], t) = (-1)^n F(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \frac{1}{t}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предложение I.1 к минимальной резольвенте $\mathbf{k}[m]$ -модуля $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Заметим, что $F(\mathbf{k}[m]; t) = (1-t^2)^{-m}$. Из (2.2) вытекает, что слагаемые в правой части формулы из предложения I.1 равны в точности $(-1)^i F(\text{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}); t)$, $1 \leq i \leq m-n$. Следовательно,

$$F(\mathbf{k}[\mathcal{K}]; t) = (1-t^2)^{-m} \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i F(\text{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}); t).$$

Используя следствие 2.4.4, мы вычисляем

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}[\mathcal{K}]; t) &= (1 - t^2)^{-m} \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i t^{2m} F\left(\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-(m-n)+i}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}); \frac{1}{t}\right) = \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{t}\right)^2\right)^{-m} (-1)^m \sum_{j=0}^{m-n} (-1)^{m-n-j} F\left(\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}); \frac{1}{t}\right) = \\ &= (-1)^n F(\mathbf{k}[\mathcal{K}]; \frac{1}{t}). \end{aligned}$$

□

СЛЕДСТВИЕ 2.4.6. *Для любого горнштейнового* комплекса (в частности, для любой триангуляции сферы) имеют место соотношения Дена–Соммервилля $h_i = h_{n-i}$, $0 \leq i \leq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из явного вида ряда Пуанкаре для $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ (лемма 2.1.6) и предыдущего следствия. □

В разделе 2.8 мы получим обобщённые соотношения Дена–Соммервилля для триангулированных многообразий.

2.5. Кольца граней симплициальных частично упорядоченных множеств

Здесь мы перейдём к описанию кольца граней симплициального частично упорядоченного множества \mathcal{S} . Как обычно, мы не будем различать симплициальные частично упорядоченные множества и симплициально клеточные комплексы (первый из этих объектов обычно рассматривается в алгебраической и комбинаторной литературе, однако второй более удобен для топологических приложений). Большинство алгебраических утверждений в этом разделе вытекают из общей теории *алгебр с законом выпрямления* и *алгебр Ходжса*, см. [St91] и [ВН98, Ch. 7]. Однако в нижеследующем изложении, приспособленном для топологических приложений, мы следуем работе [MP06].

Вначале рассмотрим случай, когда \mathcal{S} является симплициальным комплексом \mathcal{K} . Для любых двух симплексов $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ обозначим через $\sigma \wedge \tau$ их единственную точную нижнюю грань (т.е. максимальный симплекс, одновременно содержащийся в σ и τ). Точная нижняя грань всегда существует, но может быть пустым симплексом $\emptyset \in \mathcal{K}$. С другой стороны, точная верхняя грань симплексов σ и τ (т.е. минимальный симплекс, одновременно содержащий σ и τ) может не существовать. Если же точная верхняя грань существует, то она единственна, и мы обозначим её через $\sigma \vee \tau$.

Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{K} \setminus \emptyset]$, имеющее по одной образующей на каждый непустой симплекс в \mathcal{K} . Введём градуировку, положив $\deg v_\sigma = 2|\sigma|$. Кроме того, отождествим v_\emptyset с 1. Следующее утверждение даёт альтернативное «менее экономное»

представление кольца граней $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, в котором расширены как набор образующих, так и набор соотношений. Оно будет использовано как основа для обобщения понятия кольца граней на произвольные симплициально клеточные комплексы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.1. *Имеется канонический изоморфизм градуированных колец*

$$\mathbf{k}[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{K} \setminus \emptyset] / \mathcal{I} \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}],$$

где \mathcal{I} — идеал, порождённый всеми элементами вида

$$v_\sigma v_\tau - v_{\sigma \wedge \tau} v_{\sigma \vee \tau}.$$

Здесь мы полагаем $v_{\sigma \vee \tau} = 0$, если $\sigma \vee \tau$ не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм устанавливается при помощи отображения, переводящего v_σ в $\prod_{i \in \sigma} v_i$. \square

Пусть теперь \mathcal{S} — произвольный симплициально клеточный комплекс. В этом случае для любых двух элементов $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$ множество $\sigma \vee \tau$ их точных верхних граней может состоять из более, чем одного элемента (но может быть и пустым). Множество $\sigma \wedge \tau$ точных нижних граней всегда непусто; кроме того, оно состоит из единственного элемента при условии, что $\sigma \vee \tau \neq \emptyset$. Симплициальные комплексы выделяются в классе симплициально клеточных комплексов при помощи следующего простого свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.2. *\mathcal{S} является симплициальным комплексом тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$ множество $\sigma \vee \tau$ либо пусто, либо состоит из одного элемента.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V(\mathcal{S}) = \{v_1, \dots, v_m\}$ — множество вершин (т.е. элементов ранга один) в \mathcal{S} . Введём симплициальный комплекс \mathcal{K} на множестве $V(\mathcal{S})$, симплексами которого являются подмножества $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$, для которых найдётся элемент $\sigma \in \mathcal{S}$ с таким множеством вершин. Отображение $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{K}$, переводящее элемент из \mathcal{S} в множество его вершин, сюръективно и сохраняет отношение частичного порядка. Кроме того, это отображение инъективно в силу дополнительного условия на точные верхние грани. Следовательно, \mathcal{S} совпадает с \mathcal{K} . В другую сторону утверждение очевидно. \square

Введём градуированное кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{S} \setminus \hat{0}]$, где $\deg v_\sigma = 2 \operatorname{rank} \sigma$. Мы также формально положим $v_{\hat{0}} = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.3. *Кольцом граней симплициально клеточного комплекса \mathcal{S} называется факторкольцо*

$$\mathbf{k}[\mathcal{S}] := \mathbf{k}[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}] / \mathcal{I}_{\mathcal{S}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ — идеал, порождённый всеми элементами вида

$$v_{\sigma}v_{\tau} - v_{\sigma \wedge \tau} \cdot \sum_{\rho \in \sigma \vee \tau} v_{\rho}.$$

В частности, если $\sigma \vee \tau = \emptyset$, то $v_{\sigma}v_{\tau} = 0$ в $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$.

Соотношения, порождающие идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, позволяют выразить произведение образующих v_{σ} и v_{τ} , соответствующих несравнимым элементам $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$, в виде суммы мономов, представляющих собой произведение упорядоченных образующих. В алгебраической литературе такие соотношения называются *выпрямляющими*. Далее мы приводим ряд утверждений, описывающих алгебраические свойства кольца граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$.

ЛЕММА 2.5.4. *Каждый элемент кольца $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ может быть представлен в виде линейной комбинации мономов $v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k}$, соответствующих последовательностям $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ вполне упорядоченных элементов из \mathcal{S} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно доказать для элементов вида $a = v_{\tau_1}v_{\tau_2} \dots v_{\tau_k}$, где некоторые из τ_i могут совпадать. Нужно показать, что такой элемент можно записать в виде $\sum v_{\sigma_1} \dots v_{\sigma_l}$, где $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_l$ для каждого слагаемого. По индукции мы можем предположить, что $\tau_2 \leq \dots \leq \tau_k$. Применим соотношение из определения 2.5.3 и заменим a на

$$v_{\tau_1 \wedge \tau_2} \left(\sum_{\rho \in \tau_1 \vee \tau_2} v_{\rho} \right) v_{\tau_3} \dots v_{\tau_k}.$$

Теперь два первых элемента в каждом мономе этой записи упорядочены. Затем заменим в каждом мономе произведение $v_{\rho}v_{\tau_3}$ на $v_{\rho \wedge \tau_3} (\sum_{\pi \in \rho \vee \tau_3} v_{\pi})$. Так как $\tau_1 \wedge \tau_2 \leq \rho \wedge \tau_3$, мы получаем, что уже первые три элемента в каждом мономе упорядочены. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим сумму мономов, соответствующих упорядоченным наборам элементов. \square

Мы будем называть представление из леммы 2.5.4 *цепным разложением* элемента $a \in \mathbf{k}[\mathcal{S}]$.

Для каждого элемента $\sigma \in \mathcal{S}$ определим *гомоморфизм ограничения*

$$s_{\sigma}: \mathbf{k}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(v_{\tau}: \tau \not\leq \sigma).$$

Легко видеть, что имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.5. *Пусть $\text{rank } \sigma = k$ и $\{i_1, \dots, i_k\}$ — набор вершин элемента $\sigma \in \mathcal{S}$. Тогда образом гомоморфизма s_{σ} является кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ от k образующих степени два.*

Следующее утверждение обобщает предложение 2.1.5 на симплициально клеточные комплексы.

ТЕОРЕМА 2.5.6. Сумма $s = \bigoplus_{\sigma} s_{\sigma}$ отображений ограничения по всем элементам $\sigma \in \mathcal{S}$ является мономорфизмом из кольца граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ в прямую сумму колец многочленов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \mathbf{k}[\mathcal{S}]$ — ненулевой элемент. Запишем его цепное разложение. Зафиксируем моном $v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k}$, входящий в это разложение с ненулевым коэффициентом. Допуская, что некоторые из показателей α_i равны нулю, мы можем считать, что σ_k — максимальный элемент в \mathcal{S} и $\text{rank } \sigma_i = i$, $1 \leq i \leq k$. Докажем, что $s_{\sigma_k}(a) \neq 0$. Отождествим $s_{\sigma_k}(\mathbf{k}[\mathcal{S}])$ с кольцом многочленов $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_k]$ (так что $t_j = v_{i_j}$ в обозначениях предложения 2.5.5). Тогда $s_{\sigma_k}(v_{\sigma_k}) = t_1 \dots t_k$ и мы можем также предположить, что $s_{\sigma_k}(v_{\sigma_j}) = t_1 \dots t_j$ при $1 \leq j \leq n$. Итак,

$$s_{\sigma_k}(v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k}) = t_1^{\alpha_1} (t_1 t_2)^{\alpha_2} \dots (t_1 \dots t_k)^{\alpha_k}.$$

Если мы докажем, что никакой другой моном $v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_m}^{\beta_m}$ не переходит под действием отображения s_{σ_k} в тот же самый элемент из $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_k]$, то отсюда будет вытекать, что $s_{\sigma_k}(a) \neq 0$. Заметим, что

$$s_{\sigma_k}(v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_m}^{\beta_m}) = 0 \quad \text{если } \tau_i \not\leq \sigma_k \text{ при } \beta_i \neq 0,$$

так что можно считать, что $m = k$. Допустим, что

$$(2.5) \quad s_{\sigma_k}(v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k}) = s_{\sigma_k}(v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_k}^{\beta_k}).$$

Докажем, что тогда $v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k} = v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_k}^{\beta_k}$. По индукции мы можем предположить, что «хвосты» этих мономов совпадают, т.е. для всех $i > j$ выполнено $\alpha_i = \beta_i$ и $\sigma_i = \tau_i$ при $\alpha_i \neq 0$. Докажем тогда, что $\alpha_j = \beta_j$ и $\sigma_j = \tau_j$ при $\alpha_j \neq 0$. Равенство (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} s_{\sigma_k}(v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_j}^{\alpha_j})(t_1 \dots t_{j+1})^{\alpha_{j+1}} \dots (t_1 \dots t_k)^{\alpha_k} = \\ = s_{\sigma_k}(v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_j}^{\beta_j})(t_1 \dots t_{j+1})^{\alpha_{j+1}} \dots (t_1 \dots t_k)^{\alpha_k}, \end{aligned}$$

откуда $s_{\sigma_k}(v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_j}^{\alpha_j}) = s_{\sigma_k}(v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_j}^{\beta_j})$. Пусть β_l — последний ненулевой показатель (т.е. $\beta_{l+1} = \dots = \beta_j = 0$). Тогда мы также имеем $\alpha_{l+1} = \dots = \alpha_j = 0$, так как иначе $s_{\sigma_k}(v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_j}^{\alpha_j})$ делилось бы на $t_1 \dots t_{l+1}$, в то время как $s_{\sigma_k}(v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_j}^{\beta_j})$ не делится на $t_1 \dots t_{l+1}$. Мы также имеем $\alpha_l = \beta_l$ и $\sigma_l = \tau_l$, так как α_l есть максимальная степень монома $t_1 \dots t_l$, на которую делится $s_{\sigma_k}(v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_j}^{\alpha_j})$. По индукции мы заключаем, что $v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k} = v_{\tau_1}^{\beta_1} \dots v_{\tau_k}^{\beta_k}$, откуда $s_{\sigma_k}(a) \neq 0$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Как вытекает из доказательства, предыдущая теорема остаётся верной, если в качестве отображения $s = \bigoplus_{\sigma} s_{\sigma}$ брать сумму лишь по максимальным элементам $\sigma \in \mathcal{S}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.7. Цепное разложение любого элемента $a \in \mathbf{k}[\mathcal{S}]$ единственно. Другими словами, что мономы $v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k}$, соответствующие всем цепям $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ и всем показателям $\alpha_i > 0$, образуют аддитивный базис кольца $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$.

Определим f -вектор симплициально клеточного комплекса \mathcal{S} как $\mathbf{f}(\mathcal{S}) = (f_0, \dots, f_{n-1})$, где $n - 1 = \dim \mathcal{S}$ и f_i есть количество элементов ранга $i + 1$ (т.е. количество симплексов размерности i). Как обычно, h -вектор $\mathbf{h}(\mathcal{S}) = (h_0, \dots, h_n)$ определяется из соотношения (1.8).

ПРИМЕР 2.5.8. Рассмотрим комплекс \mathcal{S} , описанный в примере 1.7.2 при $n = 2$. Таким образом, \mathcal{S} получается склеиванием двух отрезков по их границам, см. рис. 1.4 б). Мы имеем два элемента ранга 1 (две вершины), скажем, σ_1 и σ_2 , и два элемента ранга 2 (два максимальных симплекса), скажем, τ_1 и τ_2 . Тогда $\mathbf{f}(\mathcal{S}) = (2, 2)$, $\mathbf{h}(\mathcal{S}) = (1, 0, 1)$, и кольцо граней имеет вид

$$\mathbf{k}[\mathcal{S}] = \mathbf{k}[v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\tau_1}, v_{\tau_2}] / (v_{\sigma_1}v_{\sigma_2} = v_{\tau_1} + v_{\tau_2}, v_{\tau_1}v_{\tau_2} = 0),$$

где $\deg v_{\sigma_1} = \deg v_{\sigma_2} = 2$, $\deg v_{\tau_1} = \deg v_{\tau_2} = 4$.

Ряд Пуанкаре кольца граней симплициально клеточного комплекса выглядит так же, как и для симплициальных комплексов.

ТЕОРЕМА 2.5.9. Мы имеем

$$F(\mathbf{k}[\mathcal{S}]; t) = \sum_{k=0}^n \frac{f_{k-1}t^{2k}}{(1-t^2)^k} = \frac{h_0 + h_1t^2 + \dots + h_nt^{2n}}{(1-t^2)^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2.5.7, нам нужно подсчитать ряд Пуанкаре \mathbf{k} -векторного пространства, порождённого мономами $v_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\sigma_k}^{\alpha_k}$ с $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$. Для каждого элемента $\sigma \in \mathcal{S}$ рассмотрим множество \mathcal{M}_σ таких мономов, в которых $\sigma_k = \sigma$ и $\alpha_k > 0$. Пусть $\text{rank } \sigma = k$; рассмотрим отображение ограничения s_σ в кольцо многочленов $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_k]$. Тогда $s_\sigma(\mathcal{M}_\sigma)$ совпадает с множеством мономов из $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_k]$, которые делятся на $t_1 \dots t_k$. Поэтому ряд Пуанкаре для подпространства, порождённого множеством \mathcal{M}_σ , есть $\frac{t^{2k}}{(1-t^2)^k}$. Теперь для доказательства первого из равенств в теореме достаточно заметить, что \mathcal{S} распадается в объединение $\cup_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathcal{M}_\sigma$ непересекающихся подмножеств \mathcal{M}_σ . Второе равенство непосредственно вытекает из соотношения (1.8). \square

2.6. Симплициально клеточные комплексы Коэна–Маколея

Предположим, что задано некоторое свойство A симплициальных комплексов. Свойство A распространяется на частично упорядоченные множества \mathcal{S} следующим образом: говорят, что \mathcal{S} обладает свойством A , если порядковый комплекс $\text{ord}(\mathcal{S})$ (см. пример 1.5.4) обладает свойством A . В частности, таким образом можно определить понятия частично упорядоченных множеств Коэна–Маколея и Горенштейна. Для нас особый интерес представляют

симплициальные частично упорядоченные множества (симплициально клеточные комплексы); в этом случае порядковый комплекс отождествляется с барицентрическим подразбиением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.1. Симплициальное частично упорядоченное множество \mathcal{S} обладает свойством *Коэна–Маколея* (над \mathbf{k}), если барицентрическое подразбиение \mathcal{S}' является симплициальным комплексом Коэна–Маколея.

Таким образом, \mathcal{S} является симплициально клеточным комплексом Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда кольцо граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}']$ является кольцом Коэна–Маколея. Так как кольцо граней определено для самого комплекса \mathcal{S} (а не только для его барицентрического подразбиения), возникает естественный вопрос, можно ли описать класс симплициально клеточных комплексов Коэна–Маколея непосредственно в терминах их колец граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$. В [St91, Cor. 3.7] доказано, что кольцо граней симплициально клеточного комплекса является кольцом Коэна–Маколея. Основным результатом этого раздела является доказательство обратного утверждения (см. теорему 2.6.9). Для этого нужно доказать, что если $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея, то и $\mathbf{k}[\mathcal{S}']$ является кольцом Коэна–Маколея. Наше рассуждение основано на разложении барицентрического подразбиения в композицию *звёздных подразбиений* и доказательстве того, что свойство Коэна–Маколея сохраняется на каждом шаге.

Назовём симплициальное подразбиение симплициально клеточного комплекса \mathcal{S} *регулярным*, если оно является симплициальным комплексом. Например, барицентрическое подразбиение является регулярным подразбиением. Следующее утверждение вытекает из предложения 2.3.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.2. *Следующие условия эквивалентны:*

- а) *барицентрическое подразбиение симплициально клеточного комплекса \mathcal{S} является комплексом Коэна–Маколея;*
- б) *любое регулярное подразбиение комплекса \mathcal{S} является комплексом Коэна–Маколея;*
- в) *некоторое регулярное подразбиение комплекса \mathcal{S} является комплексом Коэна–Маколея;*

В качестве дальнейшего следствия мы получаем, что и само предложение 2.3.5 имеет место для любого симплициально клеточного комплекса, т.е. свойство Коэна–Маколея для симплициально клеточных комплексов имеет чисто топологическую природу. Кроме того, лемма 2.3.1, описывающая линейные системы параметров в кольцах граней симплициальных комплексов, непосредственно обобщается следующим образом.

ЛЕММА 2.6.3. Пусть \mathcal{S} — симплициально клеточный комплекс размерности $n - 1$. Набор элементов $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ элементов степени два кольца $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является линейной системой параметров тогда и только тогда, когда для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{S}$ набор $s_\sigma(\mathbf{t})$ порождает кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_i: i \leq \sigma]$.

Ниже мы покажем, что барицентрическое подразбиение \mathcal{S}' может быть получено из \mathcal{S} как результат применения последовательности элементарных операций, называемых *звёздными подразбиениями*. Зафиксируем $(k - 1)$ -мерный симплекс $\sigma \in \mathcal{S}$ и определим, по аналогии с симплициальными комплексами, *звезду*, *границу звезды* и *линк* симплекса σ как следующие подкомплексы:

$$\begin{aligned} \text{st}_{\mathcal{S}} \sigma &= \{\tau \in \mathcal{S} : \sigma \vee \tau \neq \emptyset\}, \\ \partial \text{st}_{\mathcal{S}} \sigma &= \{\tau \in \mathcal{S} : \sigma \not\leq \tau, \sigma \vee \tau \neq \emptyset\}, \\ \text{lk}_{\mathcal{S}} \sigma &= \{\tau \in \mathcal{S} : \tau \wedge \sigma = \hat{0}, \sigma \vee \tau \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Звезда симплекса является его «замкнутой комбинаторной окрестностью». Если \mathcal{S} является симплициальным комплексом, то комплекс $\text{lk} \sigma$ (рассматриваемый как частично упорядоченное множество) изоморфен открытому интервалу

$$\mathcal{S}_{>\sigma} = \{\rho \in \mathcal{S} : \rho > \sigma\}$$

в \mathcal{S} , а $\text{st} \sigma = \sigma * \text{lk} \sigma$ (где $*$ обозначает соединение комплексов). Однако в общем случае это не так, см. пример 2.6.7 ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.4. *Звёздным подразбиением* симплициального комплекса \mathcal{K} относительно симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ называется операция, определяемая следующим образом:

$$(2.6) \quad \zeta_\sigma(\mathcal{K}) = (\mathcal{K} \setminus \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma) \cup \text{cone}(\partial \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma).$$

Таким образом, при звёздном подразбиении симплициального комплекса звезда симплекса заменяется на конус над её границей. Если $\dim \sigma = 0$, то $\zeta_\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. В противном случае комплекс $\zeta_\sigma(\mathcal{K})$ приобретает одну дополнительную вершину v (вершину конуса), линк которой совпадает с $\partial \text{st}_{\mathcal{K}} \sigma$.

Если \mathcal{S} — симплициально клеточный комплекс, то мы определим его звёздное подразбиение $\zeta_\sigma(\mathcal{S})$ относительно симплекса $\sigma \in \mathcal{S}$ как симплициально клеточный комплекс, получаемый в результате звёздного подразбиения каждого симплекса, содержащего σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.5. *Барицентрическое подразбиение \mathcal{S}' может быть получено как композиция звёздных подразбиений симплициально клеточного комплекса \mathcal{S} . Более того, каждое звёздное подразбиение производится относительно симплекса, звезда которого есть симплициальный комплекс.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim \mathcal{S} = n - 1$. Произведём звёздные подразделения относительно всех $(n - 1)$ -мерных симплексов. Обозначим полученный комплекс через \mathcal{S}_1 . Тогда \mathcal{S}_1 имеет $(n - 2)$ -симплексы двух типов: «старые» — оставшиеся от \mathcal{S} и «новые» — возникшие в результате звёздных преобразований. Теперь произведём в комплексе \mathcal{S}_1 звёздные подразделения относительно всех «старых» $(n - 2)$ -симплексов и обозначим полученный комплекс через \mathcal{S}_2 . Затем в комплексе \mathcal{S}_2 произведём звёздные подразделения относительно всех $(n - 3)$ -симплексов, оставшихся от \mathcal{S} . Продолжая таким же образом, мы в конце построим симплициально клеточный комплекс \mathcal{S}_{n-1} , который получается из \mathcal{S}_{n-2} путём звёздных подразбиений относительно всех 1-симплексов, оставшихся от \mathcal{S} . Рассматривая отдельно получаемое подразбиение каждого симплекса, мы убеждаемся, что \mathcal{S}_{n-1} есть \mathcal{S}' . Для доказательства второго утверждения рассмотрим два последовательных комплекса \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ из нашей композиции подразбиений, т.е. $\tilde{\mathcal{R}}$ получается из \mathcal{R} одним звёздным подразбиением относительно симплекса σ . Тогда комплекс $\text{st}_{\mathcal{R}} \sigma$ изоморфен $\sigma * (\mathcal{S}_{>\sigma})'$, и поэтому является симплициальным комплексом. \square

ЛЕММА 2.6.6. Пусть \mathcal{S} — $(n - 1)$ -мерный симплициально клеточный комплекс с множеством вершин $V(\mathcal{S}) = \{v_1, \dots, v_m\}$, и предположим, что первые k вершин v_1, \dots, v_k порождают симплекс σ . Предположим далее, что $\text{st}_{\mathcal{S}} \sigma$ есть симплициальный комплекс, и рассмотрим звёздное подразбиение $\tilde{\mathcal{S}} = \zeta_{\sigma}(\mathcal{S})$. Пусть v обозначает образующую степени два кольца $\mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$, соответствующую единственной добавленной вершине. Тогда существует единственное отображение $\beta: \mathbf{k}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$, такое, что

$$\begin{aligned} v_{\tau} &\mapsto v_{\tau} && \text{если } \tau \notin \text{st}_{\mathcal{S}} \sigma, \\ v_i &\mapsto v + v_i, && 1 \leq i \leq k, \\ v_i &\mapsto v_i, && k + 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

(здесь мы используем одни и те же обозначения для вершин и соответствующих им образующих кольца граней). Более того, отображение β мономорфно, и если $\theta_1, \dots, \theta_n$ — (линейная) система параметров в $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$, то $\beta(\theta_1), \dots, \beta(\theta_n)$ — (линейная) система параметров в $\mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы полностью определить отображение β , мы должны указать образы элементов v_{τ} для $\tau \in \text{st}_{\mathcal{S}} \sigma$. Выберем такой v_{τ} и пусть $V(\tau) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_{\ell}}\}$ — его множество вершин. Тогда мы имеем следующее соотношение в кольце $\mathbf{k}[\mathcal{S}] = \mathbf{k}[v_{\tau} : \tau \in \mathcal{S} \setminus \hat{0}] / \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$:

$$(2.7) \quad v_{i_1} \cdots v_{i_{\ell}} = v_{\tau} + \sum_{\eta: V(\eta)=V(\tau), \eta \neq \tau} v_{\eta}.$$

Для каждого v_η в этой сумме мы имеем $\eta \notin \text{st}_S \sigma$, т.к. $\text{st}_S \sigma$ — симплициальный комплекс (см. предложение 2.5.2). Так как отображение β уже определено на произведении элементов в левой части и на сумме в правой части, оно однозначно определяется на элементе v_τ . Следовательно, отображение β определено на всех мономах, входящих в цепное разложение (см. следствие 2.5.7), и мы можем построить отображение \mathbf{k} -модулей $\beta: \mathbf{k}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$.

Теперь нужно проверить, что β является кольцевым гомоморфизмом. Рассмотрим проекцию

$$p: \mathbf{k}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(v_\tau: \tau \notin \text{st}_S \sigma) = \mathbf{k}[\text{st}_S \sigma]$$

и обозначим её ядро через R . Аналогично, обозначим

$$\tilde{R} = \ker(\tilde{p}: \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}] \rightarrow \mathbf{k}[\text{st}_{\tilde{S}} v]).$$

Идеал R имеет \mathbf{k} -базис, состоящий из мономов $v_{\tau_1}^{\alpha_1} v_{\tau_2}^{\alpha_2} \cdots v_{\tau_k}^{\alpha_k}$ с $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$, $\alpha_i > 0$ при $1 \leq i \leq k$ и $\tau_k \notin \text{st}_S \sigma$. Так как симплициально клеточные комплексы \mathcal{S} и $\tilde{\mathcal{S}}$ не отличаются на дополнении к $\text{st}_S \sigma$ и $\text{st}_{\tilde{S}} v$ соответственно, отображение β ограничивается до тождественного отображения $R \rightarrow \tilde{R}$.

Отображение β индуцирует аддитивное отображение $\mathbf{k}[\text{st}_S \sigma] \rightarrow \mathbf{k}[\text{st}_{\tilde{S}} v]$, и нашим следующим наблюдением будет то, что это есть кольцевой гомоморфизм. Так как кольцо $\mathbf{k}[\text{st}_S \sigma]$ порождается элементами степени два, нам необходимо проверить, что β обращается в нуль на мономах из идеала Стенли–Риснера (см. определение 2.1.1), т.е. $\beta(\mathcal{I}_{\text{st}_S \sigma}) \subset \mathcal{I}_{\text{st}_{\tilde{S}} v}$. Пусть $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}\}$ — минимальный несимплекс (недостающая грань) комплекса $\text{st}_S \sigma$. Тогда мы имеем $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}\} \cap V(\sigma) = \emptyset$ по определению звезды. Следовательно, $\beta(v_{i_1} \cdots v_{i_\ell}) = v_{i_1} \cdots v_{i_\ell}$, что попадает в $\mathcal{I}_{\text{st}_{\tilde{S}} v}$.

Теперь мы имеем диаграмму с точными строками:

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & \mathbf{k}[\mathcal{S}] & \xrightarrow{p} & \mathbf{k}[\text{st}_S \sigma] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \beta & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{R} & \longrightarrow & \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}] & \xrightarrow{\tilde{p}} & \mathbf{k}[\text{st}_{\tilde{S}} v] \longrightarrow 0, \end{array}$$

в которой левая и правая вертикальные стрелки являются кольцевыми гомоморфизмами. Нам необходимо проверить, что $\beta(x_1 x_2) = \beta(x_1) \beta(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{k}[\mathcal{S}]$. Так как $\mathbf{k}[\mathcal{S}] = R \oplus \mathbf{k}[\text{st}_S \sigma]$ как \mathbf{k} -модули, мы можем записать $x_i = r_i + s_i$ с $r_i \in R$, $s_i \in \mathbf{k}[\text{st}_S \sigma]$, $i = 1, 2$. Для любого $s \in \mathbf{k}[\text{st}_S \sigma]$ мы имеем $\beta(s) = s + vx$ с некоторым $x \in \mathbf{k}[\text{st}_{\tilde{S}} v]$, причём $rv = 0$ в $\mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$ для любого $r \in \tilde{R}$. Заметим, что $rs \in R$ для любых $r \in R$ и $s \in \mathbf{k}[\text{st}_S \sigma]$, т.к. R — идеал. Тогда

$$\begin{aligned} \beta(x_1 x_2) &= \beta(r_1 r_2 + r_1 s_2 + r_2 s_1 + s_1 s_2) = \\ &= r_1 r_2 + r_1 s_2 + r_2 s_1 + \beta(s_1 s_2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\beta(x_1)\beta(x_2) &= (r_1 + \beta(s_1))(r_2 + \beta(s_2)) = \\ &= r_1r_2 + r_1\beta(s_2) + r_2\beta(s_1) + \beta(s_1)\beta(s_2).\end{aligned}$$

Так как $r_1\beta(s_2) = r_1(s_2 + vx_2) = r_1s_2$, $r_2\beta(s_1) = r_2s_1$ и $\beta(s_1s_2) = \beta(s_1)\beta(s_2)$, мы получаем $\beta(x_1x_2) = \beta(x_1)\beta(x_2)$. Следовательно, β — кольцевой гомоморфизм.

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму отображений ограничения (см. теорему 2.5.6):

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{k}[\mathcal{S}] & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}] \\ s \downarrow & & s \downarrow \\ \bigoplus_{\zeta \in \mathcal{S}} \mathbf{k}[\mathcal{S}]/(v_\tau: \tau \not\leq \zeta) & \xrightarrow{s(\beta)} & \bigoplus_{\zeta \in \tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]/(v_\tau: \tau \not\leq \zeta), \end{array}$$

в которой вертикальные отображения являются мономорфизмами. Нижняя стрелка $s(\beta)$ отображает каждое прямое слагаемое изоморфно на хотя бы одно прямое слагаемое и поэтому является мономорфизмом. Следовательно, β также мономорфно. Наконец, утверждение о системах параметров вытекает из рассмотрения диаграммы (2.9) и леммы 2.6.3. \square

Заметим, что если бы мы задали отображение β на образующих v_i тождественно для $1 \leq i \leq k$, то оно было бы по-прежнему корректно определено как отображение колец $\mathbf{k}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$, но не было бы мономорфизмом.

ПРИМЕР 2.6.7. Имеются простые симплицально клеточные комплексы, для которых предположение леммы 2.6.6 о звезде симплекса не выполняется. Например, рассмотрим симплицально клеточный комплекс \mathcal{S} , получаемый отождествлением двух 2-симплексов вдоль их границ. Тогда звезда любого 1-симплекса будет совпадать со всем \mathcal{S} и не будет симплицальным комплексом. Тем не менее, при барицентрическом подразбиении комплекса \mathcal{S} мы в начале производим звёздные подразбиения относительно 2-мерных симплексов, а в полученном комплексе звёзды 1-симплексов уже будут симплицальными комплексами.

Заметим также, что если $st_{\mathcal{S}}\sigma$ не является симплицальным комплексом, то отображение $\beta: \mathbf{k}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$ уже не будет однозначно задаваться образами элементов из леммы 2.6.6. Тем не менее, отображение $\beta: \mathbf{k}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$ можно определить для произвольного симплицально клеточного комплекса; мы вернёмся к этому вопросу в разделе 5.9.

ЛЕММА 2.6.8. Пусть $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ — кольцо Коэна–Маколея, а $\tilde{\mathcal{S}}$ — звёздное подразбиение комплекса \mathcal{S} относительно симплекса σ , для которого $st_{\mathcal{S}}\sigma$ является симплицальным комплексом. Тогда

- а) $\text{st}_{\mathcal{S}} \sigma$ является комплексом Коэна–Маколея;
 б) $\mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$ является кольцом Коэна–Маколея.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $\text{st}_{\mathcal{S}} \sigma = \sigma * \text{lk}_{\mathcal{S}} \sigma$, достаточно доказать, что $\text{lk}_{\mathcal{S}} \sigma$ является симплициальным комплексом Коэна–Маколея. Это вытекает из теоремы Риснера (теорема 2.3.4) и того факта, что группы симплициальных гомологий комплекса $\text{lk}_{\mathcal{S}} \sigma$ являются прямыми слагаемыми в группах локальных когомологий кольца $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ (см. [St96, Th. II.4.1] или [BH98, Th. 5.3.8]).

б) Выберем систему параметров $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbf{k}[\mathcal{S}]$ и обозначим $\tilde{\theta}_i = \beta(\theta_i)$. Применив функторы $-\otimes_{\mathbf{k}[\theta_1, \dots, \theta_n]} \mathbf{k}$ и $-\otimes_{\mathbf{k}[\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n]} \mathbf{k}$ к диаграмме (2.8), мы получим отображение между длинными точными последовательностями для Tor . Рассмотрим следующий фрагмент (мы обозначили $\text{Tor}_{\theta} = \text{Tor}_{\mathbf{k}[\theta_1, \dots, \theta_n]}$):

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Tor}_{\theta}^{-2}(\mathbf{k}[\text{st } \sigma], \mathbf{k}) & \xrightarrow{f} & \text{Tor}_{\theta}^{-1}(R, \mathbf{k}) & \rightarrow & \text{Tor}_{\theta}^{-1}(\mathbf{k}[\mathcal{S}], \mathbf{k}) & \rightarrow & \text{Tor}_{\theta}^{-1}(\mathbf{k}[\text{st } \sigma], \mathbf{k}) \\ \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Tor}_{\tilde{\theta}}^{-2}(\mathbf{k}[\text{st } v], \mathbf{k}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Tor}_{\tilde{\theta}}^{-1}(\tilde{R}, \mathbf{k}) & \rightarrow & \text{Tor}_{\tilde{\theta}}^{-1}(\mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}], \mathbf{k}) & \rightarrow & \text{Tor}_{\tilde{\theta}}^{-1}(\mathbf{k}[\text{st } v], \mathbf{k}). \end{array}$$

Так как $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ — кольцо Коэна–Маколея, мы имеем $\text{Tor}_{\theta}^{-1}(\mathbf{k}[\mathcal{S}], \mathbf{k}) = 0$, т.е. отображение f эпиморфно. Тогда \tilde{f} также эпиморфно. Так как $\text{st}_{\mathcal{S}} \sigma$ (и $\text{st}_{\tilde{\mathcal{S}}} v$) является симплициальным комплексом и $|\text{st}_{\mathcal{S}} \sigma| \cong |\text{st}_{\tilde{\mathcal{S}}} v|$, из уже доказанного утверждения а) и предложения 2.3.5 вытекает, что $\mathbf{k}[\text{st } v]$ также является кольцом Коэна–Маколея. Следовательно, $\text{Tor}_{\tilde{\theta}}^{-1}(\mathbf{k}[\text{st } v], \mathbf{k}) = 0$. Так как отображение \tilde{f} эпиморфно, мы также имеем $\text{Tor}_{\tilde{\theta}}^{-1}(\mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}], \mathbf{k}) = 0$. Следовательно, $\mathbf{k}[\tilde{\mathcal{S}}]$ является свободным модулем над $\mathbf{k}[\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n]$ (см. [Ma63, Лемма VII.6.2]) и поэтому является кольцом Коэна–Маколея. \square

ТЕОРЕМА 2.6.9. *Симплициальное частично упорядоченное множество \mathcal{S} обладает свойством Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда кольцо граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея. Так как барицентрическое подразбиение \mathcal{S}' получается как композиция звёздных подразбиений, последовательно приложение леммы 2.6.8 показывает, что $\mathbf{k}[\mathcal{S}']$ также является кольцом Коэна–Маколея. По определению это означает, что \mathcal{S} — симплициальное частично упорядоченное множество Коэна–Маколея. Обратное утверждение доказано в [St91, Cor. 3.7]. \square

В завершение этого раздела мы приведём доказательство результата о характеристизации h -векторов симплициально клеточных комплексов Коэна–Маколея.

ТЕОРЕМА 2.6.10 ([St91, Th. 3.10]). *Целочисленный вектор $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ является h -вектором симплициально клеточного*

комплекса Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда $h_0 = 1$ и $h_i \geq 0$ для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathcal{S})$ для некоторого симплициально клеточного комплекса Коэна–Маколея \mathcal{S} . Условие $h_0 = 1$ непосредственно вытекает из соотношения (1.8). Пусть t_1, \dots, t_n — линейная система параметров в $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$. Сравнивая формулу (II.2) с формулой из теоремы 2.5.9, мы получаем

$$h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n} = F(\mathbf{k}[\mathcal{S}]/(t_1, \dots, t_n); t).$$

Следовательно, $h_i \geq 0$, что и требовалось.

Теперь мы построим симплициально клеточный комплекс Коэна–Маколея \mathcal{S} с любым наперёд заданным h -вектором таким, что $h_0 = 1$ и $h_i \geq 0$. Для начала заметим, что $\mathbf{h}(\Delta^{n-1}) = (1, 0, \dots, 0)$ и Δ^{n-1} — симплициально клеточный комплекс Коэна–Маколея. Далее, пусть \mathcal{S} — симплициально клеточный комплекс Коэна–Маколея размерности $(n-1)$ с h -вектором (h_0, \dots, h_n) . Для каждого $k = 1, \dots, n$ мы построим новый симплициально клеточный комплекс Коэна–Маколея \mathcal{S}_1 с h -вектором

$$(2.10) \quad \mathbf{h}(\mathcal{S}_1) = (h_0, \dots, h_{k-1}, h_k + 1, h_{k+1}, \dots, h_n)$$

и тем самым завершим доказательство. Выберем в комплексе \mathcal{S} некоторый $(n-1)$ -симплекс и в этом симплексе выберем некоторые k граней размерности $(n-2)$. Приклеим к \mathcal{S} новый $(n-1)$ -симплекс путём отождествления некоторых k его $(n-2)$ -граней с выбранными $(n-2)$ -гранями в комплексе \mathcal{S} . Непосредственная проверка показывает, что имеет место соотношение (2.10). Тот факт, что \mathcal{S}_1 является симплициально клеточным комплексом Коэна–Маколея, вытекает из предложения 2.3.5. \square

2.7. Горенштейновы симплициально клеточные комплексы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7.1. Симплициально клеточный комплекс \mathcal{S} называется *горенштейновым* (*горенштейновым**), если барицентрическое подразделение \mathcal{S}' является горенштейновым (*горенштейновым**) симплициальным комплексом.

Как и в случае свойства Коэна–Маколея, свойство горенштейновости* зависит лишь от топологии пространства $|\mathcal{S}|$ (это вытекает из очевидного аналога предложения 2.3.5 для горенштейновых* симплициальных комплексов). В частности, симплициально клеточные разбиения сфер являются горенштейновыми* комплексами.

Вопрос о характеристизации h -векторов горенштейновых* симплициально клеточных комплексов несколько тоньше, чем аналогичный вопрос для множеств Коэна–Маколея, хотя и существенно проще, чем соответствующий вопрос для горенштейновых* симплициальных комплексов. Последний вопрос остаётся открытым и по сей

день даже для триангуляций сфер, и представляет собой одну из основных проблем комбинаторной геометрии. В случае триангуляций сфер, получаемых как границы выпуклых многогранников, характеристика h -векторов получена в работах Биллеры–Ли и Стенли в 1980 году с использованием торических многообразий.

ТЕОРЕМА 2.7.2. Пусть $\mathbf{h}(\mathcal{S}) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ — h -вектор горенштейнового* симплициального частично упорядоченного множества \mathcal{S} размерности $(n - 1)$. Тогда $h_0 = 1$, $h_i \geq 0$ и $h_i = h_{n-i}$ для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства $h_i \geq 0$ вытекают из того, что \mathcal{S} является симплициально клеточным комплексом Коэна–Маколея (теорема 2.6.10). Доказательство соотношений Дена–Соммервилля $h_i = h_{n-i}$ мы получим, выразив h -вектор барицентрического подразделения \mathcal{S}' через $\mathbf{h}(\mathcal{S})$ и использовав соотношения Дена–Соммервилля для горенштейнова* симплициального комплекса \mathcal{S}' . Действительно, повторяя рассуждение из лемм 1.5.2 и 1.5.3 мы получаем соотношение $\mathbf{h}(\mathcal{S}') = D\mathbf{h}(\mathcal{S})$, причём вектор $\mathbf{h}(\mathcal{S}')$ симметричен, т.е. удовлетворяет соотношениям Дена–Соммервилля. Рутинная проверка с использованием известных биномиальных тождеств показывает, что матрица D (и её обратная) переводит симметричные векторы в симметричные (это эквивалентно тому, что $d_{pq} = d_{n+1-p, n+1-q}$, т.е. матрица D центрально симметрична). Однако это можно доказать и не прибегая к вычислениям, и даже не используя явный вид матрицы D из леммы 1.5.3. Действительно, соотношения Дена–Соммервилля выделяют в пространстве \mathbb{R}^{n+1} (с координатами h_0, \dots, h_n) линейное подпространство W размерности $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ (или аффинное пространство размерности $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ если мы добавим соотношение $h_0 = 1$). Нам необходимо проверить инвариантность этого подпространства относительно обратимого линейного оператора D . Для этого достаточно выбрать в W любой базис e_1, \dots, e_k и проверить, что $De_i \in W$ для всех i . Но подпространство W допускает базис из h -векторов симплициальных сфер (и даже симплициальных многогранников, см. доказательство предложения 1.2.6). Так как барицентрическое разбиение симплициальной сферы есть снова симплициальная сфера, образы De_i , $1 \leq i \leq k$, также удовлетворяют соотношениям Дена–Соммервилля. Следовательно, подпространство W является D -инвариантным. Отсюда вытекает, что вектор $\mathbf{h}(\mathcal{S}) = D^{-1}\mathbf{h}(\mathcal{S}')$ является симметричным \square

ТЕОРЕМА 2.7.3 ([St91, Th. 4.3]). Пусть $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ — целочисленный вектор с $h_0 = 1$, $h_i \geq 0$ и $h_i = h_{n-i}$. Каждое из следующих условий является достаточным для существования горенштейнового* симплициально клеточного комплекса \mathcal{S} размерности $(n - 1)$ с h -вектором \mathbf{h} :

- а) n нечётно;
- б) n чётно и $h_{n/2}$ чётно;
- в) n чётно, $h_{n/2}$ нечётно и $h_i > 0$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим два базовых примера симплициально клеточных разбиений сферы: $\partial\Delta^n$ — граница n -симплекса, имеющая h -вектор $\mathbf{h}(\partial\Delta^n) = (1, 1, \dots, 1)$, и \mathcal{K}_n — симплициально клеточный комплекс, получаемый отождествлением двух $(n-1)$ -мерных симплексов по их границам (пример 1.7.2), для которого $\mathbf{h}(\mathcal{K}_n) = (1, 0, \dots, 0, 1)$. При помощи стандартных операций соединения и связной суммы (см. конструкции 1.6.1 и 1.6.3, непосредственно обобщаемые на симплициально клеточные комплексы) мы построим из этих двух примеров симплициально клеточный комплекс с любым h -вектором, удовлетворяющим условиям из теоремы. Действительно, при $k \neq n-k$ мы имеем

$$\mathbf{h}(\mathcal{K}_k * \mathcal{K}_{n-k}) = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1),$$

где $h_k = h_{n-k} = 1$. В то же время, при чётном $n = 2k$ имеем

$$\mathbf{h}(\mathcal{K}_k * \mathcal{K}_k) = (1, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0, 1),$$

где $h_k = 2$. Далее, беря связную сумму нужного количества комплексов $\partial\Delta^n$, \mathcal{K}_n и $\mathcal{K}_k * \mathcal{K}_{n-k}$ и используя соотношение

$$h_i(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) = h_i(\mathcal{S}_1) + h_i(\mathcal{S}_2), \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

имеющее место для любых горенштейновых* симплициально клеточных комплексов \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 размерности $(n-1)$ (см. пример 1.2.4), мы получим любой нужный h -вектор. \square

Для завершения характеристики h -векторов горенштейновых* симплициально клеточных комплексов необходимо получить следующее утверждение, которое было высказано Стенли в качестве гипотезы в [St91] и полностью доказано Масудой в [Ma05].

ТЕОРЕМА 2.7.4. Пусть $\mathbf{h}(\mathcal{S}) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ — h -вектор горенштейнового* симплициально клеточного комплекса \mathcal{S} размерности $(n-1)$, причём n — чётно и $h_i = 0$ для некоторого i . Тогда число $h_{n/2}$ чётно.

В разделе 5.7 мы приведём доказательство этого результата для h -векторов тех горенштейновых* симплициально клеточных комплексов, которые происходят из пространств орбит действий тора на многообразиях. Это доказательство было получено в [MP06] топологическими методами. Доказательство Масуды общего утверждения опирается на несколько иные, хотя и близкие, методы.

Теоремы 2.7.2, 2.7.3 и 2.7.4 дают полную характеристику h -векторов горенштейновых* симплициально клеточных комплексов (и, в частности, симплициально клеточных разбиений сфер).

2.8. Обобщенные соотношения Дена–Соммервилля

В этом разделе мы выведем обобщённые соотношения Дена–Соммервилля для симплициально клеточных комплексов. Особый интерес представляют эти соотношения для триангуляций многообразий, см. следствие 2.8.2.

Пусть \mathcal{S} — симплициальное частично упорядоченное множество ранга n (т.е. размерности $n - 1$). Рассмотрим подмножество $\mathcal{S}_{\geq \sigma} = \{\tau \in \mathcal{S} : \tau \geq \sigma\}$ с индуцированным отношением частичного порядка и функцией ранга. Для каждого элемента $\sigma \in \mathcal{S}$ положим

$$(2.11) \quad \chi(\mathcal{S}_{\geq \sigma}) := \sum_{\tau \geq \sigma} (-1)^{\text{rank } \tau - 1}.$$

ТЕОРЕМА 2.8.1. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{i=0}^n (h_{n-i} - h_i) t^i = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \left(1 + (-1)^n \chi(\mathcal{S}_{\geq \sigma}) \right) (t-1)^{n-\text{rank } \sigma}.$$

В частности, соотношения Дена–Соммервилля $h_i = h_{n-i}$ имеют место, если $\chi(\mathcal{S}_{\geq \sigma}) = (-1)^{n-1}$ для любого $\sigma \in \mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^n h_i t^i &= t^n \sum_{i=0}^n h_i (1/t)^{n-i} = t^n \sum_{i=0}^n f_{i-1} ((1-t)/t)^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n f_{i-1} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}} t^{\text{rank } \tau} (1-t)^{n-\text{rank } \tau} = \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \leq \tau} (t-1)^{\text{rank } \tau - \text{rank } \sigma} (1-t)^{n-\text{rank } \tau} = \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \leq \tau} (-1)^{n-\text{rank } \tau} (t-1)^{n-\text{rank } \sigma} = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} (t-1)^{n-\text{rank } \sigma} \sum_{\tau \geq \sigma} (-1)^{n-\text{rank } \tau} = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} (t-1)^{n-\text{rank } \sigma} (-1)^{n-1} \chi(\mathcal{S}_{\geq \sigma}), \end{aligned}$$

где во втором равенстве мы воспользовались соотношением (1.8), в пятом равенстве — биномиальным разложением для правой части соотношения $t^{\text{rank } \tau} = ((t-1) + 1)^{\text{rank } \tau}$, а в последнем равенстве — соотношением (2.11).

С другой стороны, мы имеем

$$(2.13) \quad \sum_{i=0}^n h_{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n h_i t^{n-i} = \sum_{i=0}^n f_{i-1} (t-1)^{n-i} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} (t-1)^{n-\text{rank } \sigma}.$$

Вычитая (2.12) из (2.13), получаем требуемое соотношение. \square

Симплициальные частично упорядоченные множества \mathcal{S} , для которого выполнены соотношения $\chi(\mathcal{S}_{\geq \sigma}) = (-1)^{n-1}$ для любого $\sigma \in \mathcal{S}$, называются *эйлеровыми*. Всякое горенштейново* частично упорядоченное множество является эйлеровым. Соотношения Дена–Соммервилля $h_i = h_{n-i}$ для эйлеровых частично упорядоченных множеств уже были известны [St86, (3.40)].

СЛЕДСТВИЕ 2.8.2. Пусть \mathcal{K} — симплициальное разбиение замкнутого $(n-1)$ -мерного многообразия. Тогда имеют место соотношения

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i C_n^i (\chi(\mathcal{K}) - \chi(S^{n-1})), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Здесь $\chi(\mathcal{K}) = f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1} h_n$ — эйлерова характеристика комплекса \mathcal{K} и $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая \mathcal{K} как частично упорядоченное множество симплексов, мы вычисляем

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{S}_{\geq \sigma}) &= \sum_{\tau > \sigma} (-1)^{\text{rank } \tau - 1} + (-1)^{\text{rank } \sigma - 1} = \\ &= (-1)^{\text{rank } \sigma} \left(\sum_{\tau > \sigma} (-1)^{\text{rank } \tau - \text{rank } \sigma - 1} - 1 \right) = \\ &= (-1)^{\text{rank } \sigma} \left(\sum_{\emptyset \neq \rho \in \text{lk}_{\mathcal{K}} \sigma} (-1)^{\dim \rho} - 1 \right) = (-1)^{\text{rank } \sigma} (\chi(\text{lk}_{\mathcal{K}} \sigma) - 1). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что так как \mathcal{K} — симплициальный комплекс, частично упорядоченное множество непустых симплексов комплекса $\text{lk}_{\mathcal{K}} \sigma$ изоморфно $\mathcal{S}_{> \sigma}$ со сдвинутой функцией ранга. Далее, так как \mathcal{K} является триангуляцией замкнутого $(n-1)$ -мерного многообразия, линк каждого непустого симплекса σ является гомологической сферой размерности $(n - \text{rank } \sigma - 1)$. Следовательно, $\chi(\text{lk}_{\mathcal{K}} \sigma) = 1 + (-1)^{n - \text{rank } \sigma - 1}$ и $\chi(\mathcal{S}_{\geq \sigma}) = (-1)^{n-1}$ при $\sigma \neq \emptyset$. Кроме того, $\text{lk}_{\mathcal{K}} \emptyset = \mathcal{K}$. Используя соотношение из теоремы 2.8.1, мы вычисляем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (h_{n-i} - h_i) t^i &= (1 + (-1)^n (\chi(\mathcal{K}) - 1)) (t-1)^n = \\ &= (-1)^n (\chi(\mathcal{K}) - \chi(S^{n-1})) (t-1)^n. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при t^i в обеих частях равенства, мы получаем требуемое соотношение. \square

Соотношения из следствия 2.8.2 были впервые получены в работе [БП00-2, Сл. 4.5.5] как следствие биградуированной двойственности Пуанкаре для момент-угол-комплексов. Заметим, что они сводятся к классическим соотношениям $h_{n-i} = h_i$ в случае, когда \mathcal{K} является триангуляцией сферы или имеет нечётную размерность.

Торические многообразия

В этой главе мы приступаем к изучению действий тора на многообразиях. Здесь мы рассматриваем алгебраические *торические многообразия*, на которых действие компактного тора возникает как часть действия большей группы — алгебраического тора, имеющего плотную орбиту. Комбинаторная структура в пространстве орбит описывается при помощи понятия веера и полностью восстанавливает торическое многообразие.

Эта глава в основном посвящена изложению известных конструкций и играет мотивирующую роль для конструкций и результатов следующих глав. Мы приводим три основных конструкции торических многообразий — при помощи вееров, при помощи факторизации открытого подмножества в \mathbb{C}^m по действию алгебраического тора, и при помощи метода симплектической редукции; мы также описываем взаимосвязи между этими тремя конструкциями. Новым здесь является раздел 3.3.2, где мы излагаем новый взгляд на многообразие уровня отображения моментов и вводим понятие *момент-угол-многообразия*. Этот подход был впервые изложен в работе [BPR07] Бухштабера, Рэя и автора.

В этой и последующей главах нам понадобится ряд сведений из общей теории действий компактных групп на многообразиях, которые мы собрали в отдельном приложении III. Подробное изложение этой теории можно найти, например, в монографии [Br72].

3.1. Классическая конструкция

Торические многообразия как класс алгебраических многообразий впервые возникли в алгебраической геометрии в начале 1970-х годов в связи с задачами эквивариантной компактификации действий алгебраического тора. Геометрия торических многообразий, или «торическая геометрия», очень быстро превратилась в один из самых привлекательных разделов алгебраической геометрии и нашла приложения во многих других областях исследований, которые до этого казались весьма далёкими друг от друга.

Торическая геометрия является разделом алгебраической геометрии, и здесь *тором* обычно называется коммутативная алгебраическая группа $T_{\mathbb{C}}$, изоморфная произведению $(\mathbb{C}^{\times})^n$ нескольких

экземпляров мультипликативной группы $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ комплексных чисел. Однако согласно классическому определению, принятому и в топологии, n -мерным *тором* T называется компактная абелева группа Ли, изоморфная произведению n окружностей. Мы будем следовать топологической терминологии, а коммутативные алгебраические группы $T_{\mathbb{C}}$ будем называть *алгебраическими торами*. Тор T можно отождествить с факторгруппой $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ или с компактной подгруппой в стандартном алгебраическом торе $(\mathbb{C}^\times)^n$:

$$(3.1) \quad T \cong \mathbb{T}^n = \{(e^{2\pi i\varphi_1}, \dots, e^{2\pi i\varphi_n}) \in \mathbb{C}^n\}$$

(где $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ пробегает пространство \mathbb{R}^n), однако без особой необходимости мы не будем фиксировать такое отождествление.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. *Торическим многообразием* называется нормальное комплексное алгебраическое многообразие X , содержащее алгебраический тор $T_{\mathbb{C}}$ в качестве открытого по Зарисскому подмножества таким образом, что естественное действие $T_{\mathbb{C}}$ на себе продолжается до действия на всём X .

Таким образом, $T_{\mathbb{C}}$ действует на X с плотной орбитой. Исторически торические многообразия возникли как эквивариантные компактификации алгебраического тора $T_{\mathbb{C}}$, но со временем стали рассматривать и некомпактные торические многообразия.

ПРИМЕР 3.1.2. Простейшими примерами торических многообразия являются алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ и аффинное пространство \mathbb{C}^n . Примером компактного многообразия является комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$, на котором тор действует в однородных координатах следующим образом:

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_0 : z_1 : \dots : z_n) = (z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n).$$

3.1.1. Аффинные торические многообразия. Одним из замечательных свойств торических многообразий является то, что их глубокие алгебро-геометрические свойства описываются на языке комбинаторики и выпуклой геометрии. А именно, имеется взаимно однозначное соответствие между веерами в $N_{\mathbb{R}}$ (см. определение 1.3.1) и торическими многообразиями с действием алгебраического тора $T_{\mathbb{C}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$. Ниже мы кратко изложим соответствующую конструкцию; детали можно найти в [Fu93, Ch. 1].

КОНСТРУКЦИЯ 3.1.3. Сначала покажем, как по конусу $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ построить аффинное торическое многообразие. Рассмотрим двойственный конус $\check{\sigma} \subset N_{\mathbb{R}}^*$ и его множество целых точек $S_{\sigma} := \check{\sigma} \cap N^*$. Тогда S_{σ} является конечно порождённой полугруппой (относительно сложения). Эта полугруппа определяет групповое кольцо $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$, которое является коммутативной \mathbb{C} -алгеброй. Как комплексное векторное пространство, алгебра $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ имеет базис $\{\chi^{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in S_{\sigma}\}$.

Умножение определяется при помощи сложения в S_σ :

$$\chi^{\mathbf{u}} \cdot \chi^{\mathbf{u}'} := \chi^{\mathbf{u}+\mathbf{u}'},$$

а единицей является элемент χ^0 . Конечно порождённой коммутативной \mathbb{C} -алгебре $\mathbb{C}[S_\sigma]$ стандартным образом сопоставляется аффинное алгебраическое многообразие:

$$V_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]),$$

которое называется *аффинным торическим многообразием*, соответствующим конусу σ . Таким образом, если в алгебре $\mathbb{C}[S_\sigma]$ выбрать набор образующих и тем самым представить её в виде факторалгебры кольца многочленов:

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]/\mathcal{I},$$

то V_σ можно отождествить с подмногообразием общих нулей многочленов из идеала \mathcal{I} . Точки многообразия V_σ можно отождествить с гомоморфизмами полугрупп $\text{Hom}_{\text{sg}}(S_\sigma, \mathbb{C}_m)$, где $\mathbb{C}_m = \mathbb{C}^\times \cup \{0\}$ — мультипликативная полугруппа комплексных чисел.

Если τ — грань конуса σ , то мы имеем отображение $V_\tau \rightarrow V_\sigma$, которое является вложением открытого (по Зарисскому) подмножества. Это позволяет склеить аффинные многообразия V_σ , соответствующие всем конусам $\sigma \in \Sigma$ некоторого веера Σ в одно алгебраическое многообразие V_Σ , которое и называется *торическим многообразием*, соответствующим вееру Σ . Более формально, V_Σ можно определить как *копредел* в категории алгебраических многообразий V_σ по частично упорядоченному множеству конусов из Σ :

$$V_\Sigma := \text{colim}_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma.$$

На многообразии V_σ имеется действие алгебраического тора:

$$T_{\mathbb{C}} \times V_\sigma \rightarrow V_\sigma,$$

которое задано следующим образом. Точки $\mathbf{t} \in T_{\mathbb{C}}$ задаются гомоморфизмами групп $N^* \rightarrow \mathbb{C}^\times$, а точки $x \in V_\sigma$ — гомоморфизмами полугрупп $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}_m$. Тогда определим $\mathbf{t} \cdot x$ как точку в V_σ , соответствующую отображению полугрупп $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}_m$, заданному как

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{u})x(\mathbf{u}).$$

Двойственный гомоморфизм алгебр $\mathbb{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma] \otimes \mathbb{C}[N^*]$ отображает $\chi^{\mathbf{u}}$ в $\chi^{\mathbf{u}} \otimes \chi^{\mathbf{u}}$ для $\mathbf{u} \in S_\sigma$. Если $\sigma = \{0\}$, то мы получаем умножение в алгебраической группе $T_{\mathbb{C}}$. Действия тора на многообразиях V_σ согласованы с вложениями открытых подмножеств, соответствующих граням конуса. Таким образом, для любого веера Σ мы получаем $T_{\mathbb{C}}$ -действие на многообразии V_Σ , которое продолжает $T_{\mathbb{C}}$ -действие на себе.

ПРИМЕР 3.1.4. Пусть $N = \mathbb{Z}^n$ и σ — конус, порождённый k базисными векторами e_1, \dots, e_k , $0 \leq k \leq n$. Полугруппа S_σ порождена элементами e_1^*, \dots, e_k^* и $\pm e_{k+1}^*, \dots, \pm e_n^*$. Следовательно,

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+1}^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}],$$

где мы положили $x_i := \chi^{e_i^*}$. Таким образом, соответствующее аффинное многообразие имеет вид

$$V_\sigma \cong \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \times \dots \times \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{n-k}.$$

В частности, при $k = n$ мы получаем n -мерное аффинное пространство, а при $k = 0$ (т.е. $\sigma = \{0\}$) получаем алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$.

ПРИМЕР 3.1.5. Пусть $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ — конус, порождённый векторами e_2 и $2e_1 - e_2$ (заметим, что этот конус не является неособым). Тогда двойственный конус $\check{\sigma}$ порождён векторами e_1^* и $e_1^* + 2e_2^*$. В качестве образующих полугруппы S_σ можно взять e_1^* , $e_1^* + e_2^*$ и $e_1^* + 2e_2^*$. Таким образом,

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x, xy, xy^2] \cong \mathbb{C}[u, v, w]/(v^2 - uw),$$

а V_σ является особым многообразием (конусом над кривой второго порядка).

ПРИМЕР 3.1.6. Рассмотрим полный веер Σ в \mathbb{R}^2 , имеющий три максимальных конуса: конус σ_0 порождён векторами e_1 и e_2 , конус σ_1 порождён векторами e_2 и $-e_1 - e_2$, и конус σ_2 порождён векторами $-e_1 - e_2$ и e_1 . Тогда каждое аффинное многообразие V_{σ_i} изоморфно \mathbb{C}^2 , с координатами (x, y) для σ_0 , $(x^{-1}, x^{-1}y)$ для σ_1 и (y^{-1}, xy^{-1}) для σ_2 . Эти три аффинные карты склеиваются в комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ стандартным образом: если $(z_0 : z_1 : z_2)$ — однородные координаты в $\mathbb{C}P^2$, то мы имеем $x = z_1/z_0$ и $y = z_2/z_0$.

ПРИМЕР 3.1.7. Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим полный неособый веер в \mathbb{R}^2 , имеющий 4 двумерных конуса, порождённых парами векторов (e_1, e_2) , $(e_1, -e_2)$, $(-e_1 + ke_2, -e_2)$ и $(-e_1 + ke_2, e_2)$. Можно доказать, что соответствующее торическое многообразие есть *поверхность Хирцебруха* F_k , т.е. комплексная проективизация $\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}(k))$ (см. также раздел 4.10). Здесь $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное одномерное расслоение, а $\mathcal{O}(k) = \gamma^{\otimes k}$, где γ — каноническое расслоение гиперплоского сечения над $\mathbb{C}P^1$ (мы также имеем $\gamma = \bar{\eta}$, где η — расслоение Хопфа). Можно доказать, что многообразие F_k гомеоморфно $S^2 \times S^2$ при чётном k и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ при нечётном k (здесь $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией).

Частично упорядоченное по включению множество замыканий орбит $T_{\mathbb{C}}$ -действия на V_Σ изоморфно частично упорядоченному

множеству граней веера Σ относительно обратного включения. Таким образом, k -мерные конусы веера Σ соответствуют орбитам размерности k действия алгебраического тора на V_Σ . В частности, n -мерные конусы соответствуют неподвижным точкам, а 0-мерный конус соответствует единственной плотной орбите. Кроме того, если некоторый веер комбинаторно вкладывается в больший веер, то соответствующее торическое многообразие эквивариантно вкладывается в большее в качестве открытого по Зарисскому множества.

Торическое многообразие V_Σ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ является полным (см. определение 1.3.1). Если Σ является симплицальным веером, то V_Σ является *орбиобразимом*, т.е. локально гомеоморфно факторпространству \mathbb{R}^{2n} по действию конечной группы. Наконец, многообразие V_Σ является неособым (гладким) тогда и только тогда, когда веер Σ является неособым.

3.1.2. Проективные торические многообразия.

КОНСТРУКЦИЯ 3.1.8 (проективные торические многообразия). Рассмотрим целочисленный многогранник $P \subset N_{\mathbb{R}}^*$ и соответствующий нормальный веер Σ_P (см. конструкцию 1.3.2). Он имеет по одному максимальному конусу σ_v на каждую вершину $v \in P$ многогранника. Двойственный конус $\check{\sigma}_v$ отождествляется с «конусом при вершине v », который порождён векторами, соединяющими вершину v с точками многогранника P .

Определим торическое многообразие $V_P := V_{\Sigma_P}$. Так как нормальный веер Σ_P не зависит от линейных размеров многогранника, можно предположить, что для каждой вершины v полугруппа S_{σ_v} (см. конструкцию 3.1.3) порождается целыми точками из многогранника (этого всегда можно достичь, заменив P на многогранник kP с достаточно большим k). Отождествим точки решётки N^* с характеристиками алгебраического тора $T_{\mathbb{C}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$, т.е. с элементами группы $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}^n$. Тогда целые точки из многогранника P определяют вложение тора $T_{\mathbb{C}}$ в тор $(\mathbb{C}^\times)^{|N^* \cap P|}$ (здесь $|N^* \cap P|$ — число целых точек в P). При этом можно показать [Fu93, §3.4], что торическое многообразие V_P отождествляется с проективным замыканием образа тора $T_{\mathbb{C}}$ при этом вложении. В частности, многообразие V_P *проективно* (является подмногообразием в $\mathbb{C}P^{|N^* \cap P|}$). Таким образом, многообразия, происходящие из нормальных вееров, проективны. Верно и обратное: веер, соответствующий проективному торическому многообразию, является нормальным веером для некоторого целочисленного многогранника.

Следующий пример (взятый нами из [Fu93, р. 71]) показывает, что существуют полные неособые вееры, которые не являются нормальными веерами ни для каких выпуклых многогранников. Соответствующие торические многообразия, будучи компактными и неособыми, не являются проективными.

ПРИМЕР 3.1.9. Рассмотрим трёхмерный веер Σ , имеющий 7 одномерных конусов, порождённых векторами $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_6 = -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_7 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, и 10 трёхмерных конусов с вершиной 0 над гранями триангулированной границы тетраэдра на рис. 3.1. Легко видеть, что этот веер является полным и неособым. Можно доказать, что

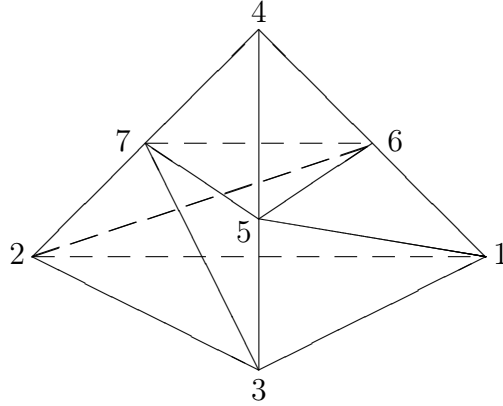


Рис. 3.1. Полный неособый веер, задающий непроективное торическое многообразие.

веер Σ нельзя получить взятием конусов над гранями выпуклого симплицеального многогранника. Тем самым Σ не является нормальным веером ни для какого простого многогранника, а гладкое компактное торическое многообразие V_Σ не является проективным.

Любой комбинаторный простой многогранник допускает выпуклую реализацию в виде многогранника с вершинами в точках целочисленной решётки. Действительно, небольшим возмущением определяющих неравенств в (1.1) можно добиться того, что ограничивающие гиперплоскости станут рациональными, а комбинаторный тип не изменится (так как гиперплоскости находятся в общем положении). В результате мы получим простой многогранник P' того же комбинаторного типа и с рациональными координатами вершин. Рассмотрев растяжение kP' для подходящего целого k мы получим многогранник с вершинами в точках решётки. Аналогично, шевеля вершины вместо гиперплоскостей, можно получить целочисленную реализацию для произвольного симплицеального многогранника. Тем не менее, эти соображения не работают для произвольных многогранников. И действительно, в каждой размерности ≥ 8 существуют комбинаторные многогранники (не являющиеся ни простыми, ни симплицеальными), которые не допускают выпуклой реализации с рациональными координатами вершин, см. [Zi95, Ex. 6.21]. В размерностях < 8 существование таких многогранников пока не известно.

Возвращаясь к простым многогранникам и торическим многообразиям, мы заметим, что торические многообразия, соответствующие различным выпуклым целочисленным реализациям данного комбинаторного многогранника, могут отличаться даже как топологические пространства. Например, все вееры, рассмотренные в примере 3.1.7 получаются как нормальные вееры к многоугольникам, комбинаторно эквивалентным квадрату, однако соответствующие торические многообразия могут быть не гомеоморфными. Кроме того, существуют комбинаторные простые многогранники, которые не допускают ни одной целочисленной реализации, задающей неособое торическое многообразие. Далее мы приведём один из таких примеров (см. пример 4.9.3).

3.2. Торические многообразия многообразия как факторпространства: конструкция Батырева–Кокса

Наряду с классической конструкцией торических многообразий, описанной в разделе 3.1, имеется другая конструкция, описывающая торические многообразия как факторпространства некоторых открытых подмножеств в \mathbb{C}^m по действию подгрупп алгебраического тора. Версии этой конструкции появлялись в работах различных авторов с начала 1990-х годов; в изложении этого раздела мы следуем работе Кокса [Co95].

Пусть Σ — веер в пространстве $N_{\mathbb{R}}$, имеющий m одномерных конусов, порождённых примитивными векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. В этом разделе мы будем предполагать, что линейная оболочка векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ совпадает с пространством $N_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим отображение $\ell: \mathbb{Z}^m \rightarrow N$, переводящее i -й вектор стандартного базиса решётки \mathbb{Z}^m в вектор $\mathbf{a}_i \in N$, для $1 \leq i \leq m$. Тогда из предыдущего условия на конусы веера вытекает, что соответствующее отображение $\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^{\times}: (\mathbb{C}^{\times})^m \rightarrow T_{\mathbb{C}}$ алгебраических торов сюръективно.

Определим группу $G = G(\Sigma)$ как ядро отображения $\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^{\times}$ (которое для простоты мы снова будем обозначать ℓ); таким образом, мы имеем точную последовательность групп

$$(3.2) \quad 1 \longrightarrow G \longrightarrow (\mathbb{C}^{\times})^m \xrightarrow{\ell} T_{\mathbb{C}} \longrightarrow 1.$$

Группа G изоморфна произведению $(\mathbb{C}^{\times})^{m-n}$ и конечной абелевой группы. Легко видеть, что если Σ — неособый веер, содержащий хотя бы один n -мерный конус, то $G \cong (\mathbb{C}^{\times})^{m-n}$.

Мы также определим максимальную компактную подгруппу $K = K(\Sigma) \subset G$ из точной последовательности

$$(3.3) \quad 1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{T}^m \xrightarrow{\ell} T \longrightarrow 1.$$

Пусть $\sigma \in \Sigma$ — некоторый конус и $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ — множество примитивных образующих его рёбер. Определим подмножество $g(\sigma) =$

$\{i_1, \dots, i_k\} \subset [m] = \{1, \dots, m\}$ и рассмотрим моном $z^{\hat{\sigma}} = \prod_{j \notin g(\sigma)} z_j$. Введём аффинное многообразие

$$Z(\Sigma) = \{z \in \mathbb{C}^m : z^{\hat{\sigma}} = 0 \text{ для всех } \sigma \in \Sigma\}$$

и его дополнение $U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus Z(\Sigma)$, которое является квазиаффинным многообразием. Для этого дополнения имеется покрытие

$$(3.4) \quad U(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma).$$

аффинными многообразиями

$$U(\sigma) = \{z \in \mathbb{C}^m : z^{\hat{\sigma}} \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C}^m : z_j \neq 0 \text{ при } j \notin g(\sigma)\}.$$

Заметим, что $U(\sigma) \cong \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{m-k}$. Каждое подмножество $U(\sigma) \subset \mathbb{C}^m$ инвариантно относительно покомординатного действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на \mathbb{C}^m , а значит $U(\Sigma)$ также инвариантно.

Как показывает следующий результат, торическое многообразие V_Σ отождествляется с факторпространством $U(\Sigma)$ по действию подгруппы $G \subset T_\mathbb{C}$ на $U(\Sigma)$ (определение геометрического и категорного факторпространства можно найти в приложении VI).

ТЕОРЕМА 3.2.1 (Кокс [Co95, Th. 2.1]). *Предположим, что линейная оболочка одномерных конусов веера Σ совпадает с $N_\mathbb{R}$.*

1. *Торическое многообразие V_Σ естественно изоморфно категорному факторпространству $U(\Sigma)//G$.*

2. *Торическое многообразие V_Σ является геометрическим факторпространством $U(\Sigma)/G$ тогда и только тогда, когда веер Σ является симплицальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что для любого конуса $\sigma \in \Sigma$ аффинное торическое многообразие V_σ изоморфно категорному факторпространству $U(\sigma)//G$. Алгебра регулярных функций $\mathbb{C}(U(\sigma))$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}[y_i, y_j^{-1} : 1 \leq i \leq m, j \notin g(\sigma)]$ и порождается лорановскими мономами $\prod_{i=1}^m y_i^{k_i}$ с $k_i \geq 0$ при $i \in g(\sigma)$.

Непосредственная проверка показывает, что моном $\prod_{i=1}^m y_i^{k_i}$ инвариантен относительно действия группы G на $U(\sigma)$ тогда и только тогда, когда он имеет вид $\prod_{i=1}^m y_i^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i \rangle}$ для некоторого $\mathbf{u} \in N^*$.

Условия $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i \rangle \geq 0$ при $i \in g(\sigma)$ в точности выделяют двойственный конус $\check{\sigma} \in N_\mathbb{R}^*$, см. (1.16). Тем самым мы доказали, что подалгебра инвариантных функций $\mathbb{C}^G(U(\sigma))$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap N^*] = \mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}(V_\sigma)$ (изоморфизм устанавливается соответствием $\prod_{i=1}^m y_i^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i \rangle} \mapsto \chi^{\mathbf{u}}$). Другими словами, $U(\sigma)//G \cong V_\sigma$.

Далее необходимо доказать, что установленные нами изоморфизмы $\mathbb{C}^G(U(\sigma)) \rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma]$ согласованы при переходе к граням конуса. Другими словами, для каждой грани $\tau \subset \sigma$ необходимо установить коммутативность диаграммы

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^G(U(\sigma)) & \longrightarrow & \mathbb{C}^G(U(\tau)) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}[S_\sigma] & \longrightarrow & \mathbb{C}[S_\tau]. \end{array}$$

По определению грани, мы имеем $\tau = \sigma \cap \mathbf{u}^\perp$ для некоторого $\mathbf{u} \in \check{\sigma} \cap N^*$, где \mathbf{u}^\perp обозначает гиперплоскость в $N_{\mathbb{R}}$ с нормальным вектором \mathbf{u} . Рассмотрим моном $\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^m y_i^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i \rangle}$. Так как $\tau = \sigma \cap \mathbf{u}^\perp$, моном $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ имеет положительный показатель при y_i для $i \in g(\sigma) \setminus g(\tau)$ и нулевой показатель при y_j для $j \in g(\tau)$. Отсюда следует, что алгебра регулярных функций $\mathbb{C}(U(\tau))$ получается из алгебры $\mathbb{C}(U(\sigma))$ локализацией по идеалу, порождённому мономом $\mathbf{y}(\mathbf{u})$, т.е. $\mathbb{C}(U(\tau)) = \mathbb{C}(U(\sigma))_{\mathbf{y}(\mathbf{u})}$. Так как моном $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ является G -инвариантным, локализация коммутирует с переходом к инвариантным подалгебрам, т.е. $\mathbb{C}^G(U(\tau)) = \mathbb{C}^G(U(\sigma))_{\mathbf{y}(\mathbf{u})}$. Аналогично, $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^{\mathbf{u}}}$. Таким образом, диаграмма (3.5) приобретает вид

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^G(U(\sigma)) & \longrightarrow & \mathbb{C}^G(U(\sigma))_{\mathbf{y}(\mathbf{u})} \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}[S_\sigma] & \longrightarrow & \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^{\mathbf{u}}}, \end{array}$$

где горизонтальные стрелки являются гомоморфизмами локализации. Эта диаграмма, очевидно, коммутативна.

Теперь, используя аффинное покрытие (3.4) и доказанное свойство согласованности изоморфизмов на аффинных многообразиях, мы получаем изоморфизм $U(\Sigma)//G \rightarrow V_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения необходимо проверить, что все орбиты действия G на $U(\Sigma)$ замкнуты тогда и только тогда, когда веер Σ является симплицальным. Это доказательство можно найти в [Со95, §2]. \square

Предыдущее доказательство также показывает, что тор $T_{\mathbb{C}}$, действующий на многообразии V_Σ , получается факторизацией тора $(\mathbb{C}^\times)^m$ по подгруппе G , см. (3.2).

Предположим теперь, что Σ — симплицальный веер. Тогда семейство подмножеств $\{g(\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ образует симплицальный комплекс на множестве вершин $[m]$, который мы обозначим \mathcal{K}_Σ . Если Σ — полный веер, то \mathcal{K}_Σ — симплицальное разбиение $(n-1)$ -мерной сферы S^{n-1} .

С каждым симплицальным комплексом \mathcal{K} на множестве $[m]$ мы свяжем *конфигурацию координатных подпространств* в \mathbb{C}^m :

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$$

и её *дополнение*

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \mathcal{A}(\mathcal{K})$$

(конфигурациям и их дополнениям у нас будет посвящён отдельный раздел 6.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.2. $U(\mathcal{K}_\Sigma) = U(\Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку $z \in \mathbb{C}^m$ и обозначим через $\omega(z) \subset [m]$ множество её нулевых координат. Тогда $z \in U(\mathcal{K}_\Sigma)$ тогда и только тогда, когда $\omega(z) = g(\sigma)$ для некоторого конуса $\sigma \in \Sigma$. Это эквивалентно тому, что $z \in U(\sigma)$. Следовательно, $U(\mathcal{K}_\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma) = U(\Sigma)$. \square

Таким образом, подмножество $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ зависит лишь от комбинаторной структуры веера Σ , в то время как подгруппа $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ зависит от геометрических данных — примитивных образующих одномерных граней веера Σ .

Следующее утверждение уточняет вторую часть теоремы 3.2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.3. *Предположим, что веер Σ является симплицальным. Тогда G действует на $U(\Sigma)$ с конечными стационарными подгруппами точек. Если Σ является неособым веером, то действие G на $U(\Sigma)$ свободно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стационарная подгруппа точки $z \in \mathbb{C}^m$ относительно действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ имеет вид

$$(\mathbb{C}^\times)_z^m = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m : t_i = 1 \text{ если } z_i \neq 0\}.$$

Стационарная подгруппа относительно действия G есть $G_z = (\mathbb{C}^\times)_z^m \cap G$. Так как G есть ядро отображения $\ell: (\mathbb{C}^\times)^m \rightarrow T_{\mathbb{C}}$, подгруппа G_z есть ядро композиции отображений

$$(3.6) \quad (\mathbb{C}^\times)_z^m \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^m \xrightarrow{\ell} T_{\mathbb{C}}.$$

Пусть $z \in U(\Sigma)$. Тогда множество нулевых координат $\omega(z)$ есть $g(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$ (см. предложение 3.2.2). Следовательно, набор примитивных векторов $\{a_i : i \in \omega(z)\}$ линейно независим. Отсюда следует, что ядро композиции (3.6) есть конечная группа. Если веер Σ является неособым, то $\{a_i : i \in \omega(z)\}$ есть часть базиса решётки N . В этом случае (3.6) есть мономорфизм и $G_z = 1$. \square

ПРИМЕР 3.2.4. Рассмотрим полный веер из Примера 3.1.6. Симплициальный комплекс \mathcal{K}_Σ представляет собой полный граф на 3 вершинах (границу треугольника). Мы имеем

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z : z_1 = z_2 = z_3 = 0\} = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$$

Подгруппа G , определяемая точной последовательностью (3.2), есть образ диагонального вложения $\mathbb{C}^\times \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^3$. Согласно теореме 3.2.1 мы имеем $V_\Sigma = U(\Sigma)/G = \mathbb{C}P^2$.

ПРИМЕР 3.2.5. Теперь рассмотрим веер, состоящий из 3 одномерных конусов, порождённых векторами e_1 , e_2 и $-e_1 - e_2$. Этот веер не является полным, но его 1-мерные конусы порождают векторное пространство $N_{\mathbb{R}}$, так что теорема 3.2.1 применима. Симплициальный комплекс \mathcal{K}_Σ состоит из 3 точек. Пространство $U(\Sigma)$ есть дополнение к 3 координатным прямым в \mathbb{C}^3 :

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z : z_1 = z_2 = 0, \quad z_1 = z_3 = 0, \quad z_2 = z_3 = 0\},$$

Как и в предыдущем примере, $G \cong \mathbb{C}^\times$ есть диагональная подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^3$. Согласно теореме 3.2.1, $V_\Sigma = U(\Sigma)/G$ — квазипроективное многообразие, получаемое удалением 3 точек из $\mathbb{C}P^2$.

3.3. Гамильтоновы действия тора и симплектическая редукция

Здесь мы излагаем подход к определению гладких торических многообразий на основе *метода симплектической редукции*. Этот метод позволяет получать гладкое проективное торическое многообразие V_P как фактор некоторого компактного подмногообразия $Z_P \subset U(\Sigma_P)$ по свободному действию компактной группы K , определяемой из последовательности (3.3). Таким образом, в гладком проективном случае вместо факторизации некомпактного множества $U(\Sigma)$ по некомпактной группе G можно рассматривать факторизацию компактного многообразия по компактной группе. Исторически именно метод симплектической редукции послужил мотивацией для введения конструкции из предыдущего раздела. Дополнительную информацию о гамильтоновых действиях групп и ссылки можно найти в монографии [Au91].

Напомним, что *симплектическим многообразием* (W, ω) называется гладкое (но не обязательно компактное) многообразие W с замкнутой 2-формой ω , которая невырождена в каждой точке. Таким образом, W должно иметь чётную размерность, $\dim W = 2n$.

3.3.1. Метод симплектической редукции. Предположим, что на W задано гладкое и сохраняющее симплектическую форму ω действие тора K (наш выбор обозначения связан с точной последовательностью (3.3), которая будет для нас источником примеров). Обозначим через \mathfrak{k} алгебру Ли группы K (эта алгебра Ли коммутативна и потому тривиальна, но соответствующие определения можно обобщить и на случай действий некоммутирующих групп Ли). Для каждого элемента $\kappa \in \mathfrak{k}$ обозначим через ξ_κ соответствующее K -инвариантное векторное поле на W . Действие тора K называется *гамильтоновым*, если 1-форма $\omega(\cdot, \xi_\kappa)$ является точной

для любого $\kappa \in \mathfrak{k}$. Другими словами, существует функция H_κ на W (называемая *гамильтонианом*) удовлетворяющая условию

$$\omega(\xi, \xi_\kappa) = dH_\kappa(\xi) = \xi(H_\kappa)$$

для любого векторного поля ξ на W . Выбрав базис $\{\kappa_i\}$ в \mathfrak{k} и соответствующий набор гамильтонианов $\{H_{\kappa_i}\}$, можно определить *отображение моментов*

$$\mu: W \rightarrow \mathfrak{k}^*, \quad (x, \kappa_i) \mapsto H_{\kappa_i}(x).$$

Согласно теореме Атьи–Гиллёммина–Стернберга [Au91, Th. 4.2.1], если многообразие W компактно, то образ $\mu(W)$ отображения моментов является выпуклым многогранником в \mathfrak{k}^* .

ПРИМЕР 3.3.1. В качестве простейшего и основополагающего примера рассмотрим $W = \mathbb{C}^m$ с симплектической формой $\omega = 2 \sum_{k=1}^m dx_k \wedge dy_k$, где $z_k = x_k + iy_k$. Рассмотрим *стандартное* (покоординатное) действие тора $K = \mathbb{T}^m$ на \mathbb{C}^m :

$$(t_1, \dots, t_m) \cdot (z_1, \dots, z_m) = (t_1 z_1, \dots, t_m z_m).$$

Это действие является гамильтоновым, а соответствующее отображение моментов $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ задаётся как $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$. (Здесь мы отождествили двойственную алгебру Ли тора \mathbb{T}^m с \mathbb{R}^m). Образом отображения моментов является *ортант*

$$\mathbb{R}_{\geq}^m = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m\}.$$

ПРИМЕР 3.3.2. Пусть теперь Σ — неособый веер, имеющий хотя бы один n -мерный конус, и K — подгруппа в \mathbb{T}^m , определяемая из (3.3). Действие из предыдущего примера можно ограничить до действия группы K на инвариантном подмногообразии $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$. Соответствующее отображение моментов задаётся как композиция

$$(3.7) \quad \mu_\Sigma: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathfrak{k}^*.$$

КОНСТРУКЦИЯ 3.3.3 (Симплектическая редукция). Пусть на симплектическом многообразии W задано гамильтоново действие тора K . Предположим, что отображение моментов $\mu: W \rightarrow \mathfrak{k}^*$ *собственно*, т.е. множество $\mu^{-1}(V)$ компактно для любого компактного подмножества $V \subset \mathfrak{k}^*$. Пусть $v \in \mathfrak{k}^*$ — *регулярное значение* отображения моментов, т.е. дифференциал $\mathcal{T}_z W \rightarrow \mathfrak{k}^*$ является сюръективным отображением для любого $z \in \mu^{-1}(v)$. Тогда множество уровня $\mu^{-1}(v)$ является гладким K -инвариантным подмногообразием в W , причём тор K действует на $\mu^{-1}(v)$ с конечными стационарными подгруппами точек. Ограничение симплектической формы ω на $\mu^{-1}(v)$ может быть вырождено. Однако, если действие K на $\mu^{-1}(v)$ свободно, то на гладком многообразии $\mu^{-1}(v)/K$ имеется невырожденная форма ω' , удовлетворяющая условию

$$p^* \omega' = i^* \omega,$$

где $i: \mu^{-1}(v) \rightarrow W$ — вложение, а $p: \mu^{-1}(v) \rightarrow \mu^{-1}(v)/K$ — проекция. Таким образом, $(\mu^{-1}(v)/K, \omega')$ является симплектическим многообразием. Переход от (W, ω) к $(\mu^{-1}(v)/K, \omega')$ называется *симплектической редукцией*.

3.3.2. Момент-угол-многообразие. Здесь мы более подробно рассмотрим структуру многообразия уровня для отображения моментов, соответствующего действию группы K (3.3) на множестве $U(\Sigma_P)$, в случае, когда Σ_P — полный неособый веер, определяемый простым многогранником P . Это многообразие уровня, называемое *момент-угол-многообразием*, затем будет использовано в конструкции торических многообразий методом симплектической редукции. Данная конструкция является известной, однако само момент-угол-многообразие до сих пор изучалось довольно мало. Как было отмечено во введении, момент-угол-многообразия сами по себе представляют большой интерес, ввиду их обширных взаимосвязей с различными конструкциями из комбинаторной геометрии и гомологической алгебры. Систематическому изучению момент-угол-многообразий и их обобщений — *момент-угол-комплексов* у нас посвящена глава 6.

Рассмотрим простой многогранник $P \subset N_{\mathbb{R}}^*$, заданный как в (1.1). Мы предположим дополнительно, что первые n гиперграней F_1, \dots, F_n многогранника P имеют общую вершину, и используем базис из соответствующих нормальных векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ для отождествления $N_{\mathbb{R}}^*$ с \mathbb{R}^n . Тогда определены $m \times n$ -матрица A_P из конструкции 1.1.5 и аффинный мономорфизм

$$i_P: N_{\mathbb{R}}^* \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

который вкладывает P в положительный конус \mathbb{R}_{\geq}^m .

Теперь определим множество \mathcal{Z}_P из коммутативной диаграммы

$$(3.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

где $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$ — отображение моментов из примера 3.3.1. Таким образом, вертикальные стрелки являются проекциями на факторпространства по действию тора \mathbb{T}^m , а i_Z является \mathbb{T}^m -эквивариантным вложением.

Далее, выбрав матрицу C как в конструкции 1.1.5 (т.е. выбрав базис в сокет A_P), мы получим точную последовательность

$$(3.9) \quad 0 \longrightarrow N_{\mathbb{R}}^* \xrightarrow{A_P} \mathbb{R}^m \xrightarrow{C} \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow 0.$$

Образ многогранника P при отображении i_P задаётся формулой (1.7). Ввиду специального выбора базиса в пространстве $N_{\mathbb{R}}^*$,

первые n строк матрицы $A_P = (a_{ij})$ образуют единичную матрицу. Поэтому мы можем в явном виде задать отображение C матрицей

$$(3.10) \quad C = (c_{jk}) = \begin{pmatrix} -a_{n+1,1} & \cdots & -a_{n+1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n+2,1} & \cdots & -a_{n+2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & \cdots & -a_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Сопоставив это с (1.7) и диаграммой (3.8), мы приходим к выводу, что Z_P вкладывается в \mathbb{C}^m как множество общих нулей $m - n$ вещественных квадратичных уравнений

$$(3.11) \quad \sum_{k=1}^m c_{jk} (|z_k|^2 - b_k) = 0, \quad \text{для } 1 \leq j \leq m - n.$$

ТЕОРЕМА 3.3.4. Система квадратичных уравнений (3.11) невырождена в каждой точке. Таким образом, определяемое ей множество Z_P является гладким $(m + n)$ -мерным многообразием, вложенным в \mathbb{C}^m с тривиальным нормальным расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3.3.5. Пусть C' — матрица размера $(m - n) \times (m - k)$, полученная из C удалением столбцов с номерами j_1, \dots, j_k , где $1 \leq k \leq n$. Тогда если пересечение $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k}$ соответствующих гиперграней многогранника P непусто, то C' имеет максимальный ранг $m - n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\iota: \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ обозначает вложение координатного подпространства $\{\mathbf{x}: x_{j_1} = \dots = x_{j_k} = 0\}$, и $\kappa: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ — соответствующая проекция на факторпространство. Тогда C' есть матрица композиции отображений $C \cdot \iota$, а матрица композиции $\kappa \cdot A_P$ есть матрица A' размера $k \times n$, составленная из векторов-строк $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_k}$. По предположению, эти векторы линейно независимы, так что A' имеет ранг k . Следовательно, $\kappa \cdot A_P$ — эпиморфизм. Из рассмотрения диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \mathbb{R}^n & & & \\ & & & \downarrow_{A_P} & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m-k} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\kappa} & \mathbb{R}^k \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow_C & & \\ & & & & \mathbb{R}^{m-n} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

вытекает, что $C \cdot \iota$ — также эпиморфизм. Следовательно, C' имеет ранг $m - n$. \square

Теперь вернёмся к доказательству теоремы. Зафиксируем отождествление \mathbb{C}^m с \mathbb{R}^{2m} , заданное как

$$(z_1, \dots, z_m) \rightarrow (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m),$$

где $z_k = x_k + iy_k$. Тогда в каждой точке $(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \in \mathcal{Z}_P$ градиенты $m - n$ квадратичных уравнений (3.11) суть

$$(3.12) \quad 2(c_{j,1}x_1, c_{j,1}y_1, \dots, c_{j,m}x_m, c_{j,m}y_m), \quad 1 \leq j \leq m - n.$$

Записав их по строкам, получим $(m - n) \times 2m$ -матрицу $2CR$, где

$$R = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m & y_m \end{pmatrix}.$$

По определению вложения i_P , если в некоторой точке $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_P$ мы имеем $x_{j_1} = y_{j_1} = \dots = x_{j_k} = y_{j_k} = 0$, то пересечение гиперграней $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k}$ непусто. Согласно лемме 3.3.5, матрица, получаемая из C удалением столбцов в номерах j_1, \dots, j_k , имеет ранг $m - n$. Следовательно, $2CR$ также имеет ранг $m - n$, т.е. градиенты (3.12) линейно независимы в точке \mathbf{z} . Теорема доказана. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.6. Многообразие \mathcal{Z}_P называется *момент-угол-многообразием*, соответствующим простому многограннику P .

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя наша конструкция \mathcal{Z}_P зависит от явной геометрической реализации многогранника P , топологический тип многообразия \mathcal{Z}_P зависит лишь от комбинаторного типа P . Мы докажем это в разделе 3.4.

Нам также понадобится описание момент-угол-многообразий \mathcal{Z}_{F_i} , соответствующих гиперграням $F_i \subset P$ многогранника, $1 \leq i \leq m$. Обозначим через $p: \mathcal{Z}_P \rightarrow P$ проекцию на пространство орбит, т.е. левую стрелку в (3.8).

ЛЕММА 3.3.7. *Подмногообразие $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$ гомеоморфно $\mathcal{Z}_{F_i} \times \mathbb{T}^k$, где k — число гиперграней в P , не пересекающихся с F_i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть гиперплоскость $H_i \subset \mathbb{R}^n$, содержащая гипергрань F_i , задаётся уравнением $(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i = 0$, см. (1.1). Тогда мы можем задать саму гипергрань F_i системой неравенств

$$F_i = \{\mathbf{x} \in H_i: (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) + b_j \geq 0, \text{ при } j \neq i.\}$$

Отождествив H_i с \mathbb{R}^{n-1} , мы получим представление простого многогранника F_i , аналогичное (1.1), но при этом некоторые из неравенств будут «лишними». А именно, «лишними» будут неравенства

$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) + b_j \geq 0$, для которых $F_j \cap F_i = \emptyset$; по условию, таких неравенств в точности k . Каждое из этих «лишних» неравенств при ограничении на F_i превращается в строгое неравенство.

Пусть m_i — число гиперграней простого многогранника F_i , тогда мы имеем $m_i + k = m - 1$. Теперь рассмотрим ограничение отображения $i_P: P \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$ на F_i . Заметим, что $i_P(F_i)$ лежит в гиперплоскости $\{z_i = 0\} \subset \mathbb{R}^m$, которую мы отождествим с \mathbb{R}^{m-1} . Кроме того, так как каждое из «лишних» неравенств при ограничении на F_i превращается в строгое неравенство, мы имеем $i_P(F_i) \subset \mathbb{R}_{\geq}^{m_i} \times \mathbb{R}_{>}^k$. Из этих рассуждений вытекает, что ограничение диаграммы (3.8) на F_i раскладывается следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} p^{-1}(F_i) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m_i} \times (\mathbb{C}^\times)^k & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z}_{F_i} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m_i} \times \mathbb{R}_{>}^k & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m_i} \times \mathbb{R}_{\geq}^k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F_i & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq}^{m_i} \times \mathbb{R}_{>}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq}^{m-1}. \end{array}$$

Отсюда вытекает, что $p^{-1}(F_i) \rightarrow \mathcal{Z}_{F_i}$ является расслоением со слоем \mathbb{T}^k , индуцированным из тривиального расслоения $\mathbb{C}^{m_i} \times (\mathbb{C}^\times)^k \rightarrow \mathbb{C}^{m_i} \times (\mathbb{R}_{>}^k)$. Следовательно, $p^{-1}(F_i) \cong \mathcal{Z}_{F_i} \times \mathbb{T}^k$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.8. 1. Действие тора \mathbb{T}^m на \mathcal{Z}_P является гладким.

2. Для каждой гиперграней $F_i \subset P$ подмножество $p^{-1}(F_i)$ является гладким \mathbb{T}^m -инвариантным подмногообразием в \mathcal{Z}_P с тривиальным нормальным расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из того, что действие тора на \mathcal{Z}_P является ограничением стандартного гладкого действия на \mathbb{C}^m при эквивариантном вложении $i_Z: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{C}^m$. Второе утверждение вытекает из того факта, что подмногообразие $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$ задаётся уравнением $z_i = 0$. \square

ТЕОРЕМА 3.3.9 ([ВМ06, Сог. 4.7]). Гладкая структура на многообразии \mathcal{Z}_P , удовлетворяющая условиям из предложения 3.3.8, единственна.

Предположим теперь, что многогранник P является целочисленным (т.е. его вершины лежат в решётке N^*), и рассмотрим соответствующий нормальный веер Σ_P (конструкция 1.3.2). Тогда линейное отображение $A_P: N_{\mathbb{R}}^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть в точности отображение, получаемое из отображения торов $\ell: \mathbb{T}^m \rightarrow T$ (3.3) применением функтора $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{S}^1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Следовательно, отображение моментов $\mu_P = \mu_{\Sigma_P}$ (3.7), соответствующее вееру Σ_P , задаётся как

$$(3.13) \quad \mu_P: (z_1, \dots, z_m) \mapsto \left(\sum_{k=1}^m c_{1,k} |z_k|^2, \dots, \sum_{k=1}^m c_{m-n,k} |z_k|^2 \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3.10. Пусть P — простой многогранник (1.1) с вершинами в точках решётки N^* . Тогда $C\mathbf{b}_P \in \mathfrak{k}^* \cong \mathbb{R}^{m-n}$ является регулярным значением для соответствующего отображения моментов (3.7), а множество уровня $\mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P)$ есть момент-угол-многообразие \mathcal{Z}_P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из явной формулы (3.13) для отображения моментов, задания многообразия \mathcal{Z}_P системой (3.11) и теоремы 3.3.4. \square

3.3.3. Торические многообразия и симплектическая редукция. Теперь мы предположим дополнительно, что нормальный веер Σ_P , задаваемый целочисленным простым многогранником P (1.1), является неособым. Тогда группа K , определяемая из (3.3), является $(m-n)$ -мерным тором, и мы можем рассмотреть многообразия $\mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P)/K$, получаемые в результате симплектической редукции действия K на \mathbb{C}^m .

ТЕОРЕМА 3.3.11. Вложение $\mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P) \subset U(\Sigma_P)$ индуцирует диффеоморфизм

$$\mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P)/K \rightarrow U(\Sigma_P)/G = V_P.$$

Тем самым всякое неособое проективное торическое многообразие V_P получается как симплектическая редукция действия тора $K \cong \mathbb{T}^{m-n}$ на \mathbb{C}^m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы лишь наметим основные шаги доказательства; детали можно найти в [Au91, Prop. 3.1.1].

Непосредственно проверяется, что $\mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P) \subset U(\Sigma_P)$. По аналогии с предложением 3.2.3 доказывается, что действие K на $\mathcal{Z}_P = \mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P)$ свободно. Теперь рассмотрим функцию

$$f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{z}) = \|\mu_P(\mathbf{z}) - C\mathbf{b}_P\|^2.$$

Эта функция неотрицательна и принимает минимальное значение на множестве \mathcal{Z}_P . Можно доказать, что единственными критическими точками функции f в $U(\Sigma_P)$ являются $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_P$. Таким образом, для любого $\mathbf{z} \in U(\Sigma_P)$ траектория градиентного потока функции f , выходящая из \mathbf{z} достигнет точки из \mathcal{Z}_P . Далее, можно доказать, что каждая траектория градиентного потока функции f целиком лежит в одной орбите действия группы G . Отсюда и из предыдущего утверждения вытекает, что каждая орбита действия G на $U(\Sigma_P)$ пересекает многообразие \mathcal{Z}_P . Наконец, каждая G -орбита пересекает \mathcal{Z}_P по единственной K -орбите, т.е. если $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_P$, то

$$G \cdot \mathbf{z} \cap \mathcal{Z}_P = K \cdot \mathbf{z}.$$

Это завершает доказательство теоремы. \square

Многообразию $\mu_P^{-1}(Cb_P)/K$, как результат симплектической редукции, наделяется симплектической структурой. В то же время, неособое проективное торическое многообразие V_P также является симплектическим (симплектическая форма индуцируется вложением в проективное пространство, задаваемым многогранником P). Можно показать [Gu94, Appendix 2], что диффеоморфизм из теоремы 3.3.11 сохраняет симплектическую форму.

ПРИМЕР 3.3.12. Пусть $P = \Delta^n$ — стандартный симплекс (см. пример 1.1.6). Конусы соответствующего нормального веера Σ_P порождаются собственными подмножествами множества векторов $\{e_1, \dots, e_n, -e_1 - \dots - e_n\}$. Группы $G \cong \mathbb{C}^\times$ и $K \cong \mathbb{S}^1$ суть диагональные подгруппы в $(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ и \mathbb{T}^{n+1} соответственно, а $U(\Sigma_P) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Матрица C (3.10) есть строка из $n+1$ единиц. Отображение моментов (3.7) задаётся как $\mu_P(z_1, \dots, z_{n+1}) = |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2$. Так как $Cb_P = 1$, момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_P = \mu_P^{-1}(1)$ есть единичная сфера $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, а $\mathbb{S}^{2n+1}/K \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/G = V_P$ — комплексное проективное пространство CP^n .

3.4. Пространство орбит действия компактного тора

В алгебраическом торе $T_{\mathbb{C}}$, действующем на торическом многообразии V_{Σ} , содержится компактный тор T . В этом разделе мы более внимательно изучим именно действие компактного тора; полученные результаты будут играть мотивирующую роль для конструкций из следующей главы.

Прежде всего заметим, что пространство орбит V_P/T действия тора на неособом проективном торическом многообразии V_P отождествляется с простым многогранником P . Это легко вытекает из конструкции симплектической редукции. Действительно, действие \mathbb{T}^m на $\mathcal{Z}_P = \mu_P^{-1}(Cb_P)$ индуцирует гамильтоново действие $T = \mathbb{T}^m/K$ на $V_P = \mathcal{Z}_P/K$. Образ соответствующего отображения моментов $V_P \rightarrow \mathfrak{t}^*$ можно отождествить с образом многообразия $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ при отображении моментов $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.е. с образом многогранника P при вложении i_P (см. (3.8)). В следующей конструкции мы даём чисто топологическую интерпретацию этого наблюдения. В отличие от метода симплектической редукции, который применим лишь в случае проективных торических многообразий, следующая конструкция может быть легко обобщена на непроективный случай.

КОНСТРУКЦИЯ 3.4.1. Рассмотрим координатные подгруппы окружности в \mathbb{T}^m :

$$T_i = \{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{T}^m : t_j = 1 \text{ при } j \neq i\}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Далее, для каждого подмножества $\omega \subset [m]$ определим координатную подгруппу

$$T_\omega = \{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{T}^m : t_j = 1 \text{ при } j \notin \omega\} = \prod_{i \in \omega} T_i \subset \mathbb{T}^m$$

(в частности, T_\emptyset — это тривиальная подгруппа $\{1\}$).

Введём полярные координаты (r, φ) в \mathbb{C} и построим отображение $\mathbb{R}_{\geq} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $(r, \varphi) \mapsto re^{2\pi i \varphi}$. Взяв произведение, получим отображение

$$\mathbb{R}_{\geq}^m \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{C}^m.$$

Прообраз точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ при этом отображении имеет вид $\mathbf{y} \times T_{\omega(\mathbf{z})}$, где $y_i = |z_i|$ для $1 \leq i \leq m$, а $\omega(\mathbf{z}) \subset [m]$ — множество нулевых координат точки \mathbf{z} . Таким образом, \mathbb{C}^m отождествляется с факторпространством $\mathbb{R}_{\geq}^m \times \mathbb{T}^m / \sim$, где $(\mathbf{y}, \mathbf{t}_1) \sim (\mathbf{y}, \mathbf{t}_2)$ при $\mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in T_{\omega(\mathbf{y})}$.

Используя (3.8), мы можем получить аналогичное представление и для момент-угол-многообразия \mathcal{Z}_P . Для каждой точки p многогранника P рассмотрим наименьшую грань $G(p)$, содержащую p . Рассмотрим множество

$$\psi(p) = \{i \in [m] : p \in F_i\},$$

тогда мы имеем $G(p) = \bigcap_{i \in \psi(p)} F_i$. Введём координатную подгруппу $T(p) = T_{\psi(p)}$. В частности, если p — вершина, то $T(p)$ имеет размерность n (максимально возможную), а если p — внутренняя точка многогранника, то $T(p) = \{1\}$. Тогда многообразие \mathcal{Z}_P можно отождествить с факторпространством

$$(3.14) \quad P \times \mathbb{T}^m / \sim$$

по отношению эквивалентности $(p, \mathbf{t}_1) \sim (p, \mathbf{t}_2) \Leftrightarrow \mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in T(p)$. Отсюда, в частности, вытекает, что топологический тип многообразия \mathcal{Z}_P зависит лишь от комбинаторного типа многогранника P . Стационарными подгруппами действия \mathbb{T}^m на \mathcal{Z}_P будут в точности подгруппы вида $T(p)$.

Рассмотрим отображение $\ell: \mathbb{T}^m \rightarrow T$ из (3.3) и обозначим $S(p) = \ell(T(p)) \subset T$ для $p \in P$. Если p — вершина, то $S(p) = T$, а если p — внутренняя точка многогранника, то $S(p) = \{1\}$. Тогда торическое многообразие $V_P = \mathcal{Z}_P / K$ можно задать как факторпространство

$$(3.15) \quad P \times T / \approx$$

по отношению эквивалентности $(p, t_1) \approx (p, t_2) \Leftrightarrow t_1^{-1} t_2 \in S(p)$.

Слои проекции $\pi: V_P = P \times T / \approx \rightarrow P$ суть стационарные подгруппы T -действия. Предыдущая конструкция показывает, что это в точности подгруппы вида $S(p)$. Таким образом, T -действие на V_P свободно над внутренностью многогранника, вершины многогранника соответствуют неподвижным точкам, а точки из внутренности

одной грани коразмерности k соответствуют орбитам, имеющим одну и ту же k -мерную стационарную подгруппу. Это свойство формализуется при помощи понятий *локально стандартного действия тора* и *многообразия с углами*, как описано ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.2. Рассмотрим стандартное (покоординатное) действие тора \mathbb{T}^n на \mathbb{C}^n . Пусть M — многообразие размерности $2n$ с действием \mathbb{T}^n . *Стандартной картой* на многообразии M называется тройка (U, f, ψ) , где $U \subset M$ — некоторое \mathbb{T}^n -инвариантное открытое подмножество, ψ — автоморфизм тора \mathbb{T}^n , а f — ψ -эквивариантный гомеоморфизм $f: U \rightarrow W$ на некоторое (\mathbb{T}^n -инвариантное) открытое подмножество $W \subset \mathbb{C}^n$. (Это означает, что $f(\mathbf{t} \cdot y) = \psi(\mathbf{t})f(y)$ для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^n$, $y \in U$.) Скажем, что действие тора \mathbb{T}^n на M является *локально стандартным*, если M допускает стандартный атлас, т.е. каждая точка из M лежит в некоторой стандартной карте.

Пространством орбит стандартного действия тора является ортант \mathbb{R}_{\geq}^n (а проекцию на пространство орбит можно задавать отображением моментов $\mu: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^n$, см. пример 3.3.1). Таким образом, пространство орбит локально стандартного действия \mathbb{T}^n на M «локально выглядит как \mathbb{R}_{\geq}^n ». Это свойство формализуется при помощи следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.3. Пусть Q — (сепарабельное, со счётной базой) топологическое пространство, представленное в виде объединения открытых множеств $\bigcup U_i$, для каждого из которых существует гомеоморфизм $\varphi_i: U_i \rightarrow W_i$ на некоторое открытое подмножество $W_i \subset \mathbb{R}_{\geq}^n$. В ортанте \mathbb{R}_{\geq}^n имеется естественное понятие коразмерности точек: точка $y \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ имеет коразмерность k , если в точности k её координат обращаются в нуль. Пространство Q называется *многообразием с углами*, если все отображения $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ являются гомеоморфизмами, сохраняющими коразмерность. Тем самым понятие коразмерности переносится на точки Q . Связные компоненты множества точек коразмерности $\geq k$ называются *гранями* коразмерности k . Грани коразмерности 1 называются *гипергранями*.

Два многообразия с углами Q_1 и Q_2 *гомеоморфны* (как многообразия с углами), если существует гомеоморфизм $Q_1 \rightarrow Q_2$, сохраняющий коразмерность точек. Гомеоморфизм многообразий с углами индуцирует изоморфизм их частично упорядоченных множеств граней (по включению).

Понятие многообразия с углами можно определить и в гладкой категории: многообразие с углами Q называется *гладким*, если все отображения $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ являются диффеоморфизмами (при этом отображение между открытыми подмножествами в \mathbb{R}_{\geq}^n называется диффеоморфизмом, если оно является ограничением диффеоморфизма открытых подмножеств в \mathbb{R}^n).

Таким образом, пространство орбит $Q = M/\mathbb{T}^n$ локально стандартного действия тора является многообразием с углами (причём гладким, если действие гладкое).

Простейшими примерами многообразий с углами являются простые многогранники, как показывает следующая конструкция.

КОНСТРУКЦИЯ 3.4.4. Пусть P — простой многогранник. Для каждой вершины $v \in P$ обозначим через U_v открытое подмножество в P , полученное удалением всех граней, не содержащих v . Подмножество U_v гомеоморфно \mathbb{R}_{\geq}^n с сохранением коразмерности точек (более того, оно аффинно изоморфно окрестности нуля в \mathbb{R}_{\geq}^n). Следовательно, P является многообразием с углами (причём гладким и компактным), с атласом $\{U_v\}$.

Легко видеть, что два простых многогранника гомеоморфны как многообразия с углами тогда и только тогда, когда они комбинаторно эквивалентны.

КОНСТРУКЦИЯ 3.4.5. Пусть Σ — симплицальный веер и V_{Σ} — соответствующее торическое многообразие. Рассмотрим аффинное покрытие $\{V_{\sigma} : \sigma \in \Sigma\}$ (см. конструкцию 3.1.3). Факторпространства V_{σ}/T по действию тора можно отождествить с множествами полугрупповых гомоморфизмов из S_{σ} в полугруппу неотрицательных вещественных чисел \mathbb{R}_{\geq} :

$$V_{\sigma}/T = (V_{\sigma})_{\geq} := \text{Hom}_{\text{sg}}(S_{\sigma}, \mathbb{R}_{\geq}), \quad \sigma \in \Sigma,$$

см. [Fu93, §4.1].

Если веер Σ является неособым, то мы имеем $V_{\sigma} \cong \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^{\times})^{n-k}$, где $k = \dim \sigma$, см. пример 3.1.4. Следовательно, T -действие на неособом торическом многообразии V_{Σ} является локально стандартным, а покрытие $\{V_{\sigma} : \sigma \in \Sigma\}$ задаёт атлас из стандартных карт. При этом $(V_{\sigma})_{\geq} \cong \mathbb{R}_{\geq}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ и покрытие $\{(V_{\sigma})_{\geq} : \sigma \in \Sigma\}$ задаёт на пространстве орбит $Q = V_{\Sigma}/T$ структуру гладкого многообразия с углами.

В общем случае некоторые из многообразий V_{σ} могут не быть изоморфны $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^{\times})^{n-k}$ (см. пример 3.1.5), и T -действие на V_{Σ} может не быть локально стандартным. Тем не менее, покрытие $\{(V_{\sigma})_{\geq} : \sigma \in \Sigma\}$ по-прежнему задаёт на $Q = V_{\Sigma}/T$ структуру многообразия с углами (вообще говоря, не гладкого).

Если Σ является полным симплицальным веером, то разбиение многообразия с углами Q на грани двойственно по Пуанкаре триангуляции $(n-1)$ -мерной сферы, задаваемой симплицальным комплексом \mathcal{K}_{Σ} . При этом имеется проекция $Q \times T \rightarrow V_{\Sigma}$, которая устанавливает гомеоморфизм

$$(3.16) \quad V_{\Sigma} \cong Q \times T / \approx,$$

по аналогии с (3.15), см. [Fu93, §4.1].

Если V_P — неособое проективное многообразие, то, как показывает анализ в начале этого раздела, пространство орбит V_P/T гомеоморфно (как многообразию с углами) многограннику P . Более того, если $\pi: V_P \rightarrow P$ — проекция на пространство орбит, то прообраз $\pi^{-1}(U_v) \subset V_P$ есть аффинное подмногообразие $V_{\sigma(v)}$, где $\sigma(v) \in \Sigma_P$ — конус размерности n в нормальном веере, соответствующий вершине v многогранника.

Если неособое компактное торическое многообразие V_Σ не является проективным, то может оказаться, что многообразие с углами $Q = V_\Sigma/T$ не гомеоморфно никакому простому многограннику (хотя это так для непроективного многообразия из примера 3.1.9). При этом Q гомеоморфно простому многограннику тогда и только тогда, когда \mathcal{K}_Σ комбинаторно эквивалентно границе симплицеального многогранника. Однако, начиная с $\dim \mathcal{K}_\Sigma = 3$, имеются триангуляции сфер, которые не получаются из симплицеальных многогранников (описание одного из таких примеров — *сферы Барнетта* — можно найти в [БП04-2, 2.39]).

Конструкции этого раздела сведены в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.6. 1. *Действие тора T на неособом торическом многообразии V является локально стандартным.*

2. *Если при этом V является проективным многообразием, то пространство орбит V/T гомеоморфно (как многообразию с углами) простому многограннику P .*

Эти свойства действия тора на торических многообразиях будут взяты за основу для различных топологических обобщений торических многообразий, которым посвящены две следующие главы.

Квазиторические многообразия

В этой главе мы осуществляем переход от алгебраических построений торической геометрии к топологической теории действий тора на многообразиях. Основным объектом изучения здесь будет класс компактных $2n$ -мерных многообразий с действием n -мерного тора T , обладающим свойствами, моделирующими действие компактного тора на неособых торических многообразиях.

Результаты этой главы опубликованы в [БП99], [БП00-2], [БП04-2], [МП08], [Па99], [Па01], [ВР00], [ВР02].

4.1. Определение и конструкция квазиторических многообразий Дэвиса–Янушкевича

В работе [DJ91] Дэвис и Янушкевич использовали топологические свойства действия тора на торическом многообразии, описанные в предложении 3.4.6, для определения нового класса многообразий с действием тора. Эти многообразия, впоследствии названные *квазиторическими*, можно рассматривать как «топологические аналоги» неособых компактных торических многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Пусть P — комбинаторный простой многогранник размерности n . *Квазиторическим многообразием* над P называется $2n$ -мерное многообразие M с действием тора \mathbb{T}^n , удовлетворяющее следующим двум условиям:

- а) действие тора является локально стандартным;
- б) пространство орбит гомеоморфно, как многообразие с углами, многограннику P .

ЗАМЕЧАНИЕ. В предыдущем определении мы не требуем гладкости многообразия M . Однако, можно доказать, что любое квазиторическое многообразие обладает гладкой структурой, относительно которой действие тора является гладким (см. [Da78]). В разделе 4.3 мы приведём другую конструкцию, снабжающую квазиторические многообразия канонической гладкой структурой.

Таким образом, мы имеем проекцию $\pi: M \rightarrow P$, которая постоянна на орбитах действия тора \mathbb{T}^n и отображает каждую k -мерную орбиту в точку из внутренности некоторой k -мерной грани, для $k = 0, \dots, n$. В частности, действие свободно над внутренностью многогранника, в то время как вершины соответствуют неподвижным точкам многообразия M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.2. *Неособое проективное торическое многообразие V_P является квазиторическим многообразием над P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из предложения 3.4.6. \square

ПРИМЕР 4.1.3. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ с действием \mathbb{T}^n , заданным в примере 3.1.2, является квазиторическим многообразием над симплексом Δ^n . Проекция $\mathbb{C}P^n \rightarrow \Delta^n$ задаётся отображением

$$(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \mapsto \frac{1}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2).$$

Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ — множество гиперграней многогранника P . Рассмотрим прообразы

$$M_j = \pi^{-1}(F_j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Точки внутренности гиперграней F_j соответствуют орбитам, имеющим одну и ту же одномерную стационарную подгруппу, которую мы обозначим T_{F_j} . Отсюда вытекает, что M_j является связной компонентой множества неподвижных точек действия подгруппы T_{F_j} . Это, в свою очередь, влечёт тот факт, что M_j является \mathbb{T}^n -инвариантным подмногообразием коразмерности 2 в M , и M_j является квазиторическим многообразием над F_j (с действием тора $\mathbb{T}^n/T_{F_j} \cong \mathbb{T}^{n-1}$). Следуя [DJ91], мы будем называть M_j *характеристическим подмногообразием*, а соответствие

$$(4.1) \quad \lambda: F_j \mapsto T_{F_j}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

характеристической функцией квазиторического многообразия M .

Рассмотрим некоторую грань G коразмерности k многогранника P и запишем её как пересечение k гиперграней: $G = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k}$. Тогда $M_G = \pi^{-1}(G)$ является \mathbb{T}^n -инвариантным подмногообразием коразмерности $2k$ в M , неподвижным относительно действия каждой из подгрупп $T(F_{j_i})$, $1 \leq i \leq k$. Рассмотрев произвольную вершину $v \in G$ и воспользовавшись локальной стандартностью \mathbb{T}^n -действия на M вблизи v , мы видим, что характеристические подмногообразия M_{j_1}, \dots, M_{j_k} пересекаются трансверсально по подмногообразию M_G , а отображение

$$T_{F_{j_1}} \times \dots \times T_{F_{j_k}} \rightarrow \mathbb{T}^n$$

является мономорфизмом на k -мерную стационарную подгруппу подмногообразия M_G . Соответствие

$$G \mapsto \text{стационарная подгруппа подмногообразия } M_G$$

продолжает характеристическое отображение (4.1) до отображения из частично упорядоченного множества граней многогранника P в множество торических подгрупп в \mathbb{T}^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.4. Пусть P — комбинаторный n -мерный простой многогранник и λ — некоторое отображение из множества его гиперграней в множество замкнутых одномерных подгрупп тора \mathbb{T}^n . Тогда (P, λ) называется *характеристической парой*, если отображение $\lambda(F_{j_1}) \times \dots \times \lambda(F_{j_k}) \rightarrow \mathbb{T}^n$ является мономорфизмом при $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k} \neq \emptyset$.

Если (P, λ) является характеристической парой, то отображение λ продолжается на все грани многогранника P , так что мы имеем торическую подгруппу $T_G := \lambda(G) \subset \mathbb{T}^n$ для каждой грани $G \subset P$.

По аналогии с конструкцией 3.4.1, квазиторическое многообразие можно восстановить по характеристической паре (P, λ) .

КОНСТРУКЦИЯ 4.1.5 (Каноническая модель $M(P, \lambda)$). Пусть задана характеристическая пара (P, λ) . Напомним, что для каждой точки $p \in P$ мы обозначали через $G(p)$ наименьшую грань, содержащую p . По аналогии с (3.15) положим

$$M(P, \lambda) = P \times \mathbb{T}^n / \sim,$$

где $(p, t_1) \sim (p, t_2)$, если $t_1 t_2^{-1} \in \lambda(G(p))$. Свободное действие тора \mathbb{T}^n на $P \times \mathbb{T}^n$ индуцирует действие на факторпространстве $P \times \mathbb{T}^n / \sim$. Это действие свободно над внутренностью многогранника (так как там не происходит отождествления точек) и имеет по одной неподвижной точке для каждой вершины. Пространство $P \times \mathbb{T}^n / \sim$ покрывается открытыми множествами $U_v \times \mathbb{T}^n / \sim$ (см. конструкцию 3.4.4), эквивариантно гомеоморфными $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \times \mathbb{T}^n / \sim = \mathbb{C}^n$. Таким образом, действие тора локально стандартно, и $P \times \mathbb{T}^n / \sim$ является квазиторическим многообразием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.6 (эквивалентности). Квазиторические многообразия M_1 и M_2 называются *слабо \mathbb{T}^n -эквивариантно гомеоморфными* (или просто *слабо \mathbb{T}^n -гомеоморфными*), если существует автоморфизм $\psi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ и гомеоморфизм $f: M_1 \rightarrow M_2$, такие, что $f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x)$ для любых $t \in \mathbb{T}^n$ и $x \in M_1$. Если ψ — тождественный автоморфизм, то M_1 и M_2 называются *\mathbb{T}^n -гомеоморфными*. Следуя Дэвису и Янушкиевичу, мы скажем, что квазиторические многообразия M_1 и M_2 над одним и тем же многогранником P *эквивалентны*, если существует слабый \mathbb{T}^n -гомеоморфизм $f: M_1 \rightarrow M_2$, накрывающий тождественное отображение многогранника P .

Две характеристические пары (P, λ_1) и (P, λ_2) (с одним и тем же многогранником P) называются *эквивалентными*, если существует автоморфизм $\psi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ такой, что $\lambda_2 = \psi \cdot \lambda_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.7 ([DJ91, Prop. 1.8]). *Конструкция 4.1.5 определяет взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных квазиторических многообразий и характеристическими пар.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение очевидно: если квазиторические многообразия эквивалентны, то соответствующие характеристические пары также эквивалентны. Для того, чтобы доказать обратное утверждение, достаточно показать, что любое квазиторическое многообразие M над P с характеристической функцией λ эквивалентно канонической модели $M(P, \lambda)$. Для этого вначале строится непрерывное отображение $f: P \times \mathbb{T}^n \rightarrow M$, отображающее $p \times \mathbb{T}^n$ на $\pi^{-1}(p)$ для каждой точки $p \in P$. Это делается путём последовательного «раздутия особых стратов». Тот факт, что P есть стягиваемое множество гарантирует, что получаемое в конце главное \mathbb{T}^n -расслоение над P тривиально. Отображение f индуцирует эквивалентность

$$P \times \mathbb{T}^n / \sim = M(P, \lambda) \rightarrow M.$$

Детали можно восстановить по [DJ91]. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Из этого наброска доказательства вытекает, что единственным существенным условием на пространство орбит Q , обеспечивающим эквивалентность канонической модели, является то, что главное \mathbb{T}^n -расслоение над Q , получаемое после всех раздутий, тривиально. Это во всяком случае верно, если $H^2(Q) = 0$, так что предыдущее предложение допускает обобщения и на более общие действия тора. Далее мы ещё вернёмся к этому наблюдению.

4.2. Полиориентации и комбинаторные квазиторические данные

Здесь мы завершаем комбинаторное описание квазиторических многообразий M . Характеристические пары (P, λ) заменяются на более естественно задаваемые *комбинаторные квазиторические пары* (P, Λ) , состоящие из ориентированного простого многогранника и целочисленной матрицы специального вида. По сравнению с характеристической парой, пара (P, Λ) несёт некоторую дополнительную информацию, которая эквивалентна выбору ориентации для многообразия M и всех его характеристических подмногообразий. Получаемое взаимно однозначное соответствие между комбинаторными квазиторическими парами и классами эквивалентных полиориентированных квазиторических многообразий уточняет результат Предложения 4.1.7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.1. Скажем, что квазиторическое многообразие M *полиориентировано*, если выбрана ориентация для M и каждого из его характеристических подмногообразий M_j , $1 \leq j \leq m$.

Стационарную подгруппу T_{F_j} характеристического подмногообразия $M_j \subset M$ можно записать в виде

$$(4.2) \quad T_{F_j} = \{ (e^{2\pi i \lambda_{1j} \varphi}, \dots, e^{2\pi i \lambda_{nj} \varphi}) \in \mathbb{T}^n \},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ и $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj})^t \in \mathbb{Z}^n$ — некоторый примитивный вектор. Этот вектор определяется подгруппой T_{F_j} лишь с точностью до знака. Выбор знака (и тем самым однозначный выбор вектора) задаёт параметризацию одномерной подгруппы T_{F_j} .

Полиориентация квазиторического многообразия предоставляет канонический способ выбора векторов λ_j , $1 \leq j \leq m$. В самом деле, действие параметризованной подгруппы $T_{M_j} \subset \mathbb{T}^n$ задаёт ориентацию в нормальном расслоении ν_j вложения $M_j \subset M$. Полиориентация многообразия M также задаёт ориентацию в ν_j при помощи следующего разложения касательного расслоения:

$$TM|_{M_j} = TM_j \oplus \nu_j.$$

Теперь мы выберем направление примитивного вектора λ_j таким образом, чтобы эти две ориентации совпадали.

Вообще говоря, выбор полиориентации на M не является каноническим. Тем не менее, если M допускает \mathbb{T}^n -эквивариантную почти комплексную структуру (см. определение V.13), то выбор такой структуры даёт канонический способ ориентации M и подмногообразий M_j для $1 \leq j \leq m$. Тем самым мы получаем полиориентацию, ассоциированную с эквивариантной почти комплексной структурой. В случае, когда M является эквивариантно почти комплексным (например, если M — неособое компактное торическое многообразие), мы всегда будем его снабжать ассоциированной полиориентацией. В других случаях мы будем фиксировать полиориентацию произвольно.

Задав полиориентацию, мы можем продолжить соответствие (4.1) до отображения целочисленных решёток

$$\lambda: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n, \quad e_j \mapsto \lambda_j,$$

которое мы будем называть *направленной* характеристической функцией. При наличии полиориентации мы будем предполагать характеристическую функцию направленной. При этом, если пересечение гиперграней F_{j_1}, \dots, F_{j_k} непусто, то векторы $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}$ составляют часть целочисленного базиса в \mathbb{Z}^n .

Введём целочисленную матрицу Λ размера $n \times m$, в которой j -й столбец составляют координаты вектора λ_j , $1 \leq j \leq m$. Каждую вершину $v \in P$ можно записать как пересечение n гиперграней: $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$. Рассмотрим максимальный минор $\Lambda_v := \Lambda_{j_1, \dots, j_n}$ матрицы Λ , образованный столбцами с номерами j_1, \dots, j_n . Тогда

$$(4.3) \quad \det \Lambda_v = \pm 1.$$

Пусть $\text{chf}(P)$ обозначает множество (направленных) характеристических функций λ для P . Это множество можно отождествить с множеством целочисленных $n \times m$ -матриц Λ , удовлетворяющих условию (4.3) для любой вершины $v \in P$ (мы будем называть такие матрицы *характеристическими*). Группа $GL(n, \mathbb{Z})$ автоморфизмов

решётки \mathbb{Z}^n действует слева на множестве $\text{chf}(P)$ (автоморфизм $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ действует при помощи композиции $\lambda \mapsto g \cdot \lambda$). Так как автоморфизмы решётки соответствуют автоморфизмам тора \mathbb{T}^n , из Предложения 4.1.7 вытекает наличие взаимно однозначного соответствия

$$(4.4) \quad GL(n, \mathbb{Z}) \backslash \text{chf}(P) \longleftrightarrow \{\text{классы эквивалентности } M \text{ над } P\}.$$

Далее мы будем предполагать, что гиперграни упорядочены таким образом, что первые n гиперграней содержат общую вершину v_* , называемую *начальной*:

$$F_1 \cap \dots \cap F_n = v_*.$$

Тогда в каждом классе сопряжённых элементов $GL(n, \mathbb{Z}) \backslash \text{chf}(P)$ из (4.4) содержится единственная направленная характеристическая функция, задаваемая матрицей вида

$$(4.5) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{1,n+1} & \dots & \lambda_{1,m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_{2,n+1} & \dots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n,n+1} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix}.$$

В сокращённой записи, $\Lambda = (E \mid \Lambda_*)$, где E — единичная матрица, а Λ_* — матрица размера $n \times (m - n)$. Мы будем называть (4.5) *приведённой формой* характеристической матрицы Λ , а подматрицу Λ_* — *приведённой подматрицей*. Если же характеристическая матрица задана в неприведённом виде $\Lambda = (A \mid B)$, где A имеет размер $n \times n$, а B — размер $n \times (m - n)$, то приведённый представитель в её классе сопряжённых элементов задаётся матрицей $(E \mid A^{-1}B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.2. Пусть P — ориентированный комбинаторный n -мерный простой многогранник с t гипергранями, которые занумерованы таким образом, что первые n из них содержат общую вершину, а Λ — целочисленная $n \times t$ -матрица вида (4.5), удовлетворяющих условию (4.3) для любой вершины $v \in P$. Тогда (P, Λ) называется *комбинаторной квазиторической парой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.3. *Имеется взаимно однозначное соответствие между комбинаторными квазиторическими парами и классами эквивалентности полиориентированных квазиторических многообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что эквивалентность квазиторических многообразий M_1 и M_2 над P сохраняет ориентацию тогда и только тогда, когда сохраняет ориентацию автоморфизм тора, устанавливающий эквивалентность между соответствующими характеристическими парами (P, λ_1) и (P, λ_2) (см. Предложение 4.1.7).

Сопоставим комбинаторную квазиторическую пару полиориентированному квазиторическому многообразию M над P . Пусть (P, λ) — соответствующая характеристическая пара. Снабдим каноническую модель $M(P, \lambda)$ ориентацией при помощи гомеоморфизма $M(P, \lambda) \rightarrow M$ из Предложения 4.1.7. Так как $M(P, \lambda) = P \times \mathbb{T}^n / \sim$, а над внутренностью P° многогранника отождествлений не производится, мы имеем разложение

$$(4.6) \quad \mathcal{T}_{(p,t)}M(P, \lambda) \cong \mathcal{T}_pP \oplus \mathcal{T}_t\mathbb{T}^n.$$

касательного пространства в точке $(p, t) \in M(P, \lambda)$, где $p \in P^\circ$ и $t \in \mathbb{T}^n$. Теперь ориентация многогранника P задаётся при помощи следующего условия: $(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n)$ является положительным базисом в пространстве $\mathcal{T}_{(p,t)}M(P, \lambda)$ тогда и только тогда, когда (ξ_1, \dots, ξ_n) и (η_1, \dots, η_n) являются положительными базисами в \mathcal{T}_pP и $\mathcal{T}_t\mathbb{T}^n$ соответственно. (Эта процедура аналогична заданию ориентации в \mathbb{C}^n при помощи базиса $(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$.) Итак, ориентация многообразия M задаёт ориентацию многогранника P . Как мы видели выше, полиориентация M позволяет сопоставить характеристической функции λ целочисленную $n \times m$ -матрицу Λ . Изменяя, если необходимо, нумерацию гиперграней, мы можем добиться того, что векторы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ образовывали положительно ориентированный базис. Таким образом, $\Lambda = (A \mid B)$, где $\det A = 1$. Тогда $(P, (E \mid A^{-1}B))$ — комбинаторная квазиторическая пара.

Обратно, комбинаторная квазиторическая пара (P, Λ) задаёт характеристическую пару (P, λ) и квазиторическое многообразие $M = M(P, \lambda)$, как описано в разделе 4.1. Ориентация многогранника P задаёт ориентацию на M при помощи разложения (4.6). Далее, для каждого характеристического подмногообразия $M_j \subset M$ вектор λ_j (j -й столбец матрицы Λ) задаёт ориентацию нормального расслоения ν_j вложения $M_j \subset M$. Ориентации на M и ν_j задают ориентацию характеристического подмногообразия M_j , для $1 \leq j \leq m$. Итак, пара (P, Λ) определяет полиориентированное квазиторическое многообразие.

Для завершения доказательства надо проверить, что эквивалентным полиориентированным квазиторическим многообразиям M_1 и M_2 над P соответствует одна и та же пара (P, Λ) . Действительно, характеристические матрицы Λ_1 и Λ_2 , соответствующие M_1 и M_2 , связаны соотношением $\Lambda_1 = C\Lambda_2$, где C — матрица сохраняющего ориентацию автоморфизма тора, т.е. $\det C = 1$. Отсюда вытекает, что матрицы Λ_1 и Λ_2 лежат в одном классе сопряжённых элементов (4.4), а их приведённые представители совпадают. \square

Далее мы будем обозначать полиориентированное квазиторическое многообразие, соответствующее паре (P, Λ) , через $M(P, \Lambda)$.

4.3. Канонические гладкости и стабильно комплексные структуры

Здесь мы дадим явную геометрическую конструкцию канонической модели $M(P, \Lambda)$ квазиторического многообразия как факторпространства момент-угол-многообразия \mathcal{Z}_P по свободному действию тора. Эта конструкция может рассматриваться как обобщение конструкции проективных торических многообразий методом симплектической редукции (см. раздел 3.3). Её достоинством по сравнению с изначальной конструкцией 4.1.5 Дэвиса–Янушкиевича является геометричность; благодаря этому мы построим явные канонические инвариантные гладкие структуры на квазиторических многообразиях, а далее опишем инвариантные стабильно комплексные структуры. Полученные описания будут использованы для нахождения квазиторических представителей в классах комплексных кобордизмов — одного из основных результатов этой главы.

Пусть задана комбинаторная квазиторическая пара (P, Λ) . Матрица Λ задаёт эпиморфизм торов $\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$, ядро которого мы обозначим $K = K(\Lambda)$. Эта подгруппа изоморфна \mathbb{T}^{m-n} в силу условия (4.3). Кроме того, рассмотрим момент-угол-многообразие \mathcal{Z}_P , определяемое многогранником P (см. раздел 3.3.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.1. *Подгруппа $K(\Lambda)$ действует на \mathcal{Z}_P свободно. Имеется \mathbb{T}^n -эквивариантный гомеоморфизм*

$$\mathcal{Z}_P/K(\Lambda) \xrightarrow{\cong} M(P, \Lambda)$$

между фактормногообразием $\mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ и каноническим квазиторическим многообразием $M(P, \Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стационарные подгруппы действия тора \mathbb{T}^m на \mathcal{Z}_P имеют вид $T(p)$, $p \in P$ (см. конструкцию 3.4.1). Из (4.3) вытекает, что ограничение гомоморфизма $\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ на подгруппу вида $T(p)$ инъективно, а значит ядро $K(\Lambda)$ пересекается с каждой подгруппой $T(p)$ лишь по единице. Следовательно, $K(\Lambda)$ свободно действует на \mathcal{Z}_P , а факторпространство $\mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ является $2n$ -мерным многообразием с действием тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^m/K(\Lambda)$.

Для доказательства второго утверждения отождествим \mathcal{Z}_P с $P \times \mathbb{T}^m/\sim$, см. (3.14). Тогда проекция $\mathcal{Z}_P \rightarrow \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ отождествляется с проекцией

$$\mathcal{Z}_P = P \times \mathbb{T}^m/\sim \rightarrow P \times \mathbb{T}^n/\sim,$$

индуцированной отображением $\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$. По определению (см. конструкцию 4.1.5), пространство $P \times \mathbb{T}^n/\sim$ есть каноническая модель квазиторического многообразия. \square

Из предложений 3.3.8 и 4.3.1 вытекает, что на $M(P, \Lambda) = \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ имеется гладкая структура, относительно которой действие \mathbb{T}^n является гладким. Мы будем называть эту гладкую

структуру *канонической*. При этом, в отличие от момент-угло-многообразий, вопрос о единственности эквивариантной гладкой структуры на квазиторических многообразиях открыт.

Рассмотрим теперь подмногообразия $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$, $1 \leq i \leq m$. Подмногообразии $p^{-1}(F_i)$ неподвижно относительно действия i -ой координатной подгруппы в торе \mathbb{T}^m . Обозначим через \mathbb{C}_i пространство 1-мерного комплексного представления тора \mathbb{T}^m , индуцированного из стандартного представления в \mathbb{C}^m при помощи проекции $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}_i$ на i -й сомножитель. Рассмотрим комплексное 1-мерное \mathbb{T}^m -расслоение (см. приложение III) $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}_i$ с диагональным действием тора \mathbb{T}^m (это расслоение тривиально как расслоение без действия). Тогда ограничение расслоения $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}_i$ на инвариантное подмногообразие $p^{-1}(F_i)$ изоморфно нормальному расслоению вложения $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$. Профакторизовав по диагональному действию подгруппы $K = K(\Lambda)$, мы получим 1-мерное комплексное \mathbb{T}^n -расслоение

$$(4.7) \quad \rho_i: \mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}_i \rightarrow \mathcal{Z}_P/K = M(P, \Lambda)$$

над квазиторическим многообразием $M = M(P, \Lambda)$. Ограничение расслоения ρ_i на $p^{-1}(F_i)/K = M_i$ изоморфно нормальному расслоению к характеристическому подмногообразию $M_i \subset M$. Задаваемая таким образом комплексная структура в этом нормальном расслоении есть в точности структура, определяемая полиориентацией многообразия $M(P, \Lambda)$.

ТЕОРЕМА 4.3.2 ([DJ91, Th. 6.6]). *Имеет место изоморфизм вещественных \mathbb{T}^n -расслоений над $M = M(P, \Lambda)$:*

$$TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)} \cong \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m,$$

где $\underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)}$ — тривиальное $2(m-n)$ -мерное \mathbb{T}^n -расслоение над M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем \mathbb{T}^m -инвариантное разложение

$$(4.8) \quad T\mathcal{Z}_P \oplus \nu(i_Z) = \mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}^m,$$

получаемое ограничением касательного расслоения $T\mathbb{C}^m$ на \mathcal{Z}_P . При этом нормальное расслоение $\nu(i_Z)$ тривиально как \mathbb{T}^m -расслоение, а $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}^m$ изоморфно, как \mathbb{T}^m -расслоение, сумме расслоений $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}_i$, $1 \leq i \leq m$. Далее, мы имеем

$$(4.9) \quad T\mathcal{Z}_P = q^*(TM) \oplus \xi,$$

где ξ — касательное расслоение вдоль слоёв главного K -расслоения $q: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathcal{Z}_P/K = M$ [Sz64, Cor 6.2]. Расслоение ξ индуцируется проекцией q из векторного расслоения над M , ассоциированного с главным расслоением $\mathcal{Z}_P \rightarrow M$ при помощи присоединённого представления группы Ли K ; так как K абелева, это расслоение тривиально. Факторизуя (4.8) по действию K и используя (4.9), мы

получаем разложение

$$(4.10) \quad \mathcal{T}M \oplus (\xi/K) \oplus (\nu(i_Z)/K) \cong \mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}^m.$$

Согласно вышесказанному, мы имеем $(\xi/K) \oplus (\nu(i_Z)/K) \cong \mathbb{R}^{2(m-n)}$ и $\mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}^m \cong \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m$ как \mathbb{T}^n -расслоения. \square

Изоморфизм расслоений из теоремы 4.3.2 позволяет ввести на полиориентированном квазиторическом многообразии каноническую стабильно комплексную структуру, согласованную с действием тора (см. определение V.13).

СЛЕДСТВИЕ 4.3.3. *На полиориентированном квазиторическом многообразии M имеется каноническая \mathbb{T}^n -инвариантная стабильно комплексная структура $s_{\mathcal{T}}$, задаваемая изоморфизмом из теоремы 4.3.2, и определён соответствующий класс комплексных бордизмов $[M] \in \Omega_{2n}^U$.*

4.4. Веса действия тора и знаки неподвижных точек

Каждая неподвижная точка v действия тора на квазиторическом многообразии M может быть получена как пересечение $M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_n}$ некоторых n характеристических подмногообразий и соответствует вершине многогранника P . Таким образом, касательное пространство к M в v раскладывается в сумму нормальных пространств к M_{j_k} для $1 \leq k \leq n$:

$$(4.11) \quad \mathcal{T}_v M = (\rho_{j_1} \oplus \dots \oplus \rho_{j_n})|_v.$$

Мы используем это разложение для отождествления $\mathcal{T}_v M$ с \mathbb{C}^n ; тогда в соответствующих координатах (z_1, \dots, z_n) касательное пространство к M_{j_k} задаётся уравнением $z_k = 0$. Представление тора \mathbb{T}^n в касательном пространстве $\mathcal{T}_v M \cong \mathbb{C}^n$ задаётся набором весов $\mathbf{w}_k(v) \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq k \leq n$. Тогда для $\mathbf{t} = (e^{2\pi i \varphi_1}, \dots, e^{2\pi i \varphi_n}) \in \mathbb{T}^n$ (см. (3.1)) и $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{T}_v M$ мы имеем

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{z} = (e^{2\pi i(\mathbf{w}_1(v), \varphi)} z_1, \dots, e^{2\pi i(\mathbf{w}_n(v), \varphi)} z_n),$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Веса определяются из комбинаторной квазиторической пары (P, Λ) при помощи следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4.1. *Веса $\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)$ представления тора \mathbb{T}^n в касательном пространстве $\mathcal{T}_v M$ в неподвижной точке $v = M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_n}$ являются столбцами квадратной матрицы W_v , удовлетворяющей условию*

$$W_v^t \Lambda_v = E.$$

Другими словами, $\{\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)\}$ является базисом решётки \mathbb{Z}^n , сопряжённым к базису $\{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что из локальной стандартности действия тора вытекает, что $\{\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)\}$ — базис решётки \mathbb{Z}^n . (Тот факт, что $\{\boldsymbol{\lambda}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{j_n}\}$ — также базис, вытекает из соотношения (4.3).)

Так как однопараметрическая подгруппа $T(F_{j_k}) \subset \mathbb{T}^n$ (4.2) должна оставлять гиперплоскость $z_k = 0$, касательную к M_{j_k} , неподвижной, мы получаем $(\mathbf{w}_i(v), \boldsymbol{\lambda}_{j_k}) = 0$ при $i \neq k$. Следовательно, $W_v^t \Lambda_v$ — диагональная матрица. Тогда из того, что столбцы матриц W_v и Λ_v являются базисами решётки, вытекает, что $(\mathbf{w}_k(v), \boldsymbol{\lambda}_{j_k}) = \pm 1$ при $1 \leq k \leq n$.

С другой стороны, так как действие однопараметрической подгруппы в \mathbb{T}^n , определяемой вектором $\boldsymbol{\lambda}_{j_k}$, задаёт ту же ориентацию, что и комплексная структура в расслоении ρ_{j_k} , мы получаем $(\mathbf{w}_k(v), \boldsymbol{\lambda}_{j_k}) > 0$ при $1 \leq k \leq n$. \square

Знаки неподвижных точек действия \mathbb{T}^n на M , определяемые инвариантной стабильно комплексной структурой (см. определение V.14), также можно вычислить в терминах комбинаторной квазиторической пары (P, Λ) .

ЛЕММА 4.4.2. Пусть $v = M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_n}$ — неподвижная точка.

1. Мы имеем $\sigma(v) = 1$, если в (4.11) ориентация пространства $\mathcal{T}_v M$, определяемая ориентацией M , совпадает с ориентацией пространства $(\rho_{j_1} \oplus \dots \oplus \rho_{j_n})|_v$, определяемой ориентациями расслоений ρ_{j_k} , $1 \leq k \leq n$. В противном случае, $\sigma(v) = -1$.
2. В терминах комбинаторной пары (P, Λ) , мы имеем

$$\sigma(v) = \text{sign}(\det(\boldsymbol{\lambda}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{j_n}) \det(\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_n})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого утверждения заметим, что комплексное 1-мерное \mathbb{T}^n -расслоение ρ_i тривиально над дополнением к M_i в M . Следовательно, нетривиальная часть пространства \mathbb{T}^n -представления $(\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m)|_v$ есть в точности $(\rho_{j_1} \oplus \dots \oplus \rho_{j_n})|_v$. Отсюда вытекает, что композиция отображений из определения V.14 в нашем случае есть в точности

$$(4.12) \quad \mathcal{T}_v M \rightarrow (\rho_{j_1} \oplus \dots \oplus \rho_{j_n})|_v.$$

Для доказательства второго утверждения мы запишем отображение (4.12) в координатах. Здесь нам будет удобнее отождествить \mathbb{C}^m с \mathbb{R}^{2m} , сопоставив точке $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ точку $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$, где $z_k = x_k + iy_k$, $1 \leq k \leq m$ (это соглашение отличается из использованного ранее). В этих координатах отображение

$$\mathcal{T}_v M \rightarrow \mathcal{T}_v M \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \xrightarrow{c\mathcal{T}} (\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m)|_v \cong \mathbb{R}^{2m}$$

из определения V.14 задаётся $2m \times 2n$ -матрицей

$$\begin{pmatrix} A_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda^t \end{pmatrix}$$

(это вытекает из разложения (4.10)). Отображение (4.12) получается ограничением на подматрицы в A_P и Λ^t , образованные строками с номерами j_1, \dots, j_n , откуда и вытекает требуемая формула для знака. \square

ПРИМЕР 4.4.3. Пусть V_P — неособое проективное торическое многообразие, соответствующее простому многограннику P (1.1). Тогда $\lambda_i = \mathbf{a}_i$, $1 \leq i \leq m$, — суть нормальные векторы к гиперграням, направленные внутрь многогранника. Из предложения 4.4.1 вытекает, что веса $\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)$ представления тора в касательном пространстве к неподвижной точке $v \in V_P$ суть примитивные векторы вдоль рёбер многогранника P , исходящих из вершины v . Кроме того, из предложения 4.4.2 вытекает, что в этом случае $\sigma(v) = 1$ для всех v .

В случае произвольного квазиторического многообразия веса $\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)$ не совпадают с векторами вдоль рёбер. Однако из предложения 4.4.1 вытекает, что мы можем установить естественное взаимно однозначное соответствие

$$(4.13) \quad \{\text{ориентированные рёбра } P\} \\ \leftrightarrow \{\text{веса представлений } \mathbb{T}^n \text{ в неподвижных точках}\}.$$

При этом соответствии ориентированное ребро с началом в вершине $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n} \in P$ переходит в вектор, двойственный к λ_{j_k} относительно базиса $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$, где F_{j_k} — единственная гипергрань, содержащая v и не содержащая e .

ЛЕММА 4.4.4. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — векторы вдоль рёбер многогранника P , содержащих вершину $v \in P$ и направленные от v , а $\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)$ — соответствующие веса. Тогда имеет место формула для знака вершины:

$$\sigma(v) = \text{sign}(\det(\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)) \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из леммы 4.4.2 и того факта, что $\{\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)\}$ — сопряжённый базис к $\{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}\}$, а $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — сопряжённый базис к $\{\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_n}\}$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы из лемм 4.4.2 и 4.4.4 можно сформулировать в виде следующего практического правила для вычисления знаков, которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Запишем векторы $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$ (или $\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)$) в квадратную матрицу в порядке, задаваемом ориентацией многогранника P , т.е. чтобы нормальные векторы соответствующих гиперграней (или векторы

вдоль соответствующих рёбер) образовывали положительный базис пространства \mathbb{R}^n . Тогда определитель этой матрицы и есть $\sigma(v)$. Таким образом, в предположении, что векторы $w_1(v), \dots, w_n(v)$ занумерованы таким образом, что векторы вдоль соответствующих рёбер образуют положительный базис, мы можем записать формулу из леммы 4.4.4 в виде

$$(4.14) \quad \sigma(v) = \det(w_1(v), \dots, w_n(v)).$$

4.5. Когомологии и характеристические классы квазиторических многообразий

Кольцо когомологий квазиторического многообразия порождается двумерными классами когомологий, соответствующими характеристическим многообразиям (или первыми классами Чженя расслоений ρ_i из теоремы 4.3.2). Между этими элементами имеется два типа соотношений: мономиальные соотношения, происходящие из кольца граней многогранника P и линейные соотношения, происходящие из характеристической матрицы Λ . Соответствующий результат был доказан Дэвисом и Янушкевичем и обобщает классическую теорему Данилова–Юркевича, описывающую когомологии неособых компактных торических многообразий. Мы также приведём конструкцию канонического клеточного разбиения квазиторического многообразия, имеющего клетки лишь в чётных размерностях, и соответственно вычислим числа Бетти (т.е. размерности групп целочисленных гомологий).

Пусть M — полиориентированное квазиторическое многообразие и $\pi: M \rightarrow P$ — его проекция на пространство орбит, Λ — характеристическая матрица.

КОНСТРУКЦИЯ 4.5.1. Напомним рассуждения «в духе теории Морса», которые были использованы при доказательстве соотношений Дена–Соммервилля (теорема 1.2.2). Там мы превратили 1-основ многогранника P в ориентированный граф и определили индекс $\text{ind}(v)$ вершины $v \in P$ как число входящих в неё рёбер. Эти входящие в v ребра порождают грань G_v размерности $\text{ind}(v)$. Обозначим через \widehat{G}_v подмножество, получаемое из G_v удалением всех граней, не содержащих вершину v . Очевидно, \widehat{G}_v диффеоморфно $\mathbb{R}_{\geq}^{\text{ind}(v)}$ и содержится в открытой карте $U_v \subset P$ из конструкции 3.4.4. Тогда прообраз $e_v := \pi^{-1}\widehat{G}_v$ гомеоморфен $\mathbb{C}^{\text{ind}(v)}$ и объединение подмножеств $e_v \subset M$ по всем вершинам многогранника P определяет клеточное разбиение многообразия M . Заметим, что все клетки имеют чётную размерность, и замыкание клетки e_v есть квазиторическое подмногообразие $\pi^{-1}(G_v) \subset M$. Это рассуждение было впервые применено Хованским [Хо86] для построения клеточного разбиения неособого торического многообразия. Обобщение на случай квазиторических многообразий было получено в [DJ91].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5.2. *Целочисленные гомологии квазиторического многообразия M обращаются в нуль в нечётных размерностях, а в чётных размерностях являются свободными абелевыми группами. Их ранги (числа Бетти) задаются формулами*

$$b_{2i}(M) = h_i(P), \quad 1 \leq i \leq n,$$

где $\mathbf{h}(P) = (h_0, \dots, h_n)$ — h -вектор многогранника P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Размерность $2i$ -группы гомологий равна числу $2i$ -мерных клеток в построенном выше клеточном разбиении. Это число равно числу вершин индекса i , что есть $h_i(P)$ в силу рассуждения из доказательства теоремы 1.2.2. \square

Рассмотрим кольцо граней $\mathbb{Z}[P]$ (см. раздел 2.1) и элементы

$$(4.15) \quad \theta_i := \lambda_{i1}v_1 + \dots + \lambda_{im}v_m \in \mathbb{Z}[P], \quad 1 \leq i \leq n,$$

соответствующие строкам характеристической матрицы Λ .

ЛЕММА 4.5.3. *Набор $\theta_1, \dots, \theta_n$ является (линейной) регулярной последовательностью в кольце $\mathbb{Z}[P]$. Обратно, любая линейная регулярная последовательность (4.15) в кольце $\mathbb{Z}[P]$ определяет комбинаторную квазиторическую пару (P, Λ) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{Z}[P]$ является кольцом Коэна–Маколея (следствие 2.3.6), в силу предложения П.9 достаточно доказать, что $\theta_1, \dots, \theta_n$ — линейная система параметров. Условие (4.3) эквивалентно тому, что ограничения элементов $\theta_1, \dots, \theta_n$ образуют базис в линейной части кольца многочленов $\mathbb{Z}[v_{j_1}, \dots, v_{j_n}]$ для любой вершины $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ многогранника P . Согласно лемме 2.3.1, это условие в точности выделяет линейные системы параметров в кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{K}_P] = \mathbb{Z}[P]$.

Обратно, регулярная последовательность (4.15) является системой параметров, а условие леммы 2.3.1 эквивалентно условию (4.3), выделяющему комбинаторные квазиторические пары. \square

ТЕОРЕМА 4.5.4 (Дэвис–Янушкевич). *Пусть M — полиориентированное квазиторическое многообразие, задаваемое парой (P, Λ) , и \mathcal{J}_Λ обозначает идеал в кольце граней $\mathbb{Z}[P]$, порождённый элементами $\theta_1, \dots, \theta_n$ (4.15). Отображение $v_i \mapsto u_i = c_1(\rho_i) \in H^2(M)$, $1 \leq i \leq n$, индуцирует изоморфизм колец $\mathbb{Z}[P]/\mathcal{J}_\Lambda \rightarrow H^*(M)$. Таким образом,*

$$H^*(M) \cong \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\Lambda) = \mathbb{Z}[P]/\mathcal{J}_\Lambda.$$

Доказательство этого будет вытекать из результатов раздела 6.2; более общие результаты будут получены в разделе 5.5 (см. следствие 5.5.13). В случае неособых компактных торических многообразий это утверждение известно как *теорема Данилова–Юркевича*; она была доказана Юркевичем для проективных многообразий и Даниловым [Да78, теорема 10.8] в общем случае.

Заметим, что если матрица Λ имеет приведённый вид (4.5), то соотношения на двумерные классы в $H^2(M)$, происходящие из идеала \mathcal{J}_Λ , можно записать в виде

$$(4.16) \quad v_i = -\lambda_{i,n+1}v_{n+1} - \dots - \lambda_{i,m}v_m \quad \text{для } 1 \leq i \leq n.$$

Отсюда вытекает, что классы v_{n+1}, \dots, v_m мультипликативно порождают всё кольцо $H^*(M)$.

Если кольцо когомологий многообразия не порождается двумерными классами, то на многообразии нельзя задать действие тора, превращающее его в торическое или квазиторическое многообразие. Например, таким образом устанавливается, что грассманианы, за исключением проективных пространств, не являются торическими или квазиторическими многообразиями. Более тонкий анализ кольца когомологий также позволит нам установить (в разделе 4.8), что гиперповерхности Милнора H_{ij} не являются (квази)торическими многообразиями при $i > 1$.

Мы также можем вычислить классы Чженя стабильно комплексной структуры на M (см. следствие 4.3.3).

ТЕОРЕМА 4.5.5. *Пусть (M, \mathcal{S}_T) — квазиторическое многообразие с канонической стабильно комплексной структурой, определяемой полиориентацией. Тогда, в обозначениях теоремы 4.5.4, мы имеем следующее выражение для полного класса Чженя:*

$$c(M) = 1 + c_1(M) + \dots + c_n(M) = (1 + u_1) \cdots (1 + u_m) \in H^*(M).$$

Класс гомологий, двойственный к $c_k(M) \in H^{2k}(M)$, представляется суммой подмногообразий $\pi^{-1}(G) \subset M$, соответствующих всем $(n - k)$ -мерным граням $G \subset P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из того, что стабильно комплексная структура на M задаётся изоморфизмом с комплексным расслоением $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m$, а $c(\rho_i) = 1 + u_i$, $1 \leq i \leq m$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$c_k(M) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} u_{j_1} \cdots u_{j_k} \in H^{2k}(M).$$

В этой сумме слагаемые $u_{j_1} \cdots u_{j_k}$, для которых $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k} = \emptyset$, равны нулю согласно теореме 4.5.4, а остальные слагаемые двойственны подмногообразиям $\pi^{-1}(G)$, где $G = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k}$ — некоторая $(n - k)$ -мерная грань. \square

4.6. Роды Хирцебруха квазиторических многообразий

Конструкции из предыдущего раздела позволяют вычислять инварианты кобордизма (числа Чженя, роды Хирцебруха и др.) полиориентированных квазиторических многообразий в терминах

комбинаторики пространства орбит. Результаты в этом направлении получены в работах [Па99], [Па01] используя метод локализации. Ряд важных характеристик действия тора на квазиторическом многообразии M можно описать, ограничиваясь рассмотрением действия одномерной подгруппы-окружности достаточно общего положения. Например, множество неподвижных точек такого действия совпадает с множеством неподвижных точек действия тора (и, следовательно, представляет собой конечное множество, точки которого соответствуют вершинам многогранника). Если многообразие M полиориентировано, то такое действие окружности сохраняет стабильно комплексную структуру, и соответствующие представления в касательных пространствах к неподвижным точкам описываются при помощи характеристической матрицы Λ . Это позволяет, например, вычислить χ_y -род Хирцебруха как сумму вкладов, соответствующих вершинам многогранника, в которой слагаемые зависят лишь от «локальной комбинаторики» вблизи вершины. Используя некоторые дополнительные соображения, мы получаем в качестве следствия комбинаторные формулы для сигнатуры и рода Тодда многообразия.

Основные факты о родах Хирцебруха даны в приложении V.

Мы будем считать заданным комбинаторную квазиторическую пару (P, Λ) и соответствующее полиориентированное квазиторическое многообразие M . Тем самым на M фиксирована стабильно комплексная структура, как описано разделе 4.3. Ориентация многообразия определяет фундаментальный класс $\langle M \rangle \in H_{2n}(M)$.

4.6.1. Вычисление χ_y -рода. Вначале мы выберем примитивный вектор $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^t \in \mathbb{Z}^n$, такой, что

$$(4.17) \quad (\mathbf{w}_j(v), \nu) \neq 0 \text{ при } 1 \leq j \leq n \text{ и для любой вершины } v \in P,$$

где $\{\mathbf{w}_j(v), 1 \leq j \leq n\}$ — набор весов представления тора \mathbb{T}^n в касательном пространстве к неподвижной точке v . Из предложения 4.4.1 вытекает, что

$$(4.18) \quad \nu = (\mathbf{w}_1(v), \nu)\lambda_{j_1} + \dots + (\mathbf{w}_n(v), \nu)\lambda_{j_n},$$

так что условие (4.17) эквивалентно тому, что в разложении вектора ν по базису $\{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}\}$ все коэффициенты отличны от нуля.

Вектор ν определяет однопараметрическую подгруппу

$$(4.19) \quad T(\nu) := \{(e^{2\pi i\nu_1\varphi}, \dots, e^{2\pi i\nu_n\varphi}) \in \mathbb{T}^n : \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

ЛЕММА 4.6.1. *Для любого ν , удовлетворяющего условию (4.17), окружность $T(\nu)$ действует на M с изолированными неподвижными точками, соответствующими вершинам $v \in P$. Для каждой вершины $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ действие $T(\nu)$ индуцирует представление окружности в касательном пространстве $T_v M$ с весами $(\mathbf{w}_1(v), \nu), \dots, (\mathbf{w}_j(v), \nu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что веса представления окружности имеют нужный вид, непосредственно вытекает из определения весов. Так как веса представлений окружности $T(\boldsymbol{\nu})$ в пространствах $\mathcal{T}_v M$ ненулевые, все точки, соответствующие вершинам $v \in P$, являются изолированными неподвижными для действия $T(\boldsymbol{\nu})$. Осталось убедиться, что других неподвижных точек нет. Предположим, что $x \in M$ — некоторая $T(\boldsymbol{\nu})$ -неподвижная точка, причём $\pi(x) \in P$ — не вершина. Тогда $\pi(x)$ содержится во внутренности некоторой грани G положительной размерности. Обозначим через T_G общий стабилизатор точек из внутренности грани G относительно действия тора \mathbb{T}^n ; тогда $T(\boldsymbol{\nu}) \subset T_G$. Рассмотрим любую вершину v' грани G и подмногообразие $M_G = \pi^{-1}(G) \subset M$; тогда представление $T(\boldsymbol{\nu})$ в $\mathcal{T}_{v'} M$ содержит тривиальное подпространство $\mathcal{T}_{v'} M_G$. Следовательно, некоторые из весов $(\boldsymbol{w}_j(v'), \boldsymbol{\nu})$, $1 \leq j \leq n$, равны нулю. Противоречие. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $M = V_P$ — неособое проективное торическое многообразие, то условие (4.17) эквивалентно условию из доказательства соотношений Дена–Соммервилля (теорема 1.2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6.2. Пусть задан примитивный вектор $\boldsymbol{\nu}$, удовлетворяющий (4.17). Введем индекс $\text{ind}_\nu(v)$ вершины $v \in P$ как число отрицательных весов представления $T(\boldsymbol{\nu})$ в $\mathcal{T}_v M$ из леммы 4.6.1. Таким образом,

$$\text{ind}_\nu(v) = \#\{k : (\boldsymbol{w}_k(v), \boldsymbol{\nu}) < 0\}.$$

Кроме того, $\text{ind}_\nu(v)$ равен числу отрицательных коэффициентов в разложении (4.18).

ТЕОРЕМА 4.6.3 ([Па01, Теорема 3.1]). Для любого $\boldsymbol{\nu}$, удовлетворяющего (4.17), χ_y -род многообразия полиориентированного квазиторического многообразия M может быть вычислен как

$$\chi_y[M] = \sum_{v \in P} (-y)^{\text{ind}_\nu(v)} \sigma(v),$$

где сумма берётся по всем вершинам многогранника P , а $\sigma(v)$ и $\text{ind}_\nu(v)$ задаются определениями V.14 и 4.6.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула Атьи–Хирцебруха (см. [АН70], [Кр74]) даёт следующее выражения для χ_y -рода стабильно комплексного многообразия M с действием \mathbb{S}^1 :

$$(4.20) \quad \chi_y(M) = \sum_{F \subset M^{\mathbb{S}^1}} (-y)^{n(F)} \chi_y(F),$$

где сумма берётся по всем связным компонентам $F \subset M$ множества неподвижных точек, а $n(F)$ обозначает количество отрицательных весов представления \mathbb{S}^1 в нормальном расслоении к $F \subset M$. В нашем случае все неподвижные подмногообразия являются точками,

соответствующими вершинам $v \in P$. Поэтому $\chi_y(F) = \chi_y(v) = \pm 1$ в зависимости от того, совпадает ли ориентация \mathbb{R}^n , определяемая базисом $\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)$, с исходной ориентацией многогранника P . Следовательно, для полиориентированного квазиторического многообразия M мы можем заменить $\chi_y(F)$ на $\sigma(v)$ в формуле (4.20). Наконец, лемма 4.6.1 показывает, что в нашем случае действия $T(\nu)$ на M число $n(F)$ в (4.20) есть в точности $\text{ind}_\nu(v)$, откуда и вытекает требуемая формула. \square

4.6.2. Старшее число Чжэня и эйлерова характеристика. Значение χ_y -рода $\chi_y(M)$ при $y = -1$ равно n -му числу Чжэня $c_n(\xi)[M]$ для любого $2n$ -мерного стабильно комплексного многообразия (M, c_T) (IV.2). Если M является почти комплексным, то n -е число Чжэня равно эйлеровой характеристике многообразия M . Тем не менее, для общих стабильно комплексных многообразий эти два числа могут отличаться, см. пример 4.6.8 ниже.

Для полиориентированного квазиторического многообразия M теорема 4.6.3 даёт следующую формулу для числа c_n :

$$(4.21) \quad c_n[M] = \sum_{v \in P} \sigma(v).$$

Если M является неособым проективным торическим многообразием, то мы имеем $\sigma(v) = 1$ для любой вершины $v \in P$ (см. пример 4.4.3), и $c_n[M]$ равно эйлеровой характеристике $e(M)$. Таким образом, для торических многообразий эйлерова характеристика равна числу вершин многогранника P . Это также имеет место для произвольного квазиторического многообразия M :

$$(4.22) \quad e[M] = f_{n-1}(P).$$

Для доказательства достаточно заметить, что эйлерова характеристика S^1 -многообразия равна сумме эйлеровых характеристик неподвижных подмногообразий и использовать лемму 4.6.1.

Из сравнения соотношений (4.21) и (4.22) мы получаем следующее препятствие к существованию \mathbb{T}^n -инвариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6.4. *Предположим, что M допускает \mathbb{T}^n -инвариантную почти комплексную структуру, и на нём выбрана ассоциированная полиориентация. Тогда $\sigma(v) = 1$ для любой вершины $v \in P$ и, следовательно,*

$$c_n[M] = e[M].$$

С другой стороны, теорема Томаса [Th67, Th. 1.7] утверждает, что вещественное ориентируемое $2n$ -мерное расслоение ζ допускает комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно допускает стабильно комплексную структуру $c_T: \zeta \oplus \mathbb{R}^{2(l-n)} \rightarrow \xi$. такую, что

$c_n(\xi) = e(\zeta)$ (в правой части стоит эйлеров класс). Отсюда вытекает, что условие из предложения 4.6.4 является достаточным для существования на квазиторическом многообразии M почти комплексной структуры (не обязательно \mathbb{T}^n -инвариантной).

4.6.3. Сигнатура. Значение χ_y -рода при $y = 1$ есть сигнатура (или L -род) многообразия. Будучи инвариантом класса ориентированного кобордизма, сигнатура многообразия M не зависит от стабильно комплексной структуры (т.е. из всей дополнительной структуры на M , задаваемой полиориентацией, лишь ориентация самого M влияет на сигнатуру). Следующее утверждение даёт формулу для $\text{sign}(M)$, которая зависит лишь от ориентации.

СЛЕДСТВИЕ 4.6.5. *Сигнатура ориентированного квазиторического многообразия M вычисляется как*

$$\text{sign}(M) = \sum_{v \in P} \det(\tilde{\mathbf{w}}_1(v), \dots, \tilde{\mathbf{w}}_n(v)),$$

где $\tilde{\mathbf{w}}_j(v)$ — векторы, определяемые из условий

$$\tilde{\mathbf{w}}_j(v) = \pm \mathbf{w}_j(v) \quad \text{и} \quad (\tilde{\mathbf{w}}_j(v), \boldsymbol{\nu}) > 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка $y = 1$ в формулу из теоремы 4.6.3 даёт формулу

$$(4.23) \quad \text{sign}(M) = \sum_{v \in P} (-1)^{\text{ind}_\nu(v)} \sigma(v).$$

При помощи (4.14) мы вычисляем

$$\begin{aligned} (-1)^{\text{ind}_\nu(v)} \sigma(v) &= (-1)^{\text{ind}_\nu(v)} \det(\mathbf{w}_1(v), \dots, \mathbf{w}_n(v)) = \\ &= \det(\tilde{\mathbf{w}}_1(v), \dots, \tilde{\mathbf{w}}_n(v)), \end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемая формула. \square

Если M является проективным торическим многообразием V_P , то $\sigma(v) = 1$ для всех $v \in P$, и формула (4.23) даёт

$$\text{sign}(V_P) = \sum_{v \in P} (-1)^{\text{ind}_\nu(v)}.$$

Так как в этом случае индекс $\text{ind}_\nu(v)$ совпадает с индексом из доказательства теоремы 1.2.2, мы получаем формулу, известную в торической геометрии [Od88, Th. 3.12]:

$$(4.24) \quad \text{sign}(V_P) = \sum_{k=0}^n (-1)^k h_k(P).$$

Заметим, что если n нечётно, то правая часть этой формулы обращается в нуль ввиду соотношений Дена–Соммервилля.

4.6.4. Род Тодда. Следующим важным частным случаем χ_y -рода является род Тодда, соответствующий значению $y = 0$. В этом случае слагаемые в формуле из теоремы 4.6.3 не определены для вершин индекса 0, и необходим дополнительный анализ.

ТЕОРЕМА 4.6.6. *Род Тодда полиориентированного квазиторического многообразия вычисляется как*

$$\text{td}(M) = \sum_{v \in P: \text{ind}_v(v)=0} \sigma(v)$$

(сумма берётся по всем вершинам индекса 0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы воспользуемся формулой Атьи–Ботта [АВ67], которая даёт следующее выражение для эквивариантного χ_y -рода \mathbb{S}^1 -многообразия M :

$$(4.25) \quad \chi_y(q, M) = \sum_{v \in P} \prod_{j=1}^n \frac{1 + yq^{s_j(v)}}{1 - q^{s_j(v)}} \sigma(v),$$

где $q = e^{2\pi i\varphi} \in \mathbb{S}^1$, а $s_j(v) = (\mathbf{w}_j(v), \mathbf{v})$, $1 \leq j \leq n$, — веса представления окружности в касательном пространстве к неподвижной точке v . Теорема Атьи и Хирцебруха [АН70] утверждает, что выражение (4.25) для $\chi_y(q, M)$ не зависит от q и равно $\chi_y(M)$. Тогда, переходя к пределу в правой части (4.25) при $q \rightarrow 0$, мы получаем формулу (4.20) для $y \neq 0$ (так как $\lim_{q \rightarrow 0}$ от каждого слагаемого в (4.25) есть в точности $(-y)^{\text{ind}(v)} \sigma(v)$). В случае $y = 0$ (род Тодда) тот же самый предел для слагаемого, соответствующего вершине v , равен нулю, если найдется хотя бы один $s_j(v) < 0$, а иначе равен 1. Это есть в точности то, что утверждается в теореме. \square

В случае неособого торического многообразия V_P имеется лишь одна вершина индекса 0. Это — «нижняя» вершина многогранника P , для которой все инцидентные рёбра являются исходящими (в обозначениях, используемых при доказательстве теоремы 1.2.2). Так как $\sigma(v) = 1$ для любой $v \in P$, теорема 4.6.6 даёт $\text{td}(V_P) = 1$, что хорошо известно (см., например, [Fu93, §5.3]; род Тодда для алгебраических многообразий равен *арифметическому роду*).

Если же M является почти комплексным многообразием, то $\text{td}(M) > 0$, см. предложение 4.6.4 и теорему 4.6.6.

4.6.5. Примеры.

ПРИМЕР 4.6.7. Комплексная проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$, рассматриваемая как торическое многообразие, имеет стандартную комплексную структуру, задаваемую при помощи изоморфизма расслоений $\mathcal{T}(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}$, где η — расслоение Хопфа. Ориентация также определяется комплексной структурой. Торическое многообразие $\mathbb{C}P^2$ происходит из 2-мерного симплекса с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Таким образом, векторы-столбцы λ_1 , λ_2 , λ_3

матрицы Λ являются примитивными векторами, нормальными к гиперграням симплекса и направленными внутрь. Веса представлений тора в касательных пространствах к неподвижным точкам являются векторами вдоль рёбер, направленными от соответствующей вершины. Это изображено на рис. 4.1. Вычислим род Тодда и сигнатуру при помощи формулы (4.23) и теоремы 4.6.6. Мы имеем $\sigma(v_1) = \sigma(v_2) = \sigma(v_3) = 1$. Возьмём $\nu = (1, 2)$, тогда $\text{ind}(v_1) = 0$, $\text{ind}(v_2) = 1$, $\text{ind}(v_3) = 2$ (напомним, что индекс есть число отрицательных скалярных произведений векторов рёбер с ν). Итак,

$$\text{sign}(\mathbb{C}P^2) = 1, \quad \text{td}[\mathbb{C}P^2] = 1.$$

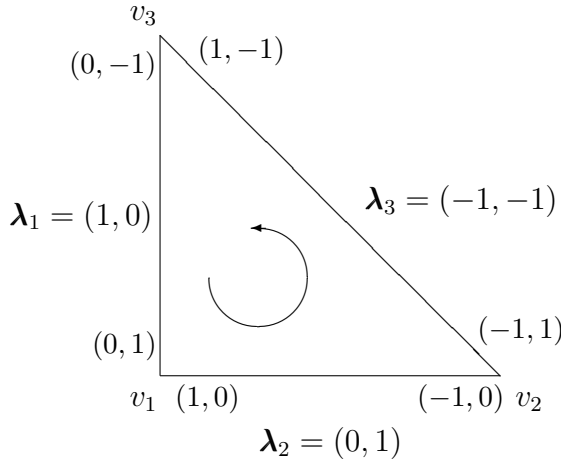


Рис. 4.1. $\mathcal{T}(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}$

ПРИМЕР 4.6.8. Теперь рассмотрим $\mathbb{C}P^2$ с полиориентацией, определяемой тремя векторами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ на рис. 4.2. Эта полиориентация отличается от предыдущего примера знаком вектора λ_3 . Стабильно комплексная структура определяется изоморфизмом $\mathcal{T}(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \eta$. Используя (4.14), мы вычисляем

$$\sigma(v_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \sigma(v_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \sigma(v_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Взяв $\nu = (1, 2)$, мы находим $\text{ind}_\nu(v_1) = 0$, $\text{ind}_\nu(v_2) = 0$, $\text{ind}_\nu(v_3) = 1$. Итак,

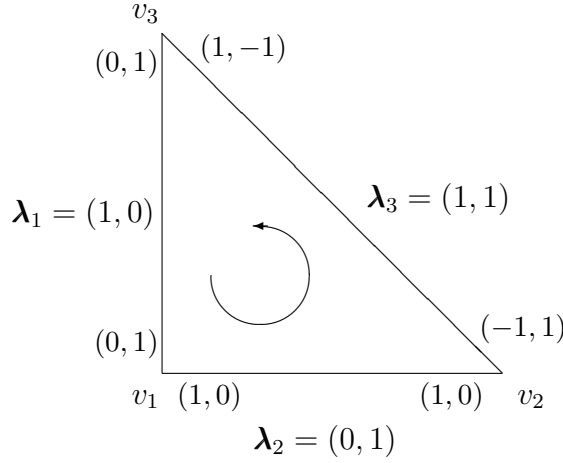
$$\text{sign}[\mathbb{C}P^2, \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \eta] = 1, \quad \text{td}[\mathbb{C}P^2, \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \eta] = 0.$$

Заметим, что в этом случае формула (4.21) даёт

$$c_n[\mathbb{C}P^2, \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \eta] = \sigma(v_1) + \sigma(v_2) + \sigma(v_3) = -1,$$

в то время как эйлерова характеристика многообразия $\mathbb{C}P^2$ равна 3.

В разделе 4.8 мы приведём другие примеры вычислений.

Рис. 4.2. $T(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \eta$

4.7. Пример: многообразие ограниченных флагов

Многообразия ограниченных флагов были введены Бухштабером и Рэем в [BR98]. В [BP98] и [BR01] было показано, что эти многообразия являются квазиторическими над кубами. Анализ конструкций из этих работ позволяет нам установить, что многообразия ограниченных флагов на самом деле являются проективными торическими многообразиями; в этом разделе мы приводим соответствующие результаты. Многообразия ограниченных флагов играют существенную роль в наших дальнейших построениях; на них основана конструкция торических мультипликативных образующих кольца комплексных кобордизмов в разделе 4.8, а также они являются одним из важнейших примеров *башен Ботта*, которым у нас посвящён раздел 4.10. Кроме того, конструкции из этого раздела хорошо иллюстрируют наш подход к описанию торических и квазиторических многообразий.

КОНСТРУКЦИЯ 4.7.1 (многообразие ограниченных флагов). *Ограниченным флагом* в \mathbb{C}^{n+1} называется полный флаг

$$\mathcal{U} = \{U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}, \quad \dim U_i = i\},$$

такой, что подпространство U_k содержит координатное подпространство $\mathbb{C}^{k-1} = \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$, порождённое первыми $k-1$ векторами стандартного базиса, при $2 \leq k \leq n$. Обозначим через B_n множество всех ограниченных флагов в \mathbb{C}^{n+1} .

Каждый ограниченный флаг \mathcal{U} в \mathbb{C}^{n+1} однозначно задаётся набором из n прямых

$$(4.26) \quad \mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_{n+1}, \quad l_i \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad \dim l_i = 1\},$$

таким, что $l_k \subset \mathbb{C}_k \oplus l_{k+1}$ при $1 \leq k \leq n$ и $l_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1}$, где $\mathbb{C}_k = \langle e_k \rangle$ есть k -я координатная прямая. Действительно, задав набор прямых

\mathcal{L} мы восстанавливаем ограниченный флаг \mathcal{U} , положив $U_k = \mathbb{C}^{k-1} \oplus l_k$ при $1 \leq k \leq n+1$. Обратно, условия $l_k \subset \mathbb{C}_k \oplus l_{k+1}$ и $U_k = \mathbb{C}^{k-1} \oplus l_k$ позволяют по флагу \mathcal{U} однозначно восстановить набор прямых \mathcal{L} , в обратном порядке l_{n+1}, l_n, \dots, l_1 .

ТЕОРЕМА 4.7.2. *B_n является гладким торическим многообразием относительно действия алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ на ограниченных флагах, происходящего из следующего действия на \mathbb{C}^{n+1} :*

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (w_1, \dots, w_n, w_{n+1}) = (t_1 w_1, \dots, t_n w_n, w_{n+1}),$$

где $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ и $(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале мы построим покрытие B_n гладкими аффинными картами, с регулярными функциями перехода, и тем самым зададим на B_n структуру гладкого алгебраического многообразия. Мы будем задавать ограниченные флаги наборами прямых 4.26, и пусть \mathbf{v}_k — произвольный направляющий вектор прямой l_k , $1 \leq k \leq n$, а для последней прямой мы положим $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$. Рассмотрим два набора открытых подмножеств в B_n :

$$\begin{aligned} V_k^0 &= \{\mathcal{U} \in B_n : l_k \neq \mathbb{C}_k\}, & 1 \leq k \leq n, \\ V_k^1 &= \{\mathcal{U} \in B_n : (\mathbf{v}_k, \mathbf{e}_k) \neq 0\}, & 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Далее определим 2^n открытых множеств

$$V^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = V_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap V_n^{\varepsilon_n}, \quad \text{где } \varepsilon_k = 0, 1,$$

Для каждого k мы имеем $V_k^0 \cup V_k^1 = B_n$, откуда вытекает, что набор $\{V^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}\}$ задаёт покрытие B_n . Из условия $l_k \subset \mathbb{C}_k \oplus l_{k+1}$ следует, что

$$(4.27) \quad \mathbf{v}_k = z_k \mathbf{e}_k + z_{k+n} \mathbf{v}_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

для некоторых $z_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 2n$. Мы имеем $z_k \neq 0$, если $\mathcal{U} \in V_k^1$, и $z_{k+n} \neq 0$, если $\mathcal{U} \in V_k^0$. Пусть $\mathcal{U} \in V^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$; тогда мы можем выбрать векторы (4.27) в виде $\mathbf{v}_k = x_k^0 \mathbf{e}_k + \mathbf{v}_{k+1}$, если $\varepsilon_k = 0$, и $\mathbf{v}_k = \mathbf{e}_k + x_k^1 \mathbf{v}_{k+1}$, если $\varepsilon_k = 1$, для $k = n, n-1, \dots, 1$. Тогда $(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n})$ является набором аффинных координат в $V^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$, что позволяет отождествить каждое из этих множеств с аффинным пространством \mathbb{C}^n . Непосредственная проверка показывает, что функции замены координат являются регулярными на пересечении карт, а значит B_n — гладкое алгебраическое многообразие.

На самом деле вычисление функций замен координат показывает, что все они являются мономами Лорана, откуда уже вытекает, что B_n — торическое многообразие [Да78]. Однако в этом легко убедиться непосредственно. Действительно, действие тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ из условия теоремы в координатах карты $V^{0, \dots, 0}$ является стандартным, т.е.

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_1^0, \dots, x_n^0) = (t_1 x_1^0, \dots, t_n x_n^0).$$

Следовательно, мы имеем эквивариантное вложение открытого множества $(\mathbb{C}^\times)^n \subset V^{0,\dots,0} \subset B_n$, а значит B_n — торическое многообразие в силу определения 3.1.1. \square

ЛЕММА 4.7.3. *Полный веер Σ , соответствующий торическому многообразию B_n , имеет $2n$ одномерных конусов, порождённых векторами*

$$\mathbf{a}_k^0 = \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{a}_k^1 = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

и 2^n максимальных конусов, порождённых векторами $\mathbf{a}_1^{\varepsilon_1}, \dots, \mathbf{a}_n^{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_k = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждой аффинной карте $V^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \subset B_n$, построенной в доказательстве теоремы 4.7.2, соответствует n -мерный конус $\sigma^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ веера Σ , так что мы имеем 2^n таких конусов. Одномерные конусы в Σ соответствуют $(\mathbb{C}^\times)^n$ -инвариантным связным подмногообразиям коразмерности 1 в B_n . Каждое из таких подмногообразий задаётся в аффинных картах обращением в нуль одной из координат, и из явного вида аффинных карт вытекает, что всего имеется $2n$ таких подмногообразий (каждое из которых задаётся уравнением $x_k^{\varepsilon_k} = 0$).

Для того, чтобы найти образующие конуса $\sigma^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$, мы заметим, что образующие двойственного конуса $\check{\sigma}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ соответствуют весам представления тора в аффинном пространстве \mathbb{C}^n , соответствующем карте $V^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$. Так как представление тора в карте $V^{0, \dots, 0}$ стандартно, мы имеем $\mathbf{a}_k^0 = \mathbf{e}_k$ для $1 \leq k \leq n$. Для нахождения оставшихся векторов достаточно вычислить веса представления тора в карте $V^{1, \dots, 1}$.

Координаты (x_1^1, \dots, x_n^1) в карте $V^{1, \dots, 1}$ определяются из соотношений $\mathbf{v}_k = \mathbf{e}_k + x_k^1 \mathbf{v}_{k+1}$, для $k = n, n-1, \dots, 1$ (где $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$). Элемент $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ действует на \mathbf{e}_k умножением на t_k при $1 \leq k \leq n$ и действует на \mathbf{e}_{k+1} тождественно (см. теорему 4.7.2). Непосредственная проверка показывает, что в координатах (x_1^1, \dots, x_n^1) действие тора записывается следующим образом:

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_1^1, \dots, x_n^1) = (t_1^{-1} t_2 x_1^1, \dots, t_{n-1}^{-1} t_n x_{n-1}^1, t_n^{-1} x_n^1).$$

Другими словами, веса представления суть столбцы матрицы

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда векторы $\mathbf{a}_1^1, \dots, \mathbf{a}_n^1$, порождающие одномерные грани конуса $\sigma^{1, \dots, 1}$, образуют двойственный базис, т.е. являются столбцами матрицы $(W^{-1})^t$. Непосредственное вычисление показывает, что они имеют вид, указанный в лемме. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.7.4. Многообразие B_n является проективным торическим многообразием, соответствующим многограннику

$$P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}_k^0, \mathbf{x}) \geq 0, \quad (\mathbf{a}_k^1, \mathbf{x}) + k \geq 0 \quad \text{при } 1 \leq k \leq n \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показывает непосредственная проверка, веер из леммы 4.7.3 является нормальным веером для указанного многогранника. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.7.5 ([BR01, Ex. 2.8]). Многообразие ограниченных флагов B_n является квазиторическим многообразием над n -мерным кубом I^n с характеристической матрицей

$$(4.28) \quad \Lambda = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array} \right).$$

(мы предполагаем, что гиперграни куба занумерованы таким образом, что F_k и F_{n+k} являются противоположными, т.е. не пересекаются, при $1 \leq k \leq n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симплициальный комплекс \mathcal{K}_Σ , соответствующий вееру из леммы 4.7.3 (см. раздел 3.2), является границей n -мерного крест-многогранника. Следовательно, многогранник из следствия 4.7.4 комбинаторно эквивалентен кубу I^n . \square

ПРИМЕР 4.7.6. Многообразие B_2 совпадает с поверхностью Хирцебруха F_1 из примера 3.1.7.

Наряду с веером и многогранником, соответствующим B_n , также легко дать описание многообразия ограниченных флагов на основе конструкции Кокса (см. раздел 3.2) или симплектической редукции (см. раздел 3.3).

Момент-угол-многообразие, соответствующее комбинаторному кубу I^n , представляет собой произведение n трёхмерных сфер:

$$(4.29) \quad \mathcal{Z}_{I^n} = \{ (z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n} : |z_k|^2 + |z_{k+n}|^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n \}.$$

Многообразие B_n получается факторизацией \mathcal{Z}_{I^n} по ядру $K(\Lambda)$ отображения $\lambda: \mathbb{T}^{2n} \rightarrow \mathbb{T}^n$, задаваемого матрицей (4.28). Мы имеем $K(\Lambda) \cong \mathbb{T}^n$. В явном виде вложение $K(\Lambda) \subset \mathbb{T}^{2n}$ можно получить, используя матрицу, аналогичную (3.10), и это вложение имеет вид

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1 t_2 \cdots t_{n-1} t_n, t_2 \cdots t_{n-1} t_n, \dots, t_{n-1} t_n, t_n, t_1, t_2, \dots, t_n).$$

В то же время следующее утверждение позволяет явно описать проекцию $q: \mathcal{Z}_{I^n} \rightarrow B_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7.7. Сопоставим точке $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathcal{Z}_{I^n}$ набор векторов $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{v}_n, \dots, \mathbf{v}_1$ по правилу (4.27), и положим $l_k = \langle \mathbf{v}_k \rangle$, $1 \leq k \leq n+1$. Тогда проекция $q: \mathcal{Z}_{I^n} \rightarrow B_n$

переводит $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{I^n}$ в ограниченный флаг в \mathbb{C}^{n+1} , задаваемый набором прямых l_1, \dots, l_{n+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В явном виде отображение $\lambda: \mathbb{T}^{2n} \rightarrow \mathbb{T}^n$, задаваемое матрицей (4.28), имеет вид

$$(s_1, \dots, s_{2n}) \mapsto (s_1 s_{n+1}^{-1} s_{n+2}^{-1} \cdots s_{2n}^{-1}, s_2 s_{n+2}^{-1} \cdots s_{2n}^{-1}, \dots, s_{n-1} s_{2n-1}^{-1} s_{2n}^{-1}, s_n s_{2n}^{-1}).$$

Пусть $\varphi: \mathcal{Z}_{I^n} \rightarrow B_n$ — отображение, переводящее $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{I^n}$ в ограниченный флаг, определяемый как описано в формулировке предложения. Непосредственная проверка показывает, что отображение φ является λ -эквивариантным, т.е. $\lambda(\mathbf{s})\varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{z})$, где $\mathbf{s} \cdot \mathbf{z}$ обозначает действие покоординатным умножением. Отсюда вытекает, что мы имеем \mathbb{T}^n -эквивариантное отображение $\mathcal{Z}_{I^n}/K(\Lambda) \rightarrow B_n$, которое и задаёт требуемое отождествление $\mathcal{Z}_{I^n}/K(\Lambda)$ с B_n . \square

Алгебраическая версия предложения 4.7.7 (конструкция Кокса) устроена полностью аналогично. Вместо момент-угол-многообразия (4.29) мы имеем дополнение конфигурации координатных подпространств $U(\Sigma)$, которое для веера из леммы 4.7.3 имеет вид $(\mathbb{C}^2 \setminus 0) \times \dots \times (\mathbb{C}^2 \setminus 0)$ (n сомножителей). Многообразие B_n получается факторизацией этого $U(\Sigma)$ по ядру G отображения алгебраических торов $(\mathbb{C}^\times)^{2n} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^n$, задаваемому матрицей (4.28). Геометрическое описание проекции $U(\Sigma) \rightarrow B_n$ полностью совпадает с указанным в предложении 4.7.7.

Далее мы будем использовать обозначения из примера 1.2 для куба \mathbb{I}^n и его гиперграней F_k^0, F_k^1 , где $1 \leq k \leq n$. В обозначения следствия 4.7.5 мы имеем $F_k = F_k^0$ и $F_{n+k} = F_k^1$. При комбинаторной эквивалентности многогранника из следствия 4.7.4 и куба \mathbb{I}^n , гипергрань, задаваемая уравнением $(\mathbf{a}_k^0, \mathbf{x}) = 0$ переходит в F_k^0 , а гипергрань, задаваемая уравнением $(\mathbf{a}_k^1, \mathbf{x}) + k = 0$ переходит в F_k^1 . Следующее утверждение позволяет явно описать характеристические подмногообразия в B_n (или дивизоры, инвариантные относительно действия тора).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7.8 ([BR01, Ex. 2.8]).

1. Проекция $\pi: B_n \rightarrow \mathbb{I}^n$ на пространство орбит действия тора устроена следующим образом: ограниченный флаг, задаваемый набором прямых l_1, \dots, l_{n+1} , переходит в $((\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_1)^2, \dots, (\mathbf{v}_n, \mathbf{e}_n)^2) \in \mathbb{I}^n$, где \mathbf{v}_k — вектор единичной длины, порождающий прямую l_k , для $1 \leq k \leq n$.

2. Характеристическое подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^0)$ гомеоморфно B_{n-1} , а $\pi^{-1}(F_k^1)$ гомеоморфно $B_{k-1} \times B_{n-k}$, для $1 \leq k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция $p: \mathcal{Z}_{I^n} \rightarrow \mathbb{I}^n$ переводит точку (z_1, \dots, z_{2n}) в $(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$. Заметим, что если $(z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathcal{Z}_{I^n}$, то векторы $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{v}_n, \dots, \mathbf{v}_1$, задаваемые формулами (4.27),

имеют единичную длину и $(\mathbf{v}_k, \mathbf{e}_k) = z_k$ для $1 \leq k \leq n$. Теперь первое утверждение вытекает из предложения 4.7.7 и соотношения $p = \pi \circ q$.

Подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^0)$ совпадает с образом при проекции q подмножества в \mathcal{Z}_{I^n} , задаваемого соотношением $z_k = 0$. Из соотношений (4.27) вытекает, что если $z_k = 0$, то все векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ лежат в пространстве $\mathbb{C}^{\{1, \dots, n+1\} \setminus k}$. Следовательно, подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^0)$ можно отождествить с многообразием ограниченных флагов в $\mathbb{C}^{\{1, \dots, n+1\} \setminus k}$, т.е. с B_{n-1} .

Аналогично, подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^0)$ совпадает с образом при проекции q подмножества в \mathcal{Z}_{I^n} , задаваемого соотношением $z_k = 1$. Из соотношений (4.27) вытекает, что если $z_k = 1$, то векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ лежат в подпространстве $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{n+1}$, а векторы $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ — в подпространстве $\mathbb{C}^{\{k+1, \dots, n+1\}}$. Следовательно, подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^1)$ можно отождествить с $B_{k-1} \times B_{n-k}$. \square

Наконец, мы опишем одномерные расслоения (4.7), соответствующие характеристическим подмногообразиям в B_n . Обозначим через ρ_k^ε расслоение, соответствующее подмногообразию $\pi^{-1}(F_k^\varepsilon)$, для $1 \leq k \leq n$, $\varepsilon = 0, 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7.9 ([BR01, Ex. 2.8]). *Расслоение ρ_k^0 изоморфно расслоению над B_n , слоем которого над ограниченным флагом \mathcal{U} является прямая l_k . Расслоение ρ_k^1 изоморфно расслоению над B_n , слоем которого над \mathcal{U} является ортогональное дополнение к l_k в $\mathbb{C}_k \oplus l_{k+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4.7), расслоение ρ_k^0 задаётся как $\mathcal{Z}_{I^n} \times_K \mathbb{C}_k$, а расслоение ρ_k^1 — как $\mathcal{Z}_{I^n} \times_K \mathbb{C}_{n+k}$. Тогда утверждение вытекает из (4.27). \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7.10. *Многообразие B_n отождествляется с проективизацией 2-мерного расслоения $\underline{\mathbb{C}} \oplus \rho_1^0$ над B_{n-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекцию $B_n \rightarrow B_{n-1}$, сопоставляющую флагу $\mathcal{U} = \{U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$ флаг $\mathcal{U}' = \mathcal{U}/\mathbb{C}_1$ в $\mathbb{C}^{2, \dots, n+1} \cong \mathbb{C}^n$. (Более подробно, $\mathcal{U}' = \{U'_1 \subset U'_2 \subset \dots \subset U'_{n-1}\}$, где $U'_k = U_{k+1}/\mathbb{C}_1$, $1 \leq k \leq n-1$.) Другими словами, набор прямых (4.26), соответствующий \mathcal{U}' , получается из набора, соответствующего \mathcal{U} , забыванием первой прямой. Для того, чтобы доопределить флаг \mathcal{U} по флагу \mathcal{U}' мы должны произвольным образом выбрать прямую l_1 в подпространстве $\mathbb{C}_1 \oplus l_2$. Так как прямая l_2 является первой из прямых в наборе, соответствующем флагу $\mathcal{U}' \in B_{n-1}$, мы имеем $B_n \cong \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \rho_1^0)$, как и требовалось. \square

Таким образом, мы имеем башню расслоений $B_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow B_1 = \mathbb{C}P^1$, где каждая стрелка означает расслоение со слоем $\mathbb{C}P^1$. Конструкции такого вида называются *башнями Ботта*; им у нас посвящён отдельный раздел 4.10.

4.8. Кваситорические представители в классах кобордизмов

Основным результатом этого раздела является теорема 4.8.15, которая показывает, что в каждом классе комплексных бордизмов содержится полиориентированное квазиторическое многообразие (с эквивариантной стабильно комплексной структурой, описанной в разделе 4.3). Этот результат был получен в [BPR07]. Доказательство опирается на конструкцию [BP98] специального набора аддитивных образующих групп комплексных бордизмов Ω_n^U , представленных торическими многообразиями. Тем самым показывается, что любой класс комплексных кобордизмов представляется несвязным объединением торических многообразий. Следующим шагом является замена несвязных объединений на связные суммы. Имеется конструкция Дэвиса–Янушкевича [DJ91], при помощи которой связная сумма $M_1 \# M_2$ двух квазиторических многообразий M_1 и M_2 над многогранниками P_1 и P_2 соответственно превращается в квазиторическое многообразие над связной суммой $P_1 \# P_2$ многогранников. Однако трудность заключается в необходимости следить одновременно за действием тора и стабильно комплексной структурой на связной сумме многообразий. Оказывается, что на связной сумме $M_1 \# M_2$ не всегда можно ввести полиориентацию таким образом, чтобы класс кобордизма $[M_1 \# M_2] \in \Omega_U$ индуцированной стабильно комплексной структуры представлял сумму классов $[M_1]$ и $[M_2]$; это зависит от распределения знаков неподвижных точек многообразий. (На связной сумме двух стабильно комплексных многообразий M_1 и M_2 всегда имеется стабильно комплексная структура, представляющая класс $[M_1] + [M_2]$, однако она не всегда согласована с действием тора.)

Чтобы обойти описанную выше трудность, мы заменяем M_2 на кобордантное ему квазиторическое многообразие M'_2 , пространством орбит которого является многогранник $I^n \# P_2$ (где I^n обозначает n -мерный куб). В результате оказывается, что на связной сумме $M_1 \# M'_2$ имеется стабильно комплексная структура, согласованная с действием тора и представляющая класс кобордизма $[M_1] + [M'_2] = [M_1] + [M_2]$; пространством орбит этого квазиторического многообразия является многогранник $P_1 \# I^n \# P_2$. Это позволяет завершить доказательство основного результата о квазиторических представителях в классах комплексных кобордизмов.

Наш результат о квазиторических представителях классов комплексных кобордизмов можно рассматривать как решение квазиторического аналога проблемы Хирцебруха IV.16 о классах кобордизма, представляемых связными неособыми алгебраическими многообразиями (квазиторические многообразия по определению связны).

Используя построения из разделов 3.3.2 и 4.3, основной результат этого раздела можно интерпретировать следующим образом: каждый класс комплексных кобордизмов может быть представлен фактормногообразием полного пересечения вещественных квадратиков по свободному действию тора. Это ещё раз подчёркивает важность квадратичного представления момент-угол-многообразия \mathcal{Z}_P ; к этой теме мы вернёмся в следующей главе.

4.8.1. Гиперповерхности Милнора H_{ij} не являются квазиторическими многообразиями. Стандартным набором мультипликативных образующих кольца комплексных кобордизмов Ω_U являются гиперповерхности Милнора (IV.4), см. теорему IV.13. Однако, как было показано в [БР98], многообразие H_{ij} не является квазиторическим при $i > 1$. Здесь мы приводим соответствующие рассуждения.

КОНСТРУКЦИЯ 4.8.1. Пусть $\mathbb{C}^{i+1} \subset \mathbb{C}^{j+1}$ — подпространство, порождённое первыми $i + 1$ векторами стандартного базиса в \mathbb{C}^{j+1} . отождествим $\mathbb{C}P^i$ с множеством прямых $l \subset \mathbb{C}^{i+1}$. Каждой прямой l сопоставим множество гиперплоскостей $\alpha \subset \mathbb{C}^{j+1}$, содержащих l . Это множество гиперплоскостей, в свою очередь, отождествляется с $\mathbb{C}P^{j-1}$. Рассмотрим пространство E пар (l, α) , $l \subset \alpha$. Проекция $(l, \alpha) \mapsto l$ определяет расслоение $E \rightarrow \mathbb{C}P^i$ со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$.

ЛЕММА 4.8.2. *Гиперповерхность H_{ij} отождествляется с пространством E из предыдущей конструкции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая $l \subset \mathbb{C}^{i+1}$ задаётся своим направляющим вектором $(z_0 : z_1 : \dots : z_i)$. Гиперплоскость $\alpha \subset \mathbb{C}^{j+1}$ задаётся некоторой линейной формой. Если обозначить через w_0, w_1, \dots, w_j коэффициенты этой линейной формы, то условие $l \subset \alpha$ в точности эквивалентно условию из определения поверхности H_{ij} . \square

ТЕОРЕМА 4.8.3. *Кольцо когомологий гиперповерхности H_{ij} задаётся следующим образом:*

$$H^*(H_{ij}) \cong \mathbb{Z}[u, v] / (u^{i+1}, (u^i + u^{i-1}v + \dots + uv^{i-1} + v^i)v^{j-i}),$$

где $\deg u = \deg v = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать обозначения из конструкции 4.8.1. Пусть ζ обозначает расслоение над $\mathbb{C}P^i$, слоем которого над $l \in \mathbb{C}P^i$ является j -мерное подпространство $l^\perp \subset \mathbb{C}^{j+1}$. Тогда мы можем отождествить H_{ij} с проективизацией $\mathbb{C}P(\zeta)$. Действительно, для каждой прямой $l' \subset l^\perp$, представляющей точку слоя расслоения $\mathbb{C}P(\zeta)$ над $l \in \mathbb{C}P^i$, гиперплоскость $\alpha = (l')^\perp \subset \mathbb{C}^{j+1}$ содержит l , так что пара (l, α) задаёт некоторую точку из H_{ij} (см. лемму 4.8.2). Оставшаяся часть доказательства

воспроизводит общее рассуждение из теоремы Дольда о когомологиях проективизации векторного расслоения (см., например, [St68, Гл. V]).

Обозначим через η тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^i$ (его слоем над $l \in \mathbb{C}P^i$ является сама прямая l). Тогда $\eta \oplus \zeta$ есть тривиальное $(j+1)$ -мерное расслоение. Положим $w = c_1(\bar{\eta}) \in H^2(\mathbb{C}P^i)$ и обозначим через $c(\eta) = 1 + c_1(\eta) + c_2(\eta) + \dots$ полный класс Чженя. Так как $c(\eta)c(\zeta) = 1$ и $c(\eta) = 1 - w$, мы имеем

$$(4.30) \quad c(\zeta) = 1 + w + \dots + w^i.$$

Рассмотрим проекцию $p: \mathbb{C}P(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}P^i$. Обозначим через γ «тавтологическое» одномерное расслоение над $\mathbb{C}P(\zeta)$, слоем которого над $l' \in \mathbb{C}P(\zeta)$ является прямая l' . Далее, пусть γ^\perp обозначает $(j-1)$ -мерное расслоение над $\mathbb{C}P(\zeta)$, слоем которого над $l' \subset l^\perp$ является ортогональное дополнение к l' в l^\perp (по определению $\mathbb{C}P(\zeta)$, каждая точка из $\mathbb{C}P(\zeta)$ представляется некоторой прямой l' в некотором слое расслоения ζ , который имеет вид l^\perp). Легко видеть, что $p^*(\zeta) = \gamma \oplus \gamma^\perp$. Положим $v = c_1(\bar{\gamma}) \in H^2(\mathbb{C}P(\zeta))$ и $u = p^*(w) \in H^2(\mathbb{C}P(\zeta))$. Тогда $u^{i+1} = 0$. Мы имеем $c(\gamma) = 1 - v$ и $c(p^*(\zeta)) = c(\gamma)c(\gamma^\perp)$, следовательно,

$$c(\gamma^\perp) = p^*(c(\zeta))(1 - v)^{-1} = (1 + u + \dots + u^i)(1 + v + v^2 + \dots)$$

(см. (4.30)). Но расслоение γ^\perp имеет ранг $(j-1)$, так что $c_j(\gamma^\perp) = 0$. Вычисляя однородную компоненту степени j в предыдущем равенстве, мы получаем второе соотношение $v^{j-i} \sum_{k=0}^i u^k v^{i-k} = 0$.

Так как оба пространства $\mathbb{C}P^i$ и $\mathbb{C}P^{j-1}$ имеют лишь клетки чётной размерности, спектральная последовательность Лере–Серра расслоения $p: \mathbb{C}P(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}P^i$ вырождается в члене E_2 . Следовательно, мы имеем эпиморфизм $\mathbb{Z}[u, v] \rightarrow H^*(\mathbb{C}P(\zeta))$, и группы когомологий пространств $\mathbb{C}P(\zeta)$ и $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^{j-1}$ совпадают. Отсюда вытекает, что в кольце $H^*(\mathbb{C}P(\zeta))$ нет других соотношений, кроме указанных в теореме. \square

ТЕОРЕМА 4.8.4. H_{ij} не является квазиторическим многообразием при $i > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо когомологий любого квазиторического многообразия имеет вид $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\Lambda)$, где идеал \mathcal{I}_P порождается мономами без квадратов, а \mathcal{J}_Λ — линейными формами (теорема 4.5.4). Мы можем предположить, что матрица Λ имеет приведённый вид (4.5) и выразить первые n образующих v_1, \dots, v_n через последние $m - n$ при помощи линейных уравнений с целыми коэффициентами. Поэтому мы имеем

$$\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I} + \mathcal{J} \cong \mathbb{Z}[w_1, \dots, w_{m-n}]/\mathcal{I}',$$

где \mathcal{I}' — некоторый идеал, имеющий базис, все элементы которого представляются произведениями из ≥ 2 целочисленных линейных

форм. Предположим теперь, что H_{ij} — квазиторическое многообразие. Тогда мы имеем изоморфизм

$$\mathbb{Z}[w_1, \dots, w_{m-n}]/\mathcal{I}' \cong \mathbb{Z}[u, v]/\mathcal{I}'',$$

где \mathcal{I}'' — идеал из теоремы 4.8.3. Сравнивая размерности линейных компонент в предыдущем равенстве, мы получаем $m - n = 2$, так что w_1, w_2 можно отождествить с u, v (возможно, после линейной замены). Итак, идеал \mathcal{I}'' должен иметь базис, состоящий из многочленов, разложимых в линейные множители над \mathbb{Z} , что невозможно при $i > 1$. \square

Заметим, что H_{ij} является тотальным пространством над торическим многообразием $\mathbb{C}P^i$ с торическим слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$, но действие тора не поднимается до действия на пространстве расслоения.

4.8.2. Торические мультипликативные образующие. Мы опишем, следуя [БР98] и [ВР07], семейство торических многообразий $\{B_{ij}, 0 \leq i \leq j\}$, удовлетворяющих условию $s_{i+j-1}(B_{ij}) = s_{i+j-1}(H_{ij})$. Тем самым будет показано, что это семейство, как и гиперповерхности Милнора, мультипликативно порождает кольцо комплексных кобордизмов.

КОНСТРУКЦИЯ 4.8.5. Для каждой пары чисел $0 \leq i \leq j$ введём многообразие B_{ij} , точками которого являются пары (\mathcal{U}, W) , где \mathcal{U} — ограниченный флаг в \mathbb{C}^{i+1} (конструкция 4.7.1), а W — одномерное подпространство в $U_1^\perp \oplus \mathbb{C}^{j-i}$. (Здесь U_1^\perp обозначает ортогональное дополнение к U_1 в \mathbb{C}^{i+1} ; таким образом, $U_1^\perp \oplus \mathbb{C}^{j-i}$ есть ортогональное дополнение к U_1 в \mathbb{C}^{j+1}) Таким образом, B_{ij} является пространством расслоения над B_i со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$. Это расслоение является проективизацией суммы одномерных расслоений:

$$B_{ij} = \mathbb{C}P(\rho_1^1 \oplus \dots \oplus \rho_i^1 \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}),$$

где расслоения $\rho_1^1, \dots, \rho_i^1$ над B_i описаны в предложении 4.7.9. Отсюда вытекает, что B_{ij} является $2(i + j - 1)$ -мерным торическим многообразием, а также квазиторическим многообразием над комбинаторным многогранником $I^i \times \Delta^{j-1}$ [BR01, Ex. 2.9]. Действие тора, характеристическая матрица и характеристические подмногообразия описаны в [BR01, Ex. 2.9, 4.5] или в [ВР07, 3.13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8.6. Рассмотрим отображение $f: B_i \rightarrow \mathbb{C}P^i$, которое сопоставляет ограниченному флагу \mathcal{U} прямую $U_1 \subset \mathbb{C}^{i+1}$. Тогда расслоение $B_{ij} \rightarrow B_i$ индуцируется из расслоения $H_{ij} \rightarrow \mathbb{C}P^i$ при помощи отображения f :

$$\begin{array}{ccc} B_{ij} & \longrightarrow & H_{ij} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_i & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}P^i \end{array}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введя эрмитову структуру в пространстве \mathbb{C}^{j+1} , мы можем отождествить прямые W в $U_1^\perp \oplus \mathbb{C}^{j-i}$ с гиперплоскостями в \mathbb{C}^{j+1} , содержащими U_1 . Теперь утверждение вытекает из леммы 4.8.2. \square

ТЕОРЕМА 4.8.7. Мы имеем $s_{i+j-1}[B_{ij}] = s_{i+j-1}[H_{ij}]$, где значения характеристического числа s_{i+j-1} на гиперповерхностях Милнора задаются леммой IV.12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4.8.8. Пусть $f: M_1^{2i} \rightarrow M_2^{2i}$ — отображение степени d стабильно комплексных многообразий и ξ — некоторое комплексное j -мерное векторное расслоение над M_2^{2i} , $j > 1$. Тогда

$$s_{i+j-1}[\mathbb{C}P(f^*\xi)] = d \cdot s_{i+j-1}[\mathbb{C}P(\xi)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p: \mathbb{C}P(\xi) \rightarrow M_2$ — проекция, γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$, а γ^\perp — дополнительное к нему расслоение, так что $\gamma \oplus \gamma^\perp = p^*(\xi)$. Тогда мы имеем

$$\mathcal{T}(\mathbb{C}P(\xi)) = p^*\mathcal{T}M_2 \oplus \mathcal{T}_F(\mathbb{C}P(\xi)),$$

где $\mathcal{T}_F(\mathbb{C}P(\xi))$ — касательное расслоение вдоль слоёв проекции p . Так как $\mathcal{T}_F(\mathbb{C}P(\xi)) = \text{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ и $\text{Hom}(\gamma, \gamma) = \underline{\mathbb{C}}$, мы получаем

$$\mathcal{T}_F(\mathbb{C}P(\xi)) \oplus \underline{\mathbb{C}} = \text{Hom}(\gamma, \gamma \oplus \gamma^\perp).$$

Следовательно,

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbb{C}P(\xi)) \oplus \underline{\mathbb{C}} &= p^*\mathcal{T}M_2 \oplus \text{Hom}(\gamma, \gamma \oplus \gamma^\perp) = \\ &= p^*\mathcal{T}M_2 \oplus \text{Hom}(\gamma, p^*\xi) = p^*\mathcal{T}M_2 \oplus (\bar{\gamma} \otimes p^*\xi), \end{aligned}$$

где $\bar{\gamma} = \text{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}})$.

Отображение f индуцирует отображение $F: \mathbb{C}P(f^*\xi) \rightarrow \mathbb{C}P(\xi)$, такое, что

- 1) $pF = fp_1$, где $p_1: \mathbb{C}P(f^*\xi) \rightarrow M_1$ — проекция;
- 2) $\deg F = \deg f$;
- 3) $F^*\gamma$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(f^*\xi)$.

Используя (4.31), получаем

$$s_{i+j-1}(\mathcal{T}(\mathbb{C}P(\xi))) = p^*s_{i+j-1}(\mathcal{T}M_2) + s_{i+j-1}(\bar{\gamma} \otimes p^*\xi) = s_{i+j-1}(\bar{\gamma} \otimes p^*\xi)$$

(так как $i+j-1 > i$), и аналогично для $\mathcal{T}(\mathbb{C}P(f^*\xi))$. Следовательно,

$$\begin{aligned} s_{i+j-1}[\mathbb{C}P(f^*\xi)] &= s_{i+j-1}(\mathcal{T}(\mathbb{C}P(f^*\xi))) \langle \mathbb{C}P(f^*\xi) \rangle = \\ &= s_{i+j-1}((F^*\bar{\gamma}) \otimes p_1^*f^*\xi) \langle \mathbb{C}P(f^*\xi) \rangle = \\ &= s_{i+j-1}(F^*(\bar{\gamma} \otimes p^*\xi)) \langle \mathbb{C}P(f^*\xi) \rangle = \\ &= s_{i+j-1}(\bar{\gamma} \otimes p^*\xi) \langle F_*\mathbb{C}P(f^*\xi) \rangle = \\ &= s_{i+j-1}(\bar{\gamma} \otimes p^*\xi) \langle d \cdot \mathbb{C}P(\xi) \rangle = \\ &= d \cdot s_{i+j-1}[\mathbb{C}P(\xi)]. \end{aligned}$$

□

Для завершения доказательства теоремы 4.8.7 заметим, что отображение $f: B_i \rightarrow \mathbb{C}P^i$ из предложения 4.8.6 имеет степень 1. (Оно является изоморфизмом на аффинной карте $V^{0,\dots,0} = \{\mathcal{U} \in B_i: U_1 \notin \mathbb{C}^{1,\dots,i}\}$, так как ограниченный флаг из $V^{0,\dots,0} \subset B_i$ однозначно восстанавливается по подпространству U_1 .) □

ТЕОРЕМА 4.8.9 ([БР98]). *Классы бордизма торических многообразий B_{ij} , $0 \leq i \leq j$, мультипликативно порождают кольцо комплексных бордизмов Ω_*^U . Таким образом, в классе комплексных бордизмов любого стабильно комплексного многообразия содержится несвязное объединение торических многообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения вытекает из теорем 4.8.7 и IV.13. Произведение торических многообразий является торическим, но несвязное объединение торических многообразий не является торическим многообразием, так как торические многообразия по определению связны. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Из совпадения чисел s_{i+j-1} не вытекает бордантность многообразий H_{ij} и B_{ij} . Однако, мы имеем по определению $H_{0j} = B_{0j} = \mathbb{C}P^{j-1}$ и $H_{1j} = B_{1j}$.

4.8.3. Конструкция связных сумм и доказательство основного результата. Последним шагом в доказательстве результата о квазиторических представителях в классах комплексных кобордизмов является замена несвязного объединения торических многообразий на некоторую связную сумму, которая будет квазиторическим многообразием.

КОНСТРУКЦИЯ 4.8.10 (Эквивариантная связная сумма квазиторических многообразий). Пусть заданы два полиориентированных квазиторических многообразия M' и M'' над n -мерными многогранниками P' и P'' с начальными вершинами v'_* и v''_* соответственно. Мы будем предполагать, что соответствующие характеристические матрицы через Λ' и Λ'' имеют приведённый вид (4.5).

Рассмотрим связную сумму многогранников $P' \# P'' = P' \#_{v'_*, v''_*} P''$ (см. конструкцию 1.1.9). По определению, *эквивариантная связная сумма* $M' \# M'' = M' \#_{v'_*, v''_*} M''$ есть квазиторическое многообразие над $P' \# P''$ с характеристической матрицей

$$(4.32) \quad \Lambda_{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda'_{1,n+1} & \cdots & \lambda'_{1,m'} & \lambda''_{1,n+1} & \cdots & \lambda''_{1,m''} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \lambda'_{2,n+1} & \cdots & \lambda'_{2,m'} & \lambda''_{2,n+1} & \cdots & \lambda''_{2,m''} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda'_{n,n+1} & \cdots & \lambda'_{n,m'} & \lambda''_{n,n+1} & \cdots & \lambda''_{n,m''} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица $\Lambda_{\#}$ не является приведённой, так как первые n гиперграней многогранника $P' \# P''$ не пересекаются.

Из конструкции вытекает, что $M' \# M''$ эквивариантно диффеоморфно связной сумме многообразий M' и M'' , получаемой вырезанием из M' и M'' инвариантных окрестностей \mathbb{T}^n -неподвижных точек, соответствующих вершинам v'_* и v''_* , и последующим \mathbb{T}^n -эквивариантным отождествлением границ этих окрестностей.

Для задания полиориентации (и тем самым эквивариантной стабильно комплексной структуры) на $M' \# M''$, наряду с матрицей (4.32) необходимо задать ориентацию на $M' \# M''$.

Так как многообразия M' и M'' ориентированы, на квазиторическом многообразии $M' \# M''$ из предыдущей конструкции всегда можно ввести ориентацию таким образом, чтобы оно было ориентированно диффеоморфно либо связной сумме ориентированных многообразий M' и M'' , либо связной сумме M' и $\overline{M''}$ (см. конструкцию IV.2). В первом случае мы скажем, что ориентация $M' \# M''$ согласована с ориентациями M' и M'' .

Вопрос о наличии на $M' \# M''$ согласованной ориентации можно выяснить по комбинаторным данным (P', Λ') и (P'', Λ'') . Напомним, что для полиориентированного квазиторического многообразия определено понятие знака неподвижной точки (или вершины v многогранника). Согласно лемме 4.4.2, если $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$, то знак $\sigma(v)$ измеряет разницу между ориентацией пространств $\mathcal{T}_v M$ и $(\rho_{j_1} \oplus \dots \oplus \rho_{j_n})|_v$. Таким образом, если мы положим $u_i = c_1(\rho_i) \in H^2(M)$ для $1 \leq i \leq n$, то мы имеем

$$\sigma(v) = u_{j_1} \cdots u_{j_n} \langle M \rangle,$$

где $\langle M \rangle \in H_{2n}(M)$ — фундаментальный гомологический класс.

ЛЕММА 4.8.11. *Эквивариантная связная сумма $M' \#_{v'_*, v''_*} M''$ полиориентированных квазиторических многообразий допускает ориентацию, согласованную с ориентациями M' и M'' , тогда и только тогда, когда $\sigma(v'_*) = -\sigma(v''_*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ρ'_j , $1 \leq j \leq m'$, комплексные одномерные расслоения (4.7), соответствующие характеристическим подмногообразиям в M' (или гиперграням многогранника P'), и аналогично для ρ''_k , $1 \leq k \leq m''$, и M'' . Обозначим также

$$c_1(\rho'_j) = u'_j, \quad c_1(\rho''_k) = u''_k, \quad 1 \leq j \leq m', \quad 1 \leq k \leq m''.$$

Гиперграни многогранника $P' \# P''$ разбиваются на три типа, и мы обозначим через ξ_i , ξ'_j и ξ''_k соответствующие расслоения над $M' \# M''$ (они отвечают столбцам характеристической матрицы (4.32)). Рассмотрим первые классы Чженя

$$c_1(\xi_i) = w_i, \quad c_1(\xi'_j) = w'_j, \quad c_1(\xi''_k) = w''_k$$

в $H^2(M' \# M'')$, где

$$1 \leq i \leq n, \quad n+1 \leq j \leq m', \quad n+1 \leq k \leq m''.$$

Рассмотрим отображения $p': M' \# M'' \rightarrow M'$ и $p'': M' \# M'' \rightarrow M''$, стягивающие одно из слагаемых в связной сумме в точку. Мы имеем $p'^*(\rho'_j) = \xi'_j$ для $n+1 \leq j \leq m'$ и $p''^*(\rho''_k) = \xi''_k$ для $n+1 \leq k \leq m''$. Соотношения (4.16) для многообразия $M' \# M''$ принимают вид

$$w_i = -\lambda'_{i,n+1} w'_{n+1} - \dots - \lambda'_{i,m'} w'_{m'} - \lambda''_{i,n+1} w''_{n+1} - \dots - \lambda''_{i,m''} w''_{m''}.$$

Отсюда вытекает, что

$$(4.33) \quad w_i = p'^* u'_i + p''^* u''_i \quad \text{при } 1 \leq i \leq n.$$

Так как первые n гиперграней в $P' \# P''$ не пересекаются, мы имеем $w_1 \cdots w_n = 0$ в $H^{2n}(M' \# M'')$, следовательно,

$$(p'^* u'_1 + p''^* u''_1) \cdots (p'^* u'_n + p''^* u''_n) = p'^*(u'_1 \cdots u'_n) + p''^*(u''_1 \cdots u''_n) = 0.$$

Для любого выбора ориентации и соответствующего фундаментального класса $\langle M' \# M'' \rangle \in H_{2n}(M' \# M'')$ мы получаем

$$u'_1 \cdots u'_n (p'_* \langle M' \# M'' \rangle) + u''_1 \cdots u''_n (p''_* \langle M' \# M'' \rangle) = 0.$$

Но ориентация $M' \# M''$ согласована с ориентациями M' и M'' тогда и только тогда, когда $p'_* \langle M' \# M'' \rangle = \langle M' \rangle$ и $p''_* \langle M' \# M'' \rangle = \langle M'' \rangle$, т.е. когда

$$\sigma(v'_*) + \sigma(v''_*) = 0,$$

как и требовалось. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8.12. Пусть M' и M'' — полиориентированные квазиториические многообразия над многогранниками P' и P'' соответственно, причём $\sigma(v'_*) = -\sigma(v''_*)$. Тогда стабильно комплексная структура, задаваемая на эквивариантной связной сумме $M' \# M''$ при помощи характеристической матрицы (4.32) и согласованной ориентации, эквивалентна связной сумме стабильно комплексных структур на M' и M'' . Соответствующие классы комплексных бордизмов удовлетворяют соотношению

$$[M' \# M''] = [M'] + [M''].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связная сумма данных стабильно комплексных структур на M' и M'' задаётся при помощи изоморфизма

$$(4.34) \quad \mathcal{T}(M' \# M'') \oplus \mathbb{R}^{2(m'+m''-n)} \xrightarrow{\cong} p'^*(\rho'_1 \oplus \dots \oplus \rho'_{m'}) \oplus p''^*(\rho''_1 \oplus \dots \oplus \rho''_{m''})$$

(см. конструкцию IV.2). Мы имеем $p'^*(\rho'_j) = \xi'_j$ для $n+1 \leq j \leq m'$ и $p''^*(\rho''_k) = \xi''_k$ для $n+1 \leq k \leq m''$. Кроме того, мы утверждаем, что $p'^*(\rho'_i) \oplus p''^*(\rho''_i) = \xi_i \oplus \mathbb{C}$ для $1 \leq i \leq n$. Действительно, из соотношений (4.16) для многообразия M' вытекает, что

$$p'^*(\rho'_i) = (\xi'_{n+1})^{-\lambda'_{i,n+1}} \otimes \dots \otimes (\xi'_{m'})^{-\lambda'_{i,m'}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

а из тех же соотношений для M'' вытекает, что

$$p''^*(\rho''_i) = (\xi''_{n+1})^{-\lambda''_{i,n+1}} \otimes \dots \otimes (\xi''_{m''})^{-\lambda''_{i,m''}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Расслоение ξ'_j над $M' \# M''$ имеет сечение, обращающее в нуль лишь над характеристическим подмногообразием, соответствующим гиперграню $F'_j \subset P' \# P''$, для $n + 1 \leq j \leq m'$. Аналогичное утверждение верно и для расслоений ξ'_k при $n + 1 \leq k \leq m''$. Но так как гиперграню F'_j и F''_k в $P' \# P''$ не пересекаются ни при каких j и k , расслоение $p'^*(\rho'_i) \oplus p''*(\rho''_i)$ обладает нигде не обращающимся в нуль сечением. Следовательно, $p'^*(\rho'_i) \oplus p''*(\rho''_i) = \eta \oplus \underline{\mathbb{C}}$ для некоторого 1-мерного расслоения η . Из сравнения первых классов Чженя, с учётом (4.33), вытекает, что $\eta = \xi_i$, что и требовалось.

Тогда стабильно комплексная структура (4.34) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(M' \# M'') \oplus \mathbb{R}^{2(m'+m''-n)} \rightarrow \\ \rightarrow \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \oplus \xi'_{n+1} \oplus \dots \oplus \xi'_{m'} \oplus \xi''_{n+1} \oplus \dots \oplus \xi''_{m''} \oplus \underline{\mathbb{C}}^n, \end{aligned}$$

что отличается от стабильно комплексной структуры, определяемой матрицей (4.32), на тривиальное слагаемое $\underline{\mathbb{C}}^n$. \square

Из предложения 4.8.12 вытекает, что класс комплексных бордизмов $[M' \# M'']$ не зависит от выбора начальных вершин и нумерации гиперграней (хотя комбинаторный тип многогранника $P' \# P''$ и тем самым эквивариантный топологический тип многообразия $M' \# M''$ может зависеть от этих данных).

Тем самым соотношение между эквивариантной связной суммой $M' \# M''$ полиориентированных квазиторических многообразий и стандартной связной суммой $M' \# M''$ ориентированных (или стабильно комплексных) многообразий полностью прояснено: первая совпадает со второй только в случае, когда $\sigma(v'_*) = -\sigma(v''_*)$. В противном случае эквивариантная связная сумма даёт $M' \# \overline{M''}$ или $\overline{M'} \# M''$ в зависимости от выбора ориентации. Таким образом, операцию эквивариантной связной суммы квазиторических многообразий не всегда можно использовать для получения суммы классов бордизмов. Например, если знаки всех вершин многогранника P положительны, то класс бордизма $2[M]$ невозможно получить непосредственно из $M \# M$. Это имеет место, например, в случае, когда M — неособое проективное торическое многообразие.

ПРИМЕР 4.8.13. Рассмотрим стандартный куб \mathbb{I}^n (пример 1.1.4) с ориентацией, индуцированной из \mathbb{R}^n . Квазиторическое многообразие, соответствующее характеристической $n \times 2n$ -матрице $(E | -E)$ (где E — единичная $n \times n$ -матрица), есть произведение $(\mathbb{C}P^1)^n$ со стандартной комплексной структурой. Это многообразие представляет нетривиальный класс комплексных бордизмов и знаки всех вершин куба положительны.

С другой стороны, мы можем рассмотреть полиориентированное квазиторическое многообразие над I^n , соответствующее матрице $(E | E)$. Легко видеть, что соответствующая стабильно комплексная структура на $(\mathbb{C}P^1)^n \cong (S^2)^n$ есть произведение n экземпляров

тривиальной структуры на $\mathbb{C}P^1$ из примера IV.1. Мы будем обозначать это полиориентированное квазиторическое многообразие над I^n через S . Соответствующий класс комплексных бордизмов тривиален, а знаки вершин (в обозначениях примера 1.1.4) описываются формулой

$$\sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (-1)^{\varepsilon_1} \dots (-1)^{\varepsilon_n},$$

т.е. любые две смежные вершины имеют различные знаки.

Теперь мы можем доказать следующую ключевую лемму, выражающую следующий принцип: хотя некоторые квазиторические многообразия M могут быть непригодны для взятия связной суммы, всегда найдётся альтернативный квазиторический представитель с нужными свойствами в том же классе бордизмов $[M]$.

ЛЕММА 4.8.14. *Пусть M — полиориентированное квазиторическое многообразие размерности > 2 над многогранником P . Тогда существует полиориентированное многообразие M' над многогранником P' , такое, что $[M'] = [M]$ и P' имеет хотя бы две вершины различных знаков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v_* — начальная вершина в P . Пусть S — полиориентированное произведение 2-мерных сфер из примера 4.8.13, с начальной вершиной w_* .

Если $\sigma(v_*) = -1$, то мы определим M' как $S \#_{w_*, v_*} M$ над $P' = I^n \#_{w_*, v_*} P$. Тогда $[M'] = [M]$, так как S бордантно нулю. Кроме того, так как $n > 1$, у I^n имеется пара соседних вершин разного знака, которые остаются после взятия связной суммы P' .

Если $\sigma(v_*) = +1$, то мы можем применить ту же конструкцию, используя противоположную ориентацию куба I^n (а значит и многообразия S). Так как $-S$ также бордантно нулю, нужное утверждение также имеет место. \square

Теперь мы можем завершить доказательство основного результата этого раздела.

ТЕОРЕМА 4.8.15. *Каждый класс комплексных бордизмов размерности > 2 содержит квазиторическое многообразие (непрерывно связное), стабильно комплексная структура которого задаётся некоторой полиориентацией, а следовательно согласована с действием тора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4.8.9, нам достаточно доказать, что для любых двух классов бордизма $[M_1]$ и $[M_2]$ в Ω_n^U , представленных полиориентированными квазиторическими многообразиями над многогранниками P_1 и P_2 соответственно, существует полиориентированное квазиторическое многообразие M , такое, что $[M] = [M_1] + [M_2]$.

Сначала мы, используя лемму 4.8.14, заменим M_2 на M'_2 над $P'_2 = I^n \# P_2$. Затем мы выберем начальную вершину в P'_2 таким образом, что она имеет различные знаки с начальной вершиной в P_1 . Тогда определена эквивариантная связная сумма $M_1 \tilde{\#} M'_2$ над $P_1 \# P'_2$, причём это полиориентированное многообразие имеет нужный класс бордизма в силу предложения 4.8.12 и леммы 4.8.14. \square

ТЕОРЕМА 4.8.16. *Каждый класс комплексных бордизмов представляется факторпространством полного пересечения вещественных квадрат по свободному действию тора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из теоремы 4.8.15, предложения 4.3.1 и квадратичного описания момент-угол-многообразия Z_P (3.11). \square

В качестве ещё одного следствия мы получаем результат Рэя.

ТЕОРЕМА 4.8.17 ([Ra86]). *Каждый класс комплексных бордизмов содержит многообразие, стабильное касательное расслоение которого распадается в сумму 1-мерных комплексных расслоений.*

4.8.4. Примеры. Необходимость следить за знаками вершин (см. лемму 4.8.11) впервые появляется для 4-мерных квазиториических многообразий (т.е. при $n = 2$), и здесь мы рассмотрим соответствующие иллюстрирующие примеры.

При $n = 2$, класс комплексных бордизмов $[CP^2]$ со стандартной комплексной структурой (пример 4.6.7) является аддитивной образующей группы $\Omega_4^U \cong \mathbb{Z}^2$, причём $c_2(CP^2) = 3$, а все вершины 2-симплекса Δ^2 имеют положительные знаки.

Рассмотрим вопрос о реализации класса бордизмов $2[CP^2]$ полиориентированным квазиториическим многообразием M . Мы не можем взять $CP^2 \# CP^2$ в качестве M , так как ни один из знаков вершин в Δ^2 не равен -1 , как требуется в лемме 4.8.11. Кроме того, в силу аддитивности числа Чженя c_2 , требуемое многообразие M должно удовлетворять соотношению $c_2(M) = 6$. Тогда из (4.21) вытекает, что многоугольник P в пространстве орбит M должен иметь не менее 6 вершин, т.е. это не может быть $\Delta^2 \# \Delta^2$, так как последний является 4-угольником (это наблюдение принадлежит К. Фельдману). Поэтому мы должны применить лемму 4.8.14 и заменить второй экземпляр CP^2 на полиориентированное квазиториическое многообразие $(-S) \tilde{\#} CP^2$ над $P' = I^2 \# \Delta^2$. Тогда $(-S) \tilde{\#} CP^2$ бордантно CP^2 , а P' является 5-угольником. Соответствующие комбинаторные данные описаны в следующем примере.

ПРИМЕР 4.8.18. Полиориентированное квазиториическое многообразие $CP^2 \tilde{\#} (-S) \tilde{\#} CP^2$ представляет класс $2[CP^2]$, а его пространство орбит есть связная сумма $\Delta^2 \# I^2 \# \Delta^2$, т.е. 6-угольник.

Соответствующие характеристические функции и ориентации показаны на рис. 4.8.18. Каждая вершина 6-угольника имеет знак 1.

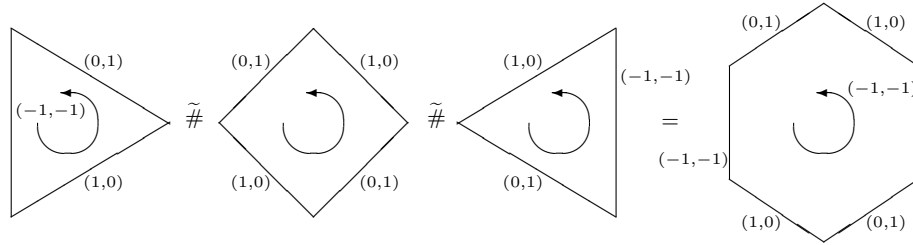


Рис. 4.3. Эquivариантная связная сумма $\mathbb{C}P^2 \# (-S) \# \mathbb{C}P^2$.

Во втором примере мы продемонстрируем ситуацию, когда два многоугольника имеют пару вершин противоположных знаков, и соответствующая equivариантная связная квазиторических многообразий представляет сумму классов бордизма.

ПРИМЕР 4.8.19. Пусть $\overline{\mathbb{C}P^2}$ — полиориентированное квазиторическое многообразие, получаемое из стандартного $\mathbb{C}P^2$ обращением ориентации. Знак каждой вершины 2-симплекса равен -1 , и мы можем построить equivариантную связную сумму $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, которая будет полиориентированным квазиторическим многообразием над $\Delta^2 \# \Delta^2$. Соответствующие характеристические функции и ориентации показаны на рис. 4.4. Мы имеем $[\overline{\mathbb{C}P^2}] = -[\mathbb{C}P^2]$, так что

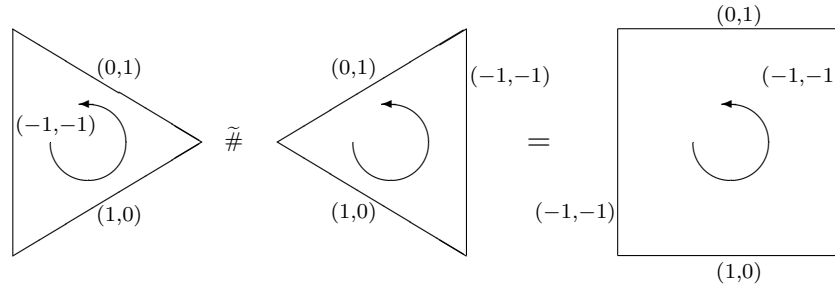


Рис. 4.4. Эquivариантная связная сумма $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$.

$[\mathbb{C}P^2] + [\overline{\mathbb{C}P^2}] = 0$ в Ω_4^U , а многообразие $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ является границей согласно предложению 4.8.12.

Ситуация, аналогичная рассмотренной в примере 4.8.18 возникает и в высших размерностях, при рассмотрении вопроса о реализации классов комплексных бордизмов неособыми проективными торическими многообразиями. Для каждого такого многообразия V_P старшее число Чженя совпадает с эйлеровой характеристикой, и поэтому равно числу вершин многогранника P . Кроме того, мы имеем $\text{td}(V_P) = 1$ (см. раздел 4.6.4).

Предположим, что даны два неособых проективных торических многообразия V_1 и V_2 одинаковой размерности ≥ 4 , соответствующие многогранникам P_1 и P_2 соответственно. Тогда $c_n(V_1) = q(P_1)$ и $c_n(V_2) = q(P_2)$, а $q(P_1 \# P_2) = q(P_1) + q(P_2) - 2$, где $q(\cdot)$ обозначает число вершин многогранника. Так как число Чженя c_n аддитивно, никакое полиориентированное квазиторическое многообразие над $P_1 \# P_2$ не может представлять класс бордизма $[V_1] + [V_2]$. Однако это препятствие отсутствует для многогранника $P_1 \# I^n \# P_2$, так как он содержит $2^n - 2$ дополнительных вершины.

Тот факт, что никакое неособое торическое многообразие не может представлять класс бордизма $[V_1] + [V_2]$ непосредственно вытекает из рассмотрения рода Тодда.

4.9. Торические и квазиторические многообразия

Здесь мы подробно сравниваем два класса многообразий — неособые компактные торические многообразия и квазиторические многообразия. Вообще говоря, ни один из этих классов не содержится в другом, и пересечение этих классов содержит неособые проективные торические многообразия как собственное подмножество (см. рис. 4.5). Далее мы обсуждаем соответствующие примеры.

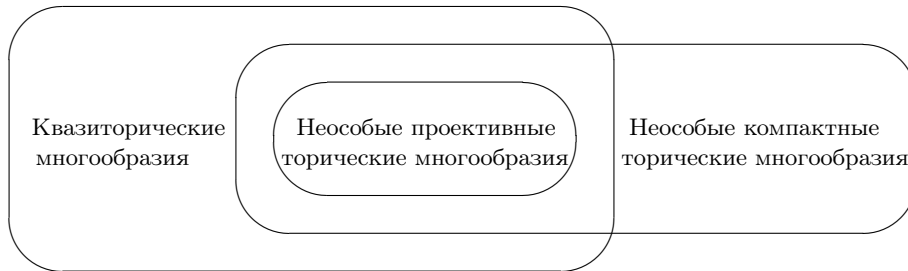


Рис. 4.5.

Как показывает предложение 4.1.2, неособое проективное торическое многообразие является квазиторическим. Однако, неособое непроективное торическое многообразие не обязано быть квазиторическим: хотя пространство орбит Q относительно действия тора \mathbb{T}^n является многообразием с углами, оно может не быть гомеоморфным (или комбинаторно эквивалентным) никакому простому многограннику, см. обсуждение в конце раздела 3.4.

В примере 3.1.9 построено неособое компактное торическое многообразие V_Σ , которое не является проективным. При этом соответствующий симплицальный комплекс \mathcal{K}_Σ комбинаторно эквивалентен границе некоторого симплицального многогранника (октаэдра, над одной из граней которого построена «пирамида»). Следовательно, многообразие с углами V_Σ/\mathbb{T}^2 гомеоморфно простому многограннику (кубу со «срезанной» вершиной), а многообразие V_Σ , не

являясь проективным, всё же является квазиторическим многообразием. Здесь уместно ввести следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9.1. Скажем, что симплициальный веер Σ в \mathbb{R}^n является *многогранным в сильном смысле* (или просто *многогранным*), если его можно получить взятием конусов с вершиной 0 над гранями некоторого выпуклого симплициального многогранника. Эквивалентно, веер является многогранным в сильном смысле если он является нормальным веером некоторого целочисленного простого многогранника (см. конструкцию 1.3.2). Скажем, что симплициальный веер Σ является *многогранным в слабом смысле*, если соответствующий симплициальный комплекс \mathcal{K}_Σ комбинаторно эквивалентен границе некоторого симплициального многогранника.

Пусть Σ — полный неособый веер и V_Σ — соответствующее торическое многообразие. Тогда V_Σ является проективным тогда и только тогда, когда Σ является многогранным в сильном смысле, и V_Σ является квазиторическим многообразием тогда и только тогда, когда Σ является многогранным в слабом смысле.

С другой стороны, легко построить квазиторическое многообразие, которое не является торическим. Простейшим примером является многообразие $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ — связная сумма двух экземпляров $\mathbb{C}P^2$ (со стандартными ориентациями). Это многообразие является квазиторическим над квадратом I^2 (это вытекает из конструкции 4.8.10 эквивариантной связной суммы). В то же время, как показывает следующее утверждение, многообразие $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ не может быть алгебраическим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9.2. *Многообразие $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ не допускает почти комплексной структуры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — четырёхмерное почти комплексное многообразие. Рассмотрим следующие его инварианты: $\chi = \chi(M)$ (эйлерова характеристика), $s = \text{sign}(M)$ (сигнатура) и $\text{td} = \text{td}(M)$ (род Тодда), см. пример V.11. Эти инварианты выражаются через характеристические числа $c_2 = c_2[M]$ и $c_1^2 = c_1^2[M]$ следующим образом:

$$\chi = c_2, \quad s = \frac{c_1^2 - 2c_2}{3}, \quad \text{td} = \frac{c_1^2 + c_2}{12}.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\text{td} = \frac{s + \chi}{4}.$$

Допустим теперь, что $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$. Тогда мы имеем $\chi = 4$ и $s = 2$. Отсюда $\text{td} = 3/2$, что противоречит целочисленности рода Тодда. \square

Рассмотрим теперь вопрос о существовании квазиторического многообразия с данным комбинаторным простым многогранником в качестве пространства орбит.

ПРИМЕР 4.9.3 ([DJ91, Ex. 1.22]). Пусть P — некоторый двойственно 2-смежностный простой многогранник с $m \geq 2^n$ гипергранями (например, двойственный к циклическому многограннику $C^n(m)$ с $n \geq 4$ и $m \geq 2^n$, см. пример 1.1.13). Тогда утверждается, что P не допускает характеристического отображения и, следовательно, не может быть реализован как пространство орбит квазиторического многообразия. Действительно, предположим обратное, и пусть Λ — соответствующая характеристическая $n \times m$ -матрица. Так как $m \geq 2^n$, матрица Λ содержит два столбца, скажем, с номерами i и j , которые равны по модулю 2. Так многогранник P является двойственно 2-смежностным, соответствующие гипергранни F_i и F_j имеют непустое пересечение. Следовательно, столбцы i и j матрицы Λ входят в минор Λ_v для некоторой вершины $v \in P^n$. Тогда определитель этого минора чётен и значит соотношение (4.3) не может быть выполнено. Противоречие.

Из этого примера также вытекает, что никакой целочисленный многогранник, комбинаторно эквивалентный $(C^n(m))^*$ с $m \geq 2^n$, не может задавать неособое торическое многообразие. Другими словами, комбинаторный тип $(C^n(m))^*$ с $m \geq 2^n$ не допускает целочисленной реализации с неособым нормальным веером.

Другим интересным следствием примера 4.9.3 является тот факт, что кольца граней $\mathbb{Z}[C^n(m)]$ и $\mathbb{Z}/2[C^n(m)]$ не допускают линейной системы параметров. В то же время, так как $\mathbb{Z}/2[C^n(m)]$ является кольцом Коэна–Маколея, оно допускает нелинейную регулярную последовательность. Заметим, что в случае, когда поле \mathbf{k} имеет нулевую характеристику, кольцо $\mathbf{k}[C^n(m)]$ всегда допускает линейную систему параметров в силу теоремы II.6.

4.10. Башни Ботта

Изучая симметрические пространства, Ботт и Самельсон ввели в [BS58] семейство комплексных многообразий, получаемых как тотальные пространства итерированных расслоений над $\mathbb{C}P^1$ со слоем $\mathbb{C}P^1$. Гроссберг и Каршон показали в [GK94], что эти многообразия несут действие алгебраического тора, и тем самым представляют собой важную серию гладких проективных торических многообразий, названных ими *башнями Ботта*. Башни Ботта изучались далее в работе Чивана и Рэя [CR05], где были перечислены инвариантные стабильно комплексные структуры и явно вычислены их кольца комплексной и вещественной K -теории и кобордизмов. Важным примером башни Ботта является многообразие ограниченных флагов, которое мы рассматривали в разделе 4.7.

Действие группы называется *полусвободным*, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек. Хаттори доказал в [На92], что компактное симплектическое многообразие M с полусвободным гамильтоновым S^1 -действием с изолированными неподвижными точками имеет то же кольцо когомологий и те же классы Чженя, что и произведение сфер $S^2 \times \dots \times S^2$, что накладывает существенные топологические ограничения на структуру многообразия. Результаты Хаттори затем были развиты в работе Толман и Вайцмана [TW00], которые показали, что полусвободное симплектическое S^1 -действие с непустым множеством изолированных неподвижных точек автоматически является гамильтоновым, в то время как *эквивариантные* кольцо когомологий и классы Чженя такого многообразия M также совпадают с соответствующими инвариантами многообразия $S^2 \times \dots \times S^2$. В размерностях вплоть до 6 известно, что симплектическое многообразие с S^1 -действием, удовлетворяющим описанным выше свойствам, гомеоморфно произведению 2-сфер, но в высших размерностях вопрос о подобной топологической классификации остаётся открытым.

В работе [Ил06] Ильинским была рассмотрена алгебраическая версия описанной выше проблемы о полусвободных симплектических действиях окружности. А именно, была высказана гипотеза, что гладкое компактное комплексное алгебраическое многообразие V с полусвободным действием алгебраического 1-тора \mathbb{C}^* , имеющим положительное число изолированных неподвижных точек, гомеоморфно произведению $CP^1 \times \dots \times CP^1$. Связь между алгебраической и симплектической версиями гипотезы осуществляется через общий подкласс проективных многообразий; гладкое проективное многообразие является симплектическим. Ильинским была доказана *торическая* версия его алгебраической гипотезы, а именно, частный случай, когда V является (неособым компактным) *торическим многообразием*, а полусвободно действующий 1-тор является подгруппой в большом торе (размерности $\dim_{\mathbb{C}} V$), действующем с плотной орбитой. Первым шагом в рассуждении Ильинского было доказательство того факта, что если V допускает одномерную подгруппу с полусвободным действием и изолированными неподвижными точками, то соответствующий веер комбинаторно эквивалентен вееру над граням обобщённого октаэдра (крест-многогранника). Согласно результату Добринской [До01], в этом случае V является башней Ботта, что послужило отправной точкой в нашем исследовании полусвободных действий окружности на башнях Ботта и более общих квазиторических многообразиях.

Каждая башня Ботта является проективным торическим многообразием над комбинаторным кубом (т.е. соответствующий веер

является нормальным веером многогранника, комбинаторно эквивалентного кубу). Таким образом, мы получаем следующую иерархию классов \mathbb{T}^n -многообразий:

$$(4.35) \quad \text{башни Ботта} \subset \text{торические многообразия над кубами} \subset \\ \subset \text{квазиторические многообразия над кубами.}$$

В силу упомянутого выше результата Добринской [Доб01], первое из включений выше на самом деле является равенством (мы поясняем это в следствии 4.10.10).

Мы получаем два результата, связывающие полусвободные действия тора на башнях Ботта, их топологическую структуру и кольца когомологий. В теореме 4.10.14 мы показываем, что если башня Ботта допускает полусвободное \mathbb{S}^1 -действие с изолированными неподвижными точками, то она \mathbb{S}^1 -эквивариантно гомеоморфна произведению 2-мерных сфер. Затем в теореме 4.10.22 мы показываем, что башня Ботта, кольцо когомологий которой изоморфно кольцу когомологий произведения сфер, гомеоморфна произведению сфер. Оба результата затем обобщаются на более широкий класс квазиторических многообразий над кубами (теоремы 4.10.18 и 4.10.28 соответственно), что позволяет также вывести результат Ильинского о полусвободных действиях на торических многообразиях (следствие 4.10.19).

4.10.1. Определение и основные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10.1. Башней Ботта высоты n называется такая последовательность многообразий $\{B^{2k} : 1 \leq k \leq n\}$, что $B^2 = \mathbb{C}P^1$ и $B^{2k} = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$ при $2 \leq k \leq n$, где $\mathbb{C}P(\cdot)$ обозначает комплексную проективизацию расслоения, ξ_{k-1} есть некоторое комплексное 1-мерное расслоение над $B^{2(k-1)}$, а $\underline{\mathbb{C}}$ — тривиальное комплексное 1-мерное расслоение. В частности, мы имеем расслоения $p_k : B^{2k} \rightarrow B^{2(k-1)}$ со слоем $\mathbb{C}P^1$, для $2 \leq k \leq n$.

Мы также будем использовать термин «башня Ботта» применительно к последнему многообразию B^{2n} в последовательности. Тогда из определения вытекает, что B^{2n} представляет собой комплексное многообразие, получаемое как тотальное пространство итерированного расслоения со слоем $\mathbb{C}P^1$.

Следующее описание колец когомологий башни Ботта вытекает из стандартных результатов [St68, Гл. V] о когомологиях проективизаций расслоений (все группы когомологий рассматриваются с коэффициентами в \mathbb{Z} , если не оговорено противное).

ЛЕММА 4.10.2. $H^*(B^{2k})$ является свободным модулем над кольцом $H^*(B^{2(k-1)})$ с двумя образующими 1 и u_k размерностей 0 и 2 соответственно. Кольцевая структура задаётся соотношением

$$u_k^2 = c_1(\xi_{k-1}) \cdot u_k,$$

а ограничение u_k на слой $\mathbb{C}P^1 \subset B^{2k}$ является первым классом Чженя канонического комплексного 1-мерного расслоения над $\mathbb{C}P^1$.

Для упрощения формул будем обозначать элемент $p_k^*(u_{k-1}) \in H^2(B^{2k})$ просто через u_{k-1} ; аналогично мы будем обозначать через u_i каждый из элементов в $H^*(B^{2k})$ с $k \geq i$, переходящих друг в друга при отображениях p_k^* . Тогда башня Ботта высоты n однозначно определяется набором целых чисел $\{a_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$, где

$$(4.36) \quad u_k^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} u_i u_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Кольцо когомологий многообразия B^{2n} получается факторизацией кольца многочленов $\mathbb{Z}[u_1, \dots, u_n]$ по соотношениям (4.36). Числа a_{ij} удобно организовать в верхнетреугольную матрицу:

$$(4.37) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 4.10.3. Пусть $n = 2$. Тогда башня Ботта B^4 задаётся одним 1-мерным расслоением ξ_1 над $\mathbb{C}P^1$, т.е. является поверхностью Хирцебруха (см. пример 3.1.7). Мы имеем $\xi_1 = \gamma^k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, где γ — каноническое 1-мерное расслоение над $B^2 = \mathbb{C}P^1$. Следовательно, кольцо когомологий задаётся двумя соотношениями $u_1^2 = 0$ и $u_2^2 = k u_1 u_2$. Хорошо известно, что

$$\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^k) \cong \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{k'}) \Leftrightarrow k \equiv k' \pmod{2},$$

где \cong означает диффеоморфизм. Это можно доказать следующим образом. Заметим, что $\mathbb{C}P(E) \cong \mathbb{C}P(E \otimes \eta)$ для любого комплексного 1-мерного расслоения η . Пусть $k \equiv k' \pmod{2}$. Тогда $k' - k = 2\ell$ для некоторого $\ell \in \mathbb{Z}$, и мы имеем

$$\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^k) \cong \mathbb{C}P((\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^k) \otimes \gamma^\ell) = \mathbb{C}P(\gamma^\ell \oplus \gamma^{k+\ell}).$$

Здесь $\gamma^\ell \oplus \gamma^{k+\ell}$ и $\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{k'}$ являются расслоениями над $\mathbb{C}P^1$ с одинаковыми первыми классами Чженя, так что эти два расслоения изоморфны. Поэтому последнее пространство в предыдущей формуле можно отождествить с $\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{k'})$.

С другой стороны, нетрудно видеть, что если $H^*(\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^k)) \cong H^*(\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{k'}))$ как кольца, то $k \equiv k' \pmod{2}$.

Этот пример показывает, что кольцо когомологий определяет топологический тип башни Ботта B^{2n} при $n = 2$. Разбор случаев, основанный на классификационном результате [До01, §3], показывает, что этот факт также имеет место для $n = 3$. В связи с этим возникает вопрос, всегда ли изоморфизм колец когомологий двух

башен Ботта влечёт их гомеоморфизм? В разделе 4.10.4 мы дадим частичный ответ на этот вопрос.

ПРИМЕР 4.10.4. Многообразие ограниченных флагов B_n является башней Ботта (см. предложение 4.7.10). Рассмотрим проекцию $p_n: B_n \rightarrow B_{n-1}$. Тогда из предложений 4.7.9 и 4.7.10 вытекает, что $p_n^*(\rho_1^0) = \rho_2^0$, где ρ_1^0 рассматривается как расслоение над B_{n-1} , а ρ_2^0 — над B_n . Таким образом, соотношение из леммы 4.10.2 в когомологиях $H^*(B_n)$ приобретает вид $u_n^2 = c_1(p_n^*(\rho_1^0))u_n = u_{n-1}u_n$. Следовательно, матрица (4.37) для структуры башни Ботта на многообразии ограниченных флагов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

4.10.2. Башни Ботта как торические многообразия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10.5. Башня Ботта несёт естественное действие тора, задающее на ней структуру квазиторического многообразия над кубом с приведённой характеристической подматрицей $\Lambda_\star = A^t$, см. (4.37) и (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазиторическое многообразие над кубом I^n получается факторизацией момент-угол-многообразия

$$\mathcal{Z}_{I^n} = \{(z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n} : |z_k|^2 + |z_{k+n}|^2 = 1, 1 \leq k \leq n\}$$

по ядру $K(\Lambda)$ отображения $\lambda: \mathbb{T}^{2n} \rightarrow \mathbb{T}^n$, задаваемого матрицей (4.5) с $m = 2n$. Мы имеем $K(\Lambda) \cong \mathbb{T}^n$. В явном виде вложение $K(\Lambda) \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$ задаётся следующим образом:

$$(4.38) \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1^{-\lambda_{1,n+1}} t_2^{-\lambda_{1,n+2}} \cdots t_n^{-\lambda_{1,2n}}, \dots, \\ \dots, t_1^{-\lambda_{n,n+1}} t_2^{-\lambda_{n,n+2}} \cdots t_n^{-\lambda_{n,2n}}, t_1, t_2, \dots, t_n).$$

С другой стороны, как показано в [CR05, Prop. 3.1], башня Ботта, соответствующая матрице (4.37) может быть получена факторизацией $\mathcal{Z}_{I^n} \cong (S^3)^n$ по действию n -мерного подтора в \mathbb{T}^{2n} , определяемого вложением

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, t_1^{-a_{12}} t_2, \dots, t_1^{-a_{1n}} t_2^{-a_{2n}} \cdots t_{n-1}^{-a_{n-1,n}} t_n, t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Остаётся заметить, что это совпадает с (4.38) для $\Lambda_\star = A^t$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношения в кольце граней n -мерного куба имеют вид $v_i v_{i+n} = 0$, $1 \leq i \leq n$. Эти соотношения вместе с (4.16) дают (4.36) при подстановке $\Lambda_\star = A^t$ и $u_i = v_{i+n}$; тем самым описание кольца когомологий башни Ботта из теоремы 4.10.2 согласуется с общим описанием когомологий квазиторического многообразия в теореме 4.5.4.

В [GK94] рассматривалась алгебраическая версия предыдущей конструкции, и башни Ботта были описаны как неособые проективные торические многообразия. Как показано в [CR05, §2], топологический и алгебраический подходы приводят к одному результату.

Для каждой перестановки σ на n элементах обозначим через $P(\sigma)$ соответствующую $n \times n$ -матрицу перестановки, элементами которой являются единицы на позициях $(i, \sigma(i))$, $1 \leq i \leq n$, и нули в остальных местах. Симметрическая группа S_n действует на $n \times n$ -матрицах при помощи сопряжений $A \mapsto P(\sigma)^{-1}AP(\sigma)$ или, эквивалентно, при помощи перестановок строк и столбцов матриц A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10.6. *Квазиторическое многообразие M над кубом с приведённой подматрицей Λ_\star эквивалентно башне Ботта тогда и только тогда, когда Λ_\star сопряжена при помощи матрицы перестановки верхнетреугольной матрице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица Λ_\star сопряжена при помощи матрицы перестановки верхнетреугольной матрице. Ясно, что это условие эквивалентно тому, что матрица Λ_\star сопряжена нижнетреугольной матрице. Рассмотрим действие группы S_n на множестве гиперграней куба \mathbb{I}^n перестановками пар противоположных гиперграней. Переупорядочивание гиперграней соответствует переупорядочиванию столбцов характеристической $n \times 2n$ -матрицы Λ , так что элемент $\sigma \in S_n$ действует как

$$\Lambda \mapsto \Lambda \cdot \begin{pmatrix} P(\sigma) & 0 \\ 0 & P(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Это действие не сохраняет приведённую форму матрицы Λ , так как $(E \mid \Lambda_\star)$ превращается в $(P(\sigma) \mid \Lambda_\star P(\sigma))$. Приведённым представителем в левом классе сопряжённых элементов (4.4) этой матрицы является матрица $(E \mid P(\sigma)^{-1}\Lambda_\star P(\sigma))$. (Другими словами, чтобы сохранить матрицу в приведённом виде, нам нужно компенсировать перестановку пар гиперграней автоморфизмом тора \mathbb{T}^n , переставляющим координатные окружности.) Таким образом, действие перестановками на парах противоположных гиперграней индуцирует действие сопряжениями на приведённых подматрицах. Значит, с точностью до эквивалентности, мы можем предположить, что M имеет нижнетреугольную приведённую подматрицу Λ_\star . Условие неособости (4.3) гарантирует, что на диагонали матрицы Λ_\star стоят ± 1 . Изменяя, если необходимо, полиориентацию M , мы можем добиться того, что все диагональные элементы матрицы Λ_\star суть -1 . Тогда M и башня Ботта, соответствующая матрице $A = \Lambda_\star^t$ имеют одинаковые характеристические матрицы Λ в силу предложения 4.10.5. Следовательно, M и башня Ботта эквивалентны в силу предложения 4.2.3.

Обратное утверждение вытекает из предложения 4.10.5. \square

ПРИМЕР 4.10.7. Из предыдущего утверждения вытекает, что не любое квазиториическое многообразие над кубом является башней Ботта. Например, 4-мерное квазиториическое многообразие над квадратом с приведённой характеристической подматрицей $\Lambda_\star = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ не может быть башней Ботта, так как Λ_\star не является сопряжённой к верхнетреугольной матрице. Можно показать, что это квазиториическое многообразие гомеоморфно $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ и поэтому даже не допускает комплексной структуры, см. предложение 4.9.2.

Для каждого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [n]$ определён *главный минор* квадратной n -матрицы A — определитель подматрицы, образованной элементами в столбцах и строках с номерами i_1, \dots, i_k . В случае башен Ботта, согласно предложению 4.10.5, все главные миноры матрицы $-\Lambda_\star$ равны 1; а для произвольного квазиториического многообразия условие неособости (4.3) лишь гарантирует, что все главные миноры матрицы Λ_\star равны ± 1 .

Верхнетреугольная матрица называется *унитреугольной*, если все её диагональные элементы равны 1. Следующая ключевая техническая лемма может быть извлечена из доказательства намного более общего результата Добринской [Доб01, Теорема 6]. Мы приводим более подробное доказательство для полноты изложения.

ЛЕММА 4.10.8 ([Доб01]). Пусть R — коммутативное целостное кольцо с единицей 1, и пусть A — некоторая $n \times n$ -матрица с элементами из R . Предположим, что все собственные главные миноры матрицы A равны 1. Если $\det A = 1$, то матрица A сопряжена при помощи матрицы перестановки унитреугольной матрице. В противном случае матрица A сопряжена при помощи матрицы перестановки матрице вида

$$(4.39) \quad \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $b_i \neq 0$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия вытекает, что на диагонали в A стоят единицы. Мы скажем, что i -я строка матрицы является *элементарной*, если её i -й элемент равен 1, а остальные — 0. Предполагая по индукции, что теорема верна для матриц размера $(n-1)$, мы выводим, что матрица A сопряжена унитреугольной матрице тогда и только тогда, когда она содержит элементарную строку. Обозначим через A_i квадратную $(n-1)$ -матрицу, получаемую удалением i -го столбца и i -й строки из A .

По индукции мы можем предполагать, что A_n является унитарной матрицей. Теперь применим предположение индукции к матрице A_1 . Перестановка строк и столбцов, превращающая A_1 в унитарную матрицу, превращает A в «почти» унитарную матрицу, которая может иметь лишь один ненулевой элемент ниже диагонали, и этот элемент должен быть в первом столбце. Если $a_{n1} = 0$, то n -я строка матрицы A является элементарной, и A сопряжена унитарной матрице при помощи матрицы перестановки. В противном случае мы получаем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $b_{n-1} \neq 0$ и $b_n \neq 0$ (иначе A содержит элементарную строку). Пусть теперь a_{1j_1} — последний ненулевой элемент в первой строке матрицы A . Если A не содержит элементарных строк, то мы можем индуктивно определить $a_{j_i j_{i+1}}$ как последний ненулевой недиагональный элемент в j_i -й строке матрицы A . Очевидно мы имеем

$$1 < j_1 < \dots < j_i < j_{i+1} < \dots < j_k = n$$

для некоторого $k < n$. Теперь, если $j_i = i + 1$ для $1 \leq i \leq n - 1$, то A имеет вид (4.39) с $b_i = a_{j_{i-1} j_i}$, $1 \leq i \leq n - 1$. В противном случае подматрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a_{1j_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{j_1 j_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{j_{k-1} n} \\ b_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

составленная из элементов в столбцах и строках с номерами $1, j_1, \dots, j_k$, является собственной и имеет определитель

$$1 \pm b_n \prod a_{j_i j_{i+1}} \neq 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. \square

ТЕОРЕМА 4.10.9. Пусть $M = M(I^n, \Lambda)$ — квазиторическое многообразие над кубом, с канонической эквивариантной гладкой структурой, и Λ_* — соответствующая приведённая подматрица. Следующие условия эквивалентны:

- а) M эквивалентно башне Ботта;
- б) все главные миноры матрицы $-\Lambda_*$ равны 1;
- в) M допускает эквивариантную почти комплексную структуру (с ассоциированной полиориентацией).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация б) \Rightarrow а) вытекает из леммы 4.10.8 и предложения 4.10.6. Импликация а) \Rightarrow в) очевидна. Для доказательства того, что в) \Rightarrow б), мы используем понятие знака вершины $\sigma(v)$ и формулу из леммы 4.4.2 для вычисления этого знака в терминах комбинаторных данных. Будем считать, что гиперграни F_i и F_{n+i} куба I^n являются противоположными при $1 \leq i \leq n$. Тогда каждая вершина $v \in I^n$ задаётся как пересечение

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \cap F_{n+l_1} \cap \dots \cap F_{n+l_{n-k}},$$

где $\{i_1, \dots, i_k\} \sqcup \{l_1, \dots, l_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$. При этом для нормальных векторов гиперграней мы имеем $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i$ (i -й базисный вектор) для $1 \leq i \leq n$ и $\mathbf{a}_j = -\mathbf{e}_j$ для $n+1 \leq j \leq 2n$. Следовательно, выражение в правой части формулы из леммы 4.4.2 равно главному минору матрицы $-\Lambda_*$, образованному столбцами и строками с номерами l_1, \dots, l_{n-k} . Остаётся заметить, что в почти комплексном случае знаки всех вершин равны 1. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Эквивалентность а) \Leftrightarrow б) является частным случаем результата [До01, Теорема 6].

Напомним, что симплициальный многогранник, двойственный к кубу, называется *крест-многогранником*. Крест-многогранник размерности n можно получить взятием выпуклой оболочки $2n$ точек в \mathbb{R}^n , все координаты которых равны 1 или -1 . Трёхмерный крест-многогранник есть октаэдр.

СЛЕДСТВИЕ 4.10.10. Пусть V — неособое торическое многообразие, для которого соответствующий веер комбинаторно эквивалентен вееру, состоящему из конусов над гранями крест-многогранника. Тогда V является башней Ботта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведённая подматрица Λ_* многообразия V имеет размер $n \times n$, и все главные миноры матрицы $-\Lambda_*$ равны 1 (это доказывается так же, как в теореме 4.10.9). В силу леммы 4.10.8 матрица $-\Lambda_*$ сопряжена унитарной матрице, так что Λ имеет такой же вид, как и характеристическая матрица башни Ботта. В случае торического многообразия столбцы матрицы Λ суть примитивные векторы вдоль рёбер веера, так что комбинаторный тип веера и матрица Λ полностью определяют веер. Следовательно, веер торического многообразия V является веером для некоторой башни Ботта. Так как торические многообразия однозначно восстанавливаются по своим веерам, V является башней Ботта. \square

Торические многообразия над кубами удовлетворяют предположению следствия 4.10.10. Отсюда вытекает, что класс башен Ботта совпадает с классом торических многообразий над кубами, и первое включение в (4.35) является равенством. Как и лемма 4.10.8,

следствие 4.10.10 является частным случаем более общего результата Добринской [До01, следствие 7] (этот результат характеризует квазиторические многообразия над произведениями симплексов, которые раскладываются в башни расслоений).

4.10.3. Полусвободные действия окружности. Действие группы на топологическом пространстве называется *полусвободным*, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек. Здесь мы показываем (в теореме 4.10.13), что если тор \mathbb{T}^n , действующий на квазиторическом многообразии M над кубом, содержит 1-мерную подгруппу-окружность, действующую полусвободно и с изолированными неподвижными точками, то M является башней Ботта. Затем мы показываем, что все такие башни Ботта \mathbb{S}^1 -эквивариантно гомеоморфны произведению 2-мерных сфер (с диагональным \mathbb{S}^1 -действием).

Комплексное n -мерное представление окружности \mathbb{S}^1 определяется набором весов $k_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq n$. В подходящих координатах элемент $s = e^{2\pi i \varphi} \in \mathbb{S}^1$ действует следующим образом:

$$(4.40) \quad s \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{2\pi i k_1 \varphi} z_1, \dots, e^{2\pi i k_n \varphi} z_n).$$

Следующее утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10.11. *Представление \mathbb{S}^1 в \mathbb{C}^n является полусвободным тогда и только тогда, когда $k_j = \pm 1$ при $1 \leq j \leq n$.*

Замкнутая подгруппа в \mathbb{T}^n задаётся примитивным вектором $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, см. (4.19). Для каждой вершины $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ мы можем записать разложение вектора ν по базису $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$:

$$(4.41) \quad \nu = k_1(\nu, v)\lambda_{j_1} + \dots + k_n(\nu, v)\lambda_{j_n}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10.12. *Окружность $T(\nu) \subset \mathbb{T}^n$ действует на квазиторическом многообразии M полусвободно и с изолированными неподвижными точками тогда и только тогда, когда для каждой вершины $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ коэффициенты в разложении (4.41) удовлетворяют условию $k_i(\nu, v) = \pm 1$ для $1 \leq i \leq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.6.1 и (4.18) вытекает, что коэффициенты $k_i(\nu, v)$ совпадают с весами представления окружности $T(\nu)$ в касательном пространстве к M в неподвижной точке, соответствующей вершине v . Тогда утверждение вытекает из предложения 4.10.11. \square

ТЕОРЕМА 4.10.13. *Пусть M — квазиторическое многообразие над кубом с приведённой характеристической подматрицей Λ_* . Предположим, что M допускает полусвободное действие подгруппы-окружности с изолированными неподвижными точками. Тогда M эквивалентно башне Ботта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем предположить по индукции, что каждое характеристическое подмногообразие является башней Ботта, т.е. каждый собственный главный минор матрицы $-\Lambda_*$ равен 1. Поэтому мы находимся в ситуации леммы 4.10.8, и матрица $-\Lambda_*$ имеет один из двух описанных там видов. Мы исключим второй случай при помощи предположения о полусвободности действия. Действительно, предположим, что $\Lambda = (E \mid -B)$, где B — матрица (4.39), и $T(\nu) \subset \mathbb{T}^n$ действует полусвободно с изолированными неподвижными точками. Применив критерий из предложения 4.10.12 к вершине $v = F_1 \cap \dots \cap F_n$, мы получаем $\nu_i = \pm 1$ при $1 \leq i \leq n$. Теперь применим тот же критерий к вершине $v' = F_{n+1} \cap \dots \cap F_{2n}$. Так как подматрица, образованная соответствующими столбцами матрицы Λ есть в точности $-B$, мы имеем $\det B = \pm 1$. Это означает, что хотя бы одно из чисел b_i равно ± 1 , т.е. хотя бы одна строка матрицы B состоит только из двух ± 1 и остальных нулей. Следовательно, если все коэффициенты $k_i(\nu, v')$ в разложении $\nu = k_1(\nu, v')\lambda_{n+1} + \dots + k_n(\nu, v')\lambda_{2n}$ равны ± 1 , то хотя бы одна координата ν_j вектора ν чётна. Противоречие. \square

Наш следующий результат показывает, что башня Ботта с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками топологически тривиальна, т.е. диффеоморфна произведению 2-мерных сфер. Пусть t (соответственно, \mathbb{C}) обозначает стандартное (соответственно, тривиальное) комплексное одномерное представление окружности \mathbb{S}^1 , а \underline{V} обозначает тривиальное расслоение со слоем V над заданной базой. Скажем, что действие группы G на башне Ботта B^{2n} сохраняет структуру башни, если для каждого этажа $B^{2k} = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$, $k \leq n$, одномерное расслоение ξ_{k-1} является G -эквивариантным. Каноническое действие тора \mathbb{T}^n на B^{2n} очевидно сохраняет структуру башни.

ТЕОРЕМА 4.10.14. *Предположим, что башня Ботта B^{2n} допускает полусвободное действие окружности \mathbb{S}^1 , имеющие изолированные неподвижные точки и сохраняющее структуру башни. Тогда башня Ботта \mathbb{S}^1 -эквивариантно диффеоморфна произведению $(\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t))^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить по индукции, что $(n-1)$ -й этаж данной башни Ботта есть $(\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t))^{n-1}$ и $B^{2n} = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ для некоторого комплексного одномерного \mathbb{S}^1 -расслоения ξ над $(\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t))^{n-1}$.

Пусть γ — каноническое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t) \cong \mathbb{C}P^1$. Тогда на γ имеется единственная структура эквивариантного \mathbb{S}^1 -расслоения, для которой

$$(4.42) \quad \gamma|_{(1:0)} = \mathbb{C} \quad \text{и} \quad \gamma|_{(0:1)} = t.$$

Обозначим через $x \in H^2(\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t))$ первый класс Чженя расслоения γ , и пусть $x_i = \pi_i^*(x) \in H^2(\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t)^{n-1})$, где π_i — проекция на i -й сомножитель. Тогда $c_1(\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$ для некоторых $a_i \in \mathbb{Z}$. Одномерные \mathbb{S}^1 -расслоения ξ и $\otimes_{i=1}^{n-1} \pi_i^*(\gamma^{a_i})$ имеют одинаковые подлежащие расслоения; так что для некоторого целого k имеем

$$(4.43) \quad \xi = t^k \bigotimes_{i=1}^{n-1} \pi_i^*(\gamma^{a_i})$$

как \mathbb{S}^1 -расслоения, см. [НУ76, Cor. 4.2].

Мы будем представлять неподвижные точки действия окружности на $\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t)^{n-1}$ последовательностями $(p_1^{\epsilon_1}, \dots, p_{n-1}^{\epsilon_{n-1}})$, где $\epsilon_i = 0$ или 1, а $p_i^{\epsilon_i}$ обозначает $(1 : 0)$ при $\epsilon_i = 0$ и $(0 : 1)$ при $\epsilon_i = 1$. Тогда из (4.42) и (4.43) получаем

$$\xi|_{(p_1^{\epsilon_1}, \dots, p_{n-1}^{\epsilon_{n-1}})} = t^{k + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i a_i}.$$

Действие \mathbb{S}^1 на $B^{2n} = \mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus \xi)$ полусвободно тогда и только тогда, когда $|k + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i a_i| = 1$ для всех возможных значений ϵ_i . Полагая $\epsilon_i = 0$ для всех i , мы получаем $|k| = 1$. Предположим, что $k = 1$ (случай $k = -1$ рассматривается аналогично). Тогда $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ или $(0, \dots, 0, -2, 0, \dots, 0)$. В первом случае $\xi = \underline{t}$ и $B^{2n} = \mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus \xi) \cong \mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t)^n$. Во втором случае мы имеем $\xi = t\pi_i^*(\gamma^{-2})$ для некоторого i , так что $B^{2n} = \pi_i^*\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t\gamma^{-2})$. Так как для любого векторного \mathbb{S}^1 -расслоения E и одномерного \mathbb{S}^1 -расслоения η проективизации $\mathbb{C}P(E)$ и $\mathbb{C}P(E \otimes \eta)$ \mathbb{S}^1 -диффеоморфны, мы имеем $\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t\gamma^{-2}) \cong \mathbb{C}P(\gamma \oplus t\gamma^{-1})$. Первый класс Чженя расслоения $\gamma \oplus t\gamma^{-1}$ равен нулю, так что подлежащее расслоение тривиально. Представление \mathbb{S}^1 в слое расслоения $\gamma \oplus t\gamma^{-1}$ над каждой неподвижной точкой изоморфно $\mathbb{C} \oplus \underline{t}$ в силу (4.42). Следовательно, $\gamma \oplus t\gamma^{-1} = \mathbb{C} \oplus \underline{t}$ как \mathbb{S}^1 -расслоения. Отсюда вытекает, что $\mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus t\gamma^{-2}) \cong \mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus \underline{t})$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Диффеоморфизм в теореме 4.10.14 не является \mathbb{T}^n -эквивариантным.

Далее мы исследуем обобщения теоремы 4.10.14 на квазиторические многообразия. Хотя результат не переносится на все квазиторические многообразия (см. пример 4.10.15), он остаётся верным, если дополнительно потребовать, чтобы многогранник в пространстве орбит был кубом.

ПРИМЕР 4.10.15. Пусть M — четырёхмерное квазиторическое многообразие над $2k$ -угольником с

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из предложения 4.10.12 вытекает, что окружность, задаваемая вектором $\nu = (1, 1)$, действует на M полусвободно. Однако пространство орбит для M не является 2-кубом при $k > 2$, так что M не может быть гомеоморфным произведению сфер (можно показать, что M является связной суммой $k - 1$ экземпляров $S^2 \times S^2$).

Оказывается, что квазиторические многообразия над многоугольниками предоставляют, в сущности, единственный источник контрпримеров (точное утверждение см. ниже в теореме 4.10.18).

ЛЕММА 4.10.16. *Простой многогранник P размерности $n \geq 2$, все двумерные грани которого являются 4-угольниками, комбинаторно эквивалентен кубу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем предположить по индукции, что все гиперграни многогранника P являются кубами; докажем, что тогда и P является кубом. Это утверждение можно найти в [Zi95, Exercise 0.1], но мы включаем доказательство для полноты изложения. Мы будем доказывать двойственное утверждение о симплицальных многогранниках. Нам понадобится понятие линка и звезды вершины симплицального комплекса (см. определение 1.6.5). Двойственность между P и \mathcal{K}_P продолжается до двойственности между гипергранями многогранника P (которые являются простыми $(n - 1)$ -мерными многогранниками) и линками вершин комплекса \mathcal{K}_P (которые являются триангуляциями $(n - 2)$ -мерных сфер). Симплицальный многогранник, двойственный к кубу, есть крест-многогранник (см. пример 4.10.17); мы будем называть его границу *крест-комплексом*. Утверждение, двойственное к утверждению теоремы, вытекает из следующей леммы. \square

ЛЕММА 4.10.17. *Пусть \mathcal{K} — связный симплицальный комплекс размерности $k \geq 2$. Если линк каждой вершины в \mathcal{K} является крест-комплексом размерности $k - 1$, то и \mathcal{K} является крест-комплексом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v — вершина комплекса \mathcal{K} . По предположению, $\text{lk } v$ является крест-комплексом размерности $k - 1$, так что для каждой вершины $p \in \text{lk } v$ найдётся единственная вершина $q \in \text{lk } v$, которая не соединена с p ребром в $\text{lk } v$. При этом p и q могут быть соединены ребром в \mathcal{K} , так что мы рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. Предположим, что найдётся пара вершин p, q в $\text{lk } v$, которые не соединены ребром в \mathcal{K} . Пусть \mathcal{R} — множество остальных вершин комплекса $\text{lk } v$. Тогда \mathcal{R} содержит $2(k - 1)$ элементов. Линк $\text{lk } p$ тоже является крест-комплексом, так что он имеет $2k$ вершин и содержит v и все элементы из \mathcal{R} . Так как q не соединена с p ребром в \mathcal{K} , вершина q не лежит в $\text{lk } p$; поэтому найдётся другая вершина $p' \in \text{lk } p$, $p' \notin v \cup \mathcal{R}$. Аналогично мы имеем $q' \in \text{lk } q$, $q' \notin v \cup \mathcal{R}$.

Теперь возьмём произвольную вершину $r \in \mathcal{R}$ и рассмотрим $\text{lk } r$. Так как $\text{lk } v$ является $(k-1)$ -мерным крест-комплексом, r соединена с $2(k-1)$ вершинами из $\text{lk } v$ рёбрами из $\text{lk } v$. Мы также знаем, что r соединена с v, p' и q' . Но так как $\text{lk } r$ также является $(k-1)$ -мерным крест-комплексом, r может быть соединена рёбрами не более чем с $2k$ вершинам. Следовательно, $p' = q'$, что означает, что \mathcal{K} является крест-комплексом.

СЛУЧАЙ 2. Предположим теперь, что любая пара вершин в $\text{lk } v$ соединена ребром в \mathcal{K} . Мы приведём это к противоречию. Каждая вершина u в $\text{lk } v$ соединена с v и всеми вершинами в $\text{lk } v$, кроме самой u . Вершина u не может быть соединена рёбрами ни с какими другими вершинами, кроме перечисленных, так как число вершин в $\text{lk } u$ равно $2k$. Это означает, что любая пара вершин в \mathcal{K} соединена рёбрами, и что \mathcal{K} имеет в точности $2k+1$ вершин. В каждой вершине сходится 2^k симплексов размерности k , и каждый k -мерный симплекс имеет $k+1$ вершин. Поэтому общее число k -симплексов в \mathcal{K} равно $2^k(2k+1)/(k+1)$.

Теперь мы подсчитаем общее число k -симплексов в \mathcal{K} другим способом. Пусть σ — некоторый k -симплекс в \mathcal{K} , не содержащий v . Тогда σ содержит пару вершин, скажем p и q , которые не соединены ребром в $\text{lk } v$ (иначе сам симплекс σ будет лежать в $\text{lk } v$, так как $\text{lk } v$ является крест-комплексом). Пусть \mathcal{L} — линк вершины p в комплексе $\text{lk } v$. Тогда \mathcal{L} является крест-комплексом размерности $k-2$, и он также совпадает с линком вершины q в комплексе $\text{lk } v$. Тогда $\text{lk } p$ есть соединение $\mathcal{L} * \{v, q\}$, так как оба эти подкомплекса имеют одинаковые наборы вершин и оба являются крест-комплексами. Аналогично $\text{lk } q = \mathcal{L} * \{v, p\}$. Так как σ содержит p и q , мы имеем $\sigma = \tau * p * q$ для некоторого $(k-2)$ -симплекса $\tau \in \mathcal{L}$. Следовательно, σ содержит как минимум две грани размерности $(k-1)$ из $\text{lk } v$, а именно $\tau * p$ и $\tau * q$. Ни одна из этих граней не может быть гранью другого k -симплекса, не содержащего v , так как каждый $(k-1)$ -симплекс в \mathcal{K} является гранью в точности двух k -симплексов, а $\tau * p$ также является гранью $\tau * p * v$ и $\tau * q$ также является гранью $\tau * q * v$. Отсюда следует, что число k -симплексов, не содержащих v , не превосходит половины числа $(k-1)$ -симплексов в $\text{lk } v$. Число k -симплексов, содержащих v равно числу $(k-1)$ -симплексов в $\text{lk } v$. Последнее число есть 2^k , так что для общего числа k -симплексов в \mathcal{K} мы получаем оценку $\leq 2^{k-1} + 2^k$, что меньше $2^k(2k+1)/(k+1)$ при $k \geq 2$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Другое доказательство леммы 4.10.16 можно получить путём построения невырожденного симплициального отображения из \mathcal{K} на крест-комплекс. Такое отображение будет топологическим (неразветвлённым) накрытием сферы сферой, так что оно должно быть изоморфизмом при $k \geq 2$. Этот подход был использован в [Ил06].

ТЕОРЕМА 4.10.18. Пусть квазиторическое многообразие M допускает полусвободное действие подгруппы-окружности с изолированными неподвижными точками, и любая 2-мерная грань пространства орбит P является 4-угольником. Тогда M гомеоморфно (причём S^1 -эквивариантно) произведению 2-мерных сфер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.10.16 пространство орбит является кубом. По теореме 4.10.13 многообразие M эквивалентно башне Ботта. Наконец, по теореме 4.10.14 оно S^1 -гомеоморфно произведению сфер. \square

Мы также получаем основной результат Ильинского.

СЛЕДСТВИЕ 4.10.19 ([Ил06]). Неособое компактное торическое многообразие V , для которого имеется одномерная подгруппа тора, действующая полусвободно и с изолированными неподвижными точками, диффеоморфно произведению 2-мерных сфер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.10.14, достаточно показать, что V является башней Ботта. Для этого мы покажем, что веер, соответствующий торическому многообразию V , комбинаторно эквивалентен вееру над гранями крест-многогранника, и затем применим следствие 4.10.10. Данная окружность, полусвободно действующая на V , также действует полусвободно и с изолированными неподвижными точками на каждом характеристическом подмногообразии V_j в V . Используя индукцию по размерности и лемму 4.10.17, мы сводим утверждение к 2-мерному случаю. Таким образом, остаётся доказать, что многоугольник-пространство орбит неособого компактного комплексного 2-мерного торического многообразия с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками является 4-угольником. (Заметим, что неособые компактные комплексные 2-мерные торические многообразия всегда проективны, так что мы можем работать с многогранниками вместо вееров.) Следующий анализ случаев соответствует (с небольшими изменениями) рассуждению из [Ил06, §3].

Пусть Σ — веер, соответствующий неособому компактному комплексному 2-мерному торическому многообразию. Одномерные конусы из Σ соответствуют гиперграням (рёбрам) многоугольника P^2 . Нам нужно показать, что имеется всего 4 одномерных конуса. Значения характеристической функции на гипергранях в P^2 задаются примитивными векторами, порождающими соответствующие одномерные конусы веера Σ . Пусть ν — вектор, порождающий полусвободно действующую окружность. Мы можем выбрать начальную вершину v в P^2 таким образом, что вектор ν попадает в 2-мерный конус веера Σ , соответствующий вершине v . Затем мы занумеруем образующие одномерных конусов \mathbf{a}_i ($1 \leq i \leq m$) таким образом, что вектор ν попадает в конус, порождённый векторами \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , а любые два последовательных вектора порождают

2-мерный конус (см. рис. 4.6). Тем самым мы получим характери-

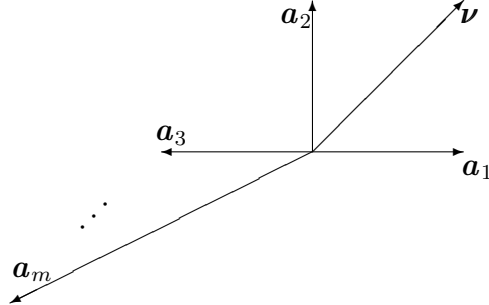


Рис. 4.6

стическую матрицу Λ размера $2 \times m$ в приведённой форме. Мы имеем $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$ и $\mathbf{a}_2 = (0, 1)$, и применяя критерий из предложения 4.10.12 к первому конусу $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ (т.е. к начальной вершине многоугольника), мы получим $\boldsymbol{\nu} = (1, 1)$.

Теперь рассмотрим второй конус. Из условия неособости (4.3) вытекает, что $\det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1$, откуда $\mathbf{a}_3 = (-1, *)$. Записав $\boldsymbol{\nu} = k_1 \mathbf{a}_2 + k_2 \mathbf{a}_3$ и применив предложение 4.10.12 ко второму конусу $\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$, мы получим

$$(1, 1) = \pm(0, 1) \pm (-1, *).$$

Следовательно, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0)$ или $\mathbf{a}_3 = (-1, -2)$. Аналогично, рассматривая последний конус $\langle \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_1 \rangle$, мы получим $\mathbf{a}_m = (*, -1)$, откуда в силу предложения 4.10.12 вытекает $\mathbf{a}_m = (0, -1)$ или $\mathbf{a}_m = (-2, -1)$. Случай $\mathbf{a}_3 = (-1, -2)$ и $\mathbf{a}_m = (-2, -1)$ невозможен, так как при этом второй и последний конус перекрываются.

Предположим, что $\mathbf{a}_3 = (-1, 0)$. Тогда аналогичный анализ третьего конуса $\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ показывает, что $\mathbf{a}_4 = (0, -1)$ или $\mathbf{a}_4 = (-2, -1)$. Следовательно, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_m$ (иначе конусы перекрываются).

Аналогично, если $\mathbf{a}_m = (0, -1)$, то мы получаем $\mathbf{a}_{m-1} = (-1, 0)$ или $\mathbf{a}_{m-1} = (-1, -2)$. Следовательно, $\mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{a}_3$.

В каждом из случаев мы получаем, что $m = 4$, и P^2 является 4-гольником. Тем самым доказательство завершено. \square

Заметим, что доказательство предыдущей теоремы оставляет три возможности для векторов \mathbf{a}_3 и \mathbf{a}_4 двумерного веера: $(-1, 0)$ и $(0, -1)$, или $(-1, 0)$ и $(-2, -1)$, или $(-1, -2)$ и $(0, -1)$, причём последние две пары эквивалентны при помощи обращающего ориентацию автоморфизма тора \mathbb{T}^2 . Соответствующие приведённые подматрицы характеристической матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первая из этих подматриц соответствует многообразию $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, а вторая — нетривиальной башне Ботта (поверхности Хирцебруха) с $a_{12} = -2$.

Следующий результат даёт явное описание матриц (4.37), соответствующих нашему специальному классу башен Ботта.

ТЕОРЕМА 4.10.20. *Башня Ботта B^{2n} допускает полусвободно действующую одномерную подгруппу-окружность с изолированными неподвижными точками тогда и только тогда, когда матрица (4.37) удовлетворяет тождеству*

$$\frac{1}{2}(E - A) = C_1 C_2 \cdots C_n,$$

где C_k ($1 \leq k \leq n$) есть либо единичная матрица, либо унитарно-треугольная матрица с единственным ненулевым элементом над диагональю, причём этот элемент равен 1 и стоит в k -м столбце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале предположим, что B^{2n} допускает полусвободно действующую подгруппу-окружность с изолированными неподвижными точками. У нас имеется два набора мультипликативных образующих кольца $H^*(B^{2n})$: набор $\{u_1, \dots, u_n\}$ из леммы 4.10.2, удовлетворяющий соотношениям (4.36), и набор $\{x_1, \dots, x_n\}$, удовлетворяющий соотношениям $x_i^2 = 0$ для $1 \leq i \leq n$. Поднаборы этих элементов с $i \leq k$ можно рассматривать как соответствующие наборы образующих для k -го этажа B^{2k} . Как вытекает из доказательства теоремы 4.10.14, мы имеем $c_1(\xi_{k-1}) = -2c_{i_k k} x_{i_k}$ для некоторого $i_k < k$, где $c_{i_k k} = 1$ или 0. Из соотношения $u_k^2 + 2c_{i_k k} x_{i_k} u_k = 0$ мы получаем $x_k = u_k + c_{i_k k} x_{i_k}$. Другими словами, матрица C_k перехода от базиса $x_1, \dots, x_{k-1}, u_k, \dots, u_n$ в $H^2(B^{2n})$ к базису $x_1, \dots, x_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ может иметь лишь один ненулевой элемент вне диагонали, и это $c_{i_k k}$. Тогда матрица перехода от u_1, \dots, u_n к x_1, \dots, x_n есть произведение $D = C_1 C_2 \cdots C_n$ (заметим, что C_1 есть единичная матрица, так как $x_1 = u_1$). Тогда $D = (d_{jk})$ есть унитарно-треугольная матрица, состоящая из единиц и нулей, мы имеем $x_k = \sum_{j=1}^n d_{jk} u_j$ и

$$0 = x_k^2 = \left(u_k + \sum_{j=1}^{k-1} d_{jk} u_j\right)^2 = u_k^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} d_{jk} u_j u_k + \dots, \quad 1 \leq k \leq n.$$

С другой стороны, $0 = u_k^2 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk} u_j u_k$ в силу (4.36). Сравнивая коэффициенты при $u_j u_k$ для $1 \leq j \leq k-1$ в последних двух равенствах и замечая, что эти элементы линейно независимы в $H^4(B^{2k})$, мы получаем $2d_{jk} = -a_{jk}$ при $1 \leq j < k \leq n$. Так как D и $-A$ являются унитарно-треугольными матрицами, мы получаем $2D = E - A$.

Теперь предположим, что матрица A удовлетворяет соотношению $E - A = 2C_1 C_2 \cdots C_n$. Тогда для соответствующей башни Ботта мы имеем $\xi_{k-1} = \pi_{i_k}^*(\gamma^{-2c_{i_k k}})$. Следовательно, мы можем выбрать

подгруппу-окружность таким образом, что расслоение ξ_{k-1} примет вид $t\pi_{i_k}^*(\gamma^{-2c_{i_k k}})$ (как \mathbb{S}^1 -расслоение), для $1 < k \leq n$. Тогда, как показывает рассуждение из доказательства теоремы 4.10.14, эта подгруппа-окружность действует полусвободно и с изолированными неподвижными точками. \square

ПРИМЕР 4.10.21. Условие на матрицу (4.37) из теоремы 4.10.20 в частности означает, что эта матрица может иметь только элементы 0 и -2 вне диагонали. Однако не любая такая матрица удовлетворяет условию теоремы 4.10.20. Например, для

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица $(E - A)/2$ не раскладывается в произведение $C_1 C_2 C_3$ матриц требуемого вида. Поэтому соответствующая 3-этажная башня Ботта не допускает полусвободного действия окружности с изолированными неподвижными точками. С другой стороны, для

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

мы имеем

$$\frac{1}{2}(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что не любая башня Ботта, гомеоморфная произведению сфер, допускает полусвободно действующую окружность с изолированными неподвижными точками (последнее условие сильнее даже при $n = 2$). В следующем подразделе мы рассмотрим класс башен Ботта, гомеоморфных произведению сфер.

4.10.4. Топологическая классификация и когомологии.

Следующее утверждение показывает, что башни Ботта, диффеоморфные произведению сфер, можно определить по их кольцам когомологий. Это даёт частичный ответ на вопрос, поставленный в начале раздела.

ТЕОРЕМА 4.10.22. *Башня Ботта B^{2n} диффеоморфна произведению $(\mathbb{C}P^1)^n$ тогда и только тогда, когда имеет место изоморфизм градуированных колец $H^*(B^{2n}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.10.2 мы получаем

$$H^*(B^{2n}) = H^*(B^{2n-2})[u_n]/(u_n^2 - c_1(\xi_{n-1})u_n).$$

Таким образом, мы можем представить каждый элемент из $H^2(B^{2n})$ в виде $x + bu_n$, где $x \in H^2(B^{2n-2})$ и $b \in \mathbb{Z}$. Так как

$$(x + bu_n)^2 = x^2 + 2bxu_n + b^2u_n^2 = x^2 + b(2x + bc_1(\xi_{n-1}))u_n,$$

квадрат элемента $x + bu_n$ с $b \neq 0$ равен нулю тогда и только тогда, когда $x^2 = 0$ и $2x + bc_1(\xi_{n-1}) = 0$. Следовательно, элементы вида $x + bu_n$ с $b \neq 0$, квадраты которых равны нулю, порождают свободную подгруппу ранга один в $H^2(B^{2n})$.

Предположим, что $H^*(B^{2n}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n)$. Тогда в $H^2(B^{2n})$ существует базис $\{x_1, \dots, x_n\}$, для которого $x_i^2 = 0$ при всех i . В силу предыдущего наблюдения, мы можем предположить, что x_1, \dots, x_{n-1} лежат в $H^2(B^{2n-2})$, а x_n не лежит в $H^2(B^{2n-2})$. Тогда можно считать, что $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i + u_n$, где $b_i \in \mathbb{Z}$. Произведение вида $\prod_{i \in \omega} x_i$, где $\omega \subset \{1, \dots, n\}$, лежит в $H^*(B^{2n-2})$ тогда и только тогда, когда $n \notin \omega$. Отсюда вытекает, что кольцо $H^*(B^{2n-2})$ порождается элементами x_1, \dots, x_{n-1} и изоморфно кольцу когомологий пространства $(\mathbb{C}P^1)^{n-1}$. Следовательно, мы можем предположить по индукции, что $B^{2n-2} \cong (\mathbb{C}P^1)^{n-1}$.

Записав $c_1(\xi_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$, мы получаем

$$0 = x_n^2 = (u_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + 2b_i) x_i u_n + (\sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i)^2.$$

Правая часть может обращаться в нуль только если среди a_i имеется не более одного ненулевого числа, так как элементы $x_i x_j$ и $x_i u_n$ для $i < j < n$ образуют базис в $H^4(B^{2n})$. Следовательно, расслоение ξ_{n-1} индуцируется из расслоения γ^{-2b_i} над $\mathbb{C}P^1$ при помощи некоторой проекции $B^{2n-2} = (\mathbb{C}P^1)^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Так как $\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{-2b_i})$ является топологически тривиальным расслоением (см. пример 4.10.3), расслоение с тотальным пространством $B^{2n} = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n-1})$ также тривиально. \square

Мы также можем эффективно описать класс матриц (4.37), соответствующих тем башням Ботта, которые диффеоморфны произведению 2-мерных сфер.

ТЕОРЕМА 4.10.23. *Башня Ботта B^{2n} диффеоморфна $(\mathbb{C}P^1)^n$ тогда и только тогда, когда её матрица (4.37) удовлетворяет тождеству*

$$\frac{1}{2}(E - A) = C_1 C_2 \cdots C_n,$$

где каждая из C_k ($1 \leq k \leq n$) является унитарной матрицей, которая может иметь не более одного ненулевого элемента над диагональю, причём в k -м столбце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение аналогично использованному при доказательстве теоремы 4.10.20. Единственное отличие в том, что теперь число $c_{i_k k}$ в формуле $c_1(\xi_{k-1}) = -2c_{i_k k} x_{i_k}$ является произвольным целым. \square

В оставшейся части этого раздела мы обобщаем результат теоремы 4.10.22 на произвольные квазиториические многообразия, но лишь в топологической категории (см. теорему 4.10.28).

Начнём с анализа алгебраической структуры когомологий квазиторического многообразия над кубом. Хотя соответствующий анализ возможно провести и над \mathbb{Z} , для наших целей удобно привести коэффициенты по модулю 2. Пусть S — градуированная алгебра над $\mathbb{Z}/2$, порождённая элементами x_1, \dots, x_n степени один. Мы будем называть S *квадратичной алгеброй Ботта* (или просто *КБ-алгеброй*) ранга n , если выполнены следующие два условия:

- (C1) $x_k^2 = \sum_{i < k} a_{ik} x_i x_k$, где $a_{ik} \in \mathbb{Z}/2$ при $1 \leq k \leq n$. (В частности, $x_1^2 = 0$.)
 (C2) $\prod_{i=1}^n x_i \neq 0$.

Если B^{2n} — башня Ботта, то из соотношений (4.36) вытекает, что когомологии $H^*(B^{2n}; \mathbb{Z}/2)$ являются КБ-алгеброй с удвоенной градуировкой, что оправдывает нашу терминологию. Все дальнейшие рассуждения остаются верными и для более широкого класса алгебр, у которых свойство (C1) ослаблено следующим образом:

- (C1') $x_k^2 = \sum_{i < j \leq k} a_{ijk} x_i x_j$, где $a_{ijk} \in \mathbb{Z}/2$ при $1 \leq k \leq n$.

Используя (C1), мы можем представить каждый элемент из S в виде линейной комбинации мономов без квадратов. Будем обозначать такие мономы $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ через x_ω , где $\omega = \{i_1, \dots, i_s\}$.

ЛЕММА 4.10.24. *Набор элементов $\{x_\omega\}$, соответствующих всевозможным подмножествам $\omega \subset \{1, \dots, n\}$, является аддитивным базисом в S . В частности, $\dim S_q = C_n^q$, где S_q обозначает градуированную компоненту степени q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (C1) вытекает, что множество $\{x_\omega\}$ аддитивно порождает S . Мы упорядочим мономы x_ω , используя обратный лексикографический порядок на подмножествах индексов $\{1, \dots, n\}$. А именно, для $\omega = \{i_1, \dots, i_s\}$ с $i_1 < \dots < i_s$ и $\tau = \{j_1, \dots, j_s\}$ с $j_1 < \dots < j_s$ мы положим $x_\omega < x_\tau$, если для некоторого k имеем $i_q = j_q$ при $k + 1 \leq q \leq s$ и $i_k < j_k$.

Предположим, что имеется некоторое нетривиальное линейное соотношение между мономами x_ω , и пусть x_τ — максимальный моном, встречающийся в этом соотношении. Тогда, используя это соотношение, мы можем заменить сомножитель x_τ в произведении $\prod_{i=1}^n x_i$, а затем использовать (C1) каждый раз, когда появляется x_k^2 . В результате мы получим нуль, что противоречит (C2). Итак, нетривиальных линейных соотношений на мономы x_ω нет. \square

ЛЕММА 4.10.25. *Пусть задан градуированный эпиморфизм f из S в градуированную алгебру S' над $\mathbb{Z}/2$, для которой $S'_{n-1} \neq 0$. Тогда размерность ядра $f: S_1 \rightarrow S'_1$ не превосходит 1. Более того, если размерность этого ядра есть в точности 1, то S' является КБ-алгеброй ранга $n - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f(x_i)$ через \bar{x}_i . Тогда соотношения (С1) имеют место для $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Предположим, что размерность ядра больше 1. Тогда найдутся такие $p > q \geq 1$, что

$$(4.44) \quad \bar{x}_p = \sum_{i < p} b_i \bar{x}_i, \quad \bar{x}_q = \sum_{j < q} c_j \bar{x}_j,$$

где $b_i, c_j \in \mathbb{Z}/2$. Из леммы 4.10.24 вытекает, что S_{n-1} порождается элементами x_ω с $|\omega| = n - 1$. Мы покажем, что $\bar{x}_\omega = 0$ для всех таких ω , что противоречит предположению $S'_{n-1} \neq 0$.

Пусть сначала $q \geq 2$. Так как $|\omega| = n - 1$, множество ω содержит p или q . Заменяем сомножители \bar{x}_p и \bar{x}_q в \bar{x}_ω используя соотношения (4.44), и затем будем последовательно применять (С1) каждый раз, когда появляется квадрат \bar{x}_k^2 . В результате получим нуль.

Пусть теперь $q = 1$, т.е. $\bar{x}_1 = 0$. Тогда достаточно показать, что $\bar{x}_\omega = 0$ для $\omega = \{2, 3, \dots, n\}$. Заменяем сомножитель \bar{x}_p в \bar{x}_ω используя (4.44), и затем будем последовательно применять (С1) каждый раз, когда появляется \bar{x}_k^2 с $k \geq 2$. Тогда в окончательном выражении каждое слагаемое будет содержать \bar{x}_1 , что равно нулю.

Теперь докажем второе утверждение леммы. По предположению, элементы \bar{x}_i удовлетворяют одному нетривиальному линейному соотношению. Пусть \bar{x}_j — максимальный элемент, встречающийся в этом соотношении. Мы можем исключить \bar{x}_j из S' используя это линейное соотношение и (С1). Тогда (С1) будет иметь место для элементов \bar{x}_i с $i \neq j$. Следовательно, S'_{n-1} порождается элементом $\prod_{i \neq j} \bar{x}_i$. Этот элемент не равен нулю так как $S'_{n-1} \neq 0$. Это доказывает, что S' является КБ-алгеброй ранга $n - 1$. \square

ТЕОРЕМА 4.10.26. Пусть M — квазиториическое многообразие над многогранником P . Тогда $H^{2*}(M; \mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга n тогда и только тогда, когда P есть n -мерный куб.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P есть n -куб. Так как каждый главный минор матрицы Λ_\star равен единице по модулю два, мы выводим, что матрица Λ_\star сопряжена унитарной матрице, аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 4.10.8. (Матрица (4.39), в которой b_i не обращаются в нуль по модулю 2 для всех $1 \leq i \leq n$, не может получиться, так как её определитель равен нулю по модулю 2.) Тогда из (4.16) вытекает, что $H^{2*}(M; \mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга n .

Теперь предположим, что $H^{2*}(M; \mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй. Пусть $b_r(M)$ обозначает r -е число Бетти многообразия M , и $f_s(P)$ — число граней коразмерности $s + 1$ многогранника P . Тогда

$$b_2(M) = f_0(P) - n, \quad b_4(M) = f_1(P) - (n - 1)f_0(P) + C_n^{n-2}$$

(см. теорему 4.5.4), и мы получаем из леммы 4.10.24, что

$$(4.45) \quad f_0(P) = 2n, \quad f_1(P) = 2n(n - 1).$$

Для каждого характеристического подмногообразия M_i отображение ограничения $H^*(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(M_i; \mathbb{Z}/2)$ сюръективно (это вытекает из теоремы 4.5.4). Тогда из лемм 4.10.24 и 4.10.25 вытекает, что $b_2(M_i) \geq b_2(M) - 1 = n - 1$. Следовательно,

$$(4.46) \quad f_0(F_i) = (n - 1) + b_2(M_i) \geq 2(n - 1),$$

где F_i обозначает гипергрань, соответствующую M_i , и

$$f_1(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} f_0(F_i) \geq 2n(n - 1).$$

Сравнивая это с (4.45), мы получаем, что неравенство (4.46) обращается в равенство для любого i , т.е. $b_2(M_i) = n - 1$. Это означает, что ядро отображения $H^2(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(M_i; \mathbb{Z}/2)$ одномерно, и $H^{2*}(M_i; \mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга $n - 1$ по лемме 4.10.25. Поэтому мы можем провести индукцию по размерности n .

При $n = 2$ из соотношений (4.45) вытекает, что P является комбинаторным квадратом. Пусть теорема верна в размерности $n - 1$, где $n \geq 3$. Так как $H^{2*}(M_i)$ является КБ-алгеброй ранга $n - 1$, каждая гипергрань в P является $(n - 1)$ -мерным кубом; в частности, любая 2-мерная грань является квадратом. Тогда P является n -мерным кубом по лемме 4.10.16. \square

ЛЕММА 4.10.27. Пусть M — квазиторическое многообразие над n -кубом. Если имеет место изоморфизм колец $H^*(M; \mathbb{Q}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n; \mathbb{Q})$, то M эквивалентно башне Ботта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению, в $H^2(M; \mathbb{Q})$ найдутся элементы y_1, \dots, y_n , порождающие кольцо $H^*(M; \mathbb{Q})$ и удовлетворяющие соотношениям $y_i^2 = 0$ при $1 \leq i \leq n$. Пусть $M_i \subset M$ — характеристическое подмногообразие; обозначим ограничение элемента y_k на $H^2(M_i; \mathbb{Q})$ через \bar{y}_k . Тогда элементы $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ порождают кольцо $H^*(M_i; \mathbb{Q})$, так как отображение $H^*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M_i; \mathbb{Q})$ сюръективно. Так как $b_2(M_i) = n - 1$, между элементами \bar{y}_k имеется нетривиальное линейное соотношение. Используя это соотношение мы можем исключить один из элементов, скажем \bar{y}_n . В результате получим сюръективное отображение $\mathbb{Q}[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}]/(\bar{y}_1^2, \dots, \bar{y}_{n-1}^2) \rightarrow H^*(M_i; \mathbb{Q})$. Так как размерности градуированных компонент степени $2q$ в обоих кольцах равны C_{n-1}^q , сюръективное отображение является изоморфизмом. Поэтому $H^*(M_i; \mathbb{Q}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^{n-1}; \mathbb{Q})$, а значит мы можем предположить по индукции, что каждое M_i является башней Ботта.

Пусть Λ_* — приведённая подматрица, соответствующая M . Тогда из леммы 4.10.8 вытекает, что матрица $-\Lambda_*$ сопряжена унитарной матрице или матрице (4.39) с ненулевыми элементами b_i , $1 \leq i \leq n$. Достаточно исключить второй случай. Пусть $-\Lambda_*$ есть

матрица (4.39). Тогда $\det(-\Lambda_*) = -1$, т.е.

$$(4.47) \quad \prod_{i=1}^n b_i = (-1)^n 2.$$

Используя (4.16), мы получаем

$$H^*(M) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] / (x_1(x_1 + b_1 x_2), x_2(x_2 + b_2 x_3), \dots, x_n(x_n + b_n x_1)),$$

где мы положили $x_i = v_{i+n}$ для $1 \leq i \leq n$. По предположению, найдётся ненулевой элемент $x \in H^2(M, \mathbb{Q})$, квадрат которого равен нулю. Запишем $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ для некоторых $a_i \in \mathbb{Q}$; тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j x_i x_j = \\ &= -a_1^2 b_1 x_1 x_2 - a_2^2 b_2 x_2 x_3 - \dots - a_n^2 b_n x_n x_1 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j x_i x_j. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$(4.48) \quad a_1^2 b_1 = 2a_1 a_2, \quad a_2^2 b_2 = 2a_2 a_3, \quad \dots, \quad a_n^2 b_n = 2a_n a_1.$$

Предположим, что $a_i \neq 0$ для всех i . Перемножая все равенства из предыдущей формулы, мы получим $\prod_{i=1}^n b_i = 2^n$, что противоречит (4.47). Следовательно, $a_i = 0$ для некоторого i , но тогда из (4.48) вытекает, что $a_i = 0$ для всех i . Это противоречит предположению, что $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \neq 0$. Следовательно, матрица (4.39) не может быть приведённой характеристической матрицей, а M эквивалентно башне Ботта. \square

Теперь мы можем доказать наш последний основной результат.

ТЕОРЕМА 4.10.28. *Квазиторическое многообразие M гомеоморфно произведению $(\mathbb{C}P^1)^n$ тогда и только тогда, когда имеет место изоморфизм градуированных колец $H^*(M) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как кольцо $H^{2*}((\mathbb{C}P^1)^n; \mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга n , многогранник в пространстве орбит многообразия M является n -мерным кубом по теореме 4.10.26. Тогда M эквивалентно башне Ботта по лемме 4.10.27. Наконец, M гомеоморфно $(\mathbb{C}P^1)^n$ по теореме 4.10.22. \square

Результаты данного раздела получили дальнейшее развитие в работе [CMS07]. Там было доказано, что аналог нашей теоремы 4.10.28 имеет место для так называемых *обобщённых башен Ботта*: последовательностей многообразий $\{B_k: 1 \leq k \leq n\}$, в которых B_k является проективизацией произвольной суммы одномерных комплексных расслоений над B_{k-1} (обычная башня Ботта получается, когда в каждой сумме имеется всего два расслоения).

Локально стандартные T -многообразия

В этой главе мы рассматриваем гладкие компактные $2n$ -мерные многообразия M с действием n -мерного тора T , которое является локально стандартным. Пространство орбит $Q := M/T$ такого многообразия является многообразием с углами, но, в отличие от квазиторических многообразий, мы не требуем более, чтобы это многообразие с углами было простым многогранником. В результате получается намного более широкий класс многообразий с действием тора, который, однако, по-прежнему характеризуется тесной связью с комбинаторными конструкциями из предыдущих глав.

С точки зрения общей теории T -многообразий M торические и квазиторические многообразия представляют примеры действий с наиболее простой структурой пространства орбит: простой многогранник имеет тривиальную топологическую структуру, так что топология самого T -многообразия полностью описывается комбинаторикой многогранника. В общем случае топология локально стандартного T -многообразия определяется не только комбинаторикой пространства орбит, но также и его топологией. Однако даже пространство орбит с тривиальной топологией может иметь комбинаторную структуру более сложную, чем простой многогранник. Такие комбинаторные структуры представляют немалый самостоятельный интерес и изучаются в этой главе. Этот материал тесно связан с алгебраическими результатами из разделов 2.6 и 2.7.

Уже в торической геометрии при изучении пространств орбит возникает необходимость рассматривать комбинаторные структуры более общие, чем простые многогранники. Так, пространство орбит $Q = V/T$ неособого компактного торического многообразия V является многообразием с углами, в котором все грани, включая само Q , ациклически, и все непустые пересечения граней связны. (Напомним, что пространство X называется *ациклическим*, если $\tilde{H}^i(X) = 0$ для любого i .) Мы называем такое многообразие с углами *гомологическим многогранником*. Оно является настоящим комбинаторным многогранником, если исходное торическое многообразие проективно, но, вообще говоря, может не быть комбинаторно эквивалентным никакому многограннику (см. обсуждение в разделе 4.9). Как мы уже видели, это приводит к тому, что класс

квазиторических многообразий не охватывает всех неособых компактных торических многообразий, что, конечно, не очень удобно. В то же время можно ожидать, что все топологические свойства, характеризующие квазиторические многообразия, будут также иметь место, если потребовать, чтобы пространство орбит было лишь гомологическим (а не комбинаторным) многогранником. Это действительно подтверждается приводимыми ниже результатами.

Кольцо когомологий локально стандартного T -многообразия M порождается элементами степени два тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гомологическим многогранником (теорема 5.6.5). В этом случае кольцо когомологий имеет структуру, знакомую в торической геометрии: оно изоморфно факторкольцу Стенли–Риснера пространства орбит Q по идеалу, порождённому некоторыми линейными формами. Тем самым видна аналогия между когомологическими свойствами квазиторических многообразий и общих локально стандартных T -многообразий.

Большой интерес также представляет класс T -многообразий M , у которых когомологии обращаются в нуль в нечётных размерностях. В этом случае эквивариантные когомологии многообразия M являются свободным конечно порождённым модулем над кольцом эквивариантных когомологий точки, т.е. над кольцом многочленом $H_T^*(pt) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$. Тем самым $H_T^*(M)$ является кольцом Коэна–Маколея. Пространство орбит T -многообразия с нулевыми нечётномерными когомологиями не обязательно является гомологическим многогранником, как показывает простой пример действия тора на чётномерной сфере (см. пример 5.2.2). Можно ввести более общее понятие *гранеациклического* многообразия с углами Q , в котором все грани по-прежнему ациклически, но их пересечения уже не обязаны быть связными. Оказывается, что нечётномерные когомологии T -многообразия M обращаются в нуль тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гранеациклическим (теорема 5.7.5). При этом кольцо эквивариантных когомологий оказывается изоморфным кольцу граней симплициального частично упорядоченного множества граней Q (однако это кольцо граней уже, вообще говоря, не порождается линейными элементами).

Рассматриваемый нами класс локально стандартных T -многообразий тесно связан с так называемыми *тор-многообразиями*, введёнными как альтернативное далеко идущее обобщение компактных неособых торических многообразий в работах [Ma99] и [HM03]. Замечательным свойством тор-многообразий является то, что они допускают комбинаторное описание по аналогии с торическими многообразиями. Оно основано на понятии *мультивеера*, введённого в [HM03] как альтернатива вееру, сопоставляемому торическому многообразию. Мультивеер представляет собой набор конусов, которые могут накладываться друг на друга.

В изложении основных понятий и конструкций этой главы мы следуем работам [НМ03], [НМ05], [Ма99] и [МР06]. Полученные здесь новые результаты опубликованы в работах [БП04-2], [МР06], [ММР07].

5.1. Предварительные результаты о когомологиях T -многообразий

Здесь мы получаем некоторые предварительные результаты о действиях тора на многообразиях, пока не предполагая локальной стандартности. В этом разделе M обозначает $2n$ -мерное замкнутое связное ориентируемое гладкое многообразие с гладким действием тора T произвольной размерности.

ЛЕММА 5.1.1. *Если $H^{odd}(M) = 0$, то M содержит хотя бы одну T -неподвижную точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для замкнутой 1-мерной подгруппы $S \subset T$ общего положения мы имеем $M^S = M^T$ (см. лемму 4.6.1). Так как $H^{odd}(M) = 0$, мы имеем $\chi(M^T) = \chi(M^S) = \chi(M) > 0$ (здесь $\chi(\cdot)$ обозначает эйлерову характеристику), откуда вытекает, что множество M^T непусто. \square

Классифицирующее пространство BT для n -мерного тора T есть, с точностью до гомотопии, произведение $(\mathbb{C}P^\infty)^n$ бесконечномерных комплексных проективных пространств. В частности,

$$H_T^*(pt) = H^*(BT) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n], \quad \deg t_i = 2.$$

Отображение ρ , стягивающее M в точку, индуцирует гомоморфизм $\rho^*: H_T^*(pt) \rightarrow H_T^*(M)$ и тем самым определяет в эквивариантных когомологиях $H_T^*(M)$ каноническую структуру $H^*(BT)$ -модуля. Если множество M^T непусто, отображение ρ^* является мономорфизмом. При этом $H^*(BT)$ -модуль $H_T^*(M)$ не обязательно является свободным, т.е. может содержать $H^*(BT)$ -крючения.

Так как $H^*(BT) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$, мы получаем, что $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем тогда и только тогда, когда $H_T^*(M)$ является кольцом Коэна–Маколея (заметим, что $H^*(BT)$ -модуль $H_T^*(M)$ автоматически конечно порождён, так как M компактно). Следующее утверждение даёт топологическую характеристику T -многообразий, обладающих этим свойством.

ЛЕММА 5.1.2. *Пусть множество неподвижных точек M^T конечно и непусто. Тогда $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем если и только если $H^{odd}(M) = 0$. В этом случае $H_T^*(M) \cong H^*(BT) \otimes H^*(M)$ как $H^*(BT)$ -модули.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $H^{odd}(M) = 0$. Тогда спектральная последовательность Серра расслоения $\rho: ET \times_T M \rightarrow$

BT вырождается в члене E_2 , и когомологии $H^*(M)$ не имеют кручений. Следовательно, эквивариантные когомологии $H_T^*(M)$ изоморфны (как $H^*(BT)$ -модуль) тензорному произведению $H^*(BT) \otimes H^*(M)$ и значит являются свободным $H^*(BT)$ -модулем.

Пусть теперь $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем. Рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения $ET \times_T M \rightarrow BT$. Она сходится к $H^*(M)$ и имеет

$$E_2^{*,*} = \text{Tor}_{H^*(BT)}^{*,*}(H_T^*(M), \mathbb{Z}).$$

Так как $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем, имеем

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{H^*(BT)}^{*,*}(H_T^*(M), \mathbb{Z}) &= \text{Tor}_{H^*(BT)}^{0,*}(H_T^*(M), \mathbb{Z}) \\ &= H_T^*(M) \otimes_{H^*(BT)} \mathbb{Z} \\ &= H_T^*(M) / (\rho^*(H^{>0}(BT))). \end{aligned}$$

Следовательно, $E_2^{0,*} = H_T^*(M) / (\rho^*(H^{>0}(BT)))$ и $E_2^{-p,*} = 0$ при $p > 0$. Отсюда вытекает, что спектральная последовательность вырождается в члене E_2 и

$$(5.1) \quad H^*(M) = H_T^*(M) / (\rho^*(H^{>0}(BT))).$$

С другой стороны, теорема локализации (см., например, [GS99, Th. 11.44]) утверждает, что ядро отображения ограничения

$$H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T) = H^*(BT) \otimes H^*(M^T)$$

является $H^*(BT)$ -кручением. Следовательно, в нашем случае это отображение является мономорфизмом. Так как M^T есть конечное множество точек, мы имеем $H_T^{odd}(M) = 0$. Наконец, отсюда и из (5.1) вытекает, что $H^{odd}(M) = 0$. \square

В дальнейшем для нас будут представлять особый интерес два выделенных класса T -многообразий M : те, у которых обращаются в нуль нечётномерные когомологии, и те, кольцо когомологий которых порождается двумерными классами. Оба этих когомологических свойства наследуются подмногообразиями неподвижных точек M^H относительно действия некоторого подтора $H \subset T$, как показано в приводимых ниже леммах. Это позволит нам применять индукцию при доказательстве основных утверждений этой главы.

ЛЕММА 5.1.3. *Пусть H — торическая подгруппа в T и N — связная компонента множества M^H . Если $H^{odd}(M) = 0$, то $H^{odd}(N) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для одномерной замкнутой подгруппы $S \subset H$ общего положения мы имеем $M^S = M^H$. Пусть p — простое число и G — подгруппа порядка p в S . Тогда действие G на $H^*(M)$ тривиально, так как G содержится в связной группе S . В силу [Br72, Теорема VII.2.2] мы имеем $\dim H^{odd}(M^G; \mathbb{Z}/p) \leq \dim H^{odd}(M; \mathbb{Z}/p)$. Следовательно, $H^{odd}(M^G; \mathbb{Z}/p) = 0$. Повторяя то

же рассуждение для множества M^G с индуцированным действием группы S/G , которая снова является окружностью, мы в итоге заключаем, что $H^{odd}(M^K; \mathbb{Z}/p) = 0$ для любой p -подгруппы K в S . Но так как для достаточно большого порядка группы K мы имеем $M^K = M^S = M^H$, мы получаем $H^{odd}(M^H; \mathbb{Z}/p) = 0$. Так как это верно для любого простого p , мы окончательно заключаем, что $H^{odd}(M^H) = 0$. \square

ЛЕММА 5.1.4. *Пусть M, H, N — те же, что и в лемме 5.1.3. Если кольцо $H^*(M)$ порождается двумерными классами, то отображение ограничения $H^*(M) \rightarrow H^*(N)$ сюръективно; в частности, кольцо $H^*(N)$ также порождается двумерными классами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H^{odd}(M) = 0$, мы имеем $H^{odd}(N) = 0$ в силу леммы 5.1.3; поэтому достаточно доказать, что отображение ограничения $H^*(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(N; \mathbb{Z}/p)$ сюръективно для каждого простого p .

Наше рассуждение аналогично использованному при доказательстве теоремы VII.3.1 из [Br72]. Рассмотрим снова одномерную замкнутую подгруппу S общего положения в H (такую, что $M^S = M^H$), и пусть G — подгруппа в S простого порядка p . Тогда отображение ограничения $H_G^k(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H_G^k(M^G; \mathbb{Z}/p)$ является изоморфизмом для достаточно большого k , см. [Br72, Теорема VII.1.5]. Следовательно, для любой связной компоненты N' в M^G отображение ограничения $r: H_G^k(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H_G^k(N'; \mathbb{Z}/p)$ сюръективно при достаточно большом k . Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_G^*(M; \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{r} & H_G^*(N'; \mathbb{Z}/p) \cong H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \otimes H^*(N'; \mathbb{Z}/p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(M; \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{s} & H^*(N'; \mathbb{Z}/p) \end{array} .$$

Выберем базис $v_1, \dots, v_d \in H^2(M; \mathbb{Z}/p)$; эти элементы мультипликативно порождают кольцо $H^*(M; \mathbb{Z}/p)$. Так как $H^{odd}(M; \mathbb{Z}/p) = H^{odd}(M^G; \mathbb{Z}/p) = 0$ и $\chi(M) = \chi(M^T) = \chi(M^G)$, мы имеем

$$\sum_i \dim H^i(M; \mathbb{Z}/p) = \sum_i \dim H^i(M^G; \mathbb{Z}/p).$$

Согласно [Br72, Теорема VII.1.6], спектральная последовательность Серра расслоения $EG \times_G M \rightarrow BG$ вырождается в члене E_2 . Следовательно, вертикальная стрелка $H_G^*(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Z}/p)$ в предыдущей диаграмме является эпиморфизмом. Пусть $\xi_j \in H_G^*(M; \mathbb{Z}/p)$ — произвольное поднятие элемента v_j , и $w_j := s(v_j)$, $1 \leq i \leq d$. Пусть t — образующая группы $H^2(BG; \mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p$. Так как предыдущая диаграмма коммутативна и $H^1(N'; \mathbb{Z}/p) = 0$ по лемме 5.1.3, мы имеем $r(\xi_j) = \alpha_j t + w_j$ для некоторых $\alpha_j \in \mathbb{Z}/p$,

$1 \leq j \leq d$. Выберем теперь произвольный элемент $a \in H^*(N'; \mathbb{Z}/p)$. Тогда найдутся ℓ и многочлен $P(\xi_1, \dots, \xi_d)$, такие, что

$$r(P(\xi_1, \dots, \xi_d)) = t^\ell a.$$

С другой стороны,

$$r(P(\xi_1, \dots, \xi_d)) = P(\alpha_1 t + w_1, \dots, \alpha_d t + w_d) = \sum_{k \geq 0} t^k Q_k(w_1, \dots, w_d)$$

для некоторых многочленов Q_k . Следовательно, $a = Q_\ell(w_1, \dots, w_d)$, отображение ограничения $H^*(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(N'; \mathbb{Z}/p)$ сюръективно, и кольцо $H^*(N'; \mathbb{Z}/p)$ порождается двумерными классами w_1, \dots, w_d .

Теперь мы можем повторить то же рассуждения для N' с индуцированным действием группы S/G , которая снова является окружностью. В результате получим, что отображение ограничения $H^*(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(N'; \mathbb{Z}/p)$ сюръективно для любой связной компоненты N' множества M^K , где K — произвольная p -подгруппа в S . При этом, если порядок группы K достаточно велик, то $M^K = M^S = M^H$, а значит $N' = N$. Отсюда вытекает, что отображения ограничения $H^*(M; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(N; \mathbb{Z}/p)$ сюръективно для любой связной компоненты N множества M^H . Так как это верно для любого простого p , доказательство завершено. \square

5.2. Характеристические подмногообразия

Здесь мы по-прежнему рассматриваем $2n$ -мерные замкнутые связные ориентируемые гладкие T -многообразия, но на действие тора мы наложим некоторые дополнительные ограничения по сравнению с предыдущим разделом. А именно, мы будем предполагать, что $\dim T = n$, действие тора эффективно, а множество M^T неподвижных точек непусто (так как $\dim M = 2 \dim T$ и M компактно, множество M^T всегда конечно). Важность последнего условия будет прояснена в дальнейших конструкциях этого и следующих разделов. T -многообразия, обладающие вышеперечисленными свойствами, изучались в работах [Ma99], [HM03], [HM05] под названием *тор-многообразий*.

Подмногообразие коразмерности два в M называется *характеристическим*, если оно является связной компонентой множества неподвижных точек для некоторой замкнутой 1-мерной подгруппы в T . В работах [HM03] и [Ma99] в определении характеристического подмногообразия требовалось, чтобы оно содержало хотя бы одну T -неподвижную точку, но здесь мы этого требовать не будем. Однако это требование автоматически выполнено, если $H^{\text{odd}}(M) = 0$, в силу леммы 5.1.3.

Мы будем обозначать характеристические подмногообразия через M_i , $1 \leq i \leq m$. Пересечение любого набора из $k \leq n$ характеристических подмногообразий либо пусто, либо представляет собой несвязное объединение некоторого количества подмногообразий коразмерности $2k$, неподвижных под действием некоторой торической подгруппы коразмерности k . В частности, пересечение любого набора из n характеристических подмногообразий состоит из конечного числа T -неподвижных точек.

Каждое подмногообразие M_i ориентируемо. Как и в случае квазиторических многообразий, мы скажем, что T -многообразие M *полиориентировано*, если выбраны ориентации самого M и всех характеристических подмногообразий M_i . Таким образом, всего на M имеется 2^{m+1} полиориентаций. Далее мы всегда будем предполагать фиксированной некоторую полиориентацию на M .

Так как оба многообразия M и M_i ориентированы, определён гомоморфизм Гизина $H_T^*(M_i) \rightarrow H_T^{*+2}(M)$ в эквивариантных когомологиях (см. приложение III). Обозначим через $\tau_i \in H_T^2(M)$ образ единицы из $H_T^0(M_i)$ под действием этого гомоморфизма. Таким образом, ограничение элемента τ_i на $H_T^2(M_i)$ есть эквивариантный класс Эйлера нормального расслоения $\nu_i = \nu(M_i \subset M)$. Следующее несложно доказываемое утверждение (см. [Ma99, §1]) описывает элементарные свойства эквивариантных когомологий T -многообразий с указанными выше свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2.1. 1. *Существуют единственные элементы $a_i \in H_2(BT)$, $1 \leq i \leq m$, такие, что*

$$\rho^*(t) = \sum_{i=1}^m \langle t, a_i \rangle \tau_i \quad \text{по модулю } H^*(BT)\text{-кручений}$$

для любого $t \in H^2(BT)$, где $\rho: H^*(BT) \rightarrow H_T^*(M)$.

2. *Подгруппа-окружность, оставляющая неподвижным подмногообразие M_i , совпадает с подгруппой, задаваемой элементом $a_i \in H_2(BT)$ при помощи отождествления $H_2(BT) = \text{Hom}(\mathbb{S}^1, T)$.*

3. *Если k различных характеристических подмногообразий M_{i_1}, \dots, M_{i_k} имеют непустое пересечение, то a_{i_1}, \dots, a_{i_k} образуют часть базиса целочисленной решётки $H_2(BT) \cong \mathbb{Z}^n$.*

Как неоднократно отмечалось выше, квазиторические многообразия, а также неособые компактные торические многообразия, предоставляют серии примеров многообразий M , изучаемых в этом разделе. В следующем примере описывается простейшее T -многообразие обладающее всеми свойствами многообразий из этого раздела, но не являющееся (квази)торическим.

ПРИМЕР 5.2.2. Рассмотрим $2n$ -сферу S^{2n} , задаваемую как следующее подмножество в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$:

$$\{(z_1, \dots, z_n, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 + y^2 = 1\}.$$

Определим действие тора \mathbb{T}^n по формуле

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n, y) = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n, y).$$

Имеется две неподвижные точки $(0, \dots, 0, \pm 1)$ и n характеристических подмногообразий $\{z_1 = 0\}, \dots, \{z_n = 0\}$. Пересечение k характеристических подмногообразий связно при $k \leq n - 1$, но несвязно (состоит из двух неподвижных точек) при $k = n$.

Отличие этого примера от (квази)торических многообразий заключается именно в том, что пересечение некоторого набора характеристических подмногообразий не является связным. Кольцо когомологий квазиторического многообразия порождается двумерными классами (теорема 4.5.4). Как показывает следующая лемма, именно это когомологическое условие обеспечивает связность пересечений характеристических подмногообразий.

ЛЕММА 5.2.3. *Предположим, что кольцо $H^*(M)$ мультипликативно порождается двумерными классами. Тогда всевозможные непустые кратные пересечения характеристических многообразий связны, а их кольца когомологий также порождаются двумерными классами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждое характеристическое подмногообразие M_i является связной компонентой множества неподвижных точек относительно действия подгруппы-окружности в T , кольцо когомологий $H^*(M_i)$ порождается двумерными классами, и отображение ограничения $H^*(M) \rightarrow H^*(M_i)$ сюръективно, в силу леммы 5.1.4. Отсюда вытекает, что отображение $H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M_i)$ в эквивариантных когомологиях также сюръективно.

Теперь докажем связность кратных пересечений. Пусть $M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k} \neq \emptyset$ ($1 < k \leq n$), и выберем в этом пересечении связную компоненту N . Так как многообразие N неподвижно относительно действия подтора, оно содержит неподвижную точку в силу леммы 5.1.3. Для каждого $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ рассмотрим вложения $\varphi_i: N \rightarrow M_i$, $\psi_i: M_i \rightarrow M$ и соответствующие гомоморфизмы Гизина в эквивариантных когомологиях:

$$H_T^0(N) \xrightarrow{\varphi_{i_1}} H_T^{2k-2}(M_i) \xrightarrow{\psi_{i_1}} H_T^{2k}(M).$$

Так как ограничение $\psi_i^*: H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M_i)$ сюръективно, мы имеем $\varphi_{i_1}(1) = \psi_i^*(u)$ для некоторого $u \in H_T^{2k-2}(M)$. Тогда

$$(\psi_i \circ \varphi_i)_!(1) = \psi_{i_1}(\varphi_{i_1}(1)) = \psi_{i_1}(\psi_i^*(u)) = \psi_{i_1}(1)u = \tau_i u.$$

Следовательно, $(\psi_i \circ \varphi_i)_!(1)$ делится на τ_i для любого $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$. Согласно [Ma99, Prop. 3.4], однородная части степени $2k$ кольца $H_T^*(M)$ аддитивно порождается мономами $\tau_{j_1}^{k_1} \dots \tau_{j_p}^{k_p}$, такими, что $M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_p} \neq \emptyset$ и $k_1 + \dots + k_p = k$. Отсюда вытекает, что $(\psi_i \circ \varphi_i)_!(1)$ получается из $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_k} \in H_T^{2k}(M)$ умножением на ненулевое целое число. По определению гомоморфизма Гизина, $(\psi_i \circ \varphi_i)_!(1)$ переходит в нуль под действием отображения ограничения $H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(x)$ для любой точки $x \in (M \setminus N)^T$. С другой стороны, образ элемента $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_k}$ при отображении ограничения $H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(x)$ является ненулевым для любой T -неподвижной точки $x \in M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}$. Следовательно, N является единственной связной компонентой этого пересечения. Наконец, из леммы 5.1.4 следует, что кольцо $H^*(N)$ порождается двумерными классами. \square

5.3. Пространства орбит и многообразия с углами

Начиная с этого раздела мы рассматривать локально стандартные действия тора T на многообразиях M (см. определение 3.4.2).

ТЕОРЕМА 5.3.1. *Пусть $\dim M = 2 \dim T$, действие тора эффективно и $H^{\text{odd}}(M) = 0$. Тогда действие является локально стандартным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что нетривиальные стационарные подгруппы действия тора не могут быть конечными. Предположим противное, т.е. стационарная подгруппа T_x конечна и нетривиальна для некоторой точки $x \in M$. Тогда T_x содержит циклическую подгруппу G простого порядка p . Пусть N — связная компонента множества M^G , содержащая x . Так как $x \in N$ и группа T_x конечна, главная стационарная подгруппа T -инвариантного подмногообразия N также конечна. Как и в доказательстве леммы 5.1.3, из [Br72, Теорема VII.2.2] вытекает, что $H^{\text{odd}}(N; \mathbb{Z}/p) = 0$. В частности, эйлерова характеристика многообразия N не равна нулю, а значит N содержит некоторую T -неподвижную точку y . Так как действие эффективно и $\dim M = 2 \dim T$, представление тора T в пространстве $\mathcal{T}_y M$ является точным, а $\mathcal{T}_y N$ является собственным T -инвариантным подпространством в $\mathcal{T}_y M$. Отсюда вытекает, что имеется нетривиальный подтор $T' \subset T$, который оставляет неподвижным подпространство $\mathcal{T}_y N$ и нетривиально действует в дополнении к $\mathcal{T}_y N$ в $\mathcal{T}_y M$. Тогда T' является главной стационарной подгруппой многообразия N , что противоречит предыдущему выводу о конечности этой подгруппы.

Если стационарная подгруппа T_x тривиальна, то T -действие очевидно является локально стандартным вблизи x . Предположим, что подгруппа T_x нетривиальна. Так как она не может быть конечной, $\dim T_x > 0$. Пусть H — компонента единицы в группе T_x , а N — связная компонента множества M^H , содержащая x . В силу

леммы 5.1.3, многообразии N содержит некоторую T -неподвижную точку y . Рассмотрев представление тора в касательном пространстве к y , мы находим, что индуцированное действие факторгруппы T/H на N является эффективным. Согласно рассуждению из предыдущего абзаца, никакая точка в N не может иметь нетривиальную конечную стационарную подгруппу для действия T/H , откуда вытекает, что $T_x = H$. Так как x и y находятся в одной связной компоненте множества T_x -неподвижных точек, T_x -представление в пространстве $\mathcal{T}_x M$ изоморфно ограничению T -представления в $\mathcal{T}_y M$ на подгруппу $T_x \subset T$. Отсюда вытекает, что T -действие локально стандартно вблизи x . \square

Далее мы будем предполагать, что действие тора локально стандартно (заметим, что это автоматически влечёт, что действие эффективно и $\dim M = 2 \dim T$). Кроме того, будем предполагать, что множество неподвижных точек M^T непусто. Оба этих условия автоматически выполнены для многообразий с $H^{odd}(M) = 0$, в силу предыдущей теоремы и леммы 5.1.1.

Пусть $Q := M/T$ обозначает пространство орбит и $\pi: M \rightarrow Q$ — соответствующая проекция. Так как действие тора локально стандартно, Q представляет собой многообразие с углами (см. определение 3.4.3). Гиперграницы пространства Q являются проекциями характеристических подмногообразий: $Q_i := \pi(M_i)$, $1 \leq i \leq m$. Каждая гипергрань является замкнутым связным подмножеством в Q . Непустое пересечение k гиперграней мы будем называть *предгранью* коразмерности k , $1 \leq k \leq n$. Таким образом, любая предгрань есть пространство орбит для некоторого непустого пересечения $M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}$ характеристических подмногообразий. Вообще говоря, предграницы коразмерности > 1 могут быть несвязными (см. пример 5.2.2). Связные компоненты предграней суть в точности грани многообразия с углами Q . Мы также считаем само Q гранью коразмерности нуль; другие грани называются *собственными*.

В частности, Q является многообразием с границей $\partial Q = \cup_i Q_i$. Пусть \mathcal{K} обозначает *нерв* покрытия границы ∂Q гипергранями. Таким образом, \mathcal{K} является $(n-1)$ -мерным симплициальным комплексом на m вершинах. Симплексы размерности $k-1$ из \mathcal{K} находятся во взаимно однозначном соответствии с предгранями коразмерности k пространства Q .

Напомним, что пространство X называется *ациклическим* если $\tilde{H}_i(X) = 0$ для всех i . Мы скажем, что пространство орбит Q является *гранеациклическим* если все его грани (включая само Q) являются ациклическими. Мы назовём Q *гомологическим многогранником* если все его предграницы ациклически (в частности, связны). Заметим, что пространство $Q = M/T$ является гомологическим многогранником тогда и только тогда, когда оно гранеациклично и

всевозможные пересечения характеристических многообразий M_i являются связными.

ЗАМЕЧАНИЕ. Простой многогранник является многообразием с углами и также является гомологическим многогранником. Соответствующий нерв \mathcal{K} есть граничный комплекс двойственного симплициального многогранника.

ПРИМЕР 5.3.2. T -многообразие S^{2n} из примера 5.2.2 является локально стандартным и отображение

$$(z_1, \dots, z_n, y) \rightarrow (|z_1|, \dots, |z_n|, y)$$

отождествляет пространство орбит S^{2n}/T с пространством

$$\{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 + y^2 = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Это пространство не является простым многогранником (и даже гомологическим многогранником), но является гренациклическим многообразием с углами.

Предложение 5.2.1 позволяет построить аналог характеристического отображения для локально стандартных T -многообразий. Рассмотрим отображение

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \lambda: \{Q_1, \dots, Q_m\} &\rightarrow H_2(BT) = \text{Hom}(\mathbb{S}^1, T) \cong \mathbb{Z}^n, \\ Q_i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

(мы используем обозначения из предложения 5.2.1). Отображение λ удовлетворяет условию неособости, аналогичному соответствующему условию для квазиторических многообразий:

$$\text{если } Q_{i_1} \cap \dots \cap Q_{i_k} \neq \emptyset, \text{ то } \lambda(Q_{i_1}), \dots, \lambda(Q_{i_k}) \text{ задают часть базиса решётки } \text{Hom}(\mathbb{S}^1, T) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Для каждой точки $q \in Q$ рассмотрим наименьшую грань $G(q)$, содержащую q . Эта грань является связной компонентой пересечения некоторых гиперграней: $G(q) \in Q_{i_1} \cap \dots \cap Q_{i_k}$. Рассмотрим торическую подгруппу $T(q) \subset T$, порождённую одномерными подгруппами, соответствующими элементам $\lambda(Q_{i_1}), \dots, \lambda(Q_{i_k})$. Введём факторпространство

$$(5.3) \quad M(Q, \lambda) := T \times Q / \sim,$$

где $(t_1, p) \sim (t_2, q)$ тогда и только тогда, когда $p = q$ и $t_1 t_2^{-1} \in T(q)$. Пространство $M(Q, \lambda)$ является замкнутым многообразием с действием тора T (это вытекает из того, что отображение λ удовлетворяет приведённому выше условию, а Q является многообразием с углами). Следующий результат доказывается так же, как и предложение 4.1.7 (см. замечание там же).

ЛЕММА 5.3.3. Пусть M — локально стандартное T -многообразие с пространством орбит Q , а λ — отображение (5.2). Если

$H^2(Q) = 0$, то существует слабо T -эquivариантный гомеоморфизм

$$M(Q, \lambda) \rightarrow M,$$

накрывающий тождественное отображение Q в себя.

Таким образом, как и в случае квазиторических многообразий Дэвиса–Янушкевича, T -многообразиие с пространством орбит Q , удовлетворяющим соотношению $H^2(Q) = 0$, однозначно определяется парой (Q, λ) .

5.4. Кольца граней многообразий с углами

Теперь мы перейдём к более подробному изучению комбинаторной структуры многообразий с углами, получаемых как пространства орбит локально стандартных T -многообразий.

Многообразиие с углами называется *регулярными*, если каждая грань коразмерности k содержится в точности в k гипергранях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4.1. *Многообразиие с углами Q , получаемое как пространство орбит локально стандартного T -многообразииа M , является регулярным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $q \in Q$ лежит во внутренности грани G коразмерности k , и пусть $x \in M$ — произвольная точка, переходящая в q при проекции на пространство орбит. Тогда в произвольной локально стандартной карте точка x имеет координаты z_1, \dots, z_n , из которых в точности k обращается в нуль; без ограничения общности можно считать, что это — z_1, \dots, z_k . Тогда уравнение $z_i = 0$ при $1 \leq i \leq k$ выделяют касательное пространство в точке x к некоторому характеристическому подмногообразиию. Таким образом, x содержится в точности в k характеристических подмногообразииях. По определению, каждое характеристическое подмногообразиие проектируется на гипергрань, так что G содержится в точности в k гипергранях. \square

В регулярном многообразии с углами множество всех граней, содержащих данную грань, является частично упорядоченным множеством, изоморфным множеству граней симплекса (т.е. булевой алгеброй). Таким образом, все грани регулярного многообразииа с углами Q образуют симплициальное частично упорядоченное множество по отношению к обратному включению (так что само Q является наименьшим элементом), называемое *двойственным* к Q (по аналогии с двойственностью между простыми многогранниками и симплициальными разбиениями сфер). Двойственное симплициальное частично упорядоченное множество является множеством граней некоторого симплициального комплекса \mathcal{K} тогда и

только тогда, когда все непустые пересечения наборов гиперграней из Q являются связными. В этом случае \mathcal{K} совпадает с нервом покрытия Q гипергранями.

ПРИМЕР 5.4.2. Рассмотрим три структуры многообразия с углами на двумерном диске D^2 , изображённые на рис. 5.1. Первое из этих многообразий с углами не является регулярным. Второе является регулярным и граeneaциклическим многообразием с углами, но не гомеоморфно никакому простому многограннику (и даже не является гомологическим многогранником). В частности, соответствующее симплициальное частично упорядоченное множество не происходит из симплициального комплекса. Наконец третье многообразие с углами гомеоморфно простому многограннику (2-симплексу) и в частности является гомологическим многогранником. Сравните с симплициальными частично упорядоченными множествами из примера 1.7.2.

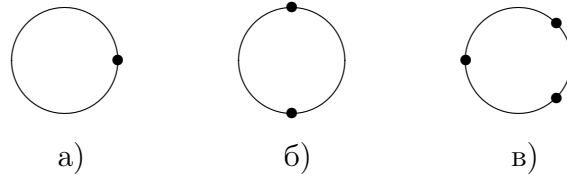


Рис. 5.1. 2-диск как многообразие с углами.

ПРИМЕР 5.4.3. Пусть $Q = S^{2n}/T$ — пространство орбит торного многообразия S^{2n} , см. примеры 5.2.2 и 5.3.2 (случай $n = 2$ изображён на рис. 5.1 б)). Здесь имеется всего n гиперграней, пересечение любых k гиперграней связно при $k \leq n - 1$, но пересечение n гиперграней состоит из двух точек. Следовательно, двойственный симплициальный клеточный комплекс получается склейкой двух $(n - 1)$ -симплексов по их границам (он описан в примере 1.7.2).

Далее мы могли бы определить кольцо граней пространства Q как кольцо граней двойственного симплициального клеточного комплекса (см. определение 1.7.1). Однако ввиду особой важности этого случая для приложений мы сформулируем основные понятия и утверждения в терминах комбинаторики граней пространства Q . Доказательства утверждений в этом разделе получаются очевидной дуализацией соответствующих утверждений из раздела 2.5.

Пересечение двух граней G и H в многообразии с углами может быть несвязным. Мы будем рассматривать пересечение $G \cap H$ как множество его связных компонент и использовать обозначение $E \in G \cap H$ для связных компонент E пересечения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4.4. Пусть пересечение $G \cap H$ непусто. Тогда существует единственная минимальная грань (обозначаемая $G \vee H$), содержащая G и H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E \in G \cap H$. Тогда множество граней, содержащих E , есть множество граней некоторого симплекса, откуда и вытекает утверждение. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4.5. Кольцом граней регулярного многообразия с углами Q называется факторкольцо

$$\mathbf{k}[Q] := \mathbf{k}[v_G : G \text{ — некоторая грань}] / \mathcal{I}_Q,$$

где \mathcal{I}_Q — идеал, порождённый всеми элементами вида

$$v_G v_H - v_{G \vee H} \cdot \sum_{E \in G \cap H} v_E.$$

(Здесь мы формально полагаем $v_\emptyset = 1$ и $v_\emptyset = 0$.)

В частности, если грани G и H трансверсальны, т.е. $\text{codim } G \cap H = \text{codim } G + \text{codim } H$, то $G \vee H = Q$, и мы получаем тождество

$$v_G v_H = \sum_{E \in G \cap H} v_E \quad \text{в } \mathbf{k}[Q].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нерв \mathcal{K} покрытия пространства гипергранями Q является симплицциальным комплексом. Если все непустые пересечения наборов граней из Q являются связными, то кольцо граней $\mathbf{k}[Q]$ совпадает с классическим кольцом граней $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ нерва \mathcal{K} . Однако в общем случае кольца $\mathbf{k}[Q]$ и $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ могут отличаться, как показывает следующий пример.

ПРИМЕР 5.4.6. Рассмотрим снова действие тора на S^{2n} из примеров 5.2.2 и 5.3.2 и положим $n = 2$. Тогда Q представляет собой 2-мерный диск с двумя 0-гранями (которые мы обозначим p и q) и двумя 1-гранями (обозначим их G и H). Тогда

$$\mathbf{k}[Q] = \mathbf{k}[v_G, v_H, v_p, v_q] / (v_G v_H = v_p + v_q, v_p v_q = 0),$$

где $\deg v_G = \deg v_H = 2$, $\deg v_p = \deg v_q = 4$.

ЛЕММА 5.4.7. Любой элемент $a \in \mathbf{k}[Q]$ можно записать в виде

$$a = \sum_{\substack{G_1 \supset \dots \supset G_n \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n}} A(G_1 \supset \dots \supset G_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) v_{G_1}^{\alpha_1} \dots v_{G_n}^{\alpha_n}$$

где $A(G_1 \supset \dots \supset G_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{k}$. Сумма берётся по всем цепям граней $G_1 \supset \dots \supset G_n$ с $\text{codim } G_i = i$ и всем неотрицательным целыми числами α_i .

Как и в случае симплицциальных частично упорядоченных множеств, мы называем представление из леммы 5.4.7 *цепным разложением* элемента $a \in \mathbf{k}[Q]$.

Для любой вершины (0-грани) $v \in Q$ определим *отображение ограничения* s_v по формуле

$$s_v: \mathbf{k}[Q] \rightarrow \mathbf{k}[Q]/(v_G: G \not\equiv v).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4.8. *Образ $s_v(\mathbf{k}[Q])$ отображения ограничения отождествляется с кольцом многочленов $\mathbf{k}[v_{Q_{i_1}}, \dots, v_{Q_{i_n}}]$ от n образующих степени два, соответствующих n гиперграням Q_{i_1}, \dots, Q_{i_n} , содержащим v .*

ЛЕММА 5.4.9. *Предположим, что каждая грань в Q содержит некоторую вершину. Тогда сумма $s = \bigoplus_v s_v$ отображений ограничения по всем вершинам $v \in Q$ задаёт мономорфизм из кольца граней $\mathbf{k}[Q]$ в прямую сумму колец многочленов.*

Определим f -вектор многообразия с углами Q как $\mathbf{f}(Q) = (f_0, \dots, f_{n-1})$, где f_i — число граней коразмерности $i + 1$ (так что $f_0 = m$ есть число гиперграней, по аналогии с простыми многогранниками). Как обычно, h -вектор $\mathbf{h}(Q) = (h_0, \dots, h_n)$ определяется из соотношения (1.8).

ТЕОРЕМА 5.4.10. *Мы имеем*

$$F(\mathbf{k}[Q]; t) = \sum_{k=0}^n \frac{f_{k-1} t^{2k}}{(1-t^2)^k} = \frac{h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n}}{(1-t^2)^n}.$$

5.5. Когомологии локально стандартных T -многообразий

В этом разделе мы вначале построим естественный кольцевой гомоморфизм из кольца граней $\mathbb{Z}[Q]$ в кольцо эквивариантных когомологий $H_T^*(M)$ локально стандартного T -многообразия по модулю $H^*(BT)$ -кручений. Затем мы получим условия, при которых этот гомоморфизм является мономорфизмом или эпиморфизмом; в частности он является изоморфизмом при условии $H^{odd}(M) = 0$.

5.5.1. Аксиальные функции и классы Тома. Рассмотрим «топологическое» отображение отображение ограничения из эквивариантных когомологий в сумму колец многочленов:

$$(5.4) \quad r = \bigoplus_{v \in M^T} r_v: H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T) = \bigoplus_{v \in M^T} H^*(BT).$$

Ядро этого отображения является $H^*(BT)$ -кручением (см. [GS99, Th. 11.44]). Из леммы 5.1.2 вытекает, что r является мономорфизмом при условии $H^{odd}(M) = 0$.

Мы будем отождествлять множество неподвижных точек M^T с вершинами пространства Q . Одномерный остов Q , состоящий из вершин (0-граней) и рёбер (1-граней), представляет собой n -валентный граф. Обозначим через $E(Q)$ набор рёбер со всевозможными ориентациями. Для каждого элемента $e \in E(Q)$ обозначим

через $i(e)$ и $t(e)$ начальную и конечную вершину ребра e соответственно. Тогда $M_e := \pi^{-1}(e)$ представляет собой двумерную сферу, которая остаётся неподвижной под действием некоторого подтора коразмерности один в T (здесь $\pi: M \rightarrow Q$ обозначает проекцию на пространство орбит). В этой сфере содержатся в точности две T -неподвижные точки $i(e)$ и $t(e)$. Двумерное подпространство $\mathcal{T}_{i(e)}M_e \subset \mathcal{T}_{i(e)}M$ является неприводимой компонентой касательного представления тора T в пространстве $\mathcal{T}_{i(e)}M$. То же верно и для другой T -неподвижной точки $t(e)$, причём T -представления $\mathcal{T}_{i(e)}M_e$ и $\mathcal{T}_{t(e)}M_e$ изоморфны. Рассмотрим единственное характеристическое подмногообразие M_i , трансверсально пересекающее M_e в точке $i(e)$. Полиориентация задаёт ориентацию нормального расслоения ν_i подмногообразия M_i , а значит и ориентацию пространства $\mathcal{T}_{i(e)}M_e$. В результате мы можем рассматривать $\mathcal{T}_{i(e)}M_e$ как пространство одномерного комплексного T -представления. Тем самым определён элемент группы $\text{Hom}(T, \mathbb{S}^1) = H^2(BT)$, который мы обозначим через $\alpha(e)$.

Пусть $e^T(\nu_i) \in H_T^2(M_i)$ — эквивариантный класс Эйлера нормального расслоения, и обозначим его ограничения на неподвижную точку $v \in M_i^T$ через $e^T(\nu_i)|_v \in H_T^2(v) = H^2(BT)$. Тогда

$$(5.5) \quad e^T(\nu_i)|_v = \alpha(e),$$

где e — единственное ребро, для которого $i(e) = v$ и $e \notin Q_i = \pi(M_i)$. Следуя [GZ01], мы будем называть построенное отображение

$$\alpha: E(Q) \rightarrow H^2(BT)$$

аксиальной функцией.

ЛЕММА 5.5.1. *Аксиальная функция α обладает следующими свойствами:*

- а) $\alpha(\bar{e}) = \pm\alpha(e)$ для любого $e \in E(Q)$, где \bar{e} обозначает ребро e с противоположной ориентацией;
- б) для каждой вершины v множество $\alpha_v := \{\alpha(e) : i(e) = v\}$ является \mathbb{Z} -базисом группы $H^2(BT)$;
- в) для любого $e \in E(Q)$ мы имеем $\alpha_{i(e)} \equiv \alpha_{t(e)} \pmod{\alpha(e)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство а) вытекает из того, что $\mathcal{T}_{i(e)}M_e$ и $\mathcal{T}_{t(e)}M_e$ изоморфны как вещественные T -представления, а б) — из того, что T -представление $\mathcal{T}_{i(e)}M$ является точным. Пусть T_e — подтор коразмерности один, оставляющий подмногообразие M_e неподвижным. Тогда T_e -представления $\mathcal{T}_{i(e)}M$ и $\mathcal{T}_{t(e)}M$ изоморфны, так как точки $i(e)$ и $t(e)$ содержатся в одной связной компоненте M_e множества T_e -неподвижных точек. Отсюда вытекает в). \square

ЗАМЕЧАНИЕ. В исходном определении аксиальной функции из [GZ01] требовалось выполнение условия $\alpha(\bar{e}) = -\alpha(e)$. Однако

мы допускаем и $\alpha(\bar{e}) = \alpha(e)$. Например, $\alpha(\bar{e}) = \alpha(e)$ для действия T^2 на S^4 из примера 5.2.2.

ЛЕММА 5.5.2. *Для любых $\eta \in H_T^*(M)$ и $e \in E(Q)$ разность $r_{i(e)}(\eta) - r_{t(e)}(\eta)$ делится на $\alpha(e)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(M) & \longrightarrow & H_T^*(i(e)) \oplus H_T^*(t(e)) = H^*(BT) \oplus H^*(BT) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{T_e}^*(M_e) & \longrightarrow & H_{T_e}^*(i(e)) \oplus H_{T_e}^*(t(e)) = H^*(BT_e) \oplus H^*(BT_e) \end{array} .$$

Так как $H_{T_e}^*(M_e) = H^*(BT_e) \otimes H^*(M_e)$, две компоненты образа η в $H^*(BT_e) \oplus H^*(BT_e)$ совпадают. Из коммутативности диаграммы вытекает, что ограничения элементов $r_{i(e)}(\eta)$ и $r_{t(e)}(\eta)$ на $H^*(BT_e)$ совпадают. Но ядро отображения $H^*(BT) \rightarrow H^*(BT_e)$ есть в точности идеал, порождённый элементом $\alpha(e)$. \square

Прообраз $M_G := \pi^{-1}(G)$ произвольной грани $G \subset Q$ коразмерности k является замкнутым T -подмногообразием в M . Это подмногообразие является связной компонентой пересечения некоторых k характеристических подмногообразий. Полиориентация многообразия M задаёт ориентацию подмногообразия M_G . Поэтому определён гомоморфизм Гизина $H_T^0(M_G) \rightarrow H_T^{2k}(M)$. Обозначим образ единицы при этом гомоморфизме через τ_G . Элемент τ_G можно рассматривать как класс, «двойственный по Пуанкаре» к M_G в эквивариантных когомологиях. Образ ограничения элемента $\tau_G \in H_T^{2k}(M)$ на $H_T^{2k}(M_G)$ совпадает с эквивариантным классом Эйлера нормального расслоения $\nu(M_G \subset M)$ и $r_v(\tau_G) = 0$ для $v \notin (M_G)^T$. Из (5.5) вытекает, что

$$(5.6) \quad r_v(\tau_G) = \begin{cases} \prod_{i(e)=v, e \in G} \alpha(e), & \text{если } v \in (M_G)^T; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим факторкольцо

$$\widehat{H}_T^*(M) := H_T^*(M)/H^*(BT)\text{-кручения.}$$

Отображение ограничения r из (5.4) индуцирует мономорфизм $\widehat{H}_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T)$, который мы также будем обозначать r . В частности, $\tau_G = 0$ в $\widehat{H}_T^*(M)$, если M_G не содержит T -неподвижных точек. Следующая лемма показывает, что соотношение из определения 5.4.5 имеет место в кольце $\widehat{H}_T^*(M)$ (после замены v_G на τ_G).

ЛЕММА 5.5.3. *Для любых двух граней G и H пространства Q в кольце $\widehat{H}_T^*(M)$ имеет место соотношение*

$$\tau_G \tau_H = \tau_{G \vee H} \cdot \sum_{E \in G \cap H} \tau_E,$$

где мы положили $\tau_\emptyset = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение $r: \widehat{H}_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T)$ мономорфно, достаточно доказать, что для любой неподвижной точки $v \in M^T$ отображение r_v переводит обе части соотношения в один и тот же элемент.

Пусть $v \in M^T$. Для любой грани $G \ni v$ положим

$$N_v(G) := \{e \in E(Q) : i(e) = v, e \notin G\},$$

что можно рассматривать как набор направлений «трансверсальных» к G в точке v . Тогда мы можем переписать тождество (5.6) следующим образом:

$$(5.7) \quad r_v(\tau_G) = \prod_{e \in N_v(G)} \alpha(e),$$

где правая часть считается равной 1 при $N_v(G) = \emptyset$ и равной 0 при $v \notin G$. Если $v \notin G \cap H$, то $v \notin E$ для любой связной компоненты E пересечения $G \cap H$, а также $v \notin G$ или $v \notin H$. Следовательно, обе части соотношения из утверждения леммы переходят в нуль по действию r_v . Если же $v \in G \cap H$, то

$$N_v(G) \cup N_v(H) = N_v(G \vee H) \cup N_v(E),$$

где E — связная компонента пересечения $G \cap H$, содержащая v , и $v \notin E'$ для любой другой связной компоненты $E' \in G \cap H$. Отсюда и из (5.7) вытекает, что обе части соотношения переходят в один элемент под действием r_v . \square

Из леммы 5.5.3 вытекает, что отображение

$$\mathbb{Z}[v_G : G \text{ — некоторая грань}] \rightarrow H_T^*(M),$$

$$v_G \mapsto \tau_G$$

индуцирует гомоморфизм

$$(5.8) \quad \varphi: \mathbb{Z}[Q] \rightarrow \widehat{H}_T^*(M).$$

ЛЕММА 5.5.4. *Если каждая грань в Q содержит некоторую вершину, то отображение φ является мономорфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $s = r \circ \varphi$, где s — отображение из леммы 5.4.9. Так как s — мономорфизм, φ также является мономорфизмом. \square

5.5.2. Кольцо эквивариантных когомологий T -многообразия. Следующая теорема показывает, что если нечётномерные когомологии T -многообразия обращаются в нуль, то условие из леммы 5.5.2 в точности выделяет образ кольца эквивариантных когомологий при отображении ограничения.

ТЕОРЕМА 5.5.5 ([GKM98] или [GS99]). Пусть $H^{odd}(M) = 0$, и для любой точки $v \in M^T$ задан некоторый элемент $\eta_v \in H^*(BT)$. Тогда $(\eta_v) \in \bigoplus_{v \in M^T} H^*(BT)$ принадлежит образу отображения ограничения r из (5.4) тогда и только тогда, когда $\eta_{i(e)} - \eta_{t(e)}$ делится на $\alpha(e)$ для любого $e \in E(Q)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5.6. Если $H^{odd}(M) = 0$, то 1-остов каждой грани в Q (включая само Q) связан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M связно, образ $r(H_T^0(M))$ одномерен. Тогда из теоремы 5.5.5 вытекает, что 1-остов Q связан. Аналогично, 1-остов произвольной грани G в Q связан, так как $\pi^{-1}(G)$ также является локально стандартным T -многообразием с нулевыми нечётномерными когомологиями (см. лемму 5.1.3). \square

Для данной грани $G \subset Q$ обозначим через $I(G)$ идеал в $H^*(BT)$, порождённый элементами $\alpha(e)$ с $e \in G$.

ЛЕММА 5.5.7. Предположим, что 1-остов грани G связан, и пусть задан элемент $\eta \in H_T^*(M)$. Если $r_v(\eta) \notin I(G)$ для некоторой вершины $v \in G$, то $r_w(\eta) \notin I(G)$ для любой вершины $w \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим $r_w(\eta) \in I(G)$ для некоторой вершины $w \in G$. Тогда $r_u(\eta) \in I(G)$ для любой вершины $u \in G$, соединённой с w ребром $f \subset G$, т.к. $r_w(\eta) - r_u(\eta)$ делится на $\alpha(f)$ согласно лемме 5.5.2. Значит, ввиду связности 1-остова грани G , $\eta(w) \in I(G)$ для любой вершины $w \in G$. Противоречие. \square

ЛЕММА 5.5.8. Если 1-остов любой грани в Q связан, то $\widehat{H}_T^*(M)$ как $H^*(BT)$ -модуль порождается элементами τ_G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in H_T^{>0}(M)$ — ненулевой элемент. Положим

$$Z(\eta) := \{v \in M^T : r_v(\eta) = 0\}.$$

Выберем $v \in M^T$, такую, что $v \notin Z(\eta)$. Тогда $r_v(\eta)$ есть ненулевой элемент в $H^*(BT)$, и мы можем выразить его как многочлен от элементов $\{\alpha(e) : i(e) = v\}$, которые образуют базис в $H^2(BT)$. Выберем некоторый моном

$$(5.9) \quad \prod_{i(e)=v} \alpha(e)^{n_e}, \quad n_e \geq 0,$$

входящий в $r_v(\eta)$ с ненулевым коэффициентом. Пусть G — грань, образованная рёбрами e с $n_e = 0$. Тогда $r_v(\eta) \notin I(G)$, так как $r_v(\eta)$ содержит моном (5.9). Следовательно, $r_w(\eta) \notin I(G)$ (в частности, $r_w(\eta) \neq 0$) для любой вершины $w \in G$ согласно лемме 5.5.7.

С другой стороны, из (5.6) вытекает, что моном (5.9) можно записать как $r_v(u_G \tau_G)$ для некоторого $u_G \in H^*(BT)$. Положим $\eta' := \eta - u_G \tau_G \in H_T^*(M)$. Так как $r_w(\tau_G) = 0$ для любой вершины $w \notin G$, мы имеем $r_w(\eta') = r_w(\eta)$ для каждой такой вершины w . В

то же время, $r_u(\eta) \neq 0$ для $u \in G$ (см. выше). Отсюда вытекает, что $Z(\eta') \supseteq Z(\eta)$. Но количество мономов в $r_v(\eta')$ строго меньше, чем в $r_v(\eta)$. Следовательно, вычитая из η некоторую линейную комбинацию элементов τ_G с коэффициентами в $H^*(BT)$, мы получим элемент λ , для которого $Z(\lambda)$ содержит $Z(\eta)$ в качестве собственного подмножества. Повторяя эту процедуру, мы в конце получим элемент, ограничение которого на каждую вершину есть нуль. Так как отображение ограничение $r: \widehat{H}_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T)$ инъективно, такой элемент равен нулю, что завершает доказательство. \square

ТЕОРЕМА 5.5.9. *Пусть M — локально стандартное T -многообразие, и Q — его пространство орбит. Если любая грань в Q содержит вершину и её 1-остов связан, то мономорфизм $\varphi: \mathbb{Z}[Q] \rightarrow \widehat{H}_T^*(M)$ из (5.8) является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства сюръективности φ достаточно показать, что кольцо $\widehat{H}_T^*(M)$ порождается элементами τ_G . В силу предложения 5.2.1, группа $\widehat{H}_T^2(M)$ порождена элементами τ_{Q_i} , соответствующими гиперграням Q_i . (В предложении 5.2.1 элемент τ_{Q_i} обозначался через τ_i .) В частности, любой элемент из $H^2(BT) \subset \widehat{H}_T^*(M)$ может быть записан как линейная комбинация элементов τ_{Q_i} с целыми коэффициентами. Следовательно, любой элемент из $H^*(BT)$ выражается как многочлен от элементов τ_{Q_i} . Теперь утверждение вытекает из леммы 5.5.8. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.5.10. *Пусть M — локально стандартное T -многообразие с $H^{odd}(M) = 0$. Тогда отображение $\varphi: \mathbb{Z}[Q] \rightarrow H_T^*(M)$ из (5.8) является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $H^{odd}(M) = 0$, то все условия теоремы 5.5.9 выполнены, см. следствие 5.5.6. Кроме того, $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем согласно лемме 5.1.2, т.е. $\widehat{H}_T^*(M) = H_T^*(M)$. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.5.11 ([Ma99, Prop. 3.4]). *Пусть M — локально стандартное T -многообразие, для которого кольцо $H^*(M)$ порождается двумерными классами. Тогда $H_T^*(M) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, где \mathcal{K} — нерв покрытия границы пространства орбит Q гипергранями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.2.3, все пересечения гиперграней связны. Следовательно, частично упорядоченное множество граней пространства Q изоморфно множеству граней нерва \mathcal{K} , и кольцо $\mathbb{Z}[Q]$ есть кольцо граней симплициального комплекса. \square

Обозначим через \mathcal{S} частично упорядоченное множество граней пространства Q относительно обратного включения; тогда по определению $\mathbb{Z}[\mathcal{S}] = \mathbb{Z}[Q]$. Следующее утверждение даёт характеристику локально стандартных T -многообразий с нулевыми нечётномерными когомологиями в терминах \mathcal{S} .

ТЕОРЕМА 5.5.12. Пусть M — локально стандартное T -многообразие с пространством орбит Q , и пусть \mathcal{S} — соответствующее частично упорядоченное множество. Тогда $H^{odd}(M) = 0$ если и только если выполнены следующие два условия:

- 1) кольцо $H_T^*(M)$ изоморфно $\mathbb{Z}[\mathcal{S}] (= \mathbb{Z}[Q])$;
- 2) $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея.

Более того, кольцо $H^*(M)$ порождается двумерными классами тогда и только тогда, когда дополнительно к указанным выше условиям \mathcal{S} является частично упорядоченным множеством граней некоторого симплицциального комплекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $H^{odd}(M) = 0$, то $H_T^*(M) \cong \mathbb{Z}[Q] = \mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ в силу следствия 5.5.10, а $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея, так как $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем по лемме 5.1.2.

Теперь докажем, что $H^{odd}(M) = 0$ при выполнении указанных двух условий. Рассмотрим проекцию $\lambda: ET \times_T M \rightarrow BT$ и композицию отображений

$$H^*(BT) \xrightarrow{\lambda^*} H_T^*(M) \xrightarrow{r} \bigoplus_{p \in M^T} H^*(BT).$$

Её ограничение на каждое слагаемое является тождественным отображением, т.е. $r \circ \lambda^*$ — диагональное отображение. Тогда из леммы 2.6.3 вытекает, что $\lambda^*(t_1), \dots, \lambda^*(t_n)$ является линейной системой параметров. По предположению, кольцо $H_T^*(M)$ изоморфно $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ и является кольцом Коэна–Маколея, а значит любая линейная система параметров является регулярной последовательностью (предложение II.9). Следовательно, $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем, и $H^{odd}(M) = 0$ по лемме 5.1.2.

Остаётся доказать второе утверждение. Если $H^*(M)$ порождается двумерными классами, то из леммы 5.2.3 вытекает, что \mathcal{S} совпадает с множеством граней нерва \mathcal{K} . Обратно, если \mathcal{S} совпадает с множеством граней нерва \mathcal{K} , то кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ порождается двумерными классами. Из уже доказанного первого утверждения теоремы вытекает, что $H_T^*(M) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем, а значит $H^*(M)$ получается из $H_T^*(M)$ факторизацией по идеалу. Следовательно, кольцо $H^*(M)$ также порождается двумерными классами. \square

Следующее описание кольца когомологий тор-многообразия с нулевыми нечётномерными когомологиями обобщает соответствующие результаты для полных неособых торических многообразий и квазиторических многообразий (теорема 4.5.4).

ТЕОРЕМА 5.5.13. Пусть M — локально стандартное T -многообразие с $H^{\text{odd}}(M) = 0$. Тогда имеется изоморфизм колец

$$H^*(M) \cong \mathbb{Z}[v_G : G \text{ — грань в } Q]/\mathcal{I},$$

где \mathcal{I} — идеал, порождённый следующими типами элементов:

- 1) $v_G v_H - v_{G \vee H} \sum_{E \in G \cap H} v_E$;
- 2) $\sum_{i=1}^m \langle t, a_i \rangle v_{Q_i}$ для $t \in H^2(BT)$.

Здесь Q_i — гиперплоскости, а элементы $a_i \in H_2(BT)$ определены в предложении 5.2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как спектральная последовательность Серра расслоения $\rho: ET \times_T M \rightarrow BT$ вырождается в члене E_2 , отображение $H_T^*(M) \rightarrow H^*(M)$ эпиморфно и его ядро есть идеал, порождённый всеми элементами $\rho^*(t)$, $t \in H^2(BT)$. Таким образом, утверждение вытекает из предложения 5.2.1 и следствия 5.5.10. \square

ПРИМЕР 5.5.14. Кольцо эквивариантных когомологий T -многообразия S^4 из примера 5.4.6 изоморфно кольцу $\mathbb{Z}[Q]$, описанному там же. Кольцо обычных когомологий получается дополнительной факторизацией по идеалу, порождённому элементами v_G и v_H .

Следующее выражение для чисел Бетти T -многообразий обобщает соответствующее утверждение для квазиторических многообразий (предложение 4.5.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5.15. Пусть M — локально стандартное T -многообразие с $H^{\text{odd}}(M) = 0$ и пространством орбит Q . Тогда

$$\text{rank } H^{2i}(M) = h_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где h_i — компоненты h -вектора $\mathbf{h}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H_T^*(M) = H^*(BT) \otimes H^*(M)$ (аддитивно, лемма 5.1.2), а $H^*(BT)$ является кольцом многочленов от n переменных степени два, имеется следующая формула для ряда Пуанкаре:

$$F(H_T^*(M); t) = \frac{\sum_{i=0}^n \text{rank } H^{2i}(M) t^{2i}}{(1-t^2)^n}.$$

С другой стороны, ряд Пуанкаре кольца граней $\mathbb{Z}[Q]$ описан в теореме 2.5.9, и эти два ряда должны совпадать в силу теоремы 5.5.9. Отсюда вытекает требуемое утверждение. \square

5.6. T -многообразия над гомологическими многогранниками

Используя результаты предыдущего раздела об эквивариантных когомологиях, мы можем описывать взаимосвязь между когомологиями многообразия локально стандартного T -многообразия

M и когомологиями его пространства орбит Q . Основным результатом этого раздела является теорема 5.6.5, которая даёт когомологическую характеристику T -многообразий, пространства орбит которых являются гомологическими многогранниками. Используя этот результат, в следующем разделе мы докажем, что Q является граниациклическим тогда и только тогда, когда $H^{odd}(M) = 0$.

ЛЕММА 5.6.1. *Если $H^{odd}(M) = 0$, то $H^1(Q; \mathbf{k}) = 0$ для любого кольца коэффициентов \mathbf{k} . В частности, Q ориентируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность Лере для отображения проектирования $ET \times_T M \rightarrow M/T = Q$ на второй сомножитель. Член E_2 имеет вид $E_2^{p,q} = H^p(M/T; \mathcal{H}^q)$, где \mathcal{H}^q — пучок с ростком $H^q(BT_x; \mathbf{k})$ над точкой $x \in M/T$, и спектральная последовательность сходится к $H_T^*(M; \mathbf{k})$. Так как T -действие на M локально стандартно, стационарная подгруппа T_x точки $x \in M$ является подтором, так что $H^{odd}(BT_x; \mathbf{k}) = 0$. Следовательно, $\mathcal{H}^{odd} = 0$, в частности, $\mathcal{H}^1 = 0$. Кроме того, $\mathcal{H}^0 = \mathbf{k}$ (постоянный пучок). Следовательно, $E_2^{0,1} = 0$ и $E_2^{1,0} = H^1(M/T; \mathbf{k})$, откуда $H^1(M/T; \mathbf{k}) \cong H_T^1(M; \mathbf{k})$. С другой стороны, так как $H^{odd}(M) = 0$ по предположению, $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем (лемма 5.1.2). Из теоремы универсальных коэффициентов вытекает, что $H_T^{odd}(M; \mathbf{k}) = 0$. В частности, $H_T^1(M; \mathbf{k}) = 0$. \square

ЛЕММА 5.6.2. *При выполнении любого из следующих условий:*

- 1) Q является гомологическим многогранником,
- 2) кольцо $H^*(M)$ порождается двумерными классами,

частично упорядоченное множество \mathcal{S} граней в Q (относительно обратного включения) является множеством граней горенштейнова симплицциального комплекса. В частности, $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея, а геометрическая реализация $|\mathcal{S}|$ имеет гомологии как у $(n-1)$ -сферы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом из условий 1) или 2) все кратные пересечения гиперграней из Q являются связными, так что \mathcal{S} является множеством граней нерва \mathcal{K} покрытия границы ∂Q гипергранями. Далее мы отождествляем \mathcal{S} с \mathcal{K} .

Вначале докажем, что \mathcal{K} является горенштейновым* при выполнении условия 1). Согласно теореме 2.4.2, достаточно проверить, что линк $\text{lk } \sigma$ каждого симплекса из \mathcal{K} имеет гомологии как у сферы размерности $\dim \text{lk } \sigma = n - 2 - \dim \sigma$. Если $\sigma = \emptyset$, то $\text{lk } \sigma$ совпадает с самим \mathcal{K} . Его гомологии изоморфны гомологиям границы ∂Q , так как \mathcal{K} есть нерв покрытия границы, а Q является гомологическим многогранником. Если $\sigma \neq \emptyset$, то $\text{lk } \sigma$ есть нерв покрытия границы некоторой грани из Q . Так как каждая грань в Q снова является гомологическим многогранником, $\text{lk } \sigma$ имеет гомологии как у сферы размерности $\dim \text{lk } \sigma$.

Теперь докажем, что \mathcal{K} является горенштейновым* при выполнении условия 2). Из [St96, Th. II.5.1] вытекает, что достаточно показать, что

- а) \mathcal{K} является комплексом Коэна–Маколея;
- б) каждый $(n - 2)$ -мерный симплекс содержится в точности в двух $(n - 1)$ -мерных симплексах;
- в) $\chi(\mathcal{K}) = \chi(S^{n-1})$.

Условие а) вытекает из теоремы теоремы 5.5.12. По определению, каждый k -мерный симплекс из \mathcal{K} соответствует набору из $k + 1$ характеристических подмногообразий с непустым пересечением. Согласно лемме 5.2.3, пересечение любых n характеристических подмногообразий либо пусто, либо состоит из одной T -неподвижной точки. Это означает, что $(n - 1)$ -симплексы в \mathcal{K} находятся во взаимно однозначном соответствии с T -неподвижными точками в M . Далее, каждый $(n - 2)$ -симплекс в \mathcal{K} соответствует непустому пересечению $n - 1$ характеристических подмногообразий в M . Это пересечение связно по лемме 5.2.3, и на нём нетривиально действует тор с неподвижной точкой, так что оно является 2-сферой. Каждая 2-сфера содержит две T -неподвижных точки, откуда вытекает б). Наконец, в) эквивалентно соотношению Дена–Соммервилля $h_0 = h_n$, которое имеет место, т.к. $h_n = \text{rank } H^{2n}(M) = 1$. \square

Рассмотрим порядковый комплекс $\text{ord}(\mathcal{S})$ (см. пример 1.5.4) и обозначим через C его геометрическую реализацию. Тогда C является конусом над пространством $|\mathcal{S}|$. Для каждого симплекса $\sigma \in \text{ord}(\mathcal{S})$ обозначим через F_σ геометрическую реализацию симплицеального комплекса $\{\tau \in \text{ord}(\mathcal{S}) : \sigma \subset \tau\}$. Если σ есть симплекс размерности $(k - 1)$, то мы скажем, что F_σ является *гранью* в C коразмерности k . Тогда каждая гипергрань (грань коразмерности один) отождествляется со звездой некоторой вершины комплекса $\text{ord}(\mathcal{S})$. Каждая грань коразмерности k является связной компонентой пересечения k гиперграней, и будучи конусом является ациклической. В случае, когда \mathcal{S} является множеством граней симплицеального комплекса, пространство C с указанным разбиением на грани рассматривалось в [DJ91, p. 428] под названием *простого многогранного комплекса*.

Пусть C имеет t гиперграней, и предположим, что задано отображение λ как в (5.2), удовлетворяющее условию неособости там же. (Как обычно, существование такого отображения λ эквивалентно наличию линейной системы параметров в кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$.) Применив конструкцию (5.3) с заменой Q на C , мы получим T -пространство $M(C, \lambda)$. Так как C , вообще говоря, не является многообразием с углами, пространство $M(C, \lambda)$ может не быть многообразием. Тем не менее, имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6.3 ([DJ91, Th. 4.8]). *Кольцо $H_T^*(M(C, \lambda); \mathbb{Z})$ изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$.*

Для произвольного регулярного многообразия с углами Q кольцо эквивариантных когомологий канонической модели $M(Q, \lambda)$ может не быть изоморфно кольцу $\mathbb{Z}[Q]$, так как грани в Q могут иметь сложную топологию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6.4. *Пусть Q — регулярное многообразие с углами, а C — построенное выше пространство, ассоциированное с частично упорядоченным множеством \mathcal{S} граней из Q . Тогда имеется отображение $Q \rightarrow C$, сохраняющее структуру граней, которое покрывается эквивариантным отображением*

$$\Phi: M(Q, \lambda) \rightarrow M(C, \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $Q \rightarrow C$ строится индуктивно, начиная с отождествления множеств вершин, а затем последовательно продолжая отображение на грани высшей размерности. Так как каждая грань в C является конусом, препятствия к таким продолжениям отсутствуют. По построению, такое отображение сохраняет структуру граней, а значит покрывается отображением факторпространств

$$M(Q, \lambda) = T \times Q / \sim \longrightarrow T \times C / \sim = M(C, \lambda),$$

см. (5.3). □

Теперь перейдём к доказательству основного результата.

ТЕОРЕМА 5.6.5. *Кольцо когомологий локально стандартного T -многообразия порождено двумерными классами тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гомологическим многогранником.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что Q — гомологический многогранник. Так как $H^2(Q) = 0$, многообразие M гомеоморфно канонической модели $M(Q, \lambda)$ (лемма 5.3.3); так что мы можем рассматривать отображение Φ из предложения 5.6.4 как отображение из M в $M_C := M(C, \lambda)$. Пусть $M_{C,i}$, $1 \leq i \leq m$, — характеристические подкомплексы в M_C , определяемые аналогично характеристическим подмногообразиям в M . Так как действие тора свободно на $M_C \setminus \cup_i M_{C,i}$ и $M \setminus \cup_i M_i$, мы имеем

$$H_T^*(M_C, \cup_i M_{C,i}) \cong H^*(C, |\mathcal{S}|), \quad H_T^*(M, \cup_i M_i) \cong H^*(Q, \partial Q).$$

Следовательно, отображение Φ индуцирует отображение точных последовательностей

$$(5.10) \quad \begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^*(C, |\mathcal{S}|) & \longrightarrow & H_T^*(M_C) & \longrightarrow & H_T^*(\cup_i M_{C,i}) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow \Phi^* & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^*(Q, \partial Q) & \longrightarrow & H_T^*(M) & \longrightarrow & H_T^*(\cup_i M_i) & \longrightarrow \end{array}$$

Каждое подмногообразие M_i является локально стандартным многообразием над гомологическим многогранником Q_i . Используя индукцию и точную последовательность Майера–Виеториса, мы можем считать, что отображение $H_T^*(\cup_i M_{C,i}) \rightarrow H_T^*(\cup_i M_i)$ из предыдущей диаграммы является изоморфизмом. В силу леммы 5.6.2, $|\mathcal{S}|$ имеет гомологии как у $(n-1)$ -сферы. Так как C является конусом над $|\mathcal{S}|$, мы имеем $H^*(C, |\mathcal{S}|) \cong H^*(D^n, S^{n-1})$. Кроме того, $H^*(Q, \partial Q) \cong H^*(D^n, S^{n-1})$, т.к. Q является гомологическим многогранником. Используя эти изоморфизмы и конструкцию отображения Φ , мы видим, что индуцированное отображение $H^*(C, |\mathcal{S}|) \rightarrow H^*(Q, \partial Q)$ является изоморфизмом. Тогда из 5-леммы, применённой к (5.10) вытекает, что $\Phi^*: H_T^*(M_C) \rightarrow H_T^*(M)$ также является изоморфизмом, откуда и из предложения 5.6.3 следует, что $H_T^*(M) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{S}]$. Кроме того, $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея в силу леммы 5.6.2. Таким образом, оба условия теоремы 5.5.12 выполнены, и кольцо $H^*(M)$ порождается двумерными классами.

Предположим теперь, что кольцо $H^*(M)$ порождается двумерными классами. Так как все кратные пересечения характеристических подмногообразий связны, а их кольца когомологий порождаются двумерными классами (лемма 5.2.3), мы можем предположить по индукции, что все собственные грани в Q являются гомологическими многогранниками. В частности, все собственные грани ациклически, откуда $H^*(\partial Q) \cong H^*(|\mathcal{S}|)$. Отсюда и из леммы 5.6.2 вытекает, что

$$(5.11) \quad H^*(\partial Q) \cong H^*(S^{n-1}).$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $H^2(Q) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ утверждение очевидно. Если $n = 2$, то Q является поверхностью с границей, и мы снова имеем $H^2(Q) = 0$. Пусть теперь $n \geq 3$. Рассмотрим точную когомологическую последовательность пары $(M, \cup_i M_i)$ (она записана в нижней строке диаграммы (5.10)). Все стрелки являются отображениями $H^*(BT)$ -модулей. В силу леммы 5.1.2, $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем. С другой стороны, группа $H^*(Q, \partial Q)$ конечно порождена над \mathbb{Z} и поэтому является $H^*(BT)$ -кручением. Таким образом, вся последовательность расщепляется в короткие точные сегменты:

$$(5.12) \quad 0 \rightarrow H_T^k(M) \rightarrow H_T^k(\cup_i M_i) \rightarrow H^{k+1}(Q, \partial Q) \rightarrow 0$$

Положив $k = 1$, мы получаем

$$H_T^1(\cup_i M_i) \cong H^2(Q, \partial Q).$$

Рассуждение из доказательства леммы 5.6.1 показывает, что

$$H_T^1(\cup_i M_i) = H^1((\cup_i M_i)/T) = H^1(\partial Q).$$

Рассмотрев проекцию $(ET \times M)/T \rightarrow M/T = Q$, мы получаем что связывающий гомоморфизм $H^1(\partial Q) \rightarrow H^2(Q, \partial Q)$ из точной последовательности пары $(Q, \partial Q)$ является изоморфизмом. Следовательно, имеется следующий фрагмент точной последовательности:

$$0 \rightarrow H^2(Q) \rightarrow H^2(\partial Q) \rightarrow H^3(Q, \partial Q).$$

Так как $H^2(\partial Q) \cong H^2(S^{n-1})$ в силу (5.11), мы получаем $H^2(Q) = 0$ при $n \geq 4$. При $n = 3$ последняя стрелка в предыдущей последовательности является изоморфизмом ввиду ориентируемости Q (лемма 5.6.1), и мы снова получаем $H^2(Q) = 0$. \square

Теперь вернёмся к доказательству теоремы.

Так как $H^2(Q) = 0$, мы имеем отображение $\Phi: M \rightarrow M_C(\lambda)$, как и в доказательстве первой части теоремы. Рассмотрим диаграмму (5.10) с коэффициентами в \mathbf{k} , где $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$ или \mathbb{Z}/p с простым p . Используя индукцию и последовательность Майера–Вьеториса, мы получаем, что отображение $H_T^*(\cup_i M_{C,i}; \mathbf{k}) \rightarrow H_T^*(\cup_i M_i; \mathbf{k})$ является изоморфизмом. В силу леммы 5.6.2, $H^*(C, |\mathcal{S}|; \mathbf{k}) \cong H^*(D^n, S^{n-1}; \mathbf{k})$, а из конструкции отображения Φ вытекает, что индуцированное им отображение

$$(5.13) \quad H^*(D^n, S^{n-1}; \mathbf{k}) \cong H^*(C, |\mathcal{S}|; \mathbf{k}) \rightarrow H^*(Q, \partial Q; \mathbf{k})$$

является изоморфизмом в размерности n , а значит мономорфизмом во всех размерностях. Применяя 5-лемму к (5.10), мы получаем, что $\Phi^*: H_T^*(M_C; \mathbf{k}) \rightarrow H_T^*(M; \mathbf{k})$ является мономорфизмом. Из следствия 5.5.10 и предложения 5.6.3 вытекает, что $H_T^*(M) \cong \mathbb{Z}[Q] \cong H_T^*(M_C)$. Поэтому $H_T^*(M_C; \mathbf{k})$ и $H_T^*(M; \mathbf{k})$ имеют одинаковые размерности градуированных компонент. Следовательно, мономорфизм $\Phi^*: H_T^*(M_C; \mathbf{k}) \rightarrow H_T^*(M; \mathbf{k})$ является изоморфизмом. Применяя снова 5-лемму к диаграмме (5.10) (с коэффициентами в \mathbf{k}), мы получаем, что отображение (5.13) является изоморфизмом. Следовательно, $H^*(Q, \partial Q; \mathbf{k}) \cong H^*(D^n, S^{n-1}; \mathbf{k})$ для любого \mathbf{k} , откуда $H^*(Q, \partial Q) \cong H^*(D^n, S^{n-1})$. Из этого изоморфизма и (5.11) вытекает ацикличность Q . \square

Теорема 5.6.5 в частности показывает, что если кольцо когомологий локально стандартного T -многообразия M порождено двумерными классами, то комбинаторная структура пространства орбит Q полностью описывается его нервом — симплициальным комплексом. Следующее утверждение полностью описывает симплициальные комплексы, возникающие таким образом.

ТЕОРЕМА 5.6.6. *Симплициальный комплекс \mathcal{K} является нервом локально-стандартного T -многообразия M , кольцо когомологий которого порождено двумерными классами, тогда и только тогда, когда \mathcal{K} является горенштейновым*, и его кольцо граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ допускает линейную систему параметров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $H^*(M)$ порождено двумерными классами, то комплекс \mathcal{K} является горенштейновым* в силу леммы 5.6.2. В частности, $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ является кольцом Коэна–Маколея. Более того, $H_T^*(M) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ в силу следствия 5.5.10. Так как $H_T^*(M) \cong H^*(BT) \otimes H^*(M)$ как $H^*(BT)$ -модуль (лемма 5.1.2), кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ допускает линейную систему параметров.

Пусть теперь кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ горенштейново* с линейной системой параметров. Согласно [Da83, Th. 12.2], существует гомологический многогранник Q с нервом \mathcal{K} . Так как кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ допускает линейную систему параметров, оно является свободным модулем над кольцом многочленов $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$. Таким образом, каждый элемент $t \in H^2(BT) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ представляется в виде

$$t = \sum_{i=1}^m a_i(t)v_i,$$

где $a_i(t) \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $a_i(t)$ линейно зависит от t , так что a_i можно рассматривать как элемент двойственного пространства $H_2(BT)$ (см. предложение 5.2.1). Теперь введём отображение λ (5.2), переводящее Q_i в a_i . Тогда $M := M(Q, \lambda)$ (см. (5.3)) является локально стандартным T -многообразием, и его кольцо когомологий порождается двумерными классами в силу теоремы 5.6.5. \square

5.7. T -многообразия над граниациклическими многообразиями с углами

В этом разделе мы доказываем наш второй основной результат о связи когомологий T -многообразий и гомологий их пространств орбит — теорему 5.7.5, согласно которой пространство орбит локально стандартного T -многообразия M граниациклично тогда и только тогда, когда $H^{odd}(M) = 0$. Приводимое нами доказательство сводит этот результат к теореме 5.6.5 о T -многообразиях над гомологическими многогранниками, используя операции *раздутия* и алгебраические результаты раздела 2.6.

Пусть M — локально стандартное T -многообразие и $\pi: M \rightarrow Q$ — его проекция на пространство орбит.

КОНСТРУКЦИЯ 5.7.1 (Раздутие T -многообразия). Рассмотрим $M_G = \pi^{-1}(G)$ — подмногообразие, соответствующее грани $G \subset Q$ и его нормальное расслоение $\nu_G := \nu(M_G \subset M)$. Так как M_G является трансверсальным пересечением характеристических подмногообразий, ν_G является суммой Уитни нормальных расслоений к этим подмногообразиям. Таким образом, полиориентация на M задаёт структуру комплексного T -расслоения на ν_G .

Рассмотрим теперь T -расслоение $\nu_G \oplus \underline{\mathbb{C}}$, где действие тора на $\underline{\mathbb{C}}$ тривиально. Его проективизация $\mathbb{C}P(\nu_G \oplus \underline{\mathbb{C}})$ является локально стандартным T -многообразием, которое содержит M_G в качестве

T -инвариантного подмногообразия, причём T -действие выглядит одинаково в окрестностях M_G в M и в $\mathbb{C}P(\nu_G \oplus \mathbb{C})$. Следовательно, мы можем удалить малые T -инвариантные окрестности M_G из M и из $\mathbb{C}P(\nu_G \oplus \mathbb{C})$ и отождествить полученные T -многообразия по их границам, предварительно сменив ориентацию у $\mathbb{C}P(\nu_G \oplus \mathbb{C})$. В результате мы получим локально стандартное T -многообразие \widetilde{M} , которое называется *раздутием* многообразия M вдоль подмногообразия M_G .

Имеется отображение «сдутия» $\widetilde{M} \rightarrow M$, которое стягивает пространство расслоения $\mathbb{C}P(\nu_G \oplus \mathbb{C})$ на M_G и тождественно на оставшейся части \widetilde{M} .

Пространство орбит \widetilde{Q} многообразия \widetilde{M} получается из Q «срезанием» грани G . В результате \widetilde{Q} приобретает новую гипергрань, которую мы обозначим \widetilde{G} . Симплициально клеточный комплекс, двойственный к \widetilde{Q} получается из комплекса, двойственного к Q , в результате применения звёздного подразбиения грани, двойственной к G (см. определение 2.6.4).

ПРИМЕР 5.7.2. Если G является вершиной (0-мерной гранью), то раздутие \widetilde{M} можно отождествить с эквивариантной связной суммой $M \# \overline{\mathbb{C}P^n}$ (см. раздел 4.8.3).

ЛЕММА 5.7.3. *Пространство орбит \widetilde{Q} является граниациклическим тогда и только тогда, когда Q граниациклично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все новые грани, которые получаются после «срезания» грани G с Q содержатся в новой гипергранни $\widetilde{G} \subset \widetilde{Q}$. Отображения сдутия $\widetilde{M} \rightarrow M$ индуцирует проекцию $\widetilde{Q} \rightarrow Q$, которая стягивает \widetilde{G} на G . Грань G является деформационным ретрактом гипергранни \widetilde{G} . Следовательно, G ациклическа тогда и только тогда, когда \widetilde{G} ациклическа. То же касается и всех новых граней, содержащихся в \widetilde{Q} — все они стягиваются на некоторые грани в Q . Кроме того, само пространство Q является деформационным ретрактом пространства \widetilde{Q} . Следовательно, \widetilde{Q} ациклично тогда и только тогда, когда ациклично Q . \square

ЛЕММА 5.7.4. $H^{odd}(\widetilde{M}) = 0$ тогда и только тогда, когда $H^{odd}(M) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $H^{odd}(M) = 0$. Подмногообразии $M_G \subset M$ раздувается до подмногообразия коразмерности два $\widetilde{M}_G \subset \widetilde{M}$, которое можно отождествить с проективизацией $\mathbb{C}P(\nu_G)$. Так как \widetilde{M}_G является пространством проективизации комплексного векторного расслоения над M_G , его когомологии являются свободным $H^*(M_G)$ -модулем с образующими чётных размерностей (см., например, [St68, Гл. V]). Если $H^{odd}(M) = 0$, то

$H^{odd}(M_G) = 0$ по лемме 5.1.3, а значит $H^{odd}(\widetilde{M}_{\widetilde{G}}) = 0$. Рассмотрим отображение сдвиг $\widetilde{M} \rightarrow M$ и диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} H^{k-1}(M_G) & \longrightarrow & H^k(M, M_G) & \longrightarrow & H^k(M) & \longrightarrow & H^k(M_G) \\ \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{k-1}(\widetilde{M}_{\widetilde{G}}) & \longrightarrow & H^k(\widetilde{M}, \widetilde{M}_{\widetilde{G}}) & \longrightarrow & H^k(\widetilde{M}) & \longrightarrow & H^k(\widetilde{M}_{\widetilde{G}}), \end{array}$$

где вторая вертикальная стрелка является изоморфизмом по свойству вырезания. Пусть теперь k нечётно. Если $H^{odd}(M) = 0$, то отображение $H^{k-1}(M_G) \rightarrow H^k(M, M_G)$ является эпиморфизмом. Тогда из рассмотрения диаграммы вытекает, что $H^{k-1}(\widetilde{M}_{\widetilde{G}}) \rightarrow H^k(\widetilde{M}, \widetilde{M}_{\widetilde{G}})$ также является эпиморфизмом. Так как $H^k(\widetilde{M}_{\widetilde{G}}) = 0$, мы получаем $H^k(\widetilde{M}) = 0$.

Для доказательства обратного утверждения мы воспользуемся алгебраическими результатами из раздела 2.6. Предположим, что $H^{odd}(\widetilde{M}) = 0$. Пусть \mathcal{S} — симплициальное частично упорядоченное множество, соответствующее многообразию с углами Q , а $\widetilde{\mathcal{S}}$ соответствует \widetilde{Q} . Заметим, что $\widetilde{\mathcal{S}}$ получается из \mathcal{S} звёздным подразбиением относительно симплекса, соответствующего грани G . Тогда $\mathbb{Z}[\widetilde{\mathcal{S}}]$ является кольцом Коэна–Маколея согласно теореме 5.5.12. Мы утверждаем, что $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ также является кольцом Коэна–Маколея, т.е. имеет место обратное утверждение к лемме 2.6.8 б). Действительно, из теоремы 2.6.9 вытекает, что $\widetilde{\mathcal{S}}$ является симплициальным частично упорядоченным множеством Коэна–Маколея. Выберем симплициальный комплекс \mathcal{K} , который является общим подразбиением для симплициально клеточных комплексов $\widetilde{\mathcal{S}}$ and \mathcal{S} (например, в качестве \mathcal{K} можно взять барицентрическое подразбиение комплекса $\widetilde{\mathcal{S}}$). Тогда \mathcal{K} является комплексом Коэна–Маколея ввиду следствия 2.6.2, а значит \mathcal{S} является симплициальным частично упорядоченным множеством Коэна–Маколея. Снова применяя теорему 2.6.9, мы заключаем, что $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея. Тогда из теоремы 5.5.12 вытекает, что $H^{odd}(M) = 0$. \square

Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела.

ТЕОРЕМА 5.7.5. *Нечётномерные когомологии локально стандартного T -многообразия M обращаются в нуль тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является граниациклическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства заключается в том, чтобы свести утверждение к теореме 5.6.5 путём раздутия достаточного количества подмногообразий $M_G = \pi^{-1}(G)$. Если пространство орбит исходного тор-многообразия граниациклично, то

путём раздутий можно добиться того, что пространство орбит станет гомологическим многогранником, а значит когомологии самого многообразия будут порождаться элементами степени два.

Пусть \mathcal{S} — симплициальное частично упорядоченное множество, соответствующее Q . Так как барицентрическое подразбиение получается как последовательность звёздных подразбиений (предложение 2.6.5), путём применения соответствующих раздутий мы можем получить из M локально стандартное T -многообразие M' с пространством орбит Q' , для которого соответствующее симплициальное частично упорядоченное множество \mathcal{S}' является барицентрическим подразбиением \mathcal{S} . Мы имеем проекцию $M' \rightarrow M$, которая получается как композиция отображений сдвигания:

$$(5.14) \quad M = M_0 \longleftarrow M_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow M_k = M'.$$

Предположим, что $H^{odd}(M) = 0$. Применяя лемму 5.7.4 несколько раз, мы получим $H^{odd}(M') = 0$. По построению, все кратные пересечения граней в Q' связны, так что кольцо $H^*(M')$ порождается двумерными классами по теореме 5.5.12, и Q' является гомологическим многогранником по теореме 5.6.5. В частности, Q' граниациклично. Наконец, применяя последовательно лемму 5.7.3, мы заключаем, что Q также граниациклично.

Предположим теперь, что Q граниациклично. Применяя последовательно лемму 5.7.3, мы получаем, что Q' также граниациклично. С другой стороны, \mathcal{S}' является симплициальным комплексом, так что пересечения всех граней в Q' связны, и Q' является гомологическим многогранником. Тогда из теоремы 5.6.5 вытекает, что $H^{odd}(M') = 0$. Наконец, последовательно применяя лемму 5.7.4, мы заключаем, что $H^{odd}(M) = 0$. \square

Наконец, мы можем доказать алгебраическую теорему 2.7.4 в случае горенштейновых* симплициально клеточных комплексов, ассоциированных с локально стандартными T -многообразиями.

ТЕОРЕМА 5.7.6. *Пусть \mathcal{S} — горенштейнов* симплициально клеточный комплекс, соответствующий пространству орбит Q некоторого локально стандартного T -многообразия M , и $\mathbf{h}(\mathcal{S}) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ — его h -вектор. Предположим, что n чётно и $h_i = 0$ для некоторого i . Тогда число $h_{n/2}$ чётно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — подгруппа в T , изоморфная $(\mathbb{Z}/2)^n$. Тогда определён полный эквивариантный класс Штифеля–Уитни $w^G(M) \in H_G^*(M; \mathbb{Z}/2)$. Обозначим через τ_i образ единицы под действием гомоморфизма Гизина $H_G^0(M_i; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_G^2(M; \mathbb{Z}/2)$ в эквивариантных когомологиях. Докажем следующее вспомогательное утверждение

$$\text{ПРЕДЛОЖЕНИЕ. } w^G(M) = \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводимое рассуждение аналогично использованному в доказательстве [Ma99, Th. 3.1], где та же формула была доказана для полного эквивариантного класса Чжэня. Так как $H^{odd}(M; \mathbb{Z}/2) = 0$, а множество $M^G = M^T$ состоит из изолированных неподвижных точек, мы имеем

$$\dim H^*(M; \mathbb{Z}/2) = \chi(M) = \chi(M^T) = \chi(M^G) = \dim H^*(M^G; \mathbb{Z}/2).$$

Отсюда следует, что $H_G^*(M; \mathbb{Z}/2)$ является свободным $H^*(BG; \mathbb{Z}/2)$ -модулем (см. [Br72, Th. VII.1.6]). Из теоремы локализации вытекает, что отображение ограничения

$$(5.15) \quad H_G^*(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_G^*(M^G; \mathbb{Z}/2)$$

инъективно. Для данной точки $v \in M^G = M^T$ положим $I(v) := \{i : v \in M_i\}$. Тогда множество $I(v)$ состоит из n элементов, и касательное G -представление $\mathcal{T}_v M$ раскладывается в сумму:

$$\mathcal{T}_v M = \bigoplus_{i \in I(v)} \nu_i|_v,$$

где ν_i — нормальное расслоение к M_i в M . Отсюда вытекает, что

$$(5.16) \quad w^G(M)|_v = \prod_{i \in I(v)} w^G(\nu_i|_v).$$

Так как расслоение ν_i ориентируемо и двумерно, мы имеем $w_1^G(\nu_i) = 0$, а $w_2^G(\nu_i)$ получается приведением по модулю два из эквивариантного класса Эйлера. Следовательно, $w_2^G(\nu_i|_v) = \tau_i|_v$ при $i \in I(v)$. Кроме того, $\tau_i|_v = 0$ при $i \notin I(v)$ по свойству эквивариантного гомоморфизма Гизина. Тогда мы получаем из (5.16):

$$w^G(M)|_v = \prod_{i \in I(v)} (1 + \tau_i)|_v = \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i)|_v.$$

Теперь требуемое утверждение вытекает из инъективности отображения ограничения (5.15). \square

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Отображение $H_G^*(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Z}/2)$ переводит эквивариантный класс $w^G(M)$ в (обычный) класс Штифеля–Уитни $w(M)$ многообразия M . Так как все элементы τ_i имеют степень два, старший класс $w_{2n}(M)$ есть многочлен от элементов степени два. По предположению $\text{rank } H^i(M) = h_i(M) = 0$ для некоторого $i > 0$, откуда $w_{2n}(M) = 0$. Следовательно, эйлерова характеристика $\chi(M)$ чётна (так как она равна по модулю два значению w_{2n} на фундаментальном классе). Но $\chi(M) = \sum_{i=0}^n h_i(M)$ и $h_i(M) = h_{n-i}(M)$ в силу двойственности Пуанкаре. Итак, $h_{n/2}(M)$ при чётном n должно быть чётным. \square

5.8. Графы весов

В этом разделе мы рассмотрим другой тип комбинаторных объектов, сопоставляемых T -многообразиям и несущих информацию о топологии действия и орбитной структуре, — так называемые *графы весов* (в частном случае известные под названием *ГКМ-графов*).

При изучении квазиторических многообразий M в разделе 4.4 было построено соответствие (4.13), в силу которого ориентированному ребру простого многогранника P сопоставляется вес T -представления в касательном пространстве к неподвижной точке, соответствующей началу ребра. Это соответствие можно рассматривать как граф Γ (соответствующий 1-остову многогранника P или множеству точек в M , стационарные подгруппы которых имеют коразмерность ≤ 1) с «метками» на ориентированных рёбрах, задающими веса представлений. Мы называем такие комбинаторные объекты *графами весов*. Как вытекает из предложения 4.4.1, задание соответствия (4.13) эквивалентно заданию характеристической матрицы Λ . В то же время, известно, что комбинаторный простой многогранник полностью задаётся своим 1-остовом (см. [Zi95, Th. 3.12]). Таким образом, граф весов несёт в себе информацию, полностью эквивалентную характеристической паре (P, Λ) , и тем самым полностью определяет действие тора на M . В случае действий тора на многообразиях более общего вида, рассматриваемых в этой главе, нельзя ожидать, что граф весов (с аналогом функции 4.13) будет полностью определять действие, однако он по-прежнему представляет большой интерес.

Графы с метками на ориентированных рёбрах, соответствующими весам действия тора, рассматривались при изучении T -действий на многообразиях в работах Мусина [Му80], Хаттори и других авторов с 1970-х годов. Изучение этих графов получило существенное развитие благодаря работам Горески–Коттвица–Макферсона [GKM98] и Гиёммина–Зары [GZ99] в связи с рассмотрением симплектических многообразий с гамильтоновыми действиями тора, а также другого тесно связанного с ними класса T -многообразий, получившего известность под названием *ГКМ-многообразий*.

Гладкое компактное $2n$ -мерное многообразие M с эффективным действием тора T^k ($k \leq n$) называется *ГКМ-многообразием*, если множество неподвижных точек конечно, на M задана T^k -инвариантная почти комплексная структура, а веса представления тора в касательном пространстве к каждой неподвижной точке попарно линейно независимы. Как и в случае квазиторических многообразий, ГКМ-многообразие M можно сопоставить его

граф весов (соответствующий множеству точек в M , стационарные подгруппы которых имеют коразмерность ≤ 1). Как показано в [GKM98], многие важные топологические характеристики ГKM-многообразия M (такие как числа Бетти или кольцо эквивариантных когомологий) могут быть выражены непосредственно в терминах его графа весов. Аксиоматизация свойств графов весов ГKM-многообразий привела к чисто комбинаторному понятию *ГKM-графа* (см. [GZ99]), изучение которого приобрело самостоятельный интерес.

В настоящем разделе мы изучаем графы весов, происходящие из локально стандартных T -многообразий. Как и в случае ГKM-графов, аксиоматизация свойств графов весов таких многообразий приводит к интересному комбинаторному объекту, который мы называем *T -графом*.

T -графом называется конечный n -валентный граф Γ (без петель, но возможно с кратными рёбрами) с заданной *аксиальной функцией* на множестве $E(\Gamma)$ ориентированных рёбер графа, принимающей значения в $\text{Hom}(T, \mathbb{S}^1) = H^2(BT)$ и удовлетворяющей некоторым условиям совместности. Эти условия (описанные ниже) аналогичны соответствующим условиям для ГKM-графов, но несколько отличаются от них. Примером T -графа является граф весов локально стандартного T -многообразия с неподвижной точкой; в этом случае аксиальная функция задаёт веса представления тора в касательных пространствах к неподвижным точкам.

По аналогии с ГKM-графам можно определить *кольцо эквивариантных когомологий T -графа*, которое в случае T -графов, происходящих из локально стандартных T -многообразий, совпадает с эквивариантными когомологиями многообразия. В отличие от эквивариантных когомологий ГKM-графа, кольцо эквивариантных когомологий T -графа допускает полное описание в терминах образующих и соотношений (теорема 5.8.13). Такое описание становится возможным в результате сопоставления T -графу Γ некоторого симплициально клеточного комплекса $\mathcal{S}(\Gamma)$; тогда кольцо эквивариантных когомологий T -графа оказывается изоморфным кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$. Эта теорема продолжает серию результатов, отождествляющих эквивариантные когомологии неособого проективного торического многообразия, квазиторического многообразия [DJ91] и локально стандартного T -многообразия M (следствие 5.5.10) с кольцом граней соответствующего многогранника, симплициально-клеточного комплекса или симплициально клеточного комплекса.

Несмотря на то, что классы ГKM- и T -графов вообще говоря отличаются, в их пересечении лежит важный подкласс n -*независимых* ГKM-графов. Таким образом, наши методы и результаты о T -графах полностью применимы к этому подклассу ГKM-графов, и тем самым мы получаем частичные ответы на некоторые из вопросов о ГKM-графах, поставленных в [GZ01].

Теперь мы перейдём к изложению определений и основных результатов этого раздела.

5.8.1. Определение T -графов. Определения и конструкции этого раздела получаются несложной модификацией из конструкций работы [GZ99], где были введены понятия *ГKM-графа* и его эквивариантных когомологий.

Пусть Γ — связный n -валентный граф без петель (но, возможно, с кратными рёбрами). Обозначим через $V(\Gamma)$ множество его вершин, а через $E(\Gamma)$ множество ориентированных рёбер (так что каждое ребро входит в $E(\Gamma)$ дважды с различными ориентациями). Обозначим далее через $i(e)$ и $t(e)$ начало и конец ребра $e \in E(\Gamma)$, а через \bar{e} ребро e с обращённой ориентацией. Для данной вершины $v \in V(\Gamma)$ положим

$$E(\Gamma)_v := \{e \in E(\Gamma) \mid i(e) = v\}.$$

Набор $\theta = \{\theta_e\}$ биективных соответствий

$$\theta_e: E(\Gamma)_{i(e)} \rightarrow E(\Gamma)_{t(e)}, \quad e \in E(\Gamma),$$

называется *связностью* на Γ , если

- а) $\theta_{\bar{e}}$ есть обратное соответствие для θ_e ;
- б) $\theta_e(e) = \bar{e}$.

Каждый n -валентный граф Γ допускает $((n-1)!)^g$ различных связностей, где g — число (неориентированных) рёбер в Γ . Как и ранее, пусть T обозначает n -мерный тор. Несколько изменяя исходное определение из [GZ99], мы называем отображение

$$\alpha: E(\Gamma) \rightarrow \text{Hom}(T, S^1) = H^2(BT)$$

аксиальной функцией (ассоциированной со связностью θ), если оно удовлетворяет следующим трём условиям:

- а) $\alpha(\bar{e}) = \pm \alpha(e)$;
- б) элементы из $\alpha(E(\Gamma)_v)$ являются попарно линейно независимыми (2-независимыми) для любой вершины $v \in V(\Gamma)$;
- в) $\alpha(\theta_e(e')) \equiv \alpha(e') \pmod{\alpha(e)}$ для любых $e \in E(\Gamma)$ и $e' \in E(\Gamma)_{i(e)}$.

Мы также обозначим $T_e := \ker \alpha(e)$; это торическая подгруппа коразмерности один в T . Тогда условие в) можно переформулировать следующим образом: ограничения $\alpha(\theta_e(e'))$ и $\alpha(e')$ на $H^*(BT_e)$ совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [GZ99] в условии а) требовалось $\alpha(\bar{e}) = -\alpha(e)$. Связность θ , удовлетворяющая условию в) единственна, если элементы из $\alpha(E(\Gamma)_v)$ являются 3-независимыми [GZ99].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8.1. Скажем, что α является T -аксиальной функцией, если она n -независима, т.е. $\alpha(E(\Gamma)_v)$ является базисом в $H^2(BT)$ для любой вершины $v \in V(\Gamma)$. В этом случае тройку (Γ, α, θ) мы будем называть T -графом. Так как связность θ однозначно определяется по другими данными (см. замечание выше), мы будем опускать её в обозначениях. Далее мы будем рассматривать лишь T -аксиальные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ. По сравнению с ГКМ-графами, в определении T -графа условие а) ослаблено (мы требуем лишь $\alpha(\bar{e}) = \pm\alpha(e)$ вместо $\alpha(\bar{e}) = -\alpha(e)$), но условие б) усилено (мы требуем, чтобы α была n -независимой вместо 2-независимости). Хотя условие n -независимости для ГКМ-графов достаточно сильное (и исключает некоторые важные примеры), оно сбалансировано ослаблением другого условия. Это приводит к новым интересным примерам, некоторые из которых описаны ниже.

ПРИМЕР 5.8.2. Пусть M — локально стандартное T -многообразие, имеющее хотя бы одну T -неподвижную точку. Обозначим через Γ_M одномерный остов пространства орбит Q , а через α_M аксиальную функцию, определённую в разделе 5.5.1. Тогда из полученных там результатов вытекает, что (Γ_M, α_M) является T -графом.

ПРИМЕР 5.8.3. Два простых примера T -графов Γ показаны на рис. 5.2. Первый из них 2-валентен, а второй — 3-валентен. Аксиальная функция α переводит рёбра графа (независимо от их ориентации) в базисные элементы $t_1, t_2 \in H^2(BT^2)$ или $t_1, t_2, t_3 \in H^2(BT^3)$. Эти T -графы не являются ГКМ-графами, так как для них не выполнено условие $\alpha(\bar{e}) = -\alpha(e)$. Они происходят из T -многообразий S^4 и S^6 соответственно (см. пример 5.3.2).

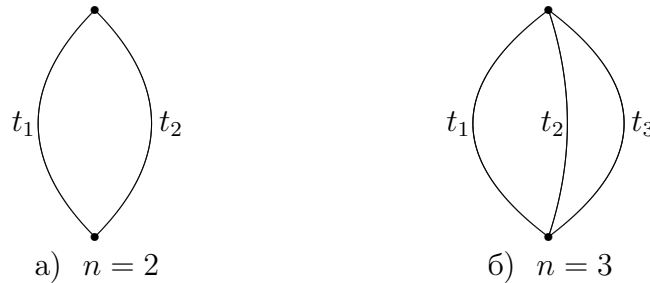


Рис. 5.2. T -графы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8.4. Пусть задан T -граф Γ . Его *эквивариантные когомологии* $H_T^*(\Gamma)$ определяются как набор отображений

$$f: V(\Gamma) \rightarrow H^*(BT),$$

таких, что для каждого $e \in E(\Gamma)$ ограничения $f(i(e))$ и $f(t(e))$ на $H^*(BT_e)$ совпадают. Так как $H^*(BT)$ является кольцом, пространство отображений $H^*(BT)^{V(\Gamma)}$ также приобретает кольцевую структуру относительно поточечного умножения. При этом $H_T^*(\Gamma)$ является подкольцом, так как отображение ограничения $H^*(BT) \rightarrow H^*(BT_e)$ мультипликативно. Более того, $H_T^*(\Gamma)$ является $H^*(BT)$ -алгеброй.

ПРИМЕР 5.8.5. Наше определение кольца эквивариантных когомологий T -графа мотивировано теоремой 5.5.5. Согласно этой теореме, если M — локально стандартное T -многообразие, для которого $H_T^*(M)$ является свободным $H^*(BT)$ -модулем, и Γ_M — соответствующий T -граф, то $H_T^*(\Gamma_M) \cong H_T^*(M)$.

5.8.2. Вычисление эквивариантных когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8.6. Пусть (Γ, α, θ) — некоторый T -граф, а Γ' — связный k -валентный подграф в Γ , где $0 \leq k \leq n$. Мы скажем, что $(\Gamma', \alpha|E(\Gamma'))$ является k -мерной гранью в Γ , если подграф Γ' инвариантен относительно связности θ . Как обычно, $(n-1)$ -мерные грани называются гипергранями.

Пересечение граней является подграфом, инвариантным относительно связности, но, вообще говоря, несвязным. Другими словами, пересечение граней является объединением меньших граней. Определим класс Тома k -мерной грани $G = (\Gamma', \alpha|E(\Gamma'))$ как отображение $\tau_G: V(\Gamma) \rightarrow H^{2(n-k)}(BT)$, где

$$(5.17) \quad \tau_G(v) := \begin{cases} \prod_{i(e)=v, e \notin \Gamma'} \alpha(e), & \text{если } v \in V(\Gamma'), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

ЛЕММА 5.8.7. Класс Тома τ_G лежит в $H_T^*(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in E(\Gamma)$. Если ни одна из вершин в e не лежит в G , то значение τ_G на каждой из вершин ребра e равно нулю. Если только одна из вершин в e , скажем $i(e)$, лежит в G , то $\tau_G(t(e)) = 0$, а $\tau_G(i(e)) = 0 \pmod{\alpha(e)}$, так что ограничение $\tau_G(i(e))$ на $H^*(BT_e)$ снова равно нулю. Наконец, пусть всё ребро e содержится в G . Возьмём произвольное ребро e' , для которого $i(e') = i(e)$ и $e' \notin G$, т.е. $\alpha(e')$ является сомножителем в $\tau_G(i(e))$ (если таких рёбер e' нет, то $\tau_G = 1$). Так как подграф G инвариантен относительно связности, мы имеем $\theta_e(e') \notin G$. Следовательно, $\alpha(\theta_e(e'))$ является сомножителем в $\tau_G(t(e))$. Тогда мы имеем $\alpha(\theta_e(e')) \equiv \alpha(e') \pmod{\alpha(e)}$ по определению аксиальной функции. То же соотношение имеет место и для любого другого сомножителя в $\tau_G(i(e))$, откуда вытекает, что ограничения элементов $\tau_G(i(e))$ и $\tau_G(t(e))$ на $H^*(BT_e)$ совпадают. \square

ЛЕММА 5.8.8. *Для любых данных k рёбер в $E(\Gamma)_v$ в T -графе Γ найдётся единственная k -грань, содержащая эти k рёбер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W — подгруппа ранга k в $H^2(BT)$, порождённая образами данных k рёбер из $E(\Gamma)_v$ под действием аксиальной функции α . Возьмём произвольный элемент e из $E(\Gamma)_v$. Под действием связности θ_e данные k рёбер из $E(\Gamma)_v$ отображаются в некоторые k рёбер из $E(\Gamma)_{t(e)}$. Образы этих k рёбер из $E(\Gamma)_{t(e)}$ относительно α порождают ту же подгруппу W в $H^2(BT)$. Продолжая таким же образом, мы будем распространять исходный набор из k рёбер по всем вершинам, используя связность. Единственность связности гарантирует, что граф, получаемый объединением наборов из k рёбер во всех вершинах, будет k -валентным. Кроме того, α -образы всех этих рёбер порождают одну и ту же подгруппу W . \square

СЛЕДСТВИЕ 5.8.9. *Грани T -графа Γ образуют симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}(\Gamma)$ ранга n относительно отношения обратного включения.*

Обозначим через $G \vee H$ минимальную грань, содержащую обе грани G и H . Вообще говоря, такая грань может не существовать или быть не единственной; однако, она существует и единственна, если пересечение $G \cap H$ непусто.

ЛЕММА 5.8.10. *Для любых двух граней G и H в Γ соответствующие классы Тома удовлетворяют соотношению*

$$(5.18) \quad \tau_G \tau_H = \tau_{G \vee H} \cdot \sum_{E \in G \cap H} \tau_E,$$

где мы формально положили $\tau_\Gamma = 1$ and $\tau_\emptyset = 0$, а суммирование справа производится по всем связным компонентам $E \in G \cap H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить, что обе части соотношения принимают одинаковые значения на каждой вершине $v \in V(\Gamma)$. Рассуждение полностью совпадает с использованным в доказательстве леммы 5.5.3. \square

ЛЕММА 5.8.11. *Классы Тома τ_G , соответствующие всем граням в Γ , мультипликативно порождают кольцо $H_T^*(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять-таки, рассуждение повторяет доказательство леммы 5.5.8. \square

Так как грани T -графа образуют симплициальное частично упорядоченное множество, мы можем рассмотреть его кольцо граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$. Это кольцо получается факторизацией кольца многочленов от образующих v_G (где G — непустые грани в Γ и $\deg v_G = 2(n - \dim G)$) по соотношениям (5.18).

ПРИМЕР 5.8.12. Пусть Γ — T -граф, изображённый на рис. 5.2 б). Обозначим его вершины через p и q , рёбра через e , g , h и 2-грани через E , G , H , так что ребро e противоположно грани E и т.д. Симплициально клеточный комплекс $\mathcal{S}(\Gamma)$ получается склейкой двух треугольников по их границам. Кольцо граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$ получается факторизацией кольца многочленов

$\mathbb{Z}[v_E, v_G, v_H, v_p, v_q]$, $\deg v_E = \deg v_G = \deg v_H = 2$, $\deg v_p = \deg v_q = 6$
по двум соотношениям

$$v_E v_G v_H = v_p + v_q, \quad v_p v_q = 0.$$

Образующие, соответствующие рёбрам, могут быть исключены ввиду соотношений типа $v_e = v_G v_H$.

По определению кольца эквивариантных когомологий T -графа, оно задано вместе с мономорфизмом в сумму колец многочленов:

$$r: H_T^*(\Gamma) \longrightarrow \bigoplus_{V(\Gamma)} H^*(BT).$$

Аналогично, для кольца граней также имеется мономорфизм в сумму колец многочленов — отображение s из теоремы 2.5.6. В нашем случае мы можем записать его в виде

$$s: \mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)] \longrightarrow \bigoplus_{v \in V(\Gamma)} \mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)] / (v_G : G \not\equiv v).$$

ТЕОРЕМА 5.8.13. Кольцо $H_T^*(\Gamma)$ эквивариантных когомологий T -графа изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$. Другими словами, кольцо $H_T^*(\Gamma)$ получается факторизацией градуированного кольца многочленов от классов Тома τ_G по соотношениям (5.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим отображение

$$\mathbb{Z}[v_G : G \text{ — грань}] \longrightarrow H_T^*(\Gamma),$$

переводящее v_G в τ_G . По лемме 5.8.10 оно пропускается через отображение $\varphi: \mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)] \rightarrow H_T^*(\Gamma)$. Сюръективность этого последнего отображения вытекает из леммы 5.8.11. Наконец, отображение φ инъективно, так как мы имеем разложение $s = r \circ \varphi$, а s инъективно по теореме 2.5.6. \square

5.8.3. Псевдомногообразия и ориентации. Здесь мы рассмотрим вопрос о характеристизации симплициальных частично упорядоченных множеств, которые происходят из T -графов.

Следующее определение является непосредственным распространением понятия *псевдомногообразия* [St96, Def. 0.3.15] на симплициально клеточные комплексы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8.14. Симплициально клеточный комплекс \mathcal{S} называется $(n-1)$ -мерным псевдомногообразием (без границы), если выполнены следующие условия:

- 1) для любого элемента $\sigma \in \mathcal{S}$ существует элемент τ ранга n , для которого $\sigma \leq \tau$ (другими словами, \mathcal{S} является *чистым* $(n - 1)$ -мерным комплексом);
- 2) для любого элемента $\sigma \in \mathcal{S}$ ранга $(n - 1)$ существуют в точности два элемента τ ранга n , для которых $\sigma < \tau$;
- 3) любые два элемента τ и τ' ранга n могут быть соединены последовательностью $\tau = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k = \tau'$ элементов, для которых $\text{rank } \tau_i = n$ и $\tau_i \wedge \tau_{i+1}$ содержит элемент ранга $(n - 1)$, для $1 \leq i \leq k - 1$.

Примерами псевдомногообразий являются симплициальные или симплициально клеточные разбиения топологических многообразий. Однако, не любое псевдомногообразие получается таким образом, см. пример 5.8.16 ниже.

ТЕОРЕМА 5.8.15. а) Пусть Γ — некоторый T -граф; тогда $\mathcal{S}(\Gamma)$ является псевдомногообразием, а кольцо граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$ допускает линейную систему параметров;
 б) по любому псевдомногообразию \mathcal{S} и линейной системе параметров в $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ канонически строится T -граф $\Gamma_{\mathcal{S}}$.
 Более того, $\Gamma_{\mathcal{S}(\Gamma)} = \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Вершины комплекса $\mathcal{S}(\Gamma)$ соответствуют $(n - 1)$ -мерным граням в Γ . Так как каждая грань в Γ содержит вершину и Γ является n -валентным, комплекс $\mathcal{S}(\Gamma)$ является чистым $(n - 1)$ -мерным. Условие 2) из определения псевдомногообразия вытекает из того, что каждое ребро в Γ содержит в точности две вершины, а 3) вытекает из связности Γ . Для того, чтобы построить линейную систему параметров, отождествим $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$ с подмножеством в $H^*(BT)^{V(\Gamma)}$ (см. теорему 5.8.13) и рассмотрим постоянное отображение $c: H^*(BT) \rightarrow H^*(BT)^{V(\Gamma)}$. Оно пропускается через мономорфизм $H^*(BT) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$, и из леммы 2.6.3 вытекает, что c -образ любого базиса в $H^*(BT)$ является линейной системой параметров.

б) Пусть \mathcal{S} — псевдомногообразие размерности $(n - 1)$. Определим граф $\Gamma_{\mathcal{S}}$, вершины которого соответствуют $(n - 1)$ -мерным симплексам $\sigma \in \mathcal{S}$, и в котором число рёбер между вершинами σ и σ' равно числу $(n - 2)$ -мерных симплексов в множестве $\sigma \wedge \sigma'$. Тогда $\Gamma_{\mathcal{S}}$ является связным n -валентным графом, и нам нужно задать аксиальную функцию. Следующее рассуждение аналогично использованному в [Ma05, §3], а также при доказательстве предложения 4.4.1.

Мы можем рассматривать линейную систему параметров как отображение $\lambda: H^*(BT) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{S}]$. Как обычно, предположим, что комплекс \mathcal{S} имеет m нульмерных элементов (мы не будем их называть вершинами, чтобы не путать с вершинами графа), и пусть u_1, \dots, u_m обозначают соответствующие двумерные образующие в

кольце $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$. Тогда для $t \in H^2(BT)$ мы можем записать

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) u_i,$$

где λ_i являются линейными функциями на $H^2(BT)$, т.е. элементами из $H_2(BT)$. Пусть e — ориентированное ребро в Γ и $v = i(e)$ — его начальная вершина. Эта вершина соответствует некоторому $(n-1)$ -мерному симплексу в \mathcal{S} , и мы обозначим через $I(v) \subset \{1, \dots, m\}$ множество его 0-мерных элементов в \mathcal{S} ; тогда $|I(v)| = n$. Так как λ является линейной системой параметров, множество $\{\lambda_i : i \in I(v)\}$ является базисом в $H_2(BT)$. Теперь определим аксиальную функцию $\alpha : E(\Gamma) \rightarrow H^2(BT)$, требуя, чтобы её значение на $E(\Gamma)_v$ было базисом, двойственным к $\{\lambda_i : i \in I(v)\}$. Более подробно это можно описать следующим образом. Ребро e соответствует некоторому $(n-2)$ -мерному симплексу в \mathcal{S} , и мы обозначим через $\ell \in I(v)$ единственный 0-мерный элемент, который не содержится в этом $(n-2)$ -симплексе. Тогда мы определим $\alpha(e)$, потребовав, чтобы

$$(5.19) \quad \langle \alpha(e), \lambda_i \rangle = \delta_{i\ell}, \quad i \in I(v),$$

где $\delta_{i\ell}$ обозначает символ Кронекера. Нам необходимо проверить три условия из определения T -аксиальной функции. Пусть $v' = t(e) = i(\bar{e})$. Заметим, что пересечение множеств $I(v)$ и $I(v')$ содержит как минимум $(n-1)$ элементов. Если $I(v) = I(v')$, то Γ имеет всего две вершины, как в примере 5.8.3, а \mathcal{S} получается склейкой двух $(n-1)$ -мерных симплексов по их границам, см. пример 1.7.2. В противном случае, $|I(v) \cap I(v')| = n-1$, и мы имеем $\ell \notin I(v')$. Пусть ℓ' обозначает элемент, для которого $\ell' \in I(v')$, но $\ell' \notin I(v)$. Тогда из (5.19) получаем $\langle \alpha(e), \lambda_i \rangle = \langle \alpha(\bar{e}), \lambda_i \rangle = 0$ при $i \in I(v) \cap I(v')$. Так как мы работаем с целочисленными базисами, отсюда вытекает $\alpha(\bar{e}) = \pm \alpha(e)$. Кроме того, $\alpha(E(\Gamma)_v \setminus e)$ и $\alpha(E(\Gamma)_{v'} \setminus \bar{e})$ задают один и тот же базис в факторпространстве $H^2(BT)/\alpha(e)$. отождествляя эти базисы, мы получаем связность $\theta_e : E(\Gamma)_v \rightarrow E(\Gamma)_{v'}$, удовлетворяющую условию $\alpha(\theta_e(e')) \equiv \alpha(e') \pmod{\alpha(e)}$ для любого $e' \in E(\Gamma)_v$, как и требуется. Оставшаяся часть утверждения очевидна. \square

Заметим, что эта теорема не даёт полной характеристики симплициально клеточных комплексов вида $\mathcal{S}(\Gamma)$, так как может случиться, что $\mathcal{S}(\Gamma_{\mathcal{S}}) \neq \mathcal{S}$, см. пример ниже.

ПРИМЕР 5.8.16. Пусть \mathcal{S} — триангуляция 2-мерной сферы, отличная от границы симплекса. Выберем две вершины, не соединённых ребром, и пусть \mathcal{S}' — комплекс, получаемый отождествлением этих двух вершин. Тогда \mathcal{S}' является псевдомногообразием. Если $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ допускает линейную систему параметров, то это верно и для $\mathbb{Z}[\mathcal{S}']$ (это легко вытекает из леммы 2.6.3). Тем не менее, $\mathcal{S}(\Gamma_{\mathcal{S}'}) \neq \mathcal{S}'$

(в действительности $\mathcal{S}(\Gamma_{\mathcal{S}'}) = \mathcal{S}$). Отсюда вытекает, что \mathcal{S}' не происходит ни из какого T -графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8.17. Назовём сопоставление $o: V(\Gamma) \rightarrow \{\pm 1\}$ *ориентацией* T -графа Γ , если $o(i(e))\alpha(e) = -o(i(\bar{e}))\alpha(\bar{e})$ для любого $e \in E(\Gamma)$.

ПРИМЕР 5.8.18. Пусть M — локально стандартное T -многообразие, допускающее T -инвариантную почти комплексную структуру. Соответствующая T -аксиальная функция α_M удовлетворяет условию $\alpha_M(\bar{e}) = -\alpha_M(e)$ для любого ребра e . В этом случае мы можем положить $o(v) = 1$ для любой вершины $v \in V(\Gamma_M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8.19. *Полиориентация локально стандартного T -многообразия M индуцирует ориентацию ассоциированного T -графа Γ_M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой вершины $v \in M^T = V(\Gamma_M)$ положим $o(v) = \sigma(v)$ (знак вершины, см. лемму 4.4.2). \square

ПРИМЕР 5.8.20. Пусть Γ — полный граф с 4 вершинами, которые мы обозначим v_1, v_2, v_3, v_4 . Выберем базис $t_1, t_2, t_3 \in H^2(BT^3)$ и определим аксиальную функцию, положив

$$\begin{aligned}\alpha(v_1v_2) = \alpha(v_3v_4) = t_1, \quad \alpha(v_1v_3) = \alpha(v_2v_4) = t_2, \\ \alpha(v_1v_4) = \alpha(v_2v_3) = t_3\end{aligned}$$

и $\alpha(\bar{e}) = \alpha(e)$ для любого ориентированного ребра e . Непосредственная проверка показывает, что этот T -граф неориентируем. В действительности этот T -граф ассоциирован с псевдомногообразием на рис. 5.3 при помощи конструкции из теоремы 5.8.15 б). Это псевдомногообразие \mathcal{S} гомеоморфно $\mathbb{R}P^2$ (внешние противоположные рёбра отождествляются в соответствии со стрелками). Кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ имеет три двумерных образующих v_p, v_q, v_r , которые задают линейную систему параметров. Заметим, что само $\mathbb{R}P^2$ также неориентируемо.

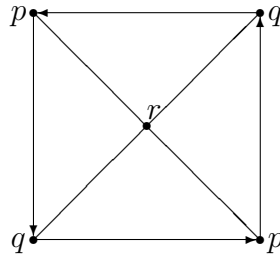


Рис. 5.3. Симплициально клеточное разбиение $\mathbb{R}P^2$ с 3 вершинами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8.21. *T -граф Γ ориентируем тогда и только тогда, когда ориентируемо псевдомногообразие $\mathcal{S}(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in V(\Gamma)$ и σ — соответствующий $(n - 1)$ -мерный симплекс в $\mathcal{S}(\Gamma)$. Элементы из $E(\Gamma)_v$ соответствуют 0-мерным элементам (вершинам) в σ , см. доказательство теоремы 5.8.15 б). Выберем базис в $H^2(BT)$, который будем считать положительным. Предположим сначала, что $\mathcal{S}(\Gamma)$ ориентируемо. Выберем «положительный» (в смысле ориентации) порядок 0-мерных элементов в σ ; тогда упорядоченное множество $\alpha(E(\Gamma)_v)$ есть базис в $H^2(BT)$. Мы положим $o(v) = 1$ если этот базис положительно ориентирован, и $o(v) = -1$ иначе. Это задаёт ориентацию на Γ . Обратив эту процедуру, получим обратное утверждение. \square

5.9. Раздутия T -многообразий и T -графов

Здесь мы связываем воедино следующие три геометрические конструкции, использованные в предыдущих разделах:

- а) раздутие локально стандартного T -многообразия вдоль T -инвариантного подмногообразия (см. конструкцию 5.7.1);
- б) «срезание» грани простого многогранника или, в более общей ситуации, раздутие ГKM-графа или T -графа;
- в) звёздное подразбиение симплицального или симплицально клеточного комплекса (определение 2.6.4).

Общая конструкция раздутия ГKM-графа дана в [GZ99, §2.2.1]; мы вкратце описываем её ниже, а также приводим поясняющие примеры. Эта конструкция без изменений переносится на T -графы и соответствует топологической конструкции раздутия многообразий в случае T -графов, происходящих из T -многообразий.

Пусть (Γ, α, θ) — некоторый T -граф и G — грань размерности k в Γ . Раздутием T -графа Γ относительно грани G называется T -граф $\tilde{\Gamma}$, определяемый следующим образом. Для множества вершин мы имеем $V(\tilde{\Gamma}) = (V(\Gamma) \setminus V(G)) \cup V(G)^{n-k}$, т.е. каждая вершина $p \in V(G)$ заменяется на $(n - k)$ новых вершин $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-k}$. Удобно считать эти новые вершины точками, выбранными вблизи p на рёбрах из множества $E_p(\Gamma) \setminus E_p(G)$. Тогда мы обозначим через p'_i второй конец ребра из $\tilde{\Gamma}$, содержащего вершину p и точку \tilde{p}_i . Кроме того для каждой пары вершин $p, q \in G$, соединённых ребром pq , мы будем нумеровать соответствующие наборы новых вершин в $\tilde{\Gamma}$ согласованно, т.е. с выполнением условия $\theta_{pq}(pp'_i) = qq'_i$. Теперь мы должны указать все рёбра нового графа $\tilde{\Gamma}$, а также значения на них аксиальной функции $\tilde{\alpha}: E(\tilde{\Gamma}) \rightarrow H^*(BT)$. Имеется 4 типа рёбер, которые даны в следующем списке вместе со значениями аксиальной функции:

- а) $\tilde{p}_i\tilde{p}_j$ для каждой $p \in V(G)$; $\tilde{\alpha}(\tilde{p}_i\tilde{p}_j) = \alpha(pp'_j) - \alpha(pp'_i)$;
- б) $\tilde{p}_i\tilde{q}_i$ если p и q соединены ребром в G ; $\tilde{\alpha}(\tilde{p}_i\tilde{q}_i) = \alpha(pq)$;
- в) $\tilde{p}_i p'_i$ для каждой вершины $p \in V(G)$; $\tilde{\alpha}(\tilde{p}_i p'_i) = \alpha(pp'_i)$;

г) рёбра, «происходящие из Γ », т.е. $e \in E(\Gamma)$, для которых $i(e) \notin V(G)$ и $t(e) \notin V(G)$; $\tilde{\alpha}(e) = \alpha(e)$, см. рис. 5.4 ($n = 3, k = 1$) и рис. 5.5 ($n = 3, k = 0$).

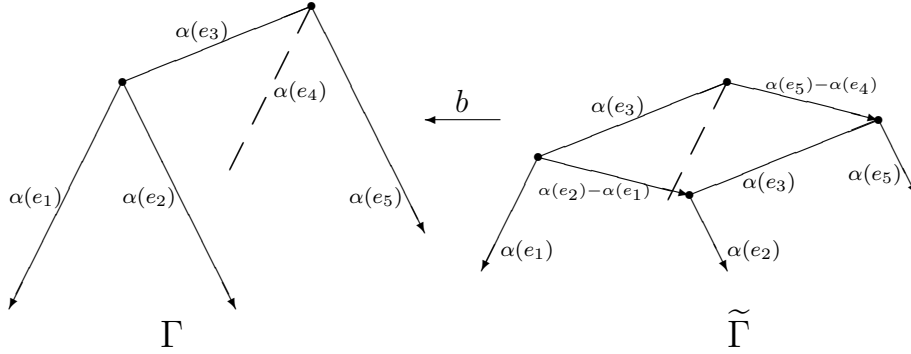


Рис. 5.4. Раздутие относительно ребра

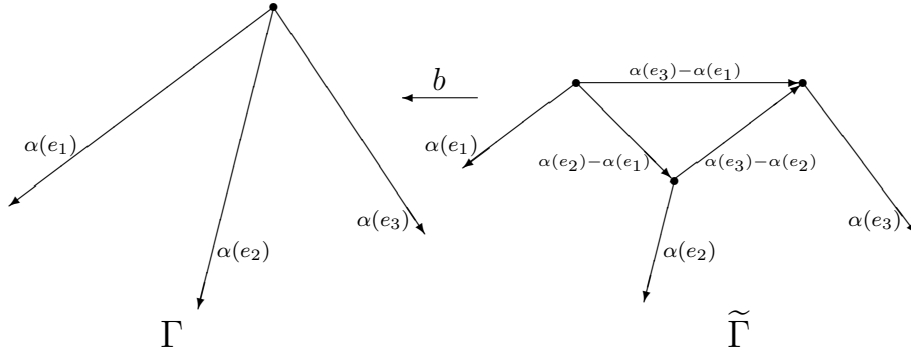


Рис. 5.5. Раздутие относительно вершины

Имеется отображение сдутья $b: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, переводящие грани в грани. Грань $G \subset \Gamma$ раздувается до новой гипергранни $\tilde{G} \subset \tilde{\Gamma}$ (если только G сама не была гипергранью; в этом случае $\tilde{\Gamma} = \Gamma$). Для каждой грани $H \subset \tilde{\Gamma}$, которая не содержится в G , существует единственная грань $\tilde{H} \subset \tilde{\Gamma}$, которая отображается на H при сдутье. Отображение сдутья индуцирует гомоморфизм в эквивариантных кохомологиях $b^*: H_T^*(\Gamma) \rightarrow H_T^*(\tilde{\Gamma})$. Структуру этого отображения можно восстановить из следующей коммутативной диаграммы:

$$(5.20) \quad \begin{array}{ccc} H_T^*(\Gamma) & \xrightarrow{b^*} & H_T^*(\tilde{\Gamma}) \\ r \downarrow & & \downarrow \tilde{r} \\ H^*(BT)^{V(\Gamma)} & \xrightarrow{Vb^*} & H^*(BT)^{V(\tilde{\Gamma})}, \end{array}$$

где r и \tilde{r} суть мономорфизмы из определения эквивариантных кохомологий T -графа, а Vb^* — гомоморфизм, индуцированный отображением множеств $Vb: V(\tilde{\Gamma}) \rightarrow V(\Gamma)$. Следующая лемма описывает образы двумерных образующих $\tau_F \in H_T^*(\Gamma)$, соответствующих гиперграням $F \subset \Gamma$.

ЛЕММА 5.9.1. Для данной гипергранни $F \subset \Gamma$ мы имеем $b^*(\tau_F) = \tau_{\tilde{G}} + \tau_{\tilde{F}}$, если $G \subset F$, и $b^*(\tau_F) = \tau_{\tilde{F}}$ иначе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы воспользуемся диаграммой (5.20) и проверим, что образы классов $b^*(\tau_F)$ и $\tau_{\tilde{G}} + \tau_{\tilde{F}}$ (или $\tau_{\tilde{F}}$) под действием отображения \tilde{r} совпадают. Возьмём произвольную вершину $p \in V(\Gamma)$. Если $p \notin G$, то $b^{-1}(p) = p$ и $r(\tau_F)(p) = \tilde{r}(\tau_{\tilde{F}})(p)$, $\tilde{r}(\tau_{\tilde{G}})(p) = 0$. Пусть теперь $p \in G$; тогда мы имеем $b(\tilde{p}_i) = p$, $1 \leq i \leq n - k$.

Вначале рассмотрим случай $G \not\subset F$ (рис. 5.6). Если $p \notin F$, то $r(\tau_F)(p) = \tilde{r}(\tau_{\tilde{F}})(\tilde{p}_i) = 0$. Иначе $p \in F \cap G$. Пусть e — единственное ребро, для которого $e \in E_p(\Gamma)$ и $e \notin F$. Тогда $e = pq$ для некоторой вершины $q \in V(G)$ (так как $G \not\subset F$). Из (5.17) мы получаем

$$r(\tau_F)(p) = \alpha(pq) = \tilde{\alpha}(\tilde{p}_i \tilde{q}_i) = \tilde{r}(\tau_{\tilde{F}})(\tilde{p}_i), \quad 1 \leq i \leq n - k.$$

Таким образом, $Vb^*r(\tau_F) = \tilde{r}(\tau_{\tilde{F}})$, и следовательно $b^*(\tau_F) = \tau_{\tilde{F}}$.

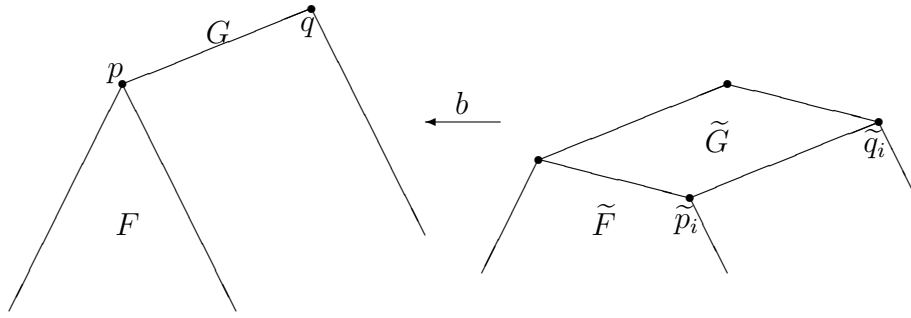


Рис. 5.6

Пусть теперь $G \subset F$ (см. рис. 5.7). В этом случае единственное ребро e , для которого $e \in E_p(\Gamma)$ и $e \notin F$, имеет тип pp'_j . Используя (5.17), мы вычисляем

$$\begin{aligned} r(\tau_F)(p) &= \alpha(pp'_j), \\ \tilde{r}(\tau_{\tilde{F}})(\tilde{p}_i) &= \tilde{\alpha}(\tilde{p}_i \tilde{p}'_j) = \alpha(pp'_j) - \alpha(pp'_i), \\ \tilde{r}(\tau_{\tilde{G}})(\tilde{p}_i) &= \tilde{\alpha}(\tilde{p}_i \tilde{p}'_i) = \alpha(pp'_i), \quad 1 \leq i \leq n - k. \end{aligned}$$

Тогда $Vb^*r(\tau_F) = \tilde{r}(\tau_{\tilde{G}}) + \tilde{r}(\tau_{\tilde{F}})$, и следовательно $b^*(\tau_F) = \tau_{\tilde{G}} + \tau_{\tilde{F}}$. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.9.2. После отождествлений $H_T^*(\Gamma) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$ и $H_T^*(\tilde{\Gamma}) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{S}(\tilde{\Gamma})]$ отображение в эквивариантных когомологиях, индуцированное сдвигом $b: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, совпадает с отображением β из леммы 2.6.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (теорема 5.8.13), что частично упорядоченное множество $\mathcal{S}(\Gamma)$ образовано гранями T -графа Γ с отношением обратного включения, а изоморфизм $H_T^*(\Gamma) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$ устанавливается при помощи отождествления классов Тома τ_H с

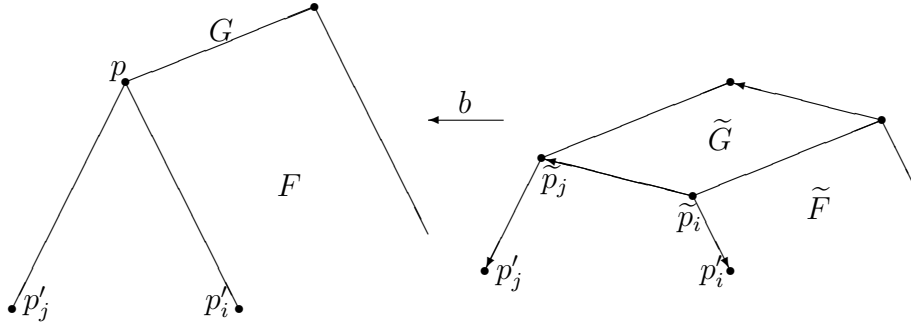


Рис. 5.7

образующими v_H для всех граней $H \subset \Gamma$. Пусть $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$ — элемент, соответствующий раздуваемой грани G . Тогда элемент $\tau \in \mathcal{S}(\Gamma)$ попадает в $\text{st}_{\mathcal{S}(\Gamma)} \sigma$ если и только если соответствующая ему грань $H \subset \Gamma$ удовлетворяет условию $G \cap H \neq \emptyset$. Двумерные образующие v_i , $1 \leq i \leq m$, кольца $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$ (или кольца $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\tilde{\Gamma})]$) соответствуют образующим τ_F кольца $H_T^*(\Gamma)$ (или образующим $\tau_{\tilde{F}}$ кольца $H_T^*(\tilde{\Gamma})$ соответственно), где F — гипергрань в Γ . Сделав соответствующую замену обозначений, мы видим, что отображение из леммы 2.6.6 определяется условиями

$$\begin{array}{ll} \tau_H \mapsto \tau_H & \text{если } G \cap H = \emptyset, \\ \tau_F \mapsto \tau_{\tilde{G}} + \tau_{\tilde{F}} & \text{если } G \subset F, \\ \tau_F \mapsto \tau_{\tilde{F}} & \text{если } G \not\subset F. \end{array}$$

Так как отображение сдвигания b^* удовлетворяет этим условиям, утверждение доказано. \square

Момент-угол-комплексы и многообразия

Эта глава посвящена изучению момент-угол-многообразий и их обобщений — *момент-угол-комплексов*. Теория момент-угол-комплексов является одним из основных инструментов современных приложений торической топологии и объединяет методы комбинаторной геометрии, коммутативной и гомологической алгебры и эквивариантной топологии.

В разделе 3.3.2 мы сопоставили каждому геометрическому простому многограннику (1.1) гладкое момент-угол-многообразие \mathcal{Z}_P с действием тора \mathbb{T}^m , получаемое как полное пересечение вещественных квадратиков в \mathbb{C}^m . В разделе 3.4 мы показали, что топологический тип \mathbb{T}^m -многообразия \mathcal{Z}_P определяется лишь комбинаторной структурой многогранника P , путём отождествления \mathcal{Z}_P с факторпространством $P \times \mathbb{T}^m / \sim$ по некоторому отношению эквивалентности. Эта последняя конструкция многообразия \mathcal{Z}_P впервые появилась в работе Дэвиса–Янушкевича [DJ91] и была мотивирована (см. [Da83, §13]) конструкциями Винберга [Ви71] для групп Кокстера. Также в [DJ91] было получено обобщение конструкции \mathcal{Z}_P на произвольные конечные симплиціальные комплексы \mathcal{K} с m вершинами (при этом простой многогранник P соответствует симплиціальному комплексу \mathcal{K}_P — границе двойственного многогранника). Получаемые пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ мы и называем *момент-угол-комплексами*. В [DJ91] им отводилась лишь вспомогательная роль при изучении (квази)торических многообразий, но вскоре стало, что момент-угол-комплексы представляют отдельный большой интерес в торической топологии.

Мы предлагаем новую конструкцию момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, использующую кубическое разбиение симплиціального комплекса \mathcal{K} (см. предложение 1.8.8). В результате $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ вкладывается в единичный полидиск $(\mathbb{D}^2)^m \subset \mathbb{C}^m$ в качестве \mathbb{T}^m -инвариантного подмножества, представленного в виде объединения «блоков» вида $(D^2)^k \times (S^1)^{m-k}$. Данная конструкция момент-угол-комплексов функториальна по \mathcal{K} и тем самым определяет функтор из категории симплиціальных комплексов и симплиціальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений. Если \mathcal{K} является триангуляцией $(n-1)$ -мерной сферы, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является $(m+n)$ -мерным многообразием. Наряду с уже обсуждавшейся реализацией момент-угол-комплексов как поверхностей

уровня для отображений моментов гамильтоновых действий тора (раздел 3.3) и их ролью в теории квазиторических многообразий (раздел 4.3), они возникают в теории гомотопий как *гомотопические копределы* диаграмм торов [PRV04] и в теории конфигураций подпространств как *дополнения конфигураций координатных подпространств* (мы рассмотрим соответствующие конструкции далее в разделе 6.6).

Наша конструкция момент-угол-комплекса допускает ещё одно весьма интересное чисто топологическое обобщение. Для данных симплицеального комплекса \mathcal{K} с m вершинами и пары пространств $W \subset X$ имеется каноническая конструкция подпространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}(X, W) \subset X^m$ в произведении m экземпляров X , называемого *обобщённым момент-угол-комплексом* или *\mathcal{K} -степенью пары* (X, W) . Данная конструкция функториальна относительно отображений пар (X, W) . Её частными случаями с $W = pt$ являются *букет* m экземпляров X (в случае, когда \mathcal{K} является набором из m точек), *произведение* m экземпляров X (когда \mathcal{K} есть полный симплекс с m вершинами) и *толстый букет* (когда \mathcal{K} есть граница симплекса). Стандартный момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ соответствует паре $(X, W) = (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)$. Ряд других важных конструкций торической топологии являются частными случаями обобщённых момент-угол-комплексов, которые в последнее время активно изучаются в теории гомотопий [DS05], [BBCG].

Одним из основных результатов этой главы является вычисление кольца когомологий момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Доказан изоморфизм между $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и Тог-алгеброй $\text{Tog}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ — кольцо граней комплекса \mathcal{K} . При этом показано, что каноническая биградуировка в Тог-модулях имеет явную геометрическую реализацию, обусловленную введённой в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ биградуированной клеточной структурой. Дальнейший анализ привёл к эффективному описанию Тог-алгебры в терминах комплекса Кошуля, которое открыло пути применения известных пакетов компьютерных программ (Macaulay2, Bistellar и др.) для вычислений в комбинаторной геометрии.

Тем самым конструкция момент-угол-комплексов позволила применить методы эквивариантной топологии для изучения комбинаторики симплицеальных комплексов и алгебраических свойств их колец граней, придавая новое, геометрическое, измерение «комбинаторной коммутативной алгебре». В частности, вычисление когомологий момент-угол-комплексов позволило топологически интерпретировать гомологические инварианты колец граней, такие как Тог-алгебры и алгебраические числа Бетти (см. раздел 2.2).

Ещё одним важным аспектом теории момент-угол-комплексов является их тесная взаимосвязь с конфигурациями координатных

подпространств и их дополнениями. Этот класс пространств играет важную роль в алгебраической геометрии, теории особенностей, а также в прикладной теории шарнирных механизмов. Конфигурации координатных подпространств в \mathbb{C}^m параметризуются симплицальными комплексами \mathcal{K} с m вершинами, и наш результат показывает, что дополнение такой конфигурации допускает деформационную ретракцию на момент угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ (в частности, дополнение конфигурации и момент-угол-комплекс имеют одинаковый гомотопический тип). В качестве следствия мы получаем решение известной задачи об описании кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Отметим, что известные результаты о когомологиях дополнений конфигураций координатных подпространств либо не описывают мультипликативной структуры (как общая теорема Горески–Макферсона [GM88, Part III]), либо дают лишь описание произведения двух данных коциклов в комбинаторных терминах (как результат де Лонгвилле [dL00]). Наш результат о момент-угол-комплексах даёт исчерпывающее глобальное описание кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Результаты Горески–Макферсона (в части координатных конфигураций) и де Лонгвилле сводятся к частным случаям нашего результата при помощи двойственности Александера.

Наконец, момент-угол-комплексы находят приложения и в теории действий алгебраических групп, а именно, при построении множеств типа Кемпфа–Несс для действий алгебраического тора на некоторых квазиаффинных многообразиях. В классической ситуации действий алгебраических групп на аффинных многообразиях понятие множества Кемпфа–Несс позволяет заменить категорный фактор на факторпространство по действию максимальной компактной подгруппы (см. приложение VI). Мы показываем, что момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ играет роль множества Кемпфа–Несс для класса действий алгебраического тора на квазиаффинных многообразиях (дополнениях конфигураций координатных подпространств), возникающих в конструкции Кокса торических многообразиям (см. раздел 3.2). Таким образом, наши результаты о момент-угол-комплексах применимы и к вычислению когомологий этих «торических» множеств Кемпфа–Несс. В случае неособых проективных торических многообразий соответствующие множества Кемпфа–Несс могут быть описаны как полные пересечения вещественных квадрик в комплексном пространстве.

Возвращаясь к нашему описанию момент-угол-многообразий $\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}$ как полному пересечению вещественных квадрик, отметим область приложений, открытую в [BM06]. В этой работе был рассмотрен достаточно общий класс полных пересечений вещественных квадрик в \mathbb{C}^m , называемых *линками* (условия, накладываемые

на уравнения квадрик обеспечивают неособость их пересечения). В [ВМ06] показано, что все линки допускают структуру некэлеровых комплексных многообразий (в случае линков нечётных размерностей необходимо взять произведение с окружностью), тем самым обобщая известные серии некэлеровых многообразий Хопфа и Калаби–Экмана. Из результатов [ВМ06], а также из результатов нашего раздела 3.3.2, вытекает, что класс линков совпадает с классом момент-угол-многообразий \mathcal{Z}_P , соответствующих простым многогранникам. Тем самым открываются новые взаимосвязи между торической топологией и комплексной геометрией.

Результаты этой главы опубликованы в работах [ББП04], [БП99], [БП00-2], [БП00-3], [БП00-4], [БП04-2], [Па08], [ВР00], [ВР02], [Ра08].

6.1. Общая конструкция момент-угол-комплекса \mathcal{Z}_K

В разделе 3.4 мы отождествили момент-угол-многообразие \mathcal{Z}_P с факторпространством $P \times \mathbb{T}^m / \sim$, см. (3.14). Теперь мы построим \mathbb{T}^m -эquivарантное вложение \mathcal{Z}_P в единичный полидиск

$$(\mathbb{D}^2)^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leq 1, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Полидиск $(\mathbb{D}^2)^m$ инвариантен относительно стандартного действия \mathbb{T}^m на \mathbb{C}^m , а пространство орбит есть единичный куб $\mathbb{I}^m \subset \mathbb{R}_{\geq}^m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1.1. *Пространство Z , определяемое из коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & (\mathbb{D}^2)^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{c_P} & \mathbb{I}^m, \end{array}$$

где $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$, а вложение $c_P: P \rightarrow \mathbb{I}^m$ описано в конструкции 1.8.4, equivарантно гомеоморфно момент-угол-многообразию \mathcal{Z}_P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как описано в конструкции 3.4.1, мы можем отождествить полидиск $(\mathbb{D}^2)^m \subset \mathbb{C}^m$ с факторпространством $\mathbb{I}^m \times \mathbb{T}^m / \sim$, где $(\mathbf{y}, \mathbf{t}_1) \sim (\mathbf{y}, \mathbf{t}_2)$ при $\mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in T_{\omega(\mathbf{y})}$. Здесь $\omega(\mathbf{y})$ обозначает множество нулевых координат точки $\mathbf{y} \in (\mathbb{D}^2)^m$, а $T_{\omega(\mathbf{y})}$ — соответствующая координатная подгруппа в торе \mathbb{T}^m . Отсюда вытекает, что Z отождествляется с факторпространством $P \times \mathbb{T}^m / \sim$, где $(p, \mathbf{t}_1) \sim (p, \mathbf{t}_2)$ при $\mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in T_{\omega(c_P(p))}$. Далее, из конструкции 1.8.4 вложения c_P следует, что i -я координата образа $c_P(p)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда p содержится в i -й гипергранни F_i . Другими словами, множество $\omega(c_P(p))$ нулевых координат точки $c_P(p)$ совпадает с множеством $\psi(p) = \{i \in [m] : p \in F_i\}$.

Следовательно, $T_{\omega(c_P(p))} = T(p)$ и Z совпадает с факторпространством (3.14), т.е. с \mathcal{Z}_P . \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Диаграмма из предложения 6.1.1 похожа на (3.8), однако вместо линейного отображения i_P используется кусочно линейное вложение многогранника в куб. Преимуществом конструкции (3.8) является то, что определяемое ей пространство автоматически является гладким многообразием, однако, конструкция из предложения 6.1.1 имеет более комбинаторную природу, и поэтому более приспособлена для комбинаторных приложений и обобщений.

Максимальные грани C_v кубического разбиения $\mathcal{C}(P)$ из конструкции 1.8.4 соответствуют вершинам $v \in P$. Положим $B_v := \mu^{-1}(c_P(C_v))$, тогда мы имеем

$$B_v = \{(z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{D}^2)^m : |z_j|^2 = 1 \text{ при } j \notin \{i_1, \dots, i_n\}\},$$

где $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$. Каждое B_v является \mathbb{T}^m -инвариантным подмножеством в $(\mathbb{D}^2)^m$, гомеоморфным $(D^2)^n \times T^{m-n}$, и \mathcal{Z}_P отождествляется с объединением этих подмножеств внутри $(\mathbb{D}^2)^m$.

ПРИМЕР 6.1.2. Пусть $P = \Delta^n$ (n -симплекс). Тогда $m = n + 1$ и \mathcal{Z}_P гомеоморфно $(2n + 1)$ -сфере S^{2n+1} . Кубический комплекс $\mathcal{C}(\Delta^n)$ имеет $(n + 1)$ максимальных граней C_v . Каждое подмножество B_v гомеоморфно $(D^2)^n \times S^1$, а их объединение есть $\partial((\mathbb{D}^2)^{n+1}) \cong S^{2n+1}$. В частности, при $n = 1$ мы получаем известное представление 3-сферы $S^3 = \partial(D^2 \times D^2)$ в виде объединения двух полноторий $D^2 \times S^1$ и $S^1 \times D^2$, склеенных по тождественному диффеоморфизму границ.

Теперь мы можем обобщить конструкцию момент-угол-многообразия на произвольные симплицальные комплексы.

КОНСТРУКЦИЯ 6.1.3 (момент-угол-комплекс). Пусть \mathcal{K} — симплицальный комплекс на множестве $[m]$. Рассмотрим кубический подкомплекс $cc(\mathcal{K})$ в \mathbb{I}^m (см. конструкцию 1.8.7). Пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, определяемое из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & (\mathbb{D}^2)^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ cc(\mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathbb{I}^m, \end{array}$$

называется *момент-угол-комплексом*, соответствующим комплексу \mathcal{K} . По построению, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является \mathbb{T}^m -инвариантным подмножеством в полидиске, а пространство орбит $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m$ гомеоморфно $|\text{cone}(\mathcal{K})|$.

Определим подпространства $B_{\sigma} := \mu^{-1}(C_{\sigma}) \subset (\mathbb{D}^2)^m$, где $C_{\sigma} = C_{\emptyset \subset \sigma}$ — грань куба \mathbb{I}^m , соответствующая подмножеству $\sigma \subset [m]$, см. (1.18). Тогда

$$(6.1) \quad B_{\sigma} = \{(z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{D}^2)^m : |z_j|^2 = 1 \text{ при } j \notin \sigma\},$$

$\text{сс}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} C_\sigma$ и

$$(6.2) \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} B_\sigma.$$

Можно определить *категорию граней* $\text{CAT}(\mathcal{K})$ симплициального комплекса \mathcal{K} , объектами которой являются симплексы $\sigma \in \mathcal{K}$ (включая \emptyset), а морфизмами — вложения симплексов. Рассмотрим диаграмму (функтор) $D(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)$ из категории $\text{CAT}(\mathcal{K})$ в категорию \mathbb{T}^m -эквивариантных пространств и отображений, сопоставляющую вложению симплексов $\tau \subset \sigma$ вложение $B_\tau \subset B_\sigma$ соответствующих пространств (6.1). Тогда мы имеем

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \text{colim } D(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1).$$

Это — пример конструкции *копредела* диаграммы над $\text{CAT}(\mathcal{K})$ в категории топологических пространств. Многие другие конструкции этой главы также будут получаться как копределы различных диаграмм над $\text{CAT}(\mathcal{K})$.

ПРИМЕР 6.1.4. 1. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для некоторого простого многогранника P . Тогда $\text{сс}(\mathcal{K}_P) = c_P(\mathcal{C}(P))$, и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ отождествляется с момент-угол-многообразием \mathcal{Z}_P .

2. Пусть $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$. Тогда $\text{сс}(\mathcal{K})$ есть весь куб \mathbb{I}^m , а $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ совпадает с полидиском $(\mathbb{D}^2)^m$.

В ряде конструкций удобно рассматривать симплициальные комплексы \mathcal{K} на $[m]$, множество вершин которых является собственным подмножеством в $[m]$. В этом случае, чтобы подчеркнуть возникающую зависимость от множества $[m]$, мы будем использовать обозначение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}, [m]}$, а элементы множества $[m]$, не являющиеся вершинами \mathcal{K} , мы будем называть *призрачными вершинами*.

Пусть $\{i\}$ — некоторая призрачная вершина комплекса \mathcal{K} . Тогда кубический подкомплекс $\text{сс}(\mathcal{K}) \subset I^m$ целиком содержится в гипергранице $\{y_i = 1\}$ куба \mathbb{I}^m . Следующее утверждение легко вытекает из конструкции $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1.5. Пусть $\{i_1\}, \dots, \{i_k\}$ — призрачные вершины в \mathcal{K} . Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}, [m]} = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}, [m] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \times T^k,$$

где $T^k \subset \mathbb{T}^m \subset (\mathbb{D}^2)^m$ — координатный подтор, соответствующий подмножеству $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$.

Таким образом, если \mathcal{K} рассматривается как симплициальный комплекс на множестве, большем чем его множество вершин, то от соответствующего комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ отщепляется тор размерности, равной числу призрачных вершин.

ТЕОРЕМА 6.1.6. Пусть \mathcal{K} есть триангуляция $(n - 1)$ -мерной сферы. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ представляет собой $(m + n)$ -мерное (замкнутое) многообразие.

В более общем случае, если \mathcal{K} есть триангуляция многообразия, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \setminus \mu^{-1}(1, \dots, 1)$ является некомпактным многообразием. Здесь $(1, \dots, 1) \in \mathbb{I}^m$ — вершина конуса и $\mu^{-1}(1, \dots, 1) \cong T^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы построим разбиение полиэдра $|\text{cone } \mathcal{K}'|$ на «грани», аналогичные граням простого многогранника (причём наши грани будут в точности соответствовать граням многогранника в случае $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для некоторого простого P). Мы будем рассматривать вершины $\{i\} \in \mathcal{K}$ также и как вершины барицентрического подразбиения \mathcal{K}' , и положим

$$(6.3) \quad F_i := \text{st}_{\mathcal{K}'}\{i\}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Назовём F_i гипергранями нашего разбиения, и определим грани размерности i как непустые пересечения наборов из i гиперграней. В частности, вершины (0-мерные грани) нашего разбиения будут барицентрами $(n - 1)$ -мерных симплексов из \mathcal{K} . Для каждого такого барицентра b мы обозначим через U_b открытое подмножество в $\text{cone } \mathcal{K}'$, получаемое удалением всех граней, не содержащих b .

Предположим теперь, что \mathcal{K} является триангуляцией сферы. Тогда $|\text{cone } \mathcal{K}'|$ гомеоморфен n -мерному шару D^n , а подмножество U_b гомеоморфно открытому подмножеству в \mathbb{R}_{\geq}^n с сохранением размерностей граней. Так как каждая точка из $|\text{cone } \mathcal{K}'|$ содержится в некотором U_b , мы получаем, что $|\text{cone } \mathcal{K}'|$ является многообразием с углами (см. определение 3.4.3). Отождествив $|\text{cone } \mathcal{K}'|$ с $\text{cc}(\mathcal{K})$ (см. предложение 1.8.8) и далее отождествив $\text{cc}(\mathcal{K})$ с $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m$, мы видим, что каждая точка из $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ лежит в окрестности, гомеоморфной открытому подмножеству в $(D^2)^n \times T^{m-n}$, а значит и в \mathbb{R}^{m+n} . Тем самым $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является $(m + n)$ -мерным многообразием.

Если \mathcal{K} является триангуляцией многообразия, то $|\text{cone } \mathcal{K}'|$, вообще говоря, не является многообразием с углами из-за особенности в вершине v конуса. Однако удалив эту вершину, мы получим некомпактное многообразие с границей $|\mathcal{K}|$. Используя разбиение на грани (6.3), мы получим, что $|\text{cone } \mathcal{K}'| \setminus v$ является некомпактным многообразием с углами. При отождествлении $|\text{cone } \mathcal{K}'|$ с $\text{cc}(\mathcal{K})$ вершина конуса переходит в вершину $(1, \dots, 1) \in \mathbb{I}^m$, причём $\mu^{-1}(1, \dots, 1) \cong T^m$. Поэтому

$$\mu^{-1}(\text{cc}(\mathcal{K}) \setminus (1, \dots, 1)) = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \setminus \mu^{-1}(1, \dots, 1)$$

является $(m + n)$ -мерным некомпактным многообразием. \square

В завершение этого раздела мы приведём обобщение конструкции момент-угол-комплекса на произвольные пары пространств.

КОНСТРУКЦИЯ 6.1.7 (\mathcal{K} -степень). Пусть X — некоторое пространство и $W \subset X$ — его подпространство. Для произвольного симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ и $\sigma \in \mathcal{K}$ положим

$$(X, W)^\sigma := \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m : x_j \in W \text{ при } j \notin \sigma\}$$

и

$$(X, W)^\mathcal{K} := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (X, W)^\sigma = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in \sigma} X \times \prod_{i \notin \sigma} W \right).$$

Подпространство $(X, W)^\mathcal{K} \subset X^m$ мы будем называть \mathcal{K} -степенью пары (X, W) (другие названия и обозначения: \mathcal{K} -произведение, обобщённый момент-угол-комплекс). На категорном языке,

$$(X, W)^\mathcal{K} = \operatorname{colim} D(X, W),$$

где $D(X, W)$ — диаграмма пространств над $\operatorname{CAT}(\mathcal{K})$, сопоставляющая вложению симплексов $\tau \subset \sigma$ из \mathcal{K} вложение пространств $(X, W)^\tau \subset (X, W)^\sigma$.

Если X — пространство с отмеченной точкой $*$ и $W = *$, то мы будем использовать сокращённое обозначение $X^\mathcal{K} := (X, *)^\mathcal{K}$.

Важнейшим свойством этой конструкции является её *функториальность*: отображение пар пространств $(X, W) \rightarrow (X', W')$, т.е. коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ W' & \hookrightarrow & X', \end{array}$$

индуцирует отображение $(X, W)^\mathcal{K} \rightarrow (X', W')^\mathcal{K}$.

ПРИМЕР 6.1.8. 1. Кубический комплекс $\operatorname{ss}(\mathcal{K})$ из (1.21) совпадает с \mathcal{K} -степенью $(\mathbb{I}^1, 1)^\mathcal{K}$, где 1 — конец отрезка $\mathbb{I}^1 = [0, 1]$.

2. Для исходного момент-угол-комплекса мы имеем $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)^\mathcal{K}$.

Далее мы встретимся с другими важными примерами конструкции обобщённых момент-угол-комплексов.

6.2. Конструкция Бореля и пространство Дэвиса–Янушкевича

Классифицирующее пространство окружности \mathbb{S}^1 отождествляется с бесконечномерным комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^\infty$. Классифицирующее пространство $B\mathbb{T}^m$ для m -мерного тора представляет собой произведение m экземпляров $\mathbb{C}P^\infty$. Когомологии пространства $B\mathbb{T}^m$ изоморфны кольцу многочленов $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$, $\deg v_i = 2$ (как обычно, мы рассматриваем когомологии с целыми коэффициентами, если явно не указано другое кольцо коэффициентов). Тотальное пространство $E\mathbb{T}^m$ универсального

\mathbb{T}^m -расслоения над $B\mathbb{T}^m$ можно отождествить с произведением m экземпляров бесконечномерной сферы.

В [DJ91] было рассмотрено гомотопическое факторпространство момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ по действию \mathbb{T}^m (конструкция Бореля, см. определение III.1), которое мы будем называть *пространством Дэвиса–Янушкевича*:

$$DJ(\mathcal{K}) := E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

Таким образом, имеется расслоение $p: DJ(\mathcal{K}) \rightarrow B\mathbb{T}^m$ со слоем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Согласно [DJ91, Th. 4.8], кольцо когомологий пространства $DJ(\mathcal{K})$ (или кольцо эквивариантных когомологий пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$) изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$. Этот результат будет непосредственно вытекать из описанной ниже альтернативной геометрической конструкции пространства $DJ(\mathcal{K})$, которая также имеет ряд других приложений.

Пространство $B\mathbb{T}^m$ допускает каноническое клеточное разбиение, при котором каждый сомножитель $\mathbb{C}P^{\infty}$ имеет по одной клетке в каждой чётной размерности. Для каждого подмножества $\omega \subset [m]$ определим подкомплекс

$$B\mathbb{T}^{\omega} := \{(x_1, \dots, x_m) \in B\mathbb{T}^m : x_i = * \text{ если } i \notin \omega\},$$

где $*$ обозначает отмеченную точку (0-мерную клетку) в $\mathbb{C}P^{\infty}$. Теперь для данного симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ определим следующий клеточный подкомплекс:

$$(6.4) \quad B\mathbb{T}^{\mathcal{K}} := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} B\mathbb{T}^{\sigma} \subset B\mathbb{T}^m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В обозначениях конструкции 6.1.7 мы имеем

$$B\mathbb{T}^{\omega} = (\mathbb{C}P^{\infty}, *)^{\omega} \quad \text{и} \quad B\mathbb{T}^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}}.$$

ПРИМЕР 6.2.1. 1. Пусть \mathcal{K} представляет собой набор из m точек. Тогда $B\mathbb{T}^{\mathcal{K}} = \mathbb{C}P^{\infty} \vee \dots \vee \mathbb{C}P^{\infty}$ (*букет m экземпляров $\mathbb{C}P^{\infty}$*).

2. Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$. Тогда пространство $B\mathbb{T}^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}P^{\infty})^{\partial\Delta^{m-1}}$ известно в топологии под названием *толстого букета m экземпляров пространства $\mathbb{C}P^{\infty}$* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2.2. *Кольцо когомологий пространства $B\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$ изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$. Вложение клеточного подкомплекса $i: B\mathbb{T}^{\mathcal{K}} \hookrightarrow B\mathbb{T}^m$ индуцирует эпиморфизм в когомологиях:*

$$i^*: \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / \mathcal{I}_{\mathcal{K}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_j^{2k} обозначает $2k$ -мерную клетку в j -м сомножителе из $B\mathbb{T}^m$, а $C^*(B\mathbb{T}^m)$ — комплекс клеточных коцепей. Так как пространство $B\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$ имеет клетки лишь в чётных размерностях, мы имеем $C^*(B\mathbb{T}^{\mathcal{K}}) = H^*(B\mathbb{T}^{\mathcal{K}})$ и вложение i индуцирует эпиморфизм $i^*: \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] \rightarrow H^*(B\mathbb{T}^{\mathcal{K}})$. При отождествлении $C^*(B\mathbb{T}^m)$ с $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ клеточная коцепь $(D_{j_1}^{2k_1} \dots D_{j_p}^{2k_p})^*$

переходит в моном $v_{j_1}^{k_1} \cdots v_{j_p}^{k_p}$. Если $\{j_1, \dots, j_p\} \notin \mathcal{K}$, то клетка $D_{j_1}^{2k_1} \cdots D_{j_p}^{2k_p}$ отсутствует в $B\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$, и поэтому идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ содержится в ядре отображения i^* . Таким образом, мы получаем эпиморфизм $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] \rightarrow H^*(B\mathbb{T}^{\mathcal{K}})$. Наконец, комбинаторный рассуждение, аналогичное использованному в доказательстве леммы 2.1.6, показывает, что число $2k$ -мерных клеток в $B\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$ равно размерности $2k$ -мерной градуированной компоненты кольца $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$. Следовательно, последний эпиморфизм на самом деле является изоморфизмом. \square

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *слабой деформационной ретракцией*, если оно является гомотопической эквивалентностью и существует отображение $g: Y \rightarrow X$, такое, что композиция $f \circ g: Y \rightarrow Y$ гомотопна тождественному отображению.

ТЕОРЕМА 6.2.3. *Имеется слабая деформационная ретракция $DJ(\mathcal{K}) \rightarrow B\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$, такая, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} DJ(\mathcal{K}) & \xrightarrow{p} & B\mathbb{T}^m \\ \downarrow & & \parallel \\ B\mathbb{T}^{\mathcal{K}} & \xrightarrow{i} & B\mathbb{T}^m \end{array}$$

коммулативна с точностью до гомотопии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} B_{\sigma}$, см. (6.2), и каждое подпространство B_{σ} является \mathbb{T}^m -инвариантным. Следовательно, мы имеем следующее разложение конструкции Бореля:

$$DJ(\mathcal{K}) = E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} B_{\sigma}.$$

Другими словами,

$$DJ(\mathcal{K}) = (ES^1 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{D}^2, ES^1 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}}.$$

Кроме того, $B\mathbb{T}^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}P^{\infty}, *)^{\mathcal{K}}$. Далее мы воспользуемся functorialностью конструкции 6.1.7 \mathcal{K} -степени.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(6.5) \quad \begin{array}{ccccc} * & \longrightarrow & ES^1 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^{\infty} & \xrightarrow{i_0} & ES^1 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{C}P^{\infty}, \end{array}$$

где i_0 — вложение нулевого сечения в расслоение на диски, а T — отображение пространства расслоения на его пространство Тома $ES^1 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{D}^2 / ES^1 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{S}^1$ (которое отождествляется с $\mathbb{C}P^{\infty}$). Так как $ES^1 \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^{\infty}$ — стягиваемое пространство, отображение T гомотопно тождественному. Отображение i_0 также гомотопно тождественному. Следовательно, горизонтальные стрелки диаграммы 6.5

определяют слабую деформационную ретракцию пар

$$(ES^1 \times_{S^1} \mathbb{D}^2, ES^1 \times_{S^1} S^1) \rightarrow (CP^\infty, *).$$

Отсюда и из функториальности \mathcal{K} -степени вытекает требуемая слабая деформационная ретракция $DJ(\mathcal{K}) \rightarrow BT^{\mathcal{K}}$.

Второе утверждение о коммутативности с точностью до гомотопии диаграммы, указанной в условии теоремы, вытекает из рассмотрения диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} ES^1 \times_{S^1} S^1 & \longrightarrow & ES^1 \times_{S^1} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{p} & CP^\infty \\ \downarrow & & \downarrow T & & \parallel \\ * & \longrightarrow & CP^\infty & \xrightarrow{=} & CP^\infty, \end{array}$$

которая коммутативна с точностью до гомотопии, и функториальности конструкции \mathcal{K} -степени. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в диаграмме (6.5) отображение T заменить на проекцию расслоения дисков, то нижняя строка будет задавать деформационную ретракцию (не слабую) $ES^1 \times_{S^1} \mathbb{D}^2 \rightarrow CP^\infty$. Однако при этом диаграмма (6.5) перестаёт быть коммутативной (она будет коммутативной лишь с точностью до гомотопии), и поэтому нельзя напрямую воспользоваться функториальностью \mathcal{K} -степени для построения ретракции $DJ(\mathcal{K}) \rightarrow BT^{\mathcal{K}}$.

СЛЕДСТВИЕ 6.2.4. *Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является гомотопическим слоем клеточного вложения $i: BT^{\mathcal{K}} \hookrightarrow BT^m$.*

СЛЕДСТВИЕ 6.2.5 ([DJ91, Th. 4.8]). *Кольцо эквивариантных когомологий момент-угол-комплекса $H_{T^m}^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H^*(DJ(\mathcal{K}))$ изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$. Проекция $p: DJ(\mathcal{K}) \rightarrow BT^m$ индуцирует в когомологиях проекцию на факторкольцо*

$$p^*: \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из теоремы 6.2.3 и предложения 6.2.2. \square

Принимая во внимание результат теоремы 6.2.3, мы далее будем использовать обозначение $DJ(\mathcal{K})$ также и для клеточного комплекса $BT^{\mathcal{K}}$ и называть *пространствами Дэвиса–Янушкевича* весь класс пространств, гомотопически эквивалентных $DJ(\mathcal{K})$.

Возникает важный вопрос: в какой мере изоморфизм между кольцом когомологий пространства X и кольцом граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ определяет гомотопический тип X ? Другими словами, существует ли для данного симплициального комплекса \mathcal{K} «фальшивое» пространство Дэвиса–Янушкевича, кольцо когомологий которого изоморфно $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, но которое не является гомотопически эквивалентным $DJ(\mathcal{K})$? Этот вопрос изучался в работе [NR05].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2.6 ([NR05, Prop. 5.11]). Пусть $\mathbb{Q}[\mathcal{K}]$ является кольцом полного пересечения (это условие эквивалентно тому, что \mathcal{K} является соединением симплекса и нескольких экземпляров границ симплекса, см. конструкцию 1.6.1), а X — нильпотентный клеточный комплекс конечного типа, для которого $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\mathcal{K}]$. Тогда X рационально гомотопически эквивалентен пространству $DJ(\mathcal{K})$.

Из конструкций этого раздела можно извлечь следующую информацию о гомотопических группах момент-угол-комплекса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2.7. 1. Комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является 2-связным (т.е. $\pi_1(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \pi_2(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$), и $\pi_i(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \pi_i(DJ(\mathcal{K}))$ при $i \geq 3$.

2. Если \mathcal{K} является q -смежностным комплексом (т.е. любое q -элементное подмножество вершин порождает симплекс), то $\pi_i(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $i < 2q + 1$. Кроме того, $\pi_{2q+1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ есть свободная абелева группа, порождённая $(q+1)$ -элементными недостающими гранями в \mathcal{K} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $B\mathbb{T}^m$ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}^m, 2)$, и 3-мерный остов пространства $DJ(\mathcal{K})$ совпадает с 3-мерным остовом $B\mathbb{T}^m$. Если же \mathcal{K} является q -смежностным, то из (6.4) вытекает, что $(2q+1)$ -остовы пространств $DJ(\mathcal{K})$ и $B\mathbb{T}^m$ совпадают. Теперь оба утверждения легко вытекают из точной гомотопической последовательности отображения $DJ(\mathcal{K}) \rightarrow B\mathbb{T}^m$ с гомотопическим слоем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. \square

Вернёмся теперь к рассмотрению момент-угол-многообразий \mathcal{Z}_P , соответствующих простым многогранникам P . Пусть задана некоторая комбинаторная квазиторическая пара (P, Λ) (определение 4.2.2). Тогда в \mathbb{T}^m имеется подгруппа $K(\Lambda) \cong T^{m-n}$, свободно действующая на \mathcal{Z}_P , и задано квазиторическое многообразие $M = M(P, \Lambda) := \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ (см. предложение 4.3.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2.8. Конструкция Бореля $E\mathbb{T}^n \times_{\mathbb{T}^n} M$ гомотопически эквивалентна пространству $DJ(\mathcal{K}_P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K = K(\Lambda)$ свободно действует на \mathcal{Z}_P , мы имеем

$$\begin{aligned} DJ(\mathcal{K}_P) &= E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} \mathcal{Z}_P \cong \\ &\cong EK \times (E(\mathbb{T}^m/K) \times_{\mathbb{T}^m/K} (\mathcal{Z}_P/K)) \simeq E\mathbb{T}^n \times_{\mathbb{T}^n} M. \end{aligned}$$

\square

Отсюда и из следствия 6.2.5 получаем следующее утверждение (которое также вытекает из общего утверждения 5.5.10 для локально стандартных T -многообразий).

СЛЕДСТВИЕ 6.2.9. Для любого квазиторического многообразия M над P имеем изоморфизм колец:

$$H_{\mathbb{T}^n}^*(M) \cong \mathbb{Z}[P].$$

Мы также можем получить доказательство теоремы 4.5.4 о когомологиях квазиторического многообразия, независимое от результатов главы 5.

ЛЕММА 6.2.10 ([DJ91, Th. 4.12]). Спектральная последовательность Серра расслоения

$$E\mathbb{T}^n \times_{\mathbb{T}^n} M \rightarrow B\mathbb{T}^n$$

со слоем M вырождается в члене E_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B\mathbb{T}^n$ и M имеют клетки лишь в чётных размерностях (см. предложение 4.5.2), все дифференциалы в рассматриваемой спектральной последовательности тривиальны по соображениям размерности. \square

СЛЕДСТВИЕ 6.2.11. Проекция $E\mathbb{T}^n \times_{\mathbb{T}^n} M \rightarrow B\mathbb{T}^n$ индуцирует мономорфное отображение $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathbb{Z}[P]$ в когомологиях. Вложение слоя $M \hookrightarrow E\mathbb{T}^n \times_{\mathbb{T}^n} M$ индуцирует эпиморфное отображение $\mathbb{Z}[P] \rightarrow H^*(M)$.

Отсюда также вытекает, что ядро проекции $\mathbb{Z}[P] \rightarrow H^*(M)$ есть в точности идеал $\mathcal{J}_\Lambda = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, что завершает доказательство теоремы 4.5.4.

6.3. Клеточное разбиение момент-угол-комплекса

Рассмотрим клеточное разбиение полидиска $(\mathbb{D}^2)^m$, при котором каждый сомножитель \mathbb{D}^2 разбивается на клетки 1, T и D размерностей 0, 1 и 2 соответственно, см. рис. 6.1. Каждая клетка в $(\mathbb{D}^2)^m$

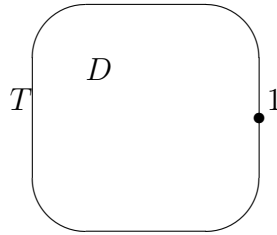


Рис. 6.1

таким образом является произведением клеток трёх различных типов, и мы будем задавать такие клетки словами $\kappa \in \{D, T, 1\}^m$ в «алфавите» из трёх букв. Каждой паре непересекающихся подмножеств $\sigma, \omega \subset [m]$, $\sigma \cap \omega = \emptyset$, мы сопоставим слово $\kappa(\sigma, \omega)$, в котором на позициях с номерами из σ стоит D , на позициях с номерами из ω стоит T , а на оставшихся позициях стоит 1 .

ЛЕММА 6.3.1. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является клеточным подкомплексом в $(\mathbb{D}^2)^m$ относительно описанного выше клеточного разбиения. Клетка $\kappa(\sigma, \omega) \subset (\mathbb{D}^2)^m$ лежит в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \cup_{\sigma \in \mathcal{K}} B_{\sigma}$, а каждое подпространство B_{σ} является замыканием клетки $\kappa(\sigma, [m] \setminus \sigma)$. \square

Таким образом, мы можем рассмотреть комплекс клеточных коцепей $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, который имеет аддитивный базис из коцепей вида $\kappa(\sigma, \omega)^*$, двойственных к соответствующим клеткам. Введём биградуировку, положив

$$\text{bideg } \kappa(\sigma, \omega)^* = (-|\omega|, 2|\sigma| + 2|\omega|),$$

так что $\text{bideg } D = (0, 2)$, $\text{bideg } T = (-1, 2)$ и $\text{bideg } 1 = (0, 0)$. Так как клеточный дифференциал не меняет вторую градуировку, комплекс $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ распадается в сумму своих компонент с фиксированной второй градуировкой:

$$(6.6) \quad C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \bigoplus_{q=1}^m C^{*,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}).$$

Тем самым когомологии момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ приобретают дополнительную градуировку, и мы определим биградуированные числа Бетти $b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, положив

$$(6.7) \quad b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) := \text{rank } H^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}), \quad 1 \leq p, q \leq m.$$

Для обычных чисел Бетти тогда имеет место соотношение

$$(6.8) \quad b^k(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \sum_{2q-p=k} b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}).$$

ЛЕММА 6.3.2. Пусть $\varphi: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ — симплициальное отображение между симплициальными комплексами на множествах $[m_1]$ и $[m_2]$ соответственно. Тогда индуцированное отображение полиэдров $|\text{cone } \mathcal{K}'_1| \rightarrow |\text{cone } \mathcal{K}'_2|$ накрывается эквивариантным клеточным отображением $\varphi_{\mathcal{Z}}: \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим отображение полидисков

$$\varphi_D: (\mathbb{D}^2)^{m_1} \rightarrow (\mathbb{D}^2)^{m_2}, \quad (z_1, \dots, z_{m_1}) \mapsto (w_1, \dots, w_{m_2}),$$

где

$$w_j = \prod_{i \in \varphi^{-1}(j)} z_i, \quad 1 \leq j \leq m_2,$$

(мы полагаем $w_j = 1$, если $\varphi^{-1}(j) = \emptyset$). Пусть $\tau \in \mathcal{K}_1$. В обозначениях (6.1) мы имеем $\varphi_D(B_{\tau}) \subset B_{\varphi(\tau)}$. Так как φ — симплициальное отображение, $\varphi(\tau) \in \mathcal{K}_2$ и $B_{\varphi(\tau)} \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$. Следовательно, ограничение φ_D на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}$ даёт требуемое отображение. \square

СЛЕДСТВИЕ 6.3.3. *Соответствие $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ задаёт функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений. Оно также индуцирует естественное преобразование между функтором симплициальных коцепей на \mathcal{K} и функтором клеточных коцепей на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.*

Заметим также, что все отображения сохраняют биградуировку, так что биградуированные числа Бетти также функториальны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 6.3.2 обобщается на обобщённые момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}(X, W)$ в случае, когда X допускает ассоциативное умножение с единицей, т.е. является *топологическим моноидом*, а W — подмоноидом.

6.4. Кольцо когомологий момент-угол-комплекса

Основной результат этого раздела (теорема 6.4.6) устанавливает изоморфизм между алгеброй целочисленных когомологий момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и Тог-алгеброй симплициального комплекса \mathcal{K} . Вначале данный результат был доказан в [БП99] лишь для рациональных коэффициентов, при помощи спектральной последовательности Эйленберга–Мура расслоения $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow DJ(\mathcal{K}) \rightarrow VT^m$ (см. раздел 6.2). Предлагаемое здесь новое доказательство, впервые опубликованное в [ББП04] и [БП04-2], устанавливает изоморфизм целочисленных когомологий и основано на конструкции клеточного разбиения из раздела 6.3 и анализе соответствующих клеточных коцепей.

Одним из основных шагов в доказательстве является построение специальной клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta: \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Клеточные коцепи не допускают функториального ассоциативного умножения, так как клеточная аппроксимация диагонального отображения, обладающая требуемыми свойствами, вообще говоря, отсутствует. Однако мы показываем, что в случае момент-угол-комплексов имеется клеточная аппроксимация диагонального отображения, которая функториальна по отношению к отображениям момент-угол-комплексов, индуцированных симплициальными отображениями. Соответствующая алгебра клеточных коцепей получается факторизацией комплекса Кошуля кольца $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ по ациклическому идеалу, а её когомологии изоморфны Тог-алгебре комплекса \mathcal{K} . Основные результаты были получены в [ББП04]; мы же следуем более детальному изложению в [БП04-1]. Другое доказательство теоремы 6.4.6 вытекает из результатов работы Франца [Fr06, Th. 1.2].

6.4.1. Алгебраическая модель для клеточных коцепей.

Наша модель для клеточных коцепей комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ будет получаться факторизацией алгебры Кошуля $[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d]$ (см.

лемму 2.2.4) по некоторому ациклическому идеалу, как описано в следующей конструкции.

КОНСТРУКЦИЯ 6.4.1. Введём факторалгебру

$$R^*(\mathcal{K}) := \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] / (v_i^2 = u_i v_i = 0, 1 \leq i \leq m),$$

где дифференциал и биградуировка заданы как в (I.3). Рассмотрим каноническую проекцию

$$\rho: \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] \rightarrow R^*(\mathcal{K}).$$

Алгебра $R^*(\mathcal{K})$ имеет конечный аддитивный базис из мономов вида $u_\omega v_\sigma$, где $\omega \subset [m]$, $\sigma \in \mathcal{K}$ и $\omega \cap \sigma = \emptyset$ (напомним, что мы используем обозначение $u_\omega = u_{i_1} \dots u_{i_k}$ для $\omega = \{i_1, \dots, i_k\}$). Таким образом, мы имеем аддитивное вложение (моморфизм биградуированных дифференциальных модулей)

$$\iota: R^*(\mathcal{K}) \rightarrow \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}],$$

которое удовлетворяет соотношению $\rho \cdot \iota = \text{id}$.

Следующее утверждение показывает, что конечномерная факторалгебра $R^*(\mathcal{K})$ имеет те же когомологии, что и алгебра Кошуля $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$.

ЛЕММА 6.4.2. *Гомоморфизм $\rho: \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] \rightarrow R^*(\mathcal{K})$ дифференциальных биградуированных алгебр является квазиизоморфизмом, т.е. индуцирует изоморфизм когомологий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводимое рассуждение аналогично использованному в доказательстве ациклическости резольвенты Кошуля (см. конструкцию I.3). Мы построим оператор s , являющийся коцепной гомотопией между отображениями id и $\iota \cdot \rho$ из $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ в себя, т.е. удовлетворяющий соотношению

$$(6.9) \quad ds + sd = \text{id} - \iota \cdot \rho.$$

Вначале рассмотрим случай $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$. В этом случае алгебра $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ совпадает с резольвентой Кошуля (I.4), которую мы будем обозначать

$$(6.10) \quad E = E_m = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m],$$

а алгебра $R^*(\mathcal{K})$ изоморфна алгебре

$$(6.11) \quad (\Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v] / (v^2 = uv = 0))^{\otimes m}.$$

При $m = 1$ отображение $s_1: E^{0,*} = \mathbb{Z}[v] \rightarrow E^{-1,*}$, определённое по формуле

$$s_1(a_0 + a_1 v + \dots + a_j v^j) = (a_2 v + a_3 v^2 + \dots + a_j v^{j-1})u,$$

является коцепной гомотопией. Действительно, любой элемент из E имеет вид x или xu , где $x = a_0 + a_1 v + \dots + a_j v^j \in E^{0,*}$. В первом случае мы имеем $ds_1 x = x - a_0 - a_1 v = x - \iota \rho x$, а $s_1 dx = 0$.

Во втором случае, т.е. для $xu \in E^{-1,*}$, мы имеем $ds_1(xu) = 0$, а $s_1d(xu) = xu - a_0u = xu - \iota\rho(xu)$. В любом случае имеет место соотношение (6.9).

Далее мы можем предположить по индукции, что для $m = k - 1$ уже построен оператор коцепной гомотопии $s_{k-1}: E_{k-1} \rightarrow E_{k-1}$. Так как $E_k = E_{k-1} \otimes E_1$, $\rho_k = \rho_{k-1} \otimes \rho_1$ и $\iota_k = \iota_{k-1} \otimes \iota_1$, непосредственная проверка показывает, что отображение

$$s_k = s_{k-1} \otimes \text{id} + \iota_{k-1}\rho_{k-1} \otimes s_1$$

является коцепной гомотопией между id и $\iota_k\rho_k$, что завершает доказательство для $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$.

В случае произвольного комплекса \mathcal{K} алгебры $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ и $R^*(\mathcal{K})$ получаются факторизацией алгебр (6.10) и (6.11) по идеалу $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$. При этом мы имеем

$$\iota\rho(\mathcal{I}_{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{K}}, \quad d(\mathcal{I}_{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{K}}, \quad s(\mathcal{I}_{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$$

(заметим, что последнее свойство не выполнено для оператора s , используемого в доказательстве ацикличности резольвенты Кошуля). Таким образом, тождество (6.9) по-прежнему выполнено. \square

Сравнивая структуры дифференциальных градуированных модулей в $R^*(\mathcal{K})$ и клеточном коцепном комплексе $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ (см. раздел 6.3), мы видим что они совпадают, как описано в следующем утверждении.

ЛЕММА 6.4.3. *Отображение*

$$g: R^*(\mathcal{K}) \rightarrow C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}), \quad u_\omega v_\sigma \mapsto \kappa(\sigma, \omega)^*,$$

является изоморфизмом дифференциальных (би)градуированных модулей. В частности, имеет место аддитивный изоморфизм

$$H[R^*(\mathcal{K})] \cong H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}).$$

Отождествив алгебру $R^*(\mathcal{K})$ с клеточными коцепями момент-угол-комплекса мы можем дать топологическую интерпретацию изоморфизму когомологий из леммы 6.4.2. Для этого мы отождествим алгебру $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ с клеточными коцепями некоторого пространства, гомотопически эквивалентного комплексу $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Пусть \mathbb{S}^∞ — бесконечномерная сфера, получаемая как прямой предел (объединение) вложенных стандартным образом друг в друга нечётномерных сфер. Каждую нечётномерную сферу \mathbb{S}^{2k+1} можно получить из сферы \mathbb{S}^{2k-1} путём приклеивания двух клеток размерностей $2k$ и $2k + 1$:

$$\mathbb{S}^{2k+1} \cong (\mathbb{S}^{2k-1} \cup_f \mathbb{D}^{2k}) \cup_g \mathbb{D}^{2k+1}.$$

Здесь отображение $f: \partial\mathbb{D}^{2k} \rightarrow \mathbb{S}^{2k-1}$ тождественно (и имеет степень 1), а отображение $g: \partial\mathbb{D}^{2k+1} = \mathbb{S}^{2k} \rightarrow \mathbb{D}^{2k}$ есть проекция сферы на экваториальную плоскость (и имеет степень 0). Отсюда вытекает, что пространство \mathbb{S}^∞ стягиваемо и имеет клеточное разбиение

с одной клеткой в каждой размерности, причём граница чётномерной клетки есть замыкание нечётномерной клетки, а граница нечётномерной клетки есть нуль. Двумерным остовом этого разбиения является диск \mathbb{D}^2 , разбитый на клетки как на рис. 6.1, а одномерным — окружность $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^\infty$. Соответствующий комплекс клеточных коцепей для \mathbb{S}^∞ можно отождествить с алгеброй

$$\Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v], \quad \deg u = 1, \deg v = 2, \quad du = v, dv = 0.$$

Из функториальности конструкции \mathcal{K} -степени вытекает, что имеет место деформационная ретракция на подкомплекс:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}} \hookrightarrow (\mathbb{S}^\infty, \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}}.$$

Кроме того, клеточные коцепи \mathcal{K} -степени $(\mathbb{S}^\infty, \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}}$ отождествляются с $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]$. Так как $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \subset (\mathbb{S}^\infty, \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}}$ является деформационным ретрактом, отображение клеточных коцепей

$$\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] = C^*((\mathbb{S}^\infty, \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}}) \rightarrow C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = R^*(\mathcal{K})$$

индуцирует изоморфизм в когомологиях. Так как это отображение на самом деле является гомоморфизмом алгебр, оно является квазиизоморфизмом. На самом деле оператор коцепной гомотопии, построенный в доказательстве леммы 6.4.2 есть не что иное, как оператор, индуцируемый на коцепях описанной выше гомотопией.

6.4.2. Клеточная аппроксимация диагонали. Здесь мы устанавливаем мультипликативный изоморфизм когомологий в лемме 6.4.3. Трудность здесь заключается в том, что в клеточных коцепях, вообще говоря, нет функториального ассоциативного умножения. Классическое определение умножения в когомологиях включает диагональное отображение, которое не является клеточным. Однако в нашем случае удаётся построить каноническую аппроксимацию диагонального отображения $\Delta: \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ так, что соответствующее умножение в клеточных коцепях совпадает с умножением в алгебре $R^*(\mathcal{K})$.

Стандартное определение умножения в когомологиях пространства X через клеточные коцепи [ФФ89] заключается в следующем. Рассмотрим сквозное отображение комплексов клеточных коцепей

$$(6.12) \quad C^*(X) \otimes C^*(X) \xrightarrow{\times} C^*(X \times X) \xrightarrow{\tilde{\Delta}^*} C^*(X).$$

Здесь отображение \times сопоставляет клеточной коцепи $c_1 \otimes c_2 \in C^{q_1}(X) \otimes C^{q_2}(X)$ коцепь $c_1 \times c_2 \in C^{q_1+q_2}(X \times X)$, которая на клетке $e_1 \times e_2 \in X \times X$ принимает значение $(-1)^{q_1 q_2} c_1(e_1) c_2(e_2)$. Отображение $\tilde{\Delta}^*$ индуцируется клеточной аппроксимацией $\tilde{\Delta}$ диагонального отображения $\Delta: X \rightarrow X \times X$. В когомологиях отображение (6.12)

индуцирует умножение $H^*(X) \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X)$, которое не зависит от выбора клеточной аппроксимации и функториально. Однако само отображение (6.12) не является функториальным именно в силу произвола в выборе клеточной аппроксимации.

Тем не менее, в специальном случае $X = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ мы можем применить следующую конструкцию.

КОНСТРУКЦИЯ 6.4.4 (аппроксимация для $\Delta: \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$). Рассмотрим отображение $\tilde{\Delta}: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$, заданное в полярных координатах $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{D}^2$, $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, следующим образом:

$$\rho e^{i\varphi} \mapsto \begin{cases} (1 + \rho(e^{2i\varphi} - 1), 1) & \text{при } \varphi \in [0, \pi], \\ (1, 1 + \rho(e^{2i\varphi} - 1)) & \text{при } \varphi \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Легко видеть, что это действительно клеточное отображение, переводящее $\partial\mathbb{D}^2$ в $\partial\mathbb{D}^2 \times \partial\mathbb{D}^2$, и гомотопное диагонали $\Delta: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$ в классе таких отображений. Взяв m -кратное произведение, получим клеточную аппроксимацию

$$\tilde{\Delta}: (\mathbb{D}^2)^m \rightarrow (\mathbb{D}^2)^m \times (\mathbb{D}^2)^m,$$

которая для любого симплициального комплекса \mathcal{K} ограничивается до клеточной аппроксимации диагонального отображения на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, как описано в следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & (\mathbb{D}^2)^m \\ \tilde{\Delta} \downarrow & & \downarrow \tilde{\Delta} \\ \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & (\mathbb{D}^2)^m \times (\mathbb{D}^2)^m. \end{array}$$

Заметим, что аппроксимация $\tilde{\Delta}$ функториальна относительно отображений момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$, индуцированных симплициальными отображениями $\mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ (см. лемму 6.3.2).

ЛЕММА 6.4.5. *Алгебра клеточных коцепей $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ с умножением, задаваемым при помощи клеточной аппроксимации диагонали $\tilde{\Delta}: \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и отображения (6.12), изоморфна алгебре $R^*(\mathcal{K})$. Таким образом, мы имеем изоморфизм алгебр когомологий:*

$$H[R^*(\mathcal{K})] \cong H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим случай $\mathcal{K} = \Delta^0$, т.е. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \mathbb{D}^2$. Клеточный коцепный комплекс $C^*(\mathbb{D}^2)$ аддитивно порождается коцепями $1 \in C^0(\mathbb{D}^2)$, $T^* \in C^1(\mathbb{D}^2)$ и $D^* \in C^2(\mathbb{D}^2)$, двойственными к соответствующим клеткам, см. рис. 6.1. Умножение в $C^*(\mathbb{D}^2)$, определяемое при помощи (6.12), тривиально, так что мы имеем мультипликативный изоморфизм

$$R^*(\Delta^0) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v]/(v^2 = uv = 0) \rightarrow C^*(\mathbb{D}^2).$$

Далее, рассмотрев m -кратное тензорное произведение, мы получим мультипликативный изоморфизм и для $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$:

$$f: R^*(\Delta^{m-1}) = \frac{\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}{(v_i^2 = u_i v_i = 0, 1 \leq i \leq m)} \rightarrow C^*((\mathbb{D}^2)^m).$$

Для произвольного \mathcal{K} мы имеем вложение клеточного подкомплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \subset (\mathbb{D}^2)^m$ и соответствующее мультипликативное отображение $q: C^*((\mathbb{D}^2)^m) \rightarrow C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R^*(\Delta^{m-1}) & \xrightarrow{f} & C^*((\mathbb{D}^2)^m) \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ R^*(\mathcal{K}) & \xrightarrow{g} & C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}). \end{array}$$

Здесь отображения p , f и q мультипликативны, а g является аддитивным изоморфизмом в силу леммы 6.4.3. Докажем, что g также мультипликативно. Пусть $\alpha, \beta \in R^*(\mathcal{K})$. Так как p — эпиморфизм, мы имеем $\alpha = p(\alpha')$ и $\beta = p(\beta')$. Тогда

$$g(\alpha\beta) = gp(\alpha'\beta') = qf(\alpha'\beta') = gp(\alpha')gp(\beta') = g(\alpha)g(\beta),$$

что и требовалось. Следовательно, g — мультипликативный изоморфизм, что завершает доказательство. \square

6.4.3. Основной результат и следствия. Комбинируя результаты лемм 2.2.4, 6.4.2 и 6.4.5, мы приходим к главному результату этого раздела.

ТЕОРЕМА 6.4.6. *Имеют место функториальные по \mathcal{K} изоморфизмы биградуированных алгебр*

$$H^{*,*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}) \cong H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d],$$

где биградуированная структура и дифференциал в последней алгебре определяются соотношениями (I.3).

Таким образом, биградуированные числа Бетти (6.7) момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ отождествляются с алгебраическими числами Бетти (2.1) кольца граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$; тем самым эти последние числа получают топологическую интерпретацию.

Теперь мы сведём результаты предложения 2.1.4, лемм 2.2.6 и 6.3.2, следствия 6.2.5 и теоремы 6.4.6 в следующем утверждении, описывающем функториальные свойства соответствия $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4.7. *Рассмотрим следующие функторы:*

- а) \mathcal{Z} , ковариантный функтор $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ из категории конечных симплицеальных комплексов и симплицеальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений;

- б) $\mathbf{k}[\cdot]$, контравариантный функтор $\mathcal{K} \mapsto \mathbf{k}[\mathcal{K}]$ из симплициальных комплексов в градуированные \mathbf{k} -алгебры (функтор кольца граней; здесь \mathbf{k} — произвольное коммутативное кольцо с единицей);
- в) Tor-alg , контравариантный функтор

$$\mathcal{K} \mapsto \text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$$

из симплициальных комплексов в биградуированные \mathbf{k} -алгебры (этот функтор можно получить как композицию $\mathbf{k}[\cdot]$ и $\text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\cdot, \mathbf{k})$);

- г) H_T^* , контравариантный функтор и $X \mapsto H_T^*(X; \mathbf{k})$ из категории пространств с действием тора и эквивариантных отображений в \mathbf{k} -алгебры (функтор эквивариантных когомологий);
- д) H^* , контравариантный функтор $X \mapsto H^*(X; \mathbf{k})$ из пространств в \mathbf{k} -алгебры (функтор обычных когомологий).

Тогда мы имеем следующие тождества:

$$H_T^* \circ \mathcal{Z} = \mathbf{k}[\cdot], \quad H^* \circ \mathcal{Z} = \text{Tor-alg}.$$

Из второго тождества вытекает, что для каждого симплициального отображения $\varphi: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ соответствующее отображение в когомологиях $\varphi_{\mathcal{Z}}^*: H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}) \rightarrow H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1})$ совпадает с индуцированным гомоморфизмом Tor -алгебр φ_t^* (2.3). В частности, отображение φ индуцирует гомоморфизм биградуированных когомологий $H^{-q, 2p}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}) \rightarrow H^{-q, 2p}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4.8. Пусть \mathcal{K} является $(n-1)$ -мерным комплексом Коэна–Маколея и \mathfrak{t} — регулярная последовательность длины n в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Тогда мы имеем следующий изоморфизм алгебр:

$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/(\mathfrak{t})}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]/(\mathfrak{t}), \mathbf{k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из теоремы 6.4.6 и следствия П.3. \square

Заметим, что алгебра $\mathbf{k}[\mathcal{K}]/(\mathfrak{t})$ имеет конечную размерность над \mathbf{k} (в отличие от $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$). В некоторых ситуациях это позволяет вычислять когомологии комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ более эффективно. Мы вернёмся к этому в разделе 6.5.

6.4.4. Описание умножения в терминах полных подкомплексов. В качестве одного из приложений нашего основного результата мы приведём описание когомологий момент-угол-комплекса (вместе с мультипликативной структурой) в терминах полных подкомплексов в \mathcal{K} , полученное Баскаковым [Ба02]. В качестве следствия получается доказательство теоремы Хохстера (теорема 2.2.2), вычисляющей алгебраические числа Бетти колец граней.

Вначале заметим, что биградуированная структура в комплексе клеточных коцепей пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ на самом деле проистекает из *мультиградуированной* структуры:

$$C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \bigoplus_{\omega \subset [m]} C^{*, 2\omega}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}),$$

где $C^{*, 2\omega}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ — подкомплекс, порождённый коцепями $\kappa(\sigma, \omega \setminus \sigma)^*$ с $\sigma \subset \omega$ и $\sigma \in \mathcal{K}$. Таким образом, $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ становится $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^m$ -градуированным модулем, и группы когомологий также раскладываются соответствующим образом:

$$(6.13) \quad H^{-i, 2j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \bigoplus_{\omega \subset [m]: |\omega|=j} H^{-i, 2\omega}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}),$$

где $H^{-i, 2\omega}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) := H^{-i}[C^{*, 2\omega}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})]$.

Напомним, что для каждого подмножества $\omega \subset [m]$ задан полный подкомплекс $\mathcal{K}_{\omega} = \{\sigma \in \mathcal{K} : \sigma \subset \omega\}$, т.е. ограничение \mathcal{K} на ω . Мы введём умножение в прямой сумме

$$\bigoplus_{\substack{p \geq -1 \\ \omega \subset [m]}} \tilde{H}^p(\mathcal{K}_{\omega})$$

(где как обычно $\tilde{H}^{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$) следующим образом. Рассмотрим два элемента $\alpha \in \tilde{H}^p(\mathcal{K}_{\omega_1})$ и $\beta \in \tilde{H}^q(\mathcal{K}_{\omega_2})$. Предположим сначала, что $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$. Тогда мы имеем вложение подкомплексов

$$i: \mathcal{K}_{\omega_1 \sqcup \omega_2} = \mathcal{K}_{\omega_1} \sqcup \mathcal{K}_{\omega_2} \hookrightarrow \mathcal{K}_{\omega_1} * \mathcal{K}_{\omega_2}$$

(где $*$ обозначает соединение комплексов, см. конструкцию 1.6.1) и изоморфизм приведённых симплициальных коцепей

$$f: \tilde{C}^p(\mathcal{K}_{\omega_1}) \otimes \tilde{C}^q(\mathcal{K}_{\omega_2}) \xrightarrow{\cong} \tilde{C}^{p+q+1}(\mathcal{K}_{\omega_1} * \mathcal{K}_{\omega_2}).$$

Теперь положим

$$a \cdot b := \begin{cases} 0, & \omega_1 \cap \omega_2 \neq \emptyset, \\ i^* f(a \otimes b) \in \tilde{H}^{p+q+1}(\mathcal{K}_{\omega_1 \sqcup \omega_2}), & \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 6.4.9 ([Ба02, теорема 1]). *Имеют место функториальные относительно симплициальных отображений изоморфизмы*

$$\tilde{H}^p(\mathcal{K}_{\omega}) \xrightarrow{\cong} H^{p+1-|\omega|, 2\omega}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}),$$

индуцирующие изоморфизм колец

$$\gamma: \bigoplus_{\substack{p \geq -1 \\ \omega \subset [m]}} \tilde{H}^p(\mathcal{K}_{\omega}) \xrightarrow{\cong} H^{*,*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение об изоморфизме групп когомологий вытекает из того факта, что соответствие $\sigma^* \mapsto \kappa(\sigma, \omega \setminus \sigma)^*$ определяет функториальный изоморфизм коцепных комплексов

$$\tilde{C}^*(K_\omega) \xrightarrow{\cong} C^{*+1-|\omega|, 2\omega}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}).$$

Утверждение об изоморфизме колец вытекает из изоморфизма $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H[R^*(\mathcal{K})]$ (лемма 6.4.5) и анализа мультипликативной структуры в $R^*(\mathcal{K})$. \square

СЛЕДСТВИЕ 6.4.10. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^{-i, 2j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{\omega \subset [m]: |\omega|=j} \tilde{H}^{j-i-1}(\mathcal{K}_\omega),$$

$$H^k(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{\omega \subset [m]} \tilde{H}^{k-|\omega|-1}(\mathcal{K}_\omega).$$

В качестве дальнейшего следствия мы получаем теорему Хохстера [Но77] в её изначальной формулировке:

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, *}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\omega \subset [m]} \tilde{H}^{|\omega|-i-1}(\mathcal{K}_\omega).$$

6.5. Биградуированные числа Бетти комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$

Здесь мы опишем основные свойства биградуированных чисел Бетти (6.7) на основе результатов предыдущего раздела и приведём некоторые конкретные примеры вычислений.

ЛЕММА 6.5.1. *Пусть \mathcal{K} — симплицальный комплекс размерности $n - 1$ с t вершинами и f_1 рёбрами; тогда $\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = t + n$. Мы имеем*

- а) $b^{0,0}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = b^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 1$ и $b^{0,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $q \neq 0$;
- б) $b^{-p,2q} = 0$ при $q > t$ или $p > q$;
- в) $b^1(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = b^2(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$;
- г) $b^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = b^{-1,4}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = C_m^2 - f_1$;
- д) $b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $p \geq q > 0$ или $q - p > n$;
- е) $b^{m+n}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = b^{-(m-n), 2m}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = b^{n-1}(\mathcal{K})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать дифференциальную алгебру $R^*(\mathcal{K})$, когомологии которой совпадают с $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Напомним, что $R^*(\mathcal{K})$ аддитивно порождается мономами $u_\omega v_\sigma$ с $\sigma \in \mathcal{K}$ и $\sigma \cap \omega = \emptyset$. Так как $\mathrm{bideg} v_i = (0, 2)$, $\mathrm{bideg} u_j = (-1, 2)$, биградуированная компонента $R^{-p,2q}(\mathcal{K})$ порождена мономами $u_\omega v_\sigma$ с $|\sigma| = q - p$ и $|\omega| = p$. В частности, $R^{-p,2q}(\mathcal{K}) = 0$ при $q > t$ или $p > q$, откуда вытекает утверждение б). Для доказательства а) заметим, что $R^{0,0}(\mathcal{K})$ порождается единицей, а любой элемент $v_\sigma \in R^{0,2q}(\mathcal{K})$ с $q > 0$ является кограницей, откуда $H^{0,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $q > 0$.

Теперь докажем утверждение д). Пусть $u_\omega v_\sigma \in R^{-p,2q}(\mathcal{K})$, тогда $\sigma \in \mathcal{K}$, а любой симплекс из \mathcal{K} имеет не более n вершин. Поэтому

Наш следующий результат позволяет выразить число симплексов данной размерности в \mathcal{K} (т.е. компоненты f -вектора) через биградуированные числа Бетти. Для этого рассмотрим эйлерову характеристику комплекса $C^{*,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ (см. (6.6)):

$$(6.14) \quad \chi_q(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) := \sum_{p=0}^m (-1)^p \operatorname{rank} C^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \sum_{p=0}^m (-1)^p b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$$

и определим порождающий многочлен

$$\chi(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; t) := \sum_{q=0}^m \chi_q(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) t^{2q}.$$

ТЕОРЕМА 6.5.2. *Для любого $(n-1)$ -мерного симплицеального комплекса \mathcal{K} с m вершинам имеет место соотношение:*

$$\chi(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; t) = (1-t^2)^{m-n} (h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n})$$

где (h_0, h_1, \dots, h_n) есть h -вектор комплекса \mathcal{K} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Биоднородная компонента $C^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ имеет базис из клеточных коцепей $\kappa(\sigma, \omega)^*$ с $\sigma \in \mathcal{K}$, $|\sigma| = q-p$ и $|\omega| = p$. Следовательно, $\operatorname{rank} C^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = f_{q-p-1} C_{m-q+p}^p$, где $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ — f -вектор комплекса \mathcal{K} и $f_{-1} = 1$. Подставляя это в (6.14), получаем

$$\chi_q(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \sum_{j=0}^m (-1)^{q-j} f_{j-1} C_{m-j}^{q-j},$$

Тогда

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \chi(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; t) &= \sum_{q=0}^m \sum_{j=0}^m t^{2j} t^{2(q-j)} (-1)^{q-j} f_{j-1} C_{m-j}^{q-j} = \\ &= \sum_{j=0}^m f_{j-1} t^{2j} (1-t^2)^{m-j} = (1-t^2)^m \sum_{j=0}^n f_{j-1} (t^{-2} - 1)^{-j}. \end{aligned}$$

Положим $h(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n$. Тогда из (1.8) получаем

$$t^n h(t^{-1}) = (t-1)^n \sum_{j=0}^n f_{j-1} (t-1)^{-j}.$$

Подставляя в последнем тождестве t^{-2} вместо t , мы окончательно можем переписать (6.15) как

$$\frac{\chi(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; t)}{(1-t^2)^m} = \frac{t^{-2n} h(t^2)}{(t^{-2} - 1)^n} = \frac{h(t^2)}{(1-t^2)^n},$$

что эквивалентно требуемому тождеству. \square

СЛЕДСТВИЕ 6.5.3. *Если $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$ (т.е. $m > n$), то эйлерова характеристика комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$\chi(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \sum_{p,q=0}^m (-1)^{-p+2q} b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \sum_{q=0}^m \chi_q(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \chi(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; 1),$$

и утверждение вытекает из соотношения теоремы 6.5.2. \square

Далее мы изучим свойства биградуированных чисел Бетти для различных специальных классов симплицальных комплексов.

ЛЕММА 6.5.4. *Пусть \mathcal{K} — ориентируемое $(n-1)$ -мерное псевдомногообразие (см. определение 5.8.14). Тогда образующая группы $H^{m+n}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ представляется любым мономом $v_{\sigma}u_{\omega} \in R^*(\mathcal{K})$ бистепени $(-(m-n), 2m)$, таким, что $\sigma \in \mathcal{K}$ и $\sigma \cap \omega = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $H^{m+n}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H^{-(m-n),2m}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ в силу леммы 6.5.1 е). Модуль $R^{-(m-n),2m}(\mathcal{K})$ порождается мономами $v_{\sigma}u_{\omega}$ с $\sigma \in \mathcal{K}$, $|\sigma| = n$, $\omega = [m] \setminus \sigma$. Каждый такой моном является коциклом. Пусть σ, σ' — два $(n-1)$ -симплекса в \mathcal{K} , имеющие общую $(n-2)$ -грань. Рассмотрим соответствующие коциклы $v_{\sigma}u_{\omega}$ и $v_{\sigma'}u_{\omega'}$ (где $\omega = [m] \setminus \sigma$, $\omega' = [m] \setminus \sigma'$):

$$\begin{aligned} v_{\sigma}u_{\omega} &= v_{i_1} \dots v_{i_n} u_{j_1} \dots u_{j_{m-n}}, \\ v_{\sigma'}u_{\omega'} &= v_{i_1} \dots v_{i_{n-1}} v_{j_1} u_{i_n} u_{j_2} \dots u_{j_{m-n}}. \end{aligned}$$

Так как \mathcal{K} является псевдомногообразием, любая $(n-2)$ -грань в \mathcal{K} содержится ровно в двух $(n-1)$ -гранях. Поэтому в алгебре $R^*(\mathcal{K})$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} d(v_{i_1} \dots v_{i_{n-1}} u_{i_n} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_{m-n}}) &= \\ &= v_{i_1} \dots v_{i_n} u_{j_1} \dots u_{j_{m-n}} - v_{i_1} \dots v_{i_{n-1}} v_{j_1} u_{i_n} u_{j_2} \dots u_{j_{m-n}} \end{aligned}$$

Следовательно, $[v_{\sigma}u_{\omega}] = [v_{\sigma'}u_{\omega'}]$ (как классы когомологий). Наконец, из свойства 3) в определении псевдомногообразия вытекает, что все мономы $v_{\sigma}u_{\omega} \in R^{-(m-n),2m}(\mathcal{K})$ с точностью до знака представляют один класс когомологий. Так как псевдомногообразие \mathcal{K} ориентируемо, этот класс когомологий ненулевой и является образующей группы $H^{m+n}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5.5. *Пусть \mathcal{K} является симплицальным разбиением $(n-1)$ -мерной сферы. Тогда двойственность Пуанкаре для соответствующего многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ сохраняет биградуированную структуру в когомологиях. В частности,*

$$b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = b^{-(m-n)+p,2(m-q)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}), \quad 0 \leq p \leq m-n, \quad 0 \leq q \leq m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как спаривание групп когомологий, задаваемое двойственностью Пуанкаре, определяется в терминах когомологического умножения, которое сохраняет биградуировку, двойственность Пуанкаре также сохраняет биградуировку. Мы

имеем $\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = m + n$, и в силу леммы 6.5.4

$$H^{m+n}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \text{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}^{-(m-n), 2m}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Отсюда вытекает соотношение на числа Бетти. \square

СЛЕДСТВИЕ 6.5.6. Пусть \mathcal{K} — симплицальная $(n-1)$ -сфера и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — соответствующее многообразие, $\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = m + n$. Тогда

- а) $b_{-p, 2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $p \geq m - n$, с единственным исключением $b_{-(m-n), 2m} = 1$;
- б) $b_{-p, 2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $q - p \geq n$, с единственным исключением $b_{-(m-n), 2m} = 1$.

Отсюда следует, что если $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$, то ненулевые биградуированные числа Бетти $b_{r, 2q}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ с $r \neq 0$ и $r \neq m - n$, могут появляться только в полосе, ограниченной прямыми $r = -(m - n - 1)$, $r = -1$, $q + r = 1$ и $q + r = n - 1$, см. рис 6.2 б).

Напомним, что пространство X называется *пространством с двойственностью Пуанкаре* (над \mathbf{k}), если $H^*(X; \mathbf{k})$ является алгеброй Пуанкаре (см. раздел 2.4). Следующее утверждение обобщает результат следствия 6.5.5.

ТЕОРЕМА 6.5.7. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является пространством с двойственностью Пуанкаре тогда и только тогда, когда \mathcal{K} является горенштейновым комплексом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \mathcal{K} является горенштейновым комплексом. Тогда алгебра A из теоремы 2.4.3 является алгеброй Пуанкаре, и мы имеем $\mathbf{k} \cong A^0 \cong \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^d, A^d)$, откуда $A^d \cong \mathbf{k}$. Так как мы работаем с градуированными кольцами, Тог-алгебра является биградуированной, следовательно, $A^d = A^{d, 2q}$ для некоторого $q \geq 0$. Так как умножение в Тог-алгебре согласовано с биградуировкой, изоморфизмы $A^i \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i}, A^d)$ из определения алгебры Пуанкаре задают изоморфизмы

$$A^{i, 2j} \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i, 2(q-j)}, A^{d, 2q}).$$

Пусть $H^k = H^k(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ и $H = \bigoplus_{k=0}^r H^k$; тогда $H^k = \bigoplus_{i+2j=k} A^{i, 2j}$ и $r = d + 2q$. Следовательно, мы имеем изоморфизмы

$$H^k = \bigoplus_{i+2j=k} A^{i, 2j} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i+2j=k} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i, 2(q-j)}, A^{d, 2q}) = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^{r-k}, H^r),$$

т.е. H является алгеброй Пуанкаре.

Предположим теперь, что $H = \bigoplus_{k=0}^r H^k$ является алгеброй Пуанкаре. Тогда

$$\mathbf{k} \cong H^r = \text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-d, 2q}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = A^{d, 2q}$$

для некоторых $d, q \geq 0$. Так как умножение с когомологиях $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ согласовано с биградуировкой, изоморфизмы $H^k \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(H^{r-k}, H^r)$

задают изоморфизмы

$$H^{-i, 2j} = A^{i, 2j} \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i, 2(q-j)}, A^{d, 2q}),$$

которые, в свою очередь, задают изоморфизмы

$$A^i = \bigoplus_j A^{i, 2j} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_j \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i, 2(q-j)}, A^d) = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i}, A^d).$$

Следовательно, A является алгеброй Пуанкаре. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 6.5.7 мы не предполагаем, что $r = \max\{k : H^k(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \neq 0\}$ совпадает с $\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Из приведённого доказательства вытекает, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является пространством с двойственностью Пуанкаре и $r = \dim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ тогда и только тогда, когда \mathcal{K} является горнштейновым* комплексом.

Теперь приведём примеры явных вычислений колец когомологий момент-угол-комплексов.

ПРИМЕР 6.5.8. Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$. Тогда

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / (v_1 \cdots v_m).$$

Образующая старшей группы когомологий сферы $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^{2m-1}$ представляется коциклом $u_1 v_2 v_3 \cdots v_m \in \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ бистепени $(-1, 2m)$.

ПРИМЕР 6.5.9. Пусть P — пятиугольник. Вычислим кольцо когомологий соответствующего момент-угол-многообразия \mathcal{Z}_P . Мы имеем $\dim \mathcal{Z}_P = 7$. Занумеруем вершины пятиугольника по циклу, так что соседние вершины имеют соседние индексы. Тогда группа $H^3(\mathcal{Z}_P)$ имеет 5 образующих, соответствующих диагоналям пятиугольника, и представленных коциклами $v_i u_{i+2} \in \mathbb{Z}[P] \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_5]$, $1 \leq i \leq 5$. Вычисление на основе теоремы 6.4.6 показывает, что группа $H^4(\mathcal{Z}_P)$ имеет 5 образующих, представленных коциклами $v_j u_{j+2} u_{j+3}$, $1 \leq j \leq 5$. Как вытекает из леммы 6.5.4, произведение коциклов $v_i u_{i+2}$ и $v_j u_{j+2} u_{j+3}$ представляет образующую в $H^7(\mathcal{Z}_P)$ тогда и только тогда, когда все индексы $i, i+2, j, j+2, j+3$ различны. Таким образом, для каждого из 5 классов когомологий $[v_i u_{i+2}]$ имеется единственный класс $[v_j u_{j+2} u_{j+3}]$, такой, что произведение $[v_i u_{i+2}] \cdot [v_j u_{j+2} u_{j+3}]$ не равно нулю.

Вычисление из предыдущего примера обобщается в следующем утверждении, описывающем мультипликативную структуру в когомологиях многообразия \mathcal{Z}_P , соответствующего m -угольнику P . Напомним, что *когомологической длиной* пространства X называется максимальное число $l = l(X)$, для которого существует набор классов когомологий $\{\alpha_i \in H^{>0}(X), 1 \leq i \leq l\}$ с ненулевым произведением $\alpha_1 \cdots \alpha_l$.

ТЕОРЕМА 6.5.10. Пусть P — некоторый m -угольник, $m \geq 4$. Тогда момент-угол-многообразие \mathcal{Z}_P имеет кохомологическую длину 2, не имеет кручения в кохомологиях, а числа Бетти задаются формулами

$$b^k(\mathcal{Z}_P) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, m + 2; \\ 0 & \text{при } k = 1, 2, m, m + 1; \\ (k - 2)C_{m-2}^{k-1} + (m - k)C_{m-2}^{m-k+1} & \text{при } 3 \leq k \leq m - 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о кохомологической длине вытекает из биградуированной структуры. Действительно, предположим, что $l(\mathcal{Z}_P) > 2$; тогда найдутся три ненулевых класса кохомологий $\alpha_i \in H^{-p_i, 2q_i}(\mathcal{Z}_P)$, $1 \leq i \leq 3$, положительной размерности с $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$. В силу леммы 6.5.1 д) мы имеем $q_i > p_i$, при $i = 1, 2, 3$. Тогда $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \in H^{-(p_1+p_2+p_3), 2(q_1+q_2+q_3)}$, где $(q_1 + q_2 + q_3) - (p_1 + p_2 + p_3) > 2$. Так как у нас $n = 2$, из второй части леммы 6.5.1 д) вытекает, что $H^{-(p_1+p_2+p_3), 2(q_1+q_2+q_3)} = 0$. Полученное противоречие показывает, что $l(\mathcal{Z}_P) \leq 2$. С другой стороны, кохомологии \mathcal{Z}_P нетривиальны в размерностях 3 и $m + 2$ (число $b^3(\mathcal{Z}_P)$ равно числу диагоналей m -угольника), так что $l(\mathcal{Z}_P)$ не может быть равно 1 в силу двойственности Пуанкаре.

Для вычисления чисел Бетти рассмотрим главное расслоение $p: \mathcal{Z}_P \rightarrow M$ со слоем T^{m-2} , где M — произвольное торическое многообразие над m -угольником P . Член E_2 спектральной последовательности Серра этого расслоения имеет вид

$$(6.16) \quad E_2 = [\Lambda[t_1, \dots, t_{m-2}] \otimes H^*(M), d_2]$$

(см. рис. 6.3). Из теоремы 4.5.4 вытекает, что $H^2(M) \cong \mathbb{Z}^{m-2}$. Так как $H^1(\mathcal{Z}_P) = H^2(\mathcal{Z}_P) = 0$, дифференциал $d_2^{0,1}: E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0}$ является изоморфизмом. Положим $d_2(t_i) = w_i \in H^2(M)$, $1 \leq i \leq m - 2$; тогда из мультипликативной структуры в члене E_2 вытекает, что все дифференциалы $d_2^{0,*}$ являются мономорфизмами.

Далее, из теоремы 4.5.4 вытекает, что $H^*(M) \cong \mathbb{Z}[P]/\mathcal{J}_\Lambda$. Тогда из (6.16) и леммы 2.2.4 мы получаем следующее вычисление члена E_3 спектральной последовательности:

$$\begin{aligned} E_3 &= H[\Lambda[t_1, \dots, t_{m-2}] \otimes \mathbb{Z}[P]/\mathcal{J}_\Lambda, d_2] = \\ &= \text{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{J}_\Lambda}(\mathbb{Z}[P]/\mathcal{J}_\Lambda, \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathcal{Z}_P), \end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из предложения 6.4.8. Следовательно, спектральная последовательность вырождается в члене E_3 .

Пусть f — классифицирующее отображение для расслоения p ; тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \longrightarrow & E\mathbb{T}^{m-2} \\ p \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & B\mathbb{T}^{m-2}. \end{array}$$

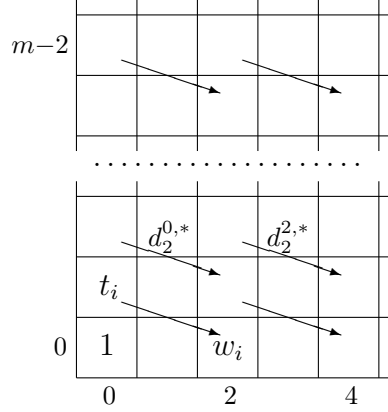


Рис. 6.3. Член E_2 спектральной последовательности расслоения $p: \mathcal{Z}_P \rightarrow M$.

Отображение $f^*: H^*(B\mathbb{T}^{m-2}) \rightarrow H^*(M)$ эпиморфно: его можно отождествить с проекцией

$$\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{J}_\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\Lambda).$$

Из коммутативной диаграммы расслоений вытекает, что отображение $p^*: H^*(M) \rightarrow H^*(\mathcal{Z}_P)$ является нулевым в положительных размерностях. Таким образом, в спектральной последовательности расслоения p мы имеем $E_\infty^{4,0} = 0$. Но так как последовательность вырождается в члене E_3 , мы имеем $E_3^{4,0} = 0$, откуда вытекает, что $d_2^{2,1}: E_2^{2,1} \rightarrow E_2^{4,0}$ является эпиморфизмом. Тогда из мультипликативной структуры в члене E_2 вытекает, что все дифференциалы $d_2^{2,*}$ являются эпиморфизмами.

Из вышеописанных свойств дифференциалов в члене E_2 вытекает, что при $3 \leq k \leq m - 1$

$$\begin{aligned} b^k(\mathcal{Z}_P) &= \text{rank } E_3^{2,k-2} = \text{rank } E_2^{2,k-2} - \text{rank } E_2^{0,k-1} - \text{rank } E_2^{4,k-3} = \\ &= (m-2)C_{m-2}^{k-2} - C_{m-2}^{k-1} - C_{m-2}^{k-3} = (k-2)C_{m-2}^{k-1} + (m-k)C_{m-2}^{m-k+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Любое n -мерное многообразие когомологической длины 2 имеет кольцо когомологий как у связной суммы нескольких экземпляров пространств вида $S^k \times S^{n-k}$. Поэтому утверждение теоремы 6.5.10 означает, что если P является m -угольником, то имеет место изоморфизм колец когомологий

$$(6.17) \quad H^*(\mathcal{Z}_P) \cong H^*\left(\#_{k=3}^{m-1} (S^k \times S^{m+2-k})^{\#(k-2)C_{m-2}^{k-1}}\right),$$

где $X^{\#k}$ обозначает связную сумму k экземпляров пространства X .

Недавно было доказано, что изоморфизм когомологий (6.17) происходит из диффеоморфизма соответствующих многообразий. Более того, имеет место следующее более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.5.11 ([ВМ06, Th. 6.3]). *Предположим, что n -мерный многогранник P получается из симплекса Δ^n последовательным применением $m - n - 1$ операций «срезания вершины». Тогда соответствующее момент-угол-многообразие диффеоморфно следующей связной сумме произведений сфер:*

$$\mathcal{Z}_P \cong \#_{k=3}^{m-n+1} (S^k \times S^{m+n-k}) \#^{(k-2)C_{m-n}^{k-1}}.$$

При $n = 2$ мы получаем диффеоморфизм многообразий из (6.17) (заметим, что любой m -угольник получается из 2-симплекса последовательным срезанием вершин). Заметим, что операция срезания вершины эквивалентна взятию связной суммы многогранника и симплекса (см. пример 1.1.10.2). По поводу операции срезания граней (и, в частности, вершин) см. также разделы 5.7 и 5.9.

6.6. Конфигурации координатных подпространств

Здесь мы отождествляем, с точностью до гомотопической эквивалентности, момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ с дополнением конфигурации комплексных координатных подпространств, соответствующей комплексу \mathcal{K} . Тем самым результаты и методы торической топологии находят приложения в теории конфигураций; в частности, даётся описание и эффективное вычисление колец когомологий дополнений координатных конфигураций, а в некоторых случаях также удаётся описать их гомотопический тип.

Конфигурации координатных подпространств в \mathbb{C}^m и их дополнения уже появлялись у нас в разделе 3.2 в связи с конструкцией Кокса торических многообразий. Здесь мы рассмотрим их с общих позиций.

Координатное подпространство \mathbb{C}^m можно задать в виде

$$(6.18) \quad L_\omega = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\},$$

где $\omega = \{i_1, \dots, i_k\}$ — некоторое подмножество в $[m]$.

КОНСТРУКЦИЯ 6.6.1. Для каждого симплицеального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ рассмотрим конфигурацию комплексных координатных подпространств (или *координатную конфигурацию*)

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \{L_\omega : \omega \notin \mathcal{K}\}.$$

Обозначим дополнение к $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ в \mathbb{C}^m через $U(\mathcal{K})$, т.е.

$$(6.19) \quad U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\omega \notin \mathcal{K}} L_\omega.$$

Заметим, что если $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ — подкомплекс, то $U(\mathcal{K}') \subset U(\mathcal{K})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6.2. *Сопоставление $\mathcal{K} \mapsto U(\mathcal{K})$ определяет взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве $[m]$ и дополнениями координатных конфигураций в \mathbb{C}^m , сохраняющее отношение вложения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо построить обратное соответствие. Пусть \mathcal{A} — конфигурация координатных подпространств в \mathbb{C}^m и $U(\mathcal{A})$ — её дополнение. Определим

$$(6.20) \quad \mathcal{K}(\mathcal{A}) := \{\omega \subset [m] : L_\omega \cap U(\mathcal{A}) \neq \emptyset\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ является симплициальным комплексом, который зависит лишь от $U(\mathcal{A})$ и задаёт обратное соответствие. \square

Если координатная конфигурация \mathcal{A} содержит некоторую гиперплоскость, скажем $\{z_i = 0\}$, то её дополнение $U(\mathcal{A})$ раскладывается в произведение $U(\mathcal{A}_0) \times \mathbb{C}^*$, где \mathcal{A}_0 — координатная конфигурация в гиперплоскости $\{z_i = 0\}$ и $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Таким образом, для любой координатной конфигурации \mathcal{A} её дополнение $U(\mathcal{A})$ представляется в виде

$$U(\mathcal{A}) = U(\mathcal{A}') \times (\mathbb{C}^*)^k,$$

где \mathcal{A}' — конфигурация координатных подпространств в \mathbb{C}^{m-k} , которая не содержит гиперплоскостей. С другой стороны, (6.20) показывает, что \mathcal{A} содержит гиперплоскость $\{z_i = 0\}$ тогда и только тогда, когда $\{i\}$ не является вершиной комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Отсюда вытекает, что $U(\mathcal{K})$ является дополнением координатной конфигурации, не содержащей гиперплоскостей, тогда и только тогда, когда множество вершин комплекса \mathcal{K} есть всё $[m]$. Принимая во внимание эти замечания, мы ограничимся рассмотрением координатных конфигураций без гиперплоскостей и симплициальных комплексов на множестве вершин $[m]$.

Дополнение $U(\mathcal{K})$ является частным случаем конструкции 6.1.7, как показывает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6.3. $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо доказать, что $U(\mathcal{K}) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} U_\sigma$, где

$$U_\sigma := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_i \neq 0 \text{ при } i \notin \sigma\}.$$

Это утверждение уже фактически было доказано в разделе 3.2, см. (3.4) и предложение 3.2.2. \square

ПРИМЕР 6.6.4. 1. Если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m$.

2. Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$.

3. Пусть \mathcal{K} представляет собой набор из m точек. Тогда

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} \{z_i = z_j = 0\}$$

есть дополнение набора всех координатных подпространств коразмерности два.

4. В более общем случае, если \mathcal{K} есть i -мерный остов симплекса Δ^{m-1} , то $U(\mathcal{K})$ является дополнением набора всех координатных подпространств коразмерности $(i + 2)$.

Так как каждое координатное подпространство инвариантно относительно стандартного действия \mathbb{T}^m на \mathbb{C}^m , дополнение $U(\mathcal{K})$ также является \mathbb{T}^m -инвариантным подмножеством в \mathbb{C}^m .

ТЕОРЕМА 6.6.5. *Для любого симплицциального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ имеется \mathbb{T}^m -эквивариантная деформационная ретракция*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)^{\mathcal{K}}$, а $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}}$, момент-угол-комплекс действительно содержится в $U(\mathcal{K})$ в качестве \mathbb{T}^m -инвариантного подмножества.

Пространством орбит $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m$ является кубический комплекс $ss(\mathcal{K})$ (см. конструкцию 1.8.7). Пространство орбит $U(\mathcal{K})/\mathbb{T}^m$ можно отождествить с

$$U(\mathcal{K})_{\geq} := U(\mathcal{K}) \cap \mathbb{R}_{\geq}^m,$$

где \mathbb{R}_{\geq}^m рассматривается как подмножество в \mathbb{C}^m .

Мы имеем $ss(\mathcal{K}) \subset U(\mathcal{K})_{\geq}$. Вначале построим деформационную ретракцию $r: U(\mathcal{K})_{\geq} \rightarrow ss(\mathcal{K})$ пространств орбит, а затем построим накрывающую её эквивариантную деформационную ретракцию самих \mathbb{T}^m -пространств. Если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m$, а $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \mathbb{D}^m$, и утверждение очевидно. В противном случае симплицциальный комплекс \mathcal{K} можно получить из комплекса $\partial\Delta^{m-1}$ последовательным удалением симплексов, и мы построим нужную деформационную ретракцию r по индукции.

Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, то $U(\mathcal{K})_{\geq} = \mathbb{R}_{\geq}^m \setminus \{0\}$. В этом случае очевидно имеется ретракция r , которая действует как показано на рис. 6.4. Теперь предположим, что комплекс \mathcal{K} получается из \mathcal{K}' удалением одного $(k - 1)$ -мерного симплекса $\tau = \{j_1, \dots, j_k\}$, т.е. $\mathcal{K} \cup \tau = \mathcal{K}'$. Тогда мы имеем вложение $i: U(\mathcal{K})_{\geq} \rightarrow U(\mathcal{K}')_{\geq}$. Мы можем предположить по индукции, что уже имеется деформационная ретракция $r': U(\mathcal{K}')_{\geq} \rightarrow ss(\mathcal{K}')$. Пусть $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\geq}^m$ — точка с координатами $y_{j_1} = \dots = y_{j_k} = 0$ и $y_i = 1$ при $i \notin \tau$. Так как $\tau \notin \mathcal{K}$, мы имеем $\mathbf{y} \notin U(\mathcal{K})_{\geq}$. С другой стороны, $\mathbf{y} \in C_\tau \subset ss(\mathcal{K}')$, см. (1.18). Поэтому мы можем применить ретракцию, изображённую на рис. 6.4 на грани $C_\tau \subset \mathbb{I}^m$, с центром в точке \mathbf{y} . Обозначим эту ретракцию через r_τ . Тогда

$$r = r_\tau \circ r' \circ i: U(\mathcal{K})_{\geq} \longrightarrow ss(\mathcal{K})$$

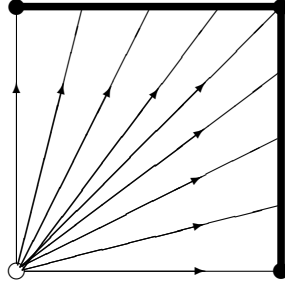


Рис. 6.4. Ретракция $r: U(\mathcal{K})_{\geq} \rightarrow \text{ss}(\mathcal{K})$ для $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$.

является требуемой деформационной ретракцией на уровне пространств орбит.

Момент-угол-комплекс \mathcal{K} представляется в виде факторпространства $\text{ss}(\mathcal{K}) \times \mathbb{T}^m / \sim$ (см. предложение 6.1.1), и аналогично $U(\mathcal{K}) \cong U(\mathcal{K})_{\geq} \times \mathbb{T}^m / \sim$. Поэтому деформационная ретракция r пространств орбит накрывается эквивариантной деформационной ретракцией $\tilde{r}: U(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, которая определена по формуле $\tilde{r}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) = (r(\mathbf{y}), \mathbf{t})$, где $\mathbf{y} \in U(\mathcal{K})_{\geq}$ и $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^m$. \square

Наличие гомотопической эквивалентности $U(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ позволяет применять результаты о когомологиях момент-угол-комплексов, такие как теоремы 6.4.6 и 6.4.9, к вычислению колец когомологий дополнений координатных конфигураций. Ниже мы рассмотрим соответствующие примеры.

ПРИМЕР 6.6.6. Пусть \mathcal{K} представляет собой набор из m точек. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентно дополнению из примера 6.6.4.3 и

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / (v_i v_j, i \neq j).$$

Подпространство коциклов в $R^*(\mathcal{K})$ имеет базис из мономов

$$v_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_k}, \quad k \geq 1 \text{ и } i_p \neq i_q \text{ при } p \neq q.$$

Так как $\deg v_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_k} = k+1$, размерность пространства $(k+1)$ -мерных коциклов равна $m C_{m-1}^{k-1}$. Подпространство $(k+1)$ -мерных кограниц порождено элементами вида

$$d(u_{i_1} \cdots u_{i_k})$$

и имеет размерность C_m^k . Следовательно,

$$\dim H^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 1,$$

$$\dim H^1(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H^2(U(\mathcal{K})) = 0,$$

$$\dim H^{k+1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = m C_{m-1}^{k-1} - C_m^k = (k-1) C_m^k, \quad 2 \leq k \leq m,$$

а умножение в когомологиях дополнения $U(\mathcal{K})$ тривиально.

Вычисление из предыдущего примера показывает, что если \mathcal{K} есть набор из m точек, то имеет место изоморфизм колец

$$(6.21) \quad H^*(U(\mathcal{K})) \cong H^*\left(\bigvee_{k=2}^m (S^{k+1})^{\vee(k-1)C_m^k}\right),$$

где $X^{\vee k}$ обозначает букет k экземпляров пространства X . На самом деле этот изоморфизм когомологий происходит из гомотопической эквивалентности, как показывает следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.6.7 ([ГТ04], [ГТ07, Cor. 9.5]). *Пусть \mathcal{K} есть i -мерный остов симплекса Δ^{m-1} , т.е. $U(\mathcal{K})$ является дополнением набора всех координатных подпространств коразмерности $(i+2)$. Тогда $U(\mathcal{K})$ имеет гомотопический тип букета сфер*

$$\bigvee_{k=i+2}^m (S^{i+k+1})^{\vee C_m^k C_{k-1}^{i+1}}.$$

При $i = 0$ мы получаем гомотопическую эквивалентность пространств из (6.21). Доказательство теоремы основано на анализе гомотопического слоя вложения $DJ(\mathcal{K}) \hookrightarrow B\mathbb{T}^m$, см. следствие 6.2.4. Также в [ГТ07] описан более широкий класс симплицеальных комплексов \mathcal{K} , для которых соответствующее дополнение имеет гомотопический тип букета сфер.

Наряду с заданием координатных подпространств уравнениями, как в (6.18), их также можно задавать линейными оболочками подмножеств стандартного базиса. Это приводит к двойственному описанию координатных конфигураций и их дополнений. А именно, рассмотрим двойственный комплекс $\widehat{\mathcal{K}} := \{\omega \subset [m] : [m] \setminus \omega \notin \mathcal{K}\}$, см. конструкцию 1.6.8. Тогда координатную конфигурацию, соответствующую \mathcal{K} , можно задавать двумя способами:

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \{L_\omega : \omega \notin \mathcal{K}\} = \{\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle : \{i_1, \dots, i_k\} \in \widehat{\mathcal{K}}\}.$$

Используя двойственность Александра и наше вычисление когомологий момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в терминах полных подкомплексов, мы можем получить следующее описание когомологий дополнения $U(\mathcal{K})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6.8. *Имеют место изоморфизмы групп*

$$\widetilde{H}^q(U(\mathcal{K})) \cong \bigoplus_{\sigma \in \widehat{\mathcal{K}}} \widetilde{H}_{2m-2|\sigma|-q-2}(\mathrm{lk}_{\widehat{\mathcal{K}}} \sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 6.4.10 вытекает изоморфизм

$$H^q(U(\mathcal{K})) \cong \bigoplus_{\tau \subset [m]} \widetilde{H}^{q-|\tau|-1}(\mathcal{K}_\tau).$$

Непустые симплексы $\tau \in \mathcal{K}$ не вносят вклада в сумму из предыдущей формулы, так как соответствующие полные подкомплексы

\mathcal{K}_τ стягиваемы. Так как $\tilde{H}^{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$, пустой симплекс лишь добавляет слагаемое \mathbb{Z} в $H^0(U(\mathcal{K}))$. Поэтому мы можем переписать последнюю формулу как

$$\tilde{H}^q(U(\mathcal{K})) \cong \bigoplus_{\tau \in \mathcal{K}} \tilde{H}^{q-|\tau|-1}(\mathcal{K}_\tau).$$

Используя двойственность Александера (предложение 1.6.12), мы находим

$$\tilde{H}^{q-|\tau|-1}(\mathcal{K}_\tau) = \tilde{H}_{|\tau|-3-q+|\tau|+1}(\mathrm{lk}_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\tau}) = \tilde{H}_{2m-2|\hat{\tau}|-q-2}(\mathrm{lk}_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\tau}),$$

где $\hat{\tau} = [m] \setminus \tau$ — симплекс в $\hat{\mathcal{K}}$. □

Предложение 6.6.8 является частным случаем известной *формулы Горески–Макферсона* [GM88, Гл. III], которая вычисляет группы (ко)гомологий дополнения конфигурации произвольных аффинных подпространств в терминах её *частично упорядоченного множества пересечений* (которое в случае координатных конфигураций совпадает с множеством граней комплекса $\hat{\mathcal{K}}$). Мы видим, что приложение теории момент-угол-комплексов не только даёт описание мультипликативной структуры в когомологиях дополнений координатных конфигураций, но также позволяет объединить два на первый взгляд не связанных между собой результата, а именно, теорему Горески–Макферсона о когомологиях дополнений конфигураций и теорему Хохстера из коммутативной алгебры.

6.7. Момент-угол-комплекс как множество Кемпфа–Несс

В этом заключительном разделе главы мы интерпретируем момент-угол-комплексы как множества типа Кемпфа–Несс, и тем самым получаем некоторые приложения наших результатов в геометрической теории инвариантов.

В приложении VI приведены необходимые сведения из теории действий алгебраических групп. Там указано, что для данного аффинного многообразия X с действием редуктивной группы G можно найти компактное подмножество $KN_X \subset X$, для которого категорный фактор $X//G$ гомеоморфен обычному факторпространству KN_X/K множества KN_X по действию максимальной компактной подгруппы $K \subset G$. Кроме того, множество Кемпфа–Несс KN_X является K -эквивариантным деформационным ретрактом многообразия X .

Момент-угол-комплекс обладает этими двумя характеристическими свойствами множества Кемпфа–Несс для алгебраических действий тора на специальных квазиаффинных многообразиях —

дополнениях конфигураций координатных подпространств, рассматриваемых в одном из подходов к определению торических многообразий. Тем самым момент-угол-комплексы можно считать «торическими квазиаффинными» множествами типа Кемпфа–Несс, хотя этот подход и отличается от классического, принятого для аффинных многообразий. В случае действия, задающего проективное торическое многообразие, наше множество Кемпфа–Несс отождествляется с поверхностью уровня отображения моментов, или с невырожденным пересечением вещественных квадратиков в \mathbb{C}^m . Наши вычисления когомологий момент-угол-комплексов позволяют описывать топологию торических множеств Кемпфа–Несс, и мы завершаем этот раздел ещё одним примером, представляющим интерес с точки зрения действий алгебраических групп. Как будет видно из этого примера, торические множества Кемпфа–Несс могут иметь весьма сложную топологическую структуру; многие интересные явления возникают даже в случае действий тора, соответствующих простым 3-мерным веерам.

Мы будем использовать обозначения главы 3. Пусть Σ — симплицальный веер в пространстве $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, имеющий m одномерных конусов, порождённых примитивными векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Веер Σ определяет следующие данные (см. раздел 3.2): симплицальный комплекс \mathcal{K}_{Σ} , алгебраическую подгруппу G (3.2) в алгебраическом торе $(\mathbb{C}^{\times})^m$ и её компактную подгруппу $K \subset \mathbb{T}^m$, квазиаффинное G -многообразие $U(\Sigma)$ (3.4). При этом $U(\Sigma)$ является дополнением координатной конфигурации в \mathbb{C}^m , и мы имеем $U(\Sigma) = U(\mathcal{K}_{\Sigma})$ в обозначениях предыдущего раздела (см. предложение 3.2.2). Кроме того, рассмотрим момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}(\Sigma) := \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{\Sigma}}$. В явном виде мы имеем, по аналогии с (3.4),

$$\mathcal{Z}(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{Z}(\sigma),$$

где

$$\mathcal{Z}(\sigma) = \{z \in (\mathbb{D}^2)^m : |z_j| = 1 \text{ при } j \notin g(\sigma)\}.$$

ТЕОРЕМА 6.7.1. *Пусть Σ — симплицальный веер. Тогда*

а) *если Σ является полным, то композиция отображений $\mathcal{Z}(\Sigma) \hookrightarrow U(\Sigma) \rightarrow U(\Sigma)/G$ индуцирует гомеоморфизм $\mathcal{Z}(\Sigma)/K \rightarrow U(\Sigma)/G$;*

б) *имеется \mathbb{T}^m -эquivариантная деформационная ретракция $U(\Sigma)$ на $\mathcal{Z}(\Sigma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем представления в виде факторпространств

$$\mathcal{Z}(\Sigma) \cong \text{cc}(\mathcal{K}_{\Sigma}) \times \mathbb{T}^m / \sim \quad \text{и} \quad U(\Sigma) \cong U(\Sigma)_{\geq} \times \mathbb{T}^m / \sim,$$

см. доказательство теоремы 6.6.5. Кроме того, факторпространство $U(\Sigma)/G$ отождествляется в силу теоремы 3.2.1 с торическим многообразием V_Σ , которое, в свою очередь, отождествляется с факторпространством $Q \times T/\approx$ из (3.16). Таким образом, композиция отображений $\mathcal{Z}(\Sigma) \hookrightarrow U(\Sigma) \rightarrow U(\Sigma)/G$ принимает вид

$$(6.22) \quad \text{сс}(\mathcal{K}_\Sigma) \times \mathbb{T}^m/\sim \longrightarrow U(\Sigma)_{\geq} \times \mathbb{T}^m/\sim \longrightarrow Q \times T/\approx.$$

При этом, если веер Σ является полным и симплицальным, то мы имеем гомеоморфизмы многообразий с углами

$$\text{сс}(\mathcal{K}_\Sigma) \cong |\text{cone } \mathcal{K}'| \cong Q,$$

так как разбиение на грани каждого из этих многообразий двойственно по Пуанкаре триангуляции $(n-1)$ -мерной сферы, задаваемой симплицальным комплексом \mathcal{K}_Σ . В результате мы получаем, что композиция отображений (6.22) совпадает с отображением $Q \times \mathbb{T}^m/\sim \rightarrow Q \times T/\approx$, индуцированным отображением $\ell: \mathbb{T}^m \rightarrow T$ из точной последовательности (3.3). Отсюда вытекает утверждение а), а утверждение б) уже доказано у нас как теорема 6.6.5. \square

Сравнивая этот результат с теоремой VI.2, мы видим, что $\mathcal{Z}(\Sigma)$ обладает теми же свойствами по отношению к G -действию на $U(\Sigma)$, которыми обладает множество KN_X по отношению к действию редуктивной группы на аффинном многообразии X . Поэтому мы будем называть $\mathcal{Z}(\Sigma)$ *множеством Кемпфа–Несс* многообразия $U(\Sigma)$.

ПРИМЕР 6.7.2. Условие полноты веера Σ в теореме 6.7.1 существенно. Действительно, рассмотрим веер из примера 3.2.5. Тогда $U(\Sigma)$ представляет собой дополнение до 3 координатных прямых в \mathbb{C}^3 , а

$$\mathcal{Z}(\Sigma) = (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \cup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2).$$

Оба этих пространства гомотопически эквивалентны букету $S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$ (см. теорему 6.6.7). Торическое многообразие $X_\Sigma = U(\Sigma)/G$ некомпактно (оно получается удалением трёх точек из $\mathbb{C}P^2$) и поэтому не может быть гомеоморфным компактному пространству $\mathcal{Z}(\Sigma)/K$.

В классической ситуации действий алгебраических групп на аффинных многообразиях множество Кемпфа–Несс допускает описание в виде множества нулей некоторого отображения моментов (VI.2). Однако, подобное описание неприменимо в случае действий алгебраического тора на квазиаффинных многообразиях $U(\Sigma)$. Действительно отображение моментов μ в (VI.2) совпадает в этом случае с отображением μ_Σ из примера 3.3.2, но, как мы увидим ниже, множество

$$\mu_\Sigma^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^m : \langle \kappa z, z \rangle = 0 \text{ для всех } \kappa \in \mathfrak{k}\}$$

состоит лишь из нуля. Тем не менее сейчас мы покажем, что описание торического множества Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma)$, аналогичное (VI.2), существует в случае, когда Σ является нормальным веером некоторого многогранника. Тем самым будет продолжена аналогия с аффинными множествами Кемпфа–Несс.

Пусть Σ_P — нормальный веер простого многогранника P , заданного как (1.1), см. конструкцию 1.3.2. Тогда отображение моментов μ_{Σ_P} совпадает с отображением μ_P , задаваемым формулами (3.13). Непосредственное сравнение с (VI.2) подсказывает нам связать множество уровня $\mu_P^{-1}(0)$ отображения моментов (3.7) с торическим множеством Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P)$ для действия G на $U(\Sigma_P)$. Однако аналогия здесь не столь очевидна: множество $\mu_P^{-1}(0)$ задаётся уравнениями $\sum_{k=1}^m c_{jk}|z_k|^2 = 0$, $1 \leq j \leq m - n$, которые имеют лишь нулевое решение. (Действительно, так как пересечение \mathbb{R}_{\geq}^m с аффинным подпространством $i_P(N_{\mathbb{R}}^*) = A_P(N_{\mathbb{R}}^*) + \mathbf{b}_P$ ограничено, пересечение $\mathbb{R}_{\geq}^m \cap A_P(N_{\mathbb{R}}^*)$ содержит лишь начало координат.) С другой стороны, мы имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7.3. *Пусть Σ_P — нормальный веер целочисленного простого многогранника (1.1) и (3.13) — соответствующее отображение моментов. Тогда для торического множества Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P)$ действия G на $U(\Sigma_P)$ имеем*

$$\mathcal{Z}(\Sigma_P) \cong \mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, множество $\mathcal{Z}(\Sigma_P) = \mathcal{Z}_{K_P}$ отождествляется с момент-угол-многообразием \mathcal{Z}_P (пример 6.1.4), которое в силу следствия 3.3.10 совпадает с множеством уровня $\mu_P^{-1}(C\mathbf{b}_P)$. \square

Другими словами, разница между нашей ситуацией и аффинной заключается в том, что мы должны в качестве уровня отображения моментов брать $C\mathbf{b}_P$ вместо 0. Дело в том, что в $C\mathbf{b}_P$ является регулярным значением отображения μ_P , в отличие от 0.

В случае нормального веера Σ_P торические множества Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P)$ допускают представление в виде невырожденного пересечения (3.11) вещественных квадрик, что задаёт на них каноническую гладкую структуру. Утверждение а) нашей теоремы 6.7.1 в этом случае вытекает из теоремы 3.3.11, известной в торической геометрии, причём эта теорема обеспечивает наличие диффеоморфизма $\mathcal{Z}(\Sigma_P)/K \rightarrow U(\Sigma_P)/G$. Естественно, имеется много полных неособых вееров Σ , которые нельзя реализовать в виде нормальных вееров многогранников (см. пример 3.1.9). Соответствующие торические множества Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma)$ являются топологическими многообразиями, но вопрос о наличии для них представления типа (3.11) и даже существование на них канонической гладкой структуры остаётся открытым.

В заключение мы приведём ещё один пример, показывающий, как результаты предыдущих разделов позволяют описывать топологию торического множества Кемпфа–Несс.

ПРИМЕР 6.7.4. Пусть P — простой многогранник, полученный «срезанием» двух несмежных рёбер куба в пространстве $N_{\mathbb{R}}^* \cong \mathbb{R}^3$, как показано на рис. 6.5. Мы можем задать такой многогранник 8 неравенствами

$$\begin{aligned} x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad -x + 3 \geq 0, \quad -y + 3 \geq 0, \quad -z + 3 \geq 0, \\ -x + y + 2 \geq 0, \quad -y - z + 5 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, он имеет 8 гиперграней F_1, \dots, F_8 , занумерованных как на рисунке. Одномерные конусы соответствующего нормально-

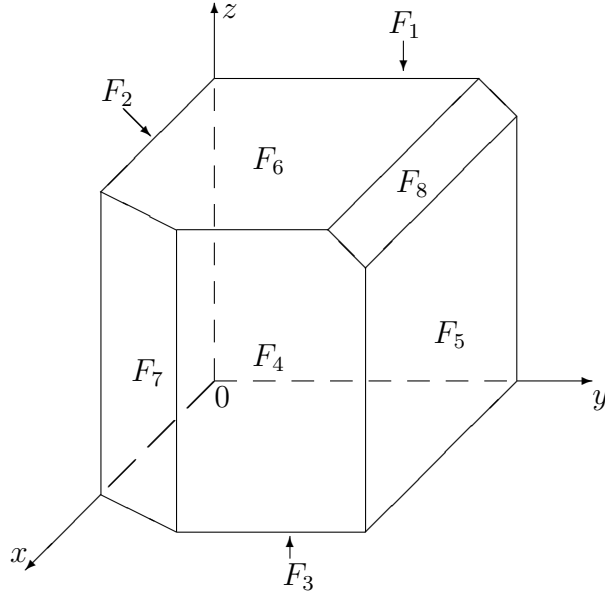


Рис. 6.5

го веера Σ_P порождаются следующими примитивными векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_4 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_5 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_6 = -\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_7 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_8 = -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Торическое многообразие X_P есть результат раздутия многообразия $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ (соответствующего кубу) в двух комплексных 1-мерных подмногообразиях $\{\infty\} \times \{0\} \times \mathbb{C}P^1$ и $\mathbb{C}P^1 \times \{\infty\} \times \{\infty\}$. Матрица (3.10) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её транспонированная матрица задаёт вложение $G \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^8$ (или $K \hookrightarrow \mathbb{T}^8$), и мы имеем $X_P = U(\Sigma_P)/G = \mathcal{Z}(\Sigma_P)/K$ в силу теоремы 6.7.1. Торическое множество Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P) \cong \mathcal{Z}_P$ задаётся 5 вещественными квадратичными уравнениями (3.11):

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_4|^2 - 3 &= 0, & |z_2|^2 + |z_5|^2 - 3 &= 0, & |z_3|^2 + |z_6|^2 - 3 &= 0, \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_7|^2 - 2 &= 0, & |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_8|^2 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Двойственная триангуляция \mathcal{K}_P получается из границы октаэдра применением двух звёздных подразбиений относительно несмежных рёбер (см. раздел 5.9). Её кольцо граней есть

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}_P] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_8] / (v_1v_4, v_1v_7, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_8, v_3v_6, v_3v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_7v_8).$$

В соответствии с теоремой 6.4.9, группа $H^3(\mathcal{Z}_P)$ имеет по одной образующей на каждую пару вершин комплекса \mathcal{K}_P , не соединённых ребром (т.е. на каждую пару несмежных гиперграней в P). Следовательно, $H^3(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^{10}$, и образующие представляются следующими 3-коциклами в дифференциальной градуированной алгебре $[\Lambda[u_1, \dots, u_8] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}_P], d]$ из теоремы 6.4.6:

$$u_1v_4, u_1v_7, u_2v_4, u_2v_5, u_2v_8, u_3v_6, u_3v_8, u_5v_6, u_5v_7, u_7v_8.$$

Снова применяя теорему 6.4.9, мы видим, что вклад в $H^4(\mathcal{Z}_P)$ дают лишь группы $\tilde{H}^0(\mathcal{K}_\omega)$ с $|\omega| = 3$. Имеется два вида несвязных симплициальных комплексов на 3 вершинах: «3 отдельные точки» и «ребро и точка». Комплекс \mathcal{K}_P не содержит полных подкомплексов первого типа, и содержит 16 подкомплексов второго типа. Соответствующие 4-коциклы в алгебре $[\Lambda[u_1, \dots, u_8] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}_P]$ суть

$$\begin{aligned} u_4u_7v_1, u_4u_5v_2, u_4u_8v_2, u_5u_8v_2, u_6u_8v_3, u_1u_2v_4, u_2u_6v_5, u_2u_7v_5, \\ u_6u_7v_5, u_3u_5v_6, u_1u_5v_7, u_1u_8v_7, u_5u_8v_7, u_2u_3v_8, u_2u_7v_8, u_3u_7v_8. \end{aligned}$$

Следовательно, $H^4(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^{16}$.

Группа $H^5(\mathcal{Z}_P)$ складывается из $\tilde{H}^1(\mathcal{K}_\omega)$ с $|\omega| = 3$ и $\tilde{H}^0(\mathcal{K}_\omega)$ с $|\omega| = 4$. Полный подкомплекс на 3 вершинах в \mathcal{K}_P может иметь ненулевую группу 1-х когомологий только если соответствующие 3 гиперграней в P образуют «пояс», т.е. попарно смежны, но не имеют общей вершины. Так как такие пояса из 3 гиперграней в нашем P отсутствуют, вклад в $H^5(\mathcal{Z}_P)$ дают только группы $\tilde{H}^0(\mathcal{K}_\omega)$ с $|\omega| = 4$. Соответствующие 5-коциклы суть

$$u_1u_5u_8v_7, u_2u_3u_7v_8, u_4u_5u_8v_2, u_2u_6u_7v_5, u_2u_7u_5v_8 - u_2u_7u_8v_5$$

(заметим, что последний из этих коциклов не может быть представлен мономом). Следовательно, $H^5(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^5$. В силу двойственности Пуанкаре, это полностью определяет вектор чисел Бетти $(1, 0, 0, 10, 16, 5, 5, 16, 10, 0, 0, 1)$ многообразия \mathcal{Z}_P размерности 11. Образующие 6-й группы когомологий $H^6(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^5$ соответствуют

поясам из 4 гиперграней в P , а соответствующие 6-коциклы суть

$$u_2u_3v_4v_6, u_1u_5v_4v_6, u_1u_3v_6v_7, u_1u_3v_4v_8, u_1u_3v_4v_6.$$

Они двойственны 5-коциклам. Фундаментальный класс многообразия \mathcal{Z}_P представляется (с точностью до знака) коциклом $u_4u_5u_6u_7u_8v_1v_2v_3$ или любым коциклом вида

$$u_{\sigma(4)}u_{\sigma(5)}u_{\sigma(6)}u_{\sigma(7)}u_{\sigma(8)}v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}v_{\sigma(3)},$$

где $\sigma \in S_8$ — любая подстановка, для которой гиперграней $F_{\sigma(1)}$, $F_{\sigma(2)}$ и $F_{\sigma(3)}$ имеют общую вершину.

Из этого описания легко восстанавливается мультипликативная структура кольца $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Например, мы имеем соотношения

$$\begin{aligned} [u_1v_4] \cdot [u_1v_7] &= 0, & [u_1v_7] \cdot [u_2v_4] &= 0, & [u_1v_4] \cdot [u_3v_6] &= [u_1u_3v_4v_6], \\ [u_2v_4] \cdot [u_3v_6] \cdot [u_1u_5u_8v_7] &= [u_1u_2u_3u_5u_8v_4v_6v_7], & & \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Ещё одним интересным свойством многообразия \mathcal{Z}_P из этого примера является наличие нетривиальных произведений Масси в кольце $H^*(\mathcal{Z}_P)$ [Ба03]. Рассмотрим три коцикла $a = u_1v_4$, $b = u_2v_5$, $c = u_3v_6$, представляющие классы когомологий $\alpha, \beta, \gamma \in H^3(\mathcal{Z}_P)$. Так как $\alpha\beta = 0$ и $\beta\gamma = 0$, определено тройное произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Оно состоит из классов когомологий в $H^8(\mathcal{Z}_P)$, представленных коциклами вида $af + ec$, для всевозможных e и f , удовлетворяющих условию $ab = de$ и $bc = df$ (здесь d обозначает дифференциал; так как выбор элементов e и f неоднозначен, произведение Масси, вообще говоря, является многозначной операцией). Произведение Масси называется *тривиальным*, если оно содержит нуль. В нашем случае мы можем взять $e = u_1u_2u_5v_4$ и $f = 0$, так что $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ содержит ненулевой класс когомологий $[u_1u_2u_5u_3v_4v_6] \in H^8(\mathcal{Z}_P)$. Более того, произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ нетривиально, см. [БП04-2, Пример 8.27]. Отсюда вытекает, что многообразие \mathcal{Z}_P не является *формальным*. Дальнейшему изучению произведений Масси в когомологиях момент-угол-комплексов посвящена работа [DS05].

Приложение I

Резольвенты и функтор Tor

Материал этого приложения в целом является изложением стандартных конструкций гомологической алгебры, хотя некоторые из наших обозначений и не являются общепринятыми в алгебраической литературе. Это объясняется тем, что наше изложение ориентировано на топологические приложения. В частности, мы как правило нумеруем компоненты коцепных комплексов и резольвент неположительными числами, что удобно при вычислениях со спектральной последовательностью Эйленберга–Мура.

Пусть \mathbf{k} — коммутативное кольцо с единицей (обычно \mathbb{Z} или поле). Если не оговорено противное, все \mathbf{k} -алгебры A и A -модули M предполагаются градуированными неотрицательными чётными числами. Все гомоморфизмы A -модулей предполагаются сохраняющими градуировку. Для большинства излагаемых приложений достаточно рассматривать случай конечно порождённых модулей над алгеброй многочленов $A = \mathbf{k}[m] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$, однако в некоторых случаях нам понадобится несколько бóльшая общность.

Пусть A — коммутативная конечно порождённая градуированная связная \mathbf{k} -алгебра. Точная последовательность A -модулей

$$(I.1) \quad \dots \xrightarrow{d} R^{-i} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} R^{-1} \xrightarrow{d} R^0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

где все R^{-i} являются свободными (проективными) модулями, называется *свободной (проективной) резольвентой* модуля M . Минимальное число h , для которого существует проективная резольвента (I.1), в которой $R^{-i} = 0$ при $i > h$, называется *гомологической (или проективной) размерностью* модуля M и обозначается $\text{hd } M$ (или $\text{hd}_A M$, если необходимо подчеркнуть, что M является A -модулем). Если такого h не существует, полагаем $\text{hd } M = \infty$. Модуль $M_i = \text{Ker}[d: R^{-i+1} \rightarrow R^{-i+2}]$ называется модулем *i -х сизигий* для M (здесь мы полагаем $M_0 = M$). Таким образом, $\text{hd } M$ есть наименьшее h , для которого модуль M_h проективен.

Введём *биградуированный дифференциальный модуль* $[R, d]$, где $R = \bigoplus_{i,j} R^{-i,j}$ и $R^{-i,j} := (R^{-i})^j$ есть j -я градуированная компонента модуля R^{-i} , а $d: R^{-i,j} \rightarrow R^{-i+1,j}$. Таким образом, R имеет первую, или *внешнюю*, градуировку, происходящую из нумерации членов резольвенты (которая, согласно нашему соглашению, неположительна) и вторую, или *внутреннюю*, градуировку, происходящую из градуировок в членах резольвенты (которая неотрицательна и

чётна). При действии элементов из A на элементы из $[R, d]$ внешняя градуировка не изменяется, в то время как дифференциал d повышает внешнюю градуировку на 1, но не меняет внутренней. Полная градуировка в R определяется как сумма двух градуировок.

Если $[R, d]$ является резольвентой A -модуля M , то для биградуированных когомологий $H[R, d]$ мы имеем $H^{-i,k}[R, d] = 0$ при $i > 0$ и $H^{0,k}[R, d] = M^k$. Пусть $[M, 0]$ — биградуированный модуль с нулевым дифференциалом и тривиальной внешней градуировкой, т.е. $M^{-i,k} = 0$ при $i > 0$ и $M^{0,k} = M^k$. Тогда резольвента (I.1) определяет отображение $[R, d] \rightarrow [M, 0]$, индуцирующее изоморфизм в когомологиях — так называемый *квазиизоморфизм*. Это отображение можно рассматривать как отображение коцепных комплексов A -модулей:

$$(I.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & R^{-i} & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & R^{-1} & \xrightarrow{d} & R^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \cdot \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Следующее утверждение показывает, что ряд Пуанкаре модуля M (рассматриваемого как градуированное \mathbf{k} -векторное пространство) можно вычислить при помощи любой свободной резольвенты (I.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.1. Пусть модуль R^{-i} имеет ранг q_i и свободные образующие в размерностях $d_{1i}, \dots, d_{q_i i}$. Тогда

$$F(M; t) = F(A; t) \sum_{i \geq 0} (-1)^i (t^{d_{1i}} + \dots + t^{d_{q_i i}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H^{-i,k}[R, d] = 0$ при $i > 0$ и $H^{0,k}[R, d] = M^k$, мы имеем

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbf{k}} R^{-i,k} = \dim_{\mathbf{k}} M^k$$

в силу свойств эйлеровой характеристики. Умножая на t^k и суммируя по k , получаем

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i F(R^{-i}; t) = F(M; t).$$

Так как R^{-i} является свободным A -модулем, мы имеем $F(R^{-i}; t) = F(A; t)(t^{d_{1i}} + \dots + t^{d_{q_i i}})$, откуда и вытекает требуемая формула. \square

КОНСТРУКЦИЯ I.2 (минимальная резольвента). Пусть \mathbf{k} — поле. Имеется следующий канонический способ построения свободной резольвенты для M . Рассмотрим минимальную ненулевую градуированную компоненту модуля M и выберем в ней базис \mathbf{k} -векторного пространства. Породим подмодуль M_1 этим базисом и

затем рассмотрим минимальную размерность, в которой $M \neq M_1$. В этой градуированной компоненте модуля M выберем базис в дополнении к M_1 и рассмотрим модуль M_2 , порождённый этим базисом и подмодулем M_1 . Продолжая этот процесс, мы получим систему образующих для M , имеющую конечное число элементов в каждой размерности, и обладающую тем свойством, что образы её элементов дают базис в \mathbf{k} -векторном пространстве $M \otimes_A \mathbf{k} = M/(A^+ \cdot M)$. Такая система образующих модуля M называется *минимальной* (или *минимальным базисом*).

Выберем минимальную систему образующих в M и рассмотрим свободный A -модуль R_{\min}^0 , порождённый её элементами. Тогда определён эпиморфизм $R_{\min}^0 \rightarrow M$. Теперь выберем минимальный базис в ядре этого эпиморфизма и натянем на него свободный модуль R_{\min}^{-1} . Затем выберем минимальный базис в ядре отображения $R_{\min}^{-1} \rightarrow R_{\min}^0$ и так далее. На i -м шаге мы выбираем минимальный базис в ядре уже построенного отображения $d: R_{\min}^{-i+1} \rightarrow R_{\min}^{-i+2}$ и порождаем им свободный модуль R_{\min}^{-i} . В результате мы получаем свободную резольвенту модуля M , называемую *минимальной*. Минимальная резольвента обладает следующим свойством: ядро каждого отображения $d: R_{\min}^{-i} \rightarrow R_{\min}^{-i+1}$, $i \geq 1$, содержится в $A^+ \cdot R_{\min}^{-i}$, а образ — в $A^+ \cdot R_{\min}^{-i+1}$. В частности, индуцированное отображение $R_{\min}^{-i} \otimes_A \mathbf{k} \rightarrow R_{\min}^{-i+1} \otimes_A \mathbf{k}$ тривиально. Минимальная резольвента единственна с точностью до изоморфизма.

Если $A = \mathbf{k}[m]$ и \mathbf{k} — поле, то любой проективный градуированный A -модуль является свободным (см. [Ма63, Лемма VII.6.2]). В этом случае можно не различать свободные и проективные резольвенты.

КОНСТРУКЦИЯ I.3 (резольвента Кошуля). Пусть $A = \mathbf{k}[m]$ (алгебра многочленов) и $M = \mathbf{k}$. Рассмотрим внешнюю \mathbf{k} -алгебру $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ от образующих степени 1, определяемую соотношениями $u_i^2 = 0$ и $u_i u_j + u_j u_i = 0$. Превратим тензорное произведение $E = E_m = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ в *биградуированную дифференциальную алгебру*, полагая

$$(I.3) \quad \begin{aligned} \text{bideg } u_i &= (-1, 2), & \text{bideg } v_i &= (0, 2), \\ du_i &= v_i, & dv_i &= 0 \end{aligned}$$

и требуя чтобы d было дифференцированием алгебр. Тогда $[E, d]$ вместе с отображением аугментации $\varepsilon: E \rightarrow \mathbf{k}$ определяет коцепной комплекс $\mathbf{k}[m]$ -модулей

$$(I.4) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \Lambda^m[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{d} \dots \\ \xrightarrow{d} \Lambda^1[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{d} \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\Lambda^i[u_1, \dots, u_m]$ — подпространство в $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$, порождённое мономами длины i . Докажем, что этот комплекс является точной последовательностью. Для этого достаточно доказать, что $\varepsilon: [E, d] \rightarrow [\mathbf{k}, 0]$ является квазиизоморфизмом. Имеется очевидное вложение $\eta: \mathbf{k} \rightarrow E$ такое, что $\varepsilon\eta = \text{id}$. Для завершения доказательства мы построим \mathbf{k} -линейное отображение $s: E^{-i, 2j} \rightarrow E^{-i-1, 2j}$, являющееся коцепной гомотопией между id и $\eta\varepsilon$, т.е. удовлетворяющее соотношению

$$(I.5) \quad ds + sd = \text{id} - \eta\varepsilon.$$

При $m = 1$ определим отображение $s_1: E^{0,*} = \mathbf{k}[v] \rightarrow E^{-1,*}$ по формуле

$$s_1(a_0 + a_1v + \dots + a_jv^j) = (a_1 + a_2v + \dots + a_jv^{j-1})u.$$

Тогда для $f = a_0 + a_1v + \dots + a_jv^j \in E^{0,*}$ мы имеем $ds_1f = f - a_0 = f - \eta\varepsilon f$, а $s_1df = 0$. В то же время для $fu \in E^{-1,*}$ имеем $s_1d(fu) = fu$, а $ds_1(fu) = 0$. В любом случае имеет место соотношение (I.5). Далее по индукции мы можем предположить, что для $m = k - 1$ оператор коцепной гомотопии $s_{k-1}: E_{k-1} \rightarrow E_{k-1}$ уже построен. Так как $E_k = E_{k-1} \otimes E_1$, $\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} \otimes \varepsilon_1$ и $\eta_k = \eta_{k-1} \otimes \eta_1$, непосредственная проверка показывает, что отображение

$$s_k = s_{k-1} \otimes \text{id} + \eta_{k-1}\varepsilon_{k-1} \otimes s_1$$

является коцепной гомотопией между id и $\eta_k\varepsilon_k$.

Так как $\Lambda^i[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[m]$ есть свободный $\mathbf{k}[m]$ -модуль, комплекс (I.4) является свободной резольвентой для \mathbf{k} . Эта резольвента называется *резольвентой Кошуля*. По построению, резольвента Кошуля является минимальной.

Пусть (I.1) — некоторая проективная резольвента A -модуля M и N — другой A -модуль. Применяя функтор $\otimes_A N$ к (I.2) мы получаем гомоморфизм дифференциальных модулей

$$[R \otimes_A N, d] \rightarrow [M \otimes_A N, 0],$$

который, вообще говоря, не будет индуцировать изоморфизм когомологий. Градуированный модуль $(-i)$ -х когомологий коцепного комплекса

$$\dots \rightarrow R^{-i} \otimes_A N \rightarrow \dots \rightarrow R^{-1} \otimes_A N \rightarrow R^0 \otimes_A N \rightarrow 0$$

обозначается $\text{Tor}_A^{-i}(M, N)$. Мы также будем рассматривать биградуированный A -модуль

$$\text{Tor}_A(M, N) = \bigoplus_{i,j} \text{Tor}_A^{-i,j}(M, N).$$

Аналогично, применяя к (I.2) функтор $\text{Hom}_A(\cdot, N)$, мы приходим к комплексу

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(R^0, N) \rightarrow \text{Hom}_A(R^{-1}, N) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_A(R^{-i}, N) \rightarrow \dots,$$

модуль $(-i)$ -х гомологий которого обозначается $\text{Ext}_A^{-i}(M, N)$

Хорошо известны следующие свойства модулей $\text{Tor}_A^{-i}(M, N)$ (см., например, [Ма63]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.4. а) A -модуль $\text{Tor}_A^{-i}(M, N)$ не зависит, с точностью до изоморфизма, от выбора резольвенты (I.1);

б) $\text{Tor}_A^{-i}(\cdot, N)$ и $\text{Tor}_A^{-i}(M, \cdot)$ являются ковариантными функторами;

в) $\text{Tor}_A^0(M, N) = M \otimes_A N$;

г) $\text{Tor}_A^{-i}(M, N) \cong \text{Tor}_A^{-i}(N, M)$;

е) Короткая точная последовательность модулей

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \text{Tor}_A^{-i}(M_1, N) \longrightarrow \text{Tor}_A^{-i}(M_2, N) \longrightarrow \text{Tor}_A^{-i}(M_3, N) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \text{Tor}_A^{-1}(M_1, N) \longrightarrow \text{Tor}_A^{-1}(M_2, N) \longrightarrow \text{Tor}_A^{-1}(M_3, N) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Tor}_A^0(M_1, N) \longrightarrow \text{Tor}_A^0(M_2, N) \longrightarrow \text{Tor}_A^0(M_3, N) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть $N = \mathbf{k}$, где \mathbf{k} — поле, и (I.1) — минимальная резольвента A -модуля M . Тогда все дифференциалы в коцепном комплексе

$$\dots \longrightarrow R_{\min}^{-i} \otimes_A \mathbf{k} \longrightarrow \dots \longrightarrow R_{\min}^0 \otimes_A \mathbf{k} \longrightarrow 0$$

тривиальны. Таким образом, мы имеем

$$(I.6) \quad \begin{aligned} \text{Tor}_A^{-i}(M, \mathbf{k}) &\cong R_{\min}^{-i} \otimes_A \mathbf{k}, \\ \dim_{\mathbf{k}} \text{Tor}_A^{-i}(M, \mathbf{k}) &= \text{rank } R_{\min}^{-i}. \end{aligned}$$

Тем самым нами доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.5. Если \mathbf{k} — поле, то имеет место формула

$$\text{hd } M = \max\{i : \text{Tor}_A^{-i}(M, \mathbf{k}) \neq 0\}.$$

В частности, если $A = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ и $M = N = \mathbf{k}$, то в силу минимальности резольвенты Кошуля мы получаем

$$\text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \Lambda[u_1, \dots, u_m]$$

и $\text{hd } \mathbf{k} = m$.

В 1966 г. Эйленбергом и Муром была построена спектральная последовательность, которая получила большую известность в алгебраической топологии. Эту спектральную последовательность можно рассматривать как развитие подхода Адамса к вычислению гомологий пространств петель.

Здесь мы считаем, что основное кольцо коэффициентов \mathbf{k} является полем, хотя в ряде случаев утверждения имеют место и над кольцом целых чисел. Следующее утверждение служит алгебраической основой для построения спектральной последовательности Эйленберга–Мура.

ТЕОРЕМА I.6 (Эйленберг–Мур [Sm67, Th. 1.2]). Пусть A — коммутативная дифференциальная градуированная \mathbf{k} -алгебра, а M, N — дифференциальные градуированные A -модули. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$, сходящаяся к $\text{Tor}_A(M, N)$, член E_2 которой имеет вид

$$E_2^{-i,j} = \text{Tor}_{H[A]}^{-i,j}(H[M], H[N]), \quad i, j \geq 0,$$

где $H[\cdot]$ обозначает алгебру (модуль) когомологий.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построение функтора Tor для дифференциальных градуированных объектов требует некоторых дополнительных рассуждений (см., например, [Sm67] или [Ma63, Гл. XII]).

Спектральная последовательность из теоремы I.6 располагается во втором квадранте и дифференциал d_r прибавляет $(r, 1 - r)$ к бистепени. Член E_∞ этой спектральной последовательности выражается в терминах убывающей фильтрации $\{F^{-p} \text{Tor}_A(M, N)\}$ в $\text{Tor}_A(M, N)$ по формуле

$$E_\infty^{-p,n+p} = F^{-p} \left(\sum_{-i+j=n} \text{Tor}_A^{-i,j}(M, N) \right) / F^{-p+1} \left(\sum_{-i+j=n} \text{Tor}_A^{-i,j}(M, N) \right).$$

Топологические приложения теоремы I.6 возникают в случае, когда A, M, N являются алгебрами сингулярных коцепей некоторых топологических пространств. Важнейший пример описывается коммутативным квадратом

$$(I.7) \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B_0, \end{array}$$

где $E_0 \rightarrow B_0$ — расслоение Серра со слоем F над односвязной базой B_0 , а $E \rightarrow B$ — расслоение, индуцированное непрерывным отображением $B \rightarrow B_0$. Обозначим через $C^*(X)$ алгебру сингулярных \mathbf{k} -коцепей топологического пространства X . Очевидно, $C^*(E_0)$ и $C^*(B)$ являются $C^*(B_0)$ -модулями. При этих предположениях имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА I.7 ([Sm67, Prop. 3.4]). Биградуированный \mathbf{k} -модуль $\text{Tor}_{C^*(B_0)}(C^*(E_0), C^*(B))$ имеет естественную структуру \mathbf{k} -алгебры, и имеет место канонический изоморфизм алгебр

$$\text{Tor}_{C^*(B_0)}(C^*(E_0), C^*(B)) \rightarrow H^*(E; \mathbf{k}).$$

Применяя теорему I.6 в случае $A = C^*(B_0)$, $M = C^*(E_0)$, $N = C^*(B)$ и принимая во внимание лемму I.7, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА I.8 (Эйленберг–Мур). *Существует спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$ коммутативных алгебр такая, сходящаяся к $H^*(E; \mathbf{k})$ и имеющая член E_2 вида*

$$E_2^{-i,j} = \text{Tor}_{H^*(B_0; \mathbf{k})}^{-i,j}(H^*(E_0; \mathbf{k}), H^*(B; \mathbf{k})).$$

Спектральная последовательность из теоремы I.8 называется *спектральной последовательностью Эйленберга–Мура*. Случай, когда пространство B является точкой, особенно важен для приложений, поэтому мы формулируем соответствующее утверждение отдельно.

СЛЕДСТВИЕ I.9. *Пусть $E_0 \rightarrow B_0$ — расслоение над односвязной базой B_0 со слоем F . Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$ коммутативных алгебр такая, сходящаяся к $H^*(F; \mathbf{k})$ и имеющая член E_2 вида*

$$E_2 = \text{Tor}_{H^*(B_0; \mathbf{k})}(H^*(E_0; \mathbf{k}), \mathbf{k}).$$

Спектральная последовательность из следствия I.9 называется *спектральной последовательностью Эйленберга–Мура расслоения $E_0 \rightarrow B_0$* . В случае, когда E_0 — стягиваемое пространство, мы получаем спектральную последовательность для вычисления когомологий пространства петель ΩB_0 .

Приложение II

Регулярные последовательности и алгебры Коэна–Маколея

Кольца и модули Коэна–Маколея играют важную роль в гомологической коммутативной алгебре, алгебраической геометрии и комбинаторике. Изложение современного состояния этой теории можно найти в монографии [ВН98]. Общее определение кольца Коэна–Маколея опирается на понятие регулярной последовательности (см. определение II.1 ниже). В случае конечно порождённых алгебр над полем \mathbf{k} это определение эквивалентно тому, что алгебра является свободным модулем конечного ранга над некоторым своим подкольцом многочленов.

Хотя многие результаты этого раздела верны в значительно большей общности, в этом разделе мы будем рассматривать лишь случай градуированных конечно порождённых связных \mathbf{k} -алгебр A над полем \mathbf{k} и конечно порождённых градуированных A -модулей M (в самом конце мы также обсудим случай $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$). Обозначим через $\mathcal{H}(A^+)$ множество однородных элементов из A положительной степени. Кроме того, для любой последовательности элементов $(t_1, \dots, t_k) \in M$ мы будем обозначать через $M/(t_1, \dots, t_k)$ модуль, получаемый факторизацией M по подмодулю $(t_1, \dots, t_k)M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.1. Пусть M — некоторый A -модуль. Однородный элемент $t \in \mathcal{H}(A^+)$ называется *M -регулярным*, если он не является делителем нуля для M , т.е. $tx = 0$ для $x \in M$ влечёт $x = 0$. Последовательность $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ элементов из $\mathcal{H}(A^+)$ называется *M -регулярной последовательностью*, если t_i является $M/(t_1, \dots, t_{i-1})$ -регулярным элементом при $1 \leq i \leq k$. Часто A -регулярные элементы и последовательности мы будем для краткости называть *регулярными*.

Следующее утверждение показывает роль регулярных последовательностей в изучении гомологических свойств модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.2. Пусть дана точная последовательность A -модулей:

$$\dots \longrightarrow S^{-i} \xrightarrow{f_i} S^{-i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow S^0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0.$$

Если \mathbf{t} является M -регулярной и S^k -регулярной последовательностью для любого $k \leq 0$, то последовательность A/\mathbf{t} -модулей

$$\dots \longrightarrow S^{-i}/\mathbf{t}S^{-i} \xrightarrow{\bar{f}_i} \dots \longrightarrow S^0/\mathbf{t}S^0 \xrightarrow{\bar{f}_0} M/\mathbf{t}M \longrightarrow 0$$

также является точной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи индукции мы сводим утверждение к случаю, когда \mathbf{t} состоит из единственного элемента t . Так как

$$S^{-i}/\mathbf{t}S^{-i} = S^{-i} \otimes_A (A/t),$$

а $-\otimes_A (A/t)$ является точным справа функтором, точность индуцированной последовательности необходимо проверять начиная с члена S^{-1}/t .

Рассмотрим фрагмент индуцированной последовательности:

$$S^{-(i+1)}/t \xrightarrow{\bar{f}_{i+1}} S^{-i}/t \xrightarrow{\bar{f}_i} S^{-(i-1)}/t \xrightarrow{\bar{f}_{i-1}} S^{-(i-2)}/t.$$

Для каждого элемента $x \in S^{-i}$ обозначим через \bar{x} его класс в факторкольце $\text{mod } t$. Пусть $\bar{f}_i(\bar{x}) = 0$, тогда $f_i(x) = ty$ для некоторого $y \in S^{-(i-1)}$ и $tf_{i-1}(y) = 0$. В силу $S^{-(i-2)}$ -регулярности t мы имеем $f_{i-1}(y) = 0$, поэтому существует $x' \in S^{-i}$ такой что $y = f_i(x')$. Следовательно, $f_i(x - tx') = 0$. Итак, $x - tx' \in f_{i+1}(S^{-(i+1)})$ и $\bar{x} \in \bar{f}_{i+1}(S^{-(i+1)}/t)$. Тем самым индуцированная последовательность также является точной. \square

В качестве следствия мы получаем утверждение, которое полезно при вычислении Тог-алгебр симплициальных комплексов.

СЛЕДСТВИЕ II.3. Пусть \mathbf{t} — последовательность элементов из A , которая является A -регулярной и M -регулярной. Тогда имеем

$$\text{Тог}_A(M, \mathbf{k}) = \text{Тог}_{A/\mathbf{t}}(M/\mathbf{t}, \mathbf{k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя предыдущее предложение к минимальной резольвенте A -модуля M , мы получаем минимальную резольвенту A/\mathbf{t} -модуля M/\mathbf{t} . Теперь требуемое утверждение вытекает из (I.6). \square

M -регулярная последовательность называется *максимальной*, если она не содержится в M -регулярной последовательности большей длины. Можно доказать, что все максимальные M -регулярные последовательности имеют одинаковую длину, равную

$$(II.1) \quad \text{др } M = \min\{i : \text{Ext}_A^{-i}(\mathbf{k}, M) \neq 0\}$$

(см. [ВН98, Th. 1.2.5]). Длина максимальной регулярной последовательности называется *глубиной* модуля M (мы будем также использовать обозначение $\text{др}_A M$, если необходимо подчеркнуть, что M является A -модулем). Следующий фундаментальный результат связывает глубину с гомологической размерностью модулей.

ТЕОРЕМА II.4 (Ауслендер–Буксбаум). Пусть $M \neq 0$ — некоторый A -модуль, причём $\text{hd } M < \infty$. Тогда имеет место формула

$$\text{hd } M + \text{dp } M = \text{dp } A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\text{dp } A = 0$. Допустим, что $\text{hd } M = h > 0$. Рассмотрим минимальную резольвенту для M (которая, по предположению, конечна):

$$0 \rightarrow R_{\min}^{-h} \xrightarrow{d_h} R_{\min}^{-h+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow R_{\min}^0 \longrightarrow M \rightarrow 0.$$

Так как $\text{dp } A = 0$, мы имеем $\text{Hom}_A(\mathbf{k}, A) = \text{Ext}_A^0(\mathbf{k}, A) \neq 0$ в силу (II.1). Поэтому имеется мономорфизм A -модулей $i: \mathbf{k} \rightarrow A$. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} R^{-h} \otimes_A \mathbf{k} & \xrightarrow{d_h \otimes_A \mathbf{k}} & R^{-h+1} \otimes_A \mathbf{k} \\ \text{id} \otimes_A i \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes_A i \\ R^{-h} & \xrightarrow{d_h} & R^{-h+1} \end{array}$$

отображения d_h и $\text{id} \otimes_A i$ являются мономорфизмами (последнее в силу свободности модуля R^{-h}). Следовательно, $d_h \otimes_A \mathbf{k}$ также является мономорфизмом, что противоречит минимальности резольвенты. Итак, $\text{hd } M = 0$, т.е. M — свободный A -модуль и $\text{dp } M = \text{dp } A = 0$.

Пусть теперь $\text{dp } A > 0$. Предположим, что $\text{dp } M = 0$. Рассмотрим модуль первых сизигий $M_1 = \text{Ker}[R^0 \rightarrow M]$ для M . Из (II.1) и точной последовательности для Ext легко выводится, что $\text{dp } M_1 = 1$. Так как $\text{hd } M_1 = \text{hd } M - 1$, формулу из утверждения теоремы достаточно доказать для M_1 . Поэтому мы можем считать, что $\text{dp } M > 0$. Значит существует элемент $t \in A$, который является одновременно A -регулярным и M -регулярным. Тогда

$$\text{dp}_{A/t} A/t = \text{dp}_A A - 1, \quad \text{dp}_{A/t} M/t = \text{dp}_A M - 1$$

по определению глубины и

$$\text{hd}_{A/t} M/tM = \text{hd}_A M$$

в силу предложения I.5 и следствия II.3. Теперь доказательство завершается при помощи индукции. \square

В качестве следствия получаем, что если $A = \mathbf{k}[t_1, \dots, t_m]$, то $\text{hd } M \leq m$, или, другими словами, модуль m -х сизигий для любого $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_m]$ -модуля свободен. Этот факт известен как *теорема Гильберта о сизигиях*.

Наряду с глубиной и гомологической размерностью, важнейшим алгебраическим инвариантом алгебры A является её *размерность Крулля* $\dim A$, которая в случае конечно порождённых \mathbf{k} -алгебр равна максимальному числу алгебраически независимых

элементов. Далее мы рассмотрим взаимосвязи между этими инвариантами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.5. Последовательность t_1, \dots, t_n алгебраически независимых однородных элементов алгебры A называется *однородной системой параметров*, если $\dim A/(t_1, \dots, t_n) = 0$ (т.е. A является конечно порождённым $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]$ -модулем). Заметим, что в этом случае мы имеем $n = \dim A$.

Следующий результат был впервые получен Гильбертом и является градуированной версией полученного позднее более общего результата, известного как *лемма Нётер о нормализации*.

ТЕОРЕМА II.6 ([ВН98, Th. 1.5.17]). *В алгебре A над полем \mathbf{k} существует однородная система параметров. Если \mathbf{k} имеет нулевую характеристику, а алгебра A порождена линейными элементами, то и однородную систему параметров можно выбрать из линейных элементов.*

Напомним, что линейные элементы у нас имеют степень два. Однородная система параметров, образованная линейными элементами, называется *линейной системой параметров*.

Легко видеть, что регулярная последовательность состоит из алгебраически независимых элементов, так что $\text{depth } A \leq \dim A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.7. Алгебра A называется *алгеброй Коэна–Маколея*, если в ней содержится регулярная последовательность t_1, \dots, t_n длины $n = \dim A$, т.е. если $\text{dp } A = \dim A$.

Следующее утверждение приводит к альтернативному определению алгебр Коэна–Маколея.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.8. *Последовательность t_1, \dots, t_k элементов из $\mathcal{H}(A^+)$ является регулярной тогда и только тогда, когда A является свободным $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_k]$ -модулем. В частности, A является алгеброй Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда она является свободным конечно порождённым модулем над своим подкольцом многочленов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A является свободным $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_k]$ -модулем, то $A/(t_1, \dots, t_{i-1})$ является свободным $\mathbf{k}[t_i, \dots, t_k]$ -модулем, так что t_i является $A/(t_1, \dots, t_{i-1})$ -регулярным элементом при $1 \leq i \leq k$. Следовательно, t_1, \dots, t_k является A -регулярной последовательностью.

Обратно, пусть $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ является регулярной последовательностью. Рассмотрим минимальную резольвенту $[R_{\min}, d]$ для $\mathbf{k}[\mathbf{t}]$ -модуля A . Тогда, в силу предложения II.2, последовательность \mathbf{k} -модулей

$$\dots \longrightarrow R_{\min}^{-1}/\mathbf{t} \longrightarrow R_{\min}^0/\mathbf{t} \longrightarrow A/\mathbf{t} \longrightarrow 0$$

является точной. Заметим, что $R_{\min}^{-i}/t = R_{\min}^{-i} \otimes_{\mathbf{k}[t]} \mathbf{k}$. В силу минимальности, отображение $R_{\min}^0 \otimes_{\mathbf{k}[t]} \mathbf{k} \rightarrow A \otimes_{\mathbf{k}[t]} \mathbf{k}$ является изоморфизмом. Следовательно, $R_{\min}^{-i} \otimes_{\mathbf{k}[t]} \mathbf{k} = 0$ при $i > 0$, что влечёт $R_{\min}^{-i} = 0$. Итак, $R_{\min}^0 \rightarrow A$ есть изоморфизм, т.е. A является свободным $\mathbf{k}[t]$ -модулем. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.9 (см. [ВН98, 2.1.2]). *Пусть A — алгебра Коэна–Маколея. Тогда последовательность $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ элементов из $\mathcal{H}(A^+)$ является регулярной тогда и только тогда, когда она является частью однородной системы параметров.*

В частности, любая однородная система параметров алгебры Коэна–Маколея является регулярной последовательность. Если, кроме того, A допускает линейную систему параметров, то мы получаем следующую формулу для ряда Пуанкаре:

$$(II.2) \quad F(A; t) = \frac{F(A/(t_1, \dots, t_n); t)}{(1 - t^2)^n},$$

где $F(A/(t_1, \dots, t_n); t)$ — некоторый многочлен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятия регулярных последовательностей и алгебр Коэна–Маколея над кольцом целых чисел определяются таким же образом, как и выше в случае поля \mathbf{k} . Однако, как показывают простые примеры, предложение II.8 не имеет место для алгебр над \mathbb{Z} . Действительно, пусть $A = \mathbb{Z}[v_1, v_2]/(2v_2)$. Тогда v_1 является регулярным элементом, но A не является свободным $\mathbb{Z}[v_1]$ -модулем. Тем не менее, если \mathbb{Z} -алгебра A является свободным конечно-порождённым модулем над своим подкольцом многочленом, то она является алгеброй Коэна–Маколея.

Приложение III

Действия групп и эквивариантные когомологии

Здесь мы приводим ряд основных определений и конструкций, связанных с понятием эквивариантных когомологий, включая эквивариантные характеристические классы. Подробное изложение этого материала можно найти, например, в монографии [Br72].

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство на котором *действует слева* топологическая группа G . Это означает, что задано непрерывное отображение

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto gx$$

такое, что $g(hx) = (gh)x$ для любых $g, h \in G$, $x \in X$ и $ex = x$, где e — единица группы G . Пространство X называется (левым) G -пространством. Аналогично определяется правое действие и правое G -пространство. В случае, когда G — абелева группа, понятия левого и правого действия совпадают.

Действие называется *эффективным*, если множество

$$\{g \in G : gx = x \text{ для любого } x\}$$

состоит из одного элемента $e \in G$. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ некоторых G -пространств X, Y называется *эквивариантным*, если оно коммутирует с действием группы, т.е. $f(gx) = g(f(x))$ для всех $g \in G$ и $x \in X$. Отображение f называется *слабо эквивариантным* (или, более точно, *ψ -эквивариантным*) если существует автоморфизм $\psi: G \rightarrow G$ группы G такой, что $f(gx) = \psi(g)(f(x))$ для всех $g \in G$ и $x \in X$.

Пусть $x \in X$ — некоторая точка. Множество $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ элементов группы G , оставляющих на месте точку x , является замкнутой подгруппой в G . Эта подгруппа G_x называется *стационарной подгруппой* (или *стабилизатором*) точки x . Действие группы G называется *свободным*, если для любой точки $x \in X$ подгруппа G_x тривиальна. Подпространство

$$Gx = \{gx \in X : g \in G\} \subset X$$

называется *орбитой* точки x (относительно действия группы G). Множество всех орбит, наделённое стандартной фактортопологией, называется *пространством орбит* и обозначается X/G . Если G — компактная группа, то пространство X/G хаусдорфово, а проекция $\pi: X \rightarrow X/G$ является замкнутым и собственным отображением (т.е. прообраз любого компактного множества компактен).

Точка $x \in X$ называется *неподвижной*, если $Gx = x$, т.е. $G_x = G$. Множество неподвижных точек G -пространства X мы будем обозначать X^G .

Главным G -расслоением называется расслоение $p: X \rightarrow B$ со слоем G , на котором структурная группа G послойно действует правыми сдвигами (т.е. элемент $g \in G$ переводит точку g' слоя в точку $g'g$). Обычное действие группы G на себе левыми сдвигами коммутирует с правыми сдвигами. Отсюда легко выводится, что для любого главного G -расслоения $p: X \rightarrow B$ существует каноническое свободное левое G -действие на X , накрывающее тривиальное действие на B . Отображение $p: X \rightarrow B$ индуцирует гомеоморфизм $X/G \cong B$ и потому может рассматриваться как проекция на пространство орбит, ассоциированное с данным G -действием. Если группа G компактна, то (для достаточно хороших G -пространств X) верно и обратное, а именно, если G свободно действует на X , то X есть тотальное пространство некоторого главного G -расслоения (см. [Br72, Гл. II]). Таким образом, для компактных групп G понятия главного G -расслоения и свободного G -действия канонически эквивалентны.

Пусть теперь G — компактная группа Ли. Тогда существует главное G -расслоение $EG \rightarrow BG$, тотальное пространство EG которого стягиваемо. Это расслоение обладает следующим свойством универсальности. Пусть $E \rightarrow B$ — другое главное G -расслоение. Тогда существует единственное с точностью до гомотопии отображение $f: B \rightarrow BG$ такое, что расслоение $E \rightarrow B$ индуцируется из расслоения $EG \rightarrow BG$ при помощи отображения f . В соответствии с этим пространство EG называется *универсальным G -пространством*, а пространство BG — *классифицирующим пространством* для свободных G -действий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ III.1. Пусть X — некоторое G -пространство. Группа G свободно действует слева на произведении $EG \times X$ следующим образом:

$$g(e, x) = (eg^{-1}, gx), \quad g \in G, e \in EG, x \in X.$$

Пространство орбит этого действия обозначается $EG \times_G X$ (мы будем также использовать обозначение $B_G X$) и называется *конструкцией Бореля* (или *гомотопическим пространством орбит*). *Эквивариантные когомологии* пространства X (с коэффициентами в кольце \mathbf{k}) определяются как

$$H_G^*(X; \mathbf{k}) := H^*(EG \times_G X; \mathbf{k}).$$

Таким образом, $H_G^*(pt; \mathbf{k}) = H^*(BG; \mathbf{k})$ и проекция $EG \times_G X \rightarrow BG$ задаёт в $H_G^*(X; \mathbf{k})$ структуру модуля над $H_G^*(pt; \mathbf{k})$.

В эквивариантных когомологиях имеет место точная последовательность пары G -пространств $Y \subset X$ благодаря наличию эквивариантного гомеоморфизма

$$EG \times X / EG \times Y \cong (EG \times (X/Y)) / EG \times pt.$$

Имеются две эквивариантные проекции

$$\begin{array}{ccc} EG \times X \rightarrow EG & & EG \times X \rightarrow X \\ (e, x) \mapsto e & \text{и} & (e, x) \mapsto x. \end{array}$$

Первая из этих проекций индуцирует расслоение $EG \times_G X \rightarrow BG$ со слоем X и структурной группой G . Вторая проекция индуцирует отображение $EG \times_G X \rightarrow X/G$. С другой стороны, имеется главное G -расслоение $EG \times X \rightarrow EG \times_G X$. Вложение множества неподвижных точек $X^G \subset X$ задаёт вложение

$$BG \times X^G \rightarrow B_G X.$$

Таким образом, имеется вложение $X^G \rightarrow B_G X$, композиция которого с проекцией $B_G X \rightarrow X/G$ совпадает с вложением $X^G \rightarrow X/G$.

Роль конструкции Бореля заключается в том, что G -пространство X заменяется на гомотопически эквивалентное свободное G -пространство $EG \times X$, и затем берётся пространство орбит. Это объясняет термин «гомотопическое пространство орбит». Отображение $EG \times_G X \rightarrow X/G$ индуцирует гомоморфизм $H^*(X/G) \rightarrow H_G^*(X)$, который является изоморфизмом в случае свободного G -действия. В общем случае эквивариантные когомологии дают намного больше информации для изучения и вычисления алгебраических инвариантов действия, чем обычные когомологии пространства орбит.

Расслоение $\pi: E \rightarrow X$ со слоем F называется G -расслоением, если π является эквивариантным отображением G -пространств. Применение конструкции Бореля к G -расслоению $\pi: E \rightarrow X$ даёт расслоение $B_G E \rightarrow B_G X$ с тем же слоем F . В случае G -векторных расслоений это немедленно приводит к построению *эквивариантных характеристических классов*. Например, *эквивариантные классы Штифеля–Уитни* векторного G -расслоения $\pi: E \rightarrow X$ лежат в $H_G^*(X; \mathbb{Z}/2)$ и обозначаются $w_i^G(E)$. Если $E \rightarrow X$ является ориентированным G -векторным расслоением, то определён *эквивариантный класс Эйлера* $e^G(E) \in H_G^*(X; \mathbb{Z})$. Если $E \rightarrow X$ является комплексным расслоением и G -действие сохраняет послойную комплексную структуру, то определены *эквивариантные классы Чженя* $c_i^G(E) \in H_G^{2i}(X; \mathbb{Z})$.

Пусть теперь $X = M$ — гладкое ориентированное G -многообразие размерности n , где G по-прежнему компактная группа Ли. Пусть также $N \subset M$ — некоторое G -инвариантное (например, неподвижное) ориентированное подмногообразие коразмерности k . При помощи некоторого G -эквивариантного диффеоморфизма мы

можем отождествить нормальное G -расслоение $\nu(N \subset M)$ с G -инвариантной трубчатой окрестностью U подмногообразия N в M , а пространство Тома $T\nu$ расслоения ν — с факторпространством $\bar{U}/\partial\bar{U}$. Имеем вложение $i: N \subset M$ и проекцию $\pi: U \rightarrow N$. Получаем отображение Понтрягина–Тома $p: M \rightarrow T\nu$, стягивающее дополнение $M \setminus U$ в точку. В эквивариантных коhomологиях имеется класс Тома $\tau_N \in H_G^k(T\nu)$, однозначно определяемый свойством

$$(\alpha \cdot p^*(\tau_N), [M]) = (i^*\alpha, [N]),$$

для любого $\alpha \in H_G^{n-k}(M)$. Здесь $[M] \in H_n^G(M)$ обозначает фундаментальный класс многообразия M в эквивариантных гомологиях. Отображение, определяемое композицией

$$H_G^{*-k}(N) \xrightarrow{\pi^*} H_G^{*-k}(U) \xrightarrow{\cdot\tau_N} H_G^*(T\nu) \xrightarrow{p^*} H_G^*(M)$$

называется *гомоморфизмом Гизина* (или прямым образом) в эквивариантных коhomологиях и обозначается i_* . Элемент $i^*(i_*(1)) \in H_G^k(N)$ совпадает с эквивариантным классом Эйлера нормального расслоения ν .

Приложение IV

Стабильно комплексные структуры и комплексные кобордизмы

Здесь мы кратко излагаем основные понятия теории бордизмов и кобордизмов, уделяя особое внимание комплексным кобордизмам. Стандартным источником по теории кобордизмов является монография Стонга [St68].

Неориентированные бордизмы

Далее все многообразия будут предполагаться гладкими, компактными и замкнутыми (без границы), если не оговорено противное. Пусть M_1 и M_2 — два n -мерных многообразия. *Бордизмом* между ними называется гладкое $(n + 1)$ -мерное многообразие W с границей, которая представляет собой несвязное объединение M_1 и M_2 , т.е. $\partial W = M_1 \sqcup M_2$; в этом случае M_1 и M_2 называются *бордантными*. Легко видеть, что отношение бордантности разбивает многообразия на классы эквивалентности (см. рис. IV), называемые *классами бордизма*.

Будем обозначать класс бордизма многообразия M через $[M]$, а через Ω_n^O — множество классов бордизма n -мерных многообразий. Тогда Ω_n^O является абелевой группой по отношению к операции несвязного объединения: $[M_1] + [M_2] = [M_1 \sqcup M_2]$. Нулём является класс бордизма пустого множества (или любого многообразия, являющегося границей), а $-[M] = [M]$. Таким образом, Ω_n^O является 2-кручением.

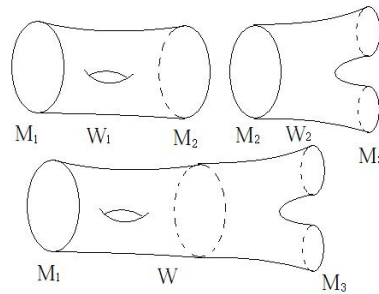


Рис. IV.1. Транзитивность отношения бордантности.

Положим $\Omega_*^O := \bigoplus_{n \geq 0} \Omega_n^O$. Операция $[M_1] \times [M_2] = [M_1 \times M_2]$ превращает Ω_*^O в коммутативное градуированное кольцо, называемое *кольцом неориентированных бордизмов*.

Для любого пространства X можно определить отношение бордантности между отображениями n -мерных многообразий в X : два отображения $M_1 \rightarrow X$ и $M_2 \rightarrow X$ бордантны, если существует бордизм W между M_1 и M_2 , а отображение $M_1 \sqcup M_2 \rightarrow X$ продолжается до отображения $W \rightarrow X$. Множество классов бордизма отображений $M \rightarrow X$ образует абелеву группу, называемую *группой n -мерных неориентированных бордизмов пространства X* и обозначаемую $O_n(X)$ (другие распространённые обозначения: $N_n(X)$, $MO_n(X)$).

Сопоставление $X \mapsto O_*(X)$ является *обобщённой теорией гомологий*, т.е. обладает свойствами гомотопической инвариантности, вырезания и точными последовательностями пар. При этом $O_*(pt) = \Omega_*^O$, а $O_*(X)$ является Ω_*^O -модулем.

Конструкция Понтрягина–Тома сводит вычисление групп бордизмов к гомотопической задаче:

$$(IV.1) \quad O_n(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{k+n}((X_+) \wedge MO(k)),$$

где $X_+ = X \sqcup pt$, а $MO(k)$ — *пространство Тома* универсального k -мерного расслоения $EO(k) \rightarrow BO(k)$. Группы *кобордизмов* определяются двойственным образом:

$$O^n(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\Sigma^{k-n}(X_+), MO(k)],$$

здесь $[X, Y]$ обозначает множество классов гомотопных отображений из X в Y . При этом соответствующая теория когомологий мультипликативна, т.е. $O^*(X) = \bigoplus_n O^n(X)$ является градуированным кольцом. Из определений вытекает, что $O^n(pt) = O_{-n}(pt)$. Градуированное кольцо Ω_O^* , где $\Omega_O^{-n} := O^{-n}(pt) = \Omega_n^O$, называется *кольцом неориентированных кобордизмов*. Оно имеет нетривиальные элементы лишь в неположительных градуированных компонентах. Таким образом, кольцо бордизмов Ω^O и кольцо кобордизмов Ω_O отличаются лишь градуировкой, так что понятия «класс бордизма» и «класс кобордизма» многообразия M являются взаимно заменяемыми. Существенное различие между бордизмами и кобордизмами возникает лишь для нетривиальных пространств X .

Ориентированные и комплексные бордизмы

Наряду с неориентированными бордизмами важную роль играют бордизмы многообразий с дополнительными структурами. При этом в определении бордантности требуется, чтобы многообразие W также обладало этой структурой и имело место соотношение

$\partial W = M_1 \sqcup \overline{M}_2$, где соответствующая структура на ∂W индуцируется из W , а \overline{M}_2 обозначает многообразие с противоположной структурой. Простейшей дополнительной структурой является ориентация. Соответственно, возникает понятие *ориентированной бордантности*. Кольцо ориентированных бордизмов Ω_*^{SO} определяется по аналогии с Ω_*^O , с той лишь разницей, что $-[M] = [\overline{M}]$. Элементы из Ω_*^{SO} не обязательно имеют порядок 2.

Другим важнейшим примером дополнительной структуры на многообразии является комплексная структура. Однако непосредственно определить отношение бордантности для комплексных многообразий не представляется возможным, так как многообразие W не может быть комплексным. Для преодоления этой трудности вводится понятие стабильно комплексной (или *квазикомплексной*) структуры.

Пусть $\mathcal{T}M$ — касательное расслоение многообразия M , а $\underline{\mathbb{R}}^k$ обозначает тривиальное расслоение над M со слоем \mathbb{R}^k . *Стабильно комплексная структура* на M задаётся выбором изоморфизма

$$(IV.2) \quad c_{\mathcal{T}}: \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \rightarrow \xi$$

«стабильного» касательного расслоения с некоторым комплексным векторным расслоением ξ . При этом некоторые выборы таких изоморфизмов объявляются эквивалентными, т.е. задают одну и ту же стабильно комплексную структуру (детали см. в [St68, Гл. II, VII]). В частности, две стабильно комплексных структуры считаются эквивалентными, если они отличаются на тривиальное комплексное слагаемое. По-другому стабильно комплексную структуру на M можно определить, задавая структуру комплексного расслоения в нормальном расслоении для некоторого вложения $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.

Стабильно комплексным многообразием мы называем пару $(M, c_{\mathcal{T}})$, состоящую из многообразия M и фиксированной стабильно комплексной структуры $c_{\mathcal{T}}$ на нём. Это понятие обобщает комплексные и *почти комплексные* многообразия (последнее означает многообразие с фиксированной структурой комплексного расслоения на $\mathcal{T}M$, т.е. стабильно комплексной структурой (IV.2) с $k = 0$). Как показывает следующий пример, многообразия могут допускать много различных стабильно комплексных структур.

ПРИМЕР IV.1. Пусть $M = \mathbb{C}P^1$. Стандартная комплексная структура на M эквивалентна стабильно комплексной структуре, задаваемой изоморфизмом

$$\mathcal{T}(\mathbb{C}P^1) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} \overline{\eta} \oplus \overline{\eta},$$

где η — расслоение Хопфа. С другой стороны, изоморфизм

$$\mathcal{T}(\mathbb{C}P^1) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\cong} \eta \oplus \overline{\eta} \cong \underline{\mathbb{C}}^2$$

задаёт тривиальную стабильно комплексную структуру на $\mathbb{C}P^1$.

Между стабильно комплексными многообразиями можно определить отношение бордантности. Как и в случае неориентированных бордизмов, множество классов бордизма $[M, c_T]$ стабильно комплексных n -мерных многообразий является абелевой группой относительно операции несвязного объединения. Эта группа называется *группой n -мерных комплексных бордизмов* и обозначается Ω_n^U . Нулём этой группы является класс бордизма любого многообразия M , которое является границей, и стабильное касательное расслоение которого тривиально (а следовательно изоморфно тривиальному комплексному расслоению $M \times \mathbb{C}^k$). Примером такого многообразия является сфера S^n . Обратный элемент к классу бордизма $[M, c_T]$ в группе Ω_n^U можно представить тем же многообразием M со стабильно комплексной структурой, задаваемой изоморфизмом

$$TM \oplus \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{c_T \oplus e} \xi \oplus \mathbb{C},$$

где c_T задаётся как в (IV.2), а $e: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $e(x, y) = x - iy$.

Если стабильно комплексная структура c_T на многообразии M определяется контекстом, то мы будем использовать сокращённое обозначение $[M]$ для соответствующего класса комплексных бордизмов.

КОНСТРУКЦИЯ IV.2 (связная сумма). Для многообразий положительной размерности несвязное многообразие $M_1 \sqcup M_2$, представляющее сумму классов бордизма $[M_1] + [M_2]$ можно заменить их *связной суммой*, представляющей тот же класс бордизма.

По определению, связной суммой $M_1 \# M_2$ многообразий M_1 и M_2 одинаковой размерности n называется многообразие, получаемое следующим образом. Выберем некоторые точки $v_1 \in M_1$ и $v_2 \in M_2$ и их замкнутые шаровые ε -окрестности $B_\varepsilon(v_1)$ и $B_\varepsilon(v_2)$ (можно считать оба многообразия римановыми). Зафиксируем изометрическое вложение f пары стандартных ε -шаров $D^n \times S^0$ (здесь $S^0 = \{0, 1\}$) в $M_1 \sqcup M_2$, при котором $D^n \times 0$ отображается на $B_\varepsilon(v_1)$, а $D^n \times 1$ — на $B_\varepsilon(v_2)$. Теперь, используя это вложение, заменим в $M_1 \sqcup M_2$ пару шаров $D^n \times S^0$ на «трубку» $S^{n-1} \times D^1$. Применив стандартную процедуру сглаживания углов, получим гладкое многообразие $M_1 \# M_2$. Гладкая структура на $M_1 \# M_2$ не зависит от выбора точек v_1 и v_2 и от выбора вложения $D^n \times S^0 \hookrightarrow M_1 \sqcup M_2$, если хотя одно из многообразий M_1 и M_2 неориентируемо или обращено (т.е. ориентируемо и допускает обращающий ориентацию диффеоморфизм). В противном случае определяется *связная сумма ориентированных многообразий*; при этом требуется, чтобы вложение f сохраняло ориентацию на одном шаре и обращало её на другом. Имеются гладкие «сжимающие» отображения $p_1: M_1 \# M_2 \rightarrow M_1$ и $p_2: M_1 \# M_2 \rightarrow M_2$. В ориентированном случае многообразии

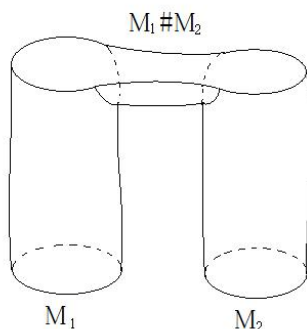


Рис. IV.2. Связная сумма и несвязное объединение.

$M_1 \# M_2$ можно ориентировать таким образом, что сжимающие отображения сохраняют ориентацию.

Простейшим примером необращаемого многообразия является $\mathbb{C}P^2$; при этом многообразия $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ не диффеоморфны (у них разные сигнатуры).

Бордизм между $M_1 \sqcup M_2$ и $M_1 \# M_2$ строится следующим образом. Рассмотрим цилиндр $M_1 \times I$, из которого удалим ε -окрестность $U_\varepsilon(v_1 \times 1)$ точки $v_1 \times 1$ и аналогично удалим из $M_2 \times I$ окрестность $U_\varepsilon(v_2 \times 1)$ (каждая из этих окрестностей отождествляется с половиной стандартного открытого $(n+1)$ -шара). Полученные пространства соединим «половиной трубки» вида $S_{\leq}^n \times I$, где полусфера $S_{\leq}^n \times 0$ отождествляется с полусферой на границе окрестности $U_\varepsilon(v_1 \times 1)$, а $S_{\leq}^n \times 1$ — с полусферой на границе окрестности $U_\varepsilon(v_2 \times 1)$. Сгладив углы, мы получим многообразие с краем $M_1 \sqcup M_2 \sqcup (M_1 \# M_2)$ (или $\overline{M}_1 \sqcup \overline{M}_2 \sqcup (M_1 \# M_2)$ если речь идёт об ориентированных бордизмах), см. рис. IV.2.

Наконец, если M_1 и M_2 — стабильно комплексные многообразия, то каноническая стабильно комплексная структура на $M_1 \# M_2$ задаётся следующим образом. Пусть стабильно комплексные структуры на M_1 и M_2 задаются при помощи изоморфизмов

$$c_{T,1}: TM_1 \oplus \mathbb{R}^{k_1} \rightarrow \xi_1 \quad \text{и} \quad c_{T,2}: TM_2 \oplus \mathbb{R}^{k_2} \rightarrow \xi_2.$$

Так как мы имеем изоморфизм $\mathcal{T}(M_1 \# M_2) \oplus \mathbb{R}^n \cong p_1^* TM_1 \oplus p_2^* TM_2$, на $M_1 \# M_2$ имеется стабильно комплексная структура, задаваемая изоморфизмом

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(M_1 \# M_2) \oplus \mathbb{R}^{n+k_1+k_2} \\ & \cong p_1^* TM_1 \oplus \mathbb{R}^{k_1} \oplus p_2^* TM_2 \oplus \mathbb{R}^{k_2} \xrightarrow{c_{T,1} \oplus c_{T,2}} p_1^* \xi_1 \oplus p_2^* \xi_2. \end{aligned}$$

Эту стабильно комплексную структуру мы будем называть *связной суммой стабильно комплексных структур* на M_1 и M_2 . Соответствующий класс комплексных бордизмов есть $[M_1] + [M_2]$.

По аналогии с (IV.1) можно определить *группы комплексных бордизмов и кобордизмов* пространства X :

$$(IV.3) \quad \begin{aligned} U_n(X) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{2k+n}((X_+) \wedge MU(k)), \\ U^n(X) &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\Sigma^{2k-n}(X_+), MU(k)], \end{aligned}$$

где $MU(k)$ — пространство Тома универсального комплексного расслоения $EU(k) \rightarrow BU(k)$. Эти группы являются Ω_*^U -модулями и определяют мультипликативную теорию (ко)гомологий. Таким образом, $U^*(X) = \bigoplus_n U^n(X)$ является градуированным кольцом. Градуированное кольцо Ω_U^* , где $\Omega_U^n = \Omega_{-n}^U$, называется *кольцом комплексных кобордизмов*; оно имеет нетривиальные элементы лишь в неположительных градуированных компонентах.

В случае, когда X является многообразием, группы $U_n(X)$ и $U^n(X)$ допускают геометрическую интерпретацию как группы бордизмов отображений многообразий $M \rightarrow X$ с некоторой дополнительной структурой [Qu71]. Нам понадобится такая геометрическая интерпретация лишь в простейшем случае, описываемом следующей конструкцией.

КОНСТРУКЦИЯ IV.3 (геометрические кобордизмы). Для любого клеточного пространства X мы имеем $H^2(X) = [X, \mathbb{C}P^\infty]$. Так как $\mathbb{C}P^\infty = MU(1)$, из (IV.3) вытекает, что каждый элемент $x \in H^2(X)$ определяет некоторый элемент $u_x \in U^2(X)$. Элементы из $U^2(X)$, получаемые таким образом называются *геометрическими кобордизмами* пространства X . Таким образом, $H^2(X)$ можно рассматривать как подмножество в $U^2(X)$, но при этом операция сложения в группе $H^2(X)$ не получается ограничением операции сложения в $U^2(X)$ (мы подробно изучим этот вопрос в приложении V).

Если X является многообразием, то геометрические кобордизмы задаются подмногообразиями $M \subset X$ коразмерности 2 с заданной комплексной структурой в нормальном расслоении.

В самом деле, элемент $x \in H^2(X)$ определяет класс гомотопных отображений $f_x: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Образ $f_x(X)$ содержится в некотором $\mathbb{C}P^N \subset \mathbb{C}P^\infty$, и мы можем считать, что $f_x(X)$ трансверсален к некоторой гиперплоскости $H \subset \mathbb{C}P^N$. Тогда прообраз $M_x := f_x^{-1}(H)$ является подмногообразием коразмерности 2 в X , с комплексной структурой в нормальном расслоении, индуцированной комплексной структурой в нормальном расслоении вложения $H \subset \mathbb{C}P^N$. Гомотопия отображения f_x не меняет класса бордизма вложения $M_x \rightarrow X$.

Обратно, если задано подмногообразие $M \subset X$ коразмерности 2 с комплексной структурой в его нормальном расслоении ν , то композиция

$$X \rightarrow M(\nu) \rightarrow MU(1) = \mathbb{C}P^\infty$$

отображения Понтрягина–Тома $X \rightarrow M(\nu)$ и отображения пространств Тома, соответствующего классифицирующему отображению $M \rightarrow BU(1)$ расслоения ν , задаёт элемент $x_M \in H^2(X)$, а следовательно геометрический кобордизм.

Если многообразии X ориентируемо, то задание комплексной структуры в нормальном расслоении вложения $M \subset X$ многообразия коразмерности 2 эквивалентно ориентации многообразия M . При этом образ фундаментального класса M в гомологиях X двойствен по Пуанкаре классу когомологий $x_M \in H^2(X)$.

Структурные результаты

Теория неориентированных (ко)бордизмов была полностью описана Томом в 1954 г.: кольцо коэффициентов Ω_*^O вычислено, а группы бордизмов $O_*(X)$ клеточных пространств X сведены к группам гомологий X с коэффициентами в Ω_*^O . Соответствующие результаты содержатся в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА IV.4.

1. Два многообразия неориентированно бордантны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые характеристические числа Штифеля–Уитни.
2. Ω_*^O является кольцом многочленов над $\mathbb{Z}/2$ от образующих a_i размерности i , где i пробегает все положительные числа, не равные $2^k - 1$.
3. Для любого клеточного пространства X модуль $O_*(X)$ является свободным градуированным Ω_*^O -модулем, изоморфным $H_*(X; \mathbb{Z}/2) \otimes_{\mathbb{Z}/2} \Omega_*^O$.

Вычисление кольца комплексных бордизмов Ω_*^U оказалось намного более сложной задачей, которая была решена Новиковым в 1960 г. Соответствующие результаты сведены в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА IV.5.

1. $\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q}$ является кольцом многочленов над \mathbb{Q} от классов бордизма комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^i$, $i \geq 1$.
2. Два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые характеристические числа Чженя.
3. Ω_*^U является кольцом многочленов над \mathbb{Z} от образующих a_i размерности $2i$, где $i \geq 1$.

Заметим, что утверждение, аналогичное части 3 теоремы IV.4, отсутствует: вообще говоря, $U_*(X)$ даже не является свободным Ω_*^U -модулем. Таким образом, в отличие от неориентированных бордизмов, вычисление комплексных бордизмов пространства X не

сводится к вычислению кольца коэффициентов Ω_*^U и групп гомологий $H_*(X)$. Теория комплексных (ко)бордизмов несравненно богаче её неориентированного аналога, но в то же время не настолько сложна, как ориентированные бордизмы и другие бордизмы с дополнительными структурами. Благодаря этому именно теория комплексных кобордизмов нашла обширные приложения в алгебраической топологии и за её пределами, которые активно изучались начиная с работы Новикова [Ноб7].

Вычисление кольца ориентированных бордизмов также было завершено Новиковым в 1960 г. В отличие от комплексных бордизмов, кольцо Ω_*^{SO} имеет кручение. Мы приведём частичный результат (не включающий полного описания кручения).

ТЕОРЕМА IV.6.

1. $\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ является кольцом многочленов над \mathbb{Q} от классов бордизма комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^{2i}$, $i \geq 1$.
2. Подкольцо $\text{Tors} \subset \Omega_*^{SO}$ элементов конечного порядка состоит из элементов порядка 2. Кольцо $\Omega_*^{SO}/\text{Tors}$ является кольцом многочленов над \mathbb{Z} от образующих a_i размерности $4i$, где $i \geq 1$.
3. Два ориентированных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые характеристические числа Понтрягина и Штифеля–Уитни.

Мультипликативные образующие

Для описания мультипликативных образующих кольца Ω_*^U нам понадобится специальный характеристический класс комплексных расслоений. Пусть ξ — комплексное k -мерное расслоение над многообразием M . Запишем формально его полный класс Чженя следующим образом:

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_k(\xi) = (1 + x_1) \dots (1 + x_k),$$

так что $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, \dots, x_k)$ есть i -я элементарная симметрическая функция от формальных переменных. Переменные x_1, \dots, x_k приобретают геометрический смысл, если ξ является суммой $\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_k$ одномерных расслоений, тогда $x_j = c_1(\xi_j)$, $1 \leq j \leq k$. Рассмотрим многочлен

$$P_n(x_1, \dots, x_k) = x_1^n + \dots + x_k^n$$

и выразим его через элементарные симметрические функции:

$$P_n(x_1, \dots, x_k) = s_n(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

Подставив вместо симметрических функций классы Чженя, получим некоторый характеристический класс расслоения ξ :

$$s_n(\xi) = s_n(c_1(\xi), \dots, c_k(\xi)) \in H^{2n}(M).$$

Этот характеристический класс играет важнейшую роль при выделении мультипликативных образующих кольца комплексных бордизмов, благодаря следующим свойствам, непосредственно вытекающим из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.7.

1. $s_n(\xi) = 0$ при $2n > \dim M$.
2. $s_n(\xi \oplus \eta) = s_n(\xi) + s_n(\eta)$.

Если (M, c_T) — стабильно комплексное многообразие размерности $2n$, то определим характеристическое число

$$s_n[M] = s_n(\xi)\langle M \rangle \in \mathbb{Z},$$

где ξ — комплексное расслоение из (IV.2), а $\langle M \rangle \in H_{2n}(M)$ — фундаментальный гомологический класс.

СЛЕДСТВИЕ IV.8. Если класс бордизма $[M] \in \Omega_{2n}^U$ раскладывается в произведение $[M_1] \times [M_2]$, где $\dim M_1 > 0$ и $\dim M_2 > 0$, то $s_n[M] = 0$.

Таким образом, характеристическое число s_n обращается в нуль на разложимых элементах из Ω_{2n}^U . Оказывается, для выделения неразложимых элементов, являющихся мультипликативными образующими, также достаточно вычислить число s_n . Следующий результат вытекает из доказательства теоремы IV.5.

ТЕОРЕМА IV.9. Класс бордизма $[M] \in \Omega_{2n}^U$ можно взять в качестве мультипликативной образующей a_n кольца Ω_*^U тогда и только тогда, когда

$$s_n[M] = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } n \neq p^k - 1 \text{ ни для какого простого } p; \\ \pm p, & \text{если } n = p^k - 1 \text{ для некоторого простого } p. \end{cases}$$

Хотя явное описание связных многообразий, представляющих классы кобордизмов мультипликативных образующих $a_n \in \Omega_*^U$, явно отсутствует, имеется простой набор многообразий, классы бордизма которых порождают всё кольцо Ω_*^U (но между ними имеются соотношения).

КОНСТРУКЦИЯ IV.10 (гиперповерхности Милнора). Зафиксируем целые числа $j \geq i \geq 0$ и рассмотрим многообразие $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$. Алгебраическая гиперповерхность

$$(IV.4) \quad H_{ij} = \{(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : z_0 w_0 + \dots + z_i w_i = 0\}$$

называется гиперповерхностью Милнора. Мы имеем $H_{0j} \cong \mathbb{C}P^{j-1}$.

Обозначим через p_1 и p_2 проекции $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ на первый и второй сомножители соответственно, а η — комплексное 1-мерное расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^k$; тогда $\bar{\eta}$ — расслоение гиперплоского сечения. Мы имеем

$$H^*(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j) = \mathbb{Z}[x, y]/(x^{i+1} = 0, y^{j+1} = 0),$$

где $x = p_1^*c_1(\bar{\eta})$, $y = p_2^*c_1(\bar{\eta})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.11. *Геометрический кобордизм в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, соответствующий элементу $x + y \in H^2(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)$, задаётся подмногообразием H_{ij} . В частности, образ фундаментального класса $\langle H_{ij} \rangle$ в $H_{2(i+j-1)}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)$ двойствен по Пуанкаре элементу $x + y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $x + y = c_1(p_1^*(\bar{\eta}) \otimes p_2^*(\bar{\eta}))$. Классифицирующее отображение $f_{x+y}: \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ является композицией вложения Сегре

$$\sigma: \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \rightarrow \mathbb{C}P^{i+j+i+j},$$

$$(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \mapsto (z_0 w_0 : z_0 w_1 : \dots : z_k w_l : \dots : z_i w_j),$$

и вложения $\mathbb{C}P^{i+j+i+j} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Подмногообразие коразмерности 2 в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, соответствующее классу $x + y$ получается как прообраз $\sigma^{-1}(H)$ гиперплоскости общего положения в $\mathbb{C}P^{i+j+i+j}$ (т.е. гиперплоскости H , трансверсальной к образу отображения Сегре), см. конструкцию IV.3. По построению (IV.4), гиперповерхность Милнора как раз имеет вид $\sigma^{-1}(H)$ для одной из таких гиперплоскостей H . \square

ЛЕММА IV.12.

$$s_{i+j-1}[H_{ij}] = \begin{cases} j, & \text{если } i = 0, \text{ т.е. } H_{ij} = \mathbb{C}P^{j-1}; \\ 2, & \text{если } i = j = 1; \\ 0, & \text{если } i = 1, j > 1; \\ -C_{i+j}^i, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i = 0$. Так как стабильно комплексная структура на $H_{0j} = \mathbb{C}P^{j-1}$ задаётся при помощи изоморфизма $\mathcal{T}(\mathbb{C}P^{j-1}) \oplus \mathbb{C} \cong \bar{\eta} \oplus \dots \oplus \bar{\eta}$ (j слагаемых), а $x = c_1(\bar{\eta})$, мы имеем

$$s_{j-1}[\mathbb{C}P^{j-1}] = jx^{j-1}\langle \mathbb{C}P^{j-1} \rangle = j.$$

Пусть теперь $i > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} s_{i+j-1}(\mathcal{T}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)) &= (i+1)x^{i+j-1} + (j+1)y^{i+j-1} = \\ &= \begin{cases} 2x^j + (j+1)y^j, & \text{при } i = 1; \\ 0, & \text{при } i > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим через ν нормальное расслоение вложения $\iota: H_{ij} \rightarrow \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$. Тогда

$$(IV.5) \quad \mathcal{T}(H_{ij}) \oplus \nu = \iota^*(\mathcal{T}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)).$$

Так как $c_1(\nu) = \iota^*(x + y)$, мы получаем $s_{i+j-1}(\nu) = \iota^*(x + y)^{i+j-1}$.

Пусть $i = 1$. Тогда из (IV.5) и предложения IV.7 вытекает, что

$$\begin{aligned} s_j[H_{1j}] &= s_j(\mathcal{T}(H_{1j}))\langle H_{1j} \rangle = \iota^*(2x^j + (j+1)y^j - (x+y)^j)\langle H_{1j} \rangle = \\ &= (2x^j + (j+1)y^j - (x+y)^j)(x+y)\langle \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^j \rangle = \begin{cases} 2, & \text{если } j = 1; \\ 0, & \text{если } j > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть теперь $i > 1$. Тогда $s_{i+j-1}(\mathcal{T}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)) = 0$, и мы получаем из (IV.5) и предложения IV.7, что

$$\begin{aligned} s_{i+j-1}[H_{ij}] &= -s_{i+j-1}(\nu)\langle H_{ij} \rangle = -\iota^*(x + y)^{i+j-1}\langle H_{ij} \rangle = \\ &= -(x + y)^{i+j}\langle \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \rangle = -C_{i+j}^i. \end{aligned}$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы видим, что $s_1[H_{11}] = 2 = s_1[\mathbb{C}P^1]$, т.е. H_{11} бордантно $\mathbb{C}P^1$. На самом деле $H_{11} \cong \mathbb{C}P^1$, так как образ соответствующего вложения Сегре есть квадратичная гиперповерхность в $\mathbb{C}P^3$, а её гиперплоское сечение есть квадрика, т.е. $\mathbb{C}P^1$.

ТЕОРЕМА IV.13. *Классы бордизма $\{[H_{ij}], 0 \leq i \leq j\}$ мультипликативно порождают кольцо Ω_*^U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простое вычисление показывает, что

$$\text{Н.О.Д.}(C_{n+1}^i, 1 \leq i \leq n) = \begin{cases} p, & \text{если } n = p^k - 1, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда из леммы IV.12 вытекает, что некоторая целочисленная линейная комбинация классов бордизма $[H_{ij}]$ с $i + j = n + 1$ может быть взята в качестве мультипликативной образующей a_n кольца Ω_*^U , см. теорему IV.9. □

ПРИМЕР IV.14. Так как $s_1[\mathbb{C}P^1] = 2$, $s_2[\mathbb{C}P^2] = 3$, классы бордизма $[\mathbb{C}P^1]$ и $[\mathbb{C}P^2]$ могут быть взяты в качестве мультипликативных образующих a_1 и a_2 кольца Ω_*^U . В то же время класс $[\mathbb{C}P^3]$ нельзя взять в качестве a_3 , так как $s_3[\mathbb{C}P^3] = 4$, а $s_3(a_3) = \pm 2$. В качестве a_3 можно взять, например, класс $[H_{22}] + [\mathbb{C}P^3]$.

Теорема IV.13 допускает следующее важное уточнение, принадлежащее Милнору (доказательство содержится в [St68, Гл. 7]).

ТЕОРЕМА IV.15 (Милнор). *Каждый класс бордизма $x \in \Omega_n^U$, $n > 0$, содержит неособое алгебраическое многообразие (не обязательно связное).*

Следующий вопрос остаётся открытым и по сей день.

ПРОБЛЕМА IV.16 (Хирцебрух). Описать множество классов бордизма из Ω_*^U , содержащих связные неособые алгебраические многообразия.

Также остаётся открытым вопрос о том, какие классы бордизма содержат связные почти комплексные многообразия.

ПРИМЕР IV.17. Группа Ω_2^U изоморфна \mathbb{Z} и порождается классом римановой сферы $[CP^1]$. Каждый класс $k[CP^1] \in \Omega_2^U$ содержит неособое алгебраическое многообразие, а именно, несвязное объединение k экземпляров CP^1 при $k > 0$ и риманову поверхность рода $(1 - k)$ при $k \leq 0$. При этом связные алгебраические многообразия содержатся лишь в классах бордизма $k[CP^1]$ с $k \leq 1$.

Приложение V

Формальные группы и роды Хирцебруха

Благодаря пионерской работе Новикова [Но67], теория и техника *формальных групп*, изначально возникшая в алгебраической геометрии, нашла широкие приложения в теории кобордизмов. Приложения формальных группы тесно связаны с *родами Хирцебруха* [Hi66] — важнейшими инвариантами классов кобордизма многообразий. Здесь мы изложим основные сведения и результаты.

Элементы теории формальных групп

В этом изложении мы следуем [St68, приложение В. М. Бухштабера]. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей.

Формальный ряд $F(u, v) \in R[[u, v]]$ называется (коммутативной) *формальной группой* над R , если он удовлетворяет следующим соотношениям:

- 1) $F(u, 0) = u, F(0, v) = v$;
- 2) $F(F(u, v), w) = F(u, F(v, w))$;
- 3) $F(u, v) = F(v, u)$.

Примером формальной группы над полем \mathbf{k} является разложение в ряд вблизи единицы отображения умножения $G \times G \rightarrow G$ в одномерной алгебраической группе над \mathbf{k} , что и объясняет название.

Формальная группа F над R называется *линеаризуемой*, если существует формальная замена переменных $u \mapsto g_F(u) = u + \sum_{i>0} g_i u^i \in R[[u]]$ такая, что

$$(V.1) \quad g_F(F(u, v)) = g_F(u) + g_F(v).$$

Заметим, что любая формальная группа над R задаёт формальную группу над $R \otimes \mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА V.1. *Любая формальная группа F линеаризуема над $R \otimes \mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ряд $\omega(u) = \left. \frac{\partial F(u, w)}{\partial w} \right|_{w=0}$. Тогда $\omega(F(u, v)) = \left. \frac{\partial F(F(u, v), w)}{\partial w} \right|_{w=0} = \frac{\partial F(F(u, v), w)}{\partial F(u, w)} \Big|_{w=0} \cdot \left. \frac{\partial F(u, w)}{\partial w} \right|_{w=0} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \omega(u)$. Следовательно, имеет место формула $\frac{du}{\omega(u)} = \frac{dF(u, v)}{\omega(F(u, v))}$. Положим

$$(V.2) \quad g(u) = \int_0^u \frac{du}{\omega(u)};$$

тогда $dg(u) = dg(F(u, v))$. Следовательно, $g(F(u, v)) = g(u) + C$. Так как $F(0, v) = v$, а $g(0) = 0$, имеем $C = g(v)$. Итак, $g(F(u, v)) = g(u) + g(v)$. \square

Ряд $g_F(u)$, удовлетворяющий соотношению (V.1), называется *логарифмом* формальной группы F ; теорема V.1 показывает, что для формальных групп над $R \otimes \mathbb{Q}$ всегда существует логарифм. Его функционально обратный ряд $f_F(t) \in R \otimes \mathbb{Q}[[t]]$ называется *экспонентой* формальной группы, так что мы имеем $F(u, v) = f_F(g_F(u) + g_F(v))$ над $R \otimes \mathbb{Q}$. Если кольцо R не имеет кручения, то последняя формула полностью восстанавливает формальную группу (как ряд с коэффициентами в R) по её логарифму (который является рядом с коэффициентами в $R \otimes \mathbb{Q}$).

Пусть $F = \sum_{k,l} a_{kl} u^k v^l$ — формальная группа над кольцом R и $r: R \rightarrow R'$ — кольцевой гомоморфизм. Обозначим через $r(F)$ формальный ряд $\sum_{k,l} r(a_{kl}) u^k v^l \in R'[[u, v]]$; тогда $r(F)$ является формальной группой над R' .

Формальная группа F_u над кольцом A называется *универсальной*, если для любой формальной группы F над любым кольцом R существует единственный гомоморфизм $r: A \rightarrow R$, такой, что $F = r(F_u)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.2. *Предположим, что универсальная формальная группа F_u над A существует. Тогда*

- 1) *кольцо A порождается коэффициентами ряда F_u ;*
- 2) *универсальная формальная группа единственна: если F'_u — другая универсальная формальная группа над A' , то существует изоморфизм $r: A \rightarrow A'$, такой, что $F'_u = r(F_u)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Пусть A' — подкольцо в A , порождённое коэффициентами ряда F_u . Тогда имеем мономорфизм $i: A' \rightarrow A$, для которого $i(F_u) = F_u$. С другой стороны, в силу универсальности, существует гомоморфизм $r: A \rightarrow A'$, для которого $r(F) = F$. Таким образом, имеем $ir(F) = F$. Отсюда, в силу единственности, получаем $ir = \text{id}: A \rightarrow A$. Следовательно, $A' = A$. Второе утверждение непосредственно вытекает из первого. \square

ТЕОРЕМА V.3 (Лазар). *Универсальная формальная группа F_u над A существует, причём кольцо A изоморфно кольцу многочленов от бесконечного числа образующих: $A \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$.*

Формальная группа геометрических кобордизмов

Применения формальных групп в теории кобордизмов основаны на следующем основополагающем примере.

КОНСТРУКЦИЯ V.4 (Формальная группа геометрических кобордизмов). Пусть X — клеточное пространство и $u, v \in U^2(X)$ — два геометрических кобордизма (см. конструкцию IV.3), задаваемых элементами $x, y \in H^2(X)$ соответственно. Обозначим через $u +_H v$ геометрический кобордизм, соответствующий элементу $x + y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.5. В $U^2(X)$ имеет место соотношение:

$$(V.3) \quad u +_H v = \mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum_{k \geq 1, l \geq 1} \alpha_{kl} u^k v^l,$$

где коэффициенты $\alpha_{kl} \in \Omega_U^{-2(k+l-1)}$ не зависят от X . При этом ряд $\mathcal{F}(u, v)$, определяемый формулой (V.3), является формальной группой над Ω_U^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим пространство $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$. Имеем

$$U^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U^*[[\underline{u}, \underline{v}]],$$

где $\underline{u}, \underline{v}$ — канонические классы 2-мерных геометрических кобордизмов, соответствующие проекциям $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ на сомножители. Таким образом, в $U^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ имеет место соотношение

$$(V.4) \quad \underline{u} +_H \underline{v} = \sum_{k, l \geq 0} \alpha_{kl} \underline{u}^k \underline{v}^l,$$

где $\alpha_{kl} \in \Omega_U^{-2(k+l-1)}$.

Пусть теперь геометрические кобордизмы $u, v \in U^2(X)$ задаются отображениями $f_u, f_v: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ соответственно. Тогда $u = (f_u \times f_v)^*(\underline{u})$, $v = (f_u \times f_v)^*(\underline{v})$ и $u +_H v = (f_u \times f_v)^*(\underline{u} +_H \underline{v})$, где $f_u \times f_v: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$. Применяя $(f_u \times f_v)^*$ к (V.4) и пользуясь тем, что $(f_u \times f_v)^*$ является гомоморфизмом Ω_U^* -модулей, получим требуемую формулу (V.3). Тот факт, что $\mathcal{F}(u, v)$ является формальной группой, вытекает непосредственно из групповых свойств умножения $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. \square

Ряд (V.3) называется *формальной группой геометрических кобордизмов*.

По определению, геометрический кобордизм $u \in U^2(X)$ является первым классом Чженя–Коннера–Флойда комплексного 1-мерного расслоения ξ над X , индуцированного из канонического расслоения при помощи отображения $f_u: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Таким образом, формальная группа геометрических кобордизмов задаёт выражения первого класса $c_1^U(\xi \otimes \eta) \in U^2(X)$ тензорного произведения двух комплексных 1-мерных расслоений над X в терминах классов $u = c_1^U(\xi)$ и $v = c_1^U(\eta)$ сомножителей: $c_1^U(\xi \otimes \eta) = \mathcal{F}(u, v)$.

Следующее утверждение даёт описание многообразий, представляющих коэффициенты формальной группы геометрических кобордизмов.

ТЕОРЕМА V.6 (Бухштабер).

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{\sum_{i,j \geq 0} [H_{ij}] u^i v^j}{\left(\sum_{r \geq 0} [\mathbb{C}P^r] u^r \right) \left(\sum_{s \geq 0} [\mathbb{C}P^s] v^s \right)},$$

где H_{ij} ($0 \leq i \leq j$) – гиперповерхности Милнора (IV.4), а $H_{ji} = H_{ij}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X = \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ в предложении V.5. Рассмотрим отображение двойственности Пуанкаре–Атья $D: U^2(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j) \rightarrow U_{2(i+j)-2}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)$ и отображение $\varepsilon: U_*(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j) \rightarrow U_*(pt) = \Omega_*^U$, индуцированное проекцией $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \rightarrow pt$. Тогда композиция

$$\varepsilon D: U^2(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j) \rightarrow \Omega_{2(i+j)-2}^U$$

переводит геометрические кобордизмы в классы бордизма соответствующих им подмногообразий. В частности, $\varepsilon D(u +_H v) = [H_{ij}]$, $\varepsilon D(u^k v^l) = [\mathbb{C}P^{i-k}][\mathbb{C}P^{j-l}]$. Применив εD к (V.3), получаем

$$[H_{ij}] = \sum_{k,l} \alpha_{kl} [\mathbb{C}P^{i-k}][\mathbb{C}P^{j-l}].$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j} [H_{ij}] u^i v^j = \left(\sum_{k,l} \alpha_{kl} u^k v^l \right) \left(\sum_{i \geq k} [\mathbb{C}P^{i-k}] u^{i-k} \right) \left(\sum_{j \geq l} [\mathbb{C}P^{j-l}] v^{j-l} \right),$$

откуда и вытекает требуемая формула. \square

ТЕОРЕМА V.7 (Мищенко). *Логарифм формальной группы геометрических кобордизмов имеет вид*

$$g_{\mathcal{F}}(u) = u + \sum_{k \geq 1} \frac{[\mathbb{C}P^k]}{k+1} u^{k+1} \in \Omega_U \otimes \mathbb{Q}[[u]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (V.2),

$$dg_{\mathcal{F}}(u) = \frac{du}{\frac{\partial \mathcal{F}(u,v)}{\partial v} \Big|_{v=0}}.$$

Производя вычисления, используя формулу из теоремы V.6 и равенство $H_{i0} = \mathbb{C}P^{i-1}$, получаем

$$dg_{\mathcal{F}}(u) = \frac{1 + \sum_{k > 0} [\mathbb{C}P^k] u^k}{1 + \sum_{i > 0} ([H_{i1}] - [\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^{i-1}]) u^i}.$$

Из сравнения чисел Чженя вытекает, что $[H_{i1}] = [\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^{i-1}]$ (мы уже видели, что $H_{11} = \mathbb{C}P^1$ в замечании перед теоремой IV.13). Следовательно, $dg_{\mathcal{F}}(u) = 1 + \sum_{k > 0} [\mathbb{C}P^k] u^k$, откуда вытекает требуемая формула. \square

ТЕОРЕМА V.8 (Квиллен). *Формальная группа геометрических кобордизмов \mathcal{F} является универсальной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_u — универсальная формальная группа над кольцом A . Рассмотрим гомоморфизм $r: A \rightarrow \Omega_U$, переводящий F_u в \mathcal{F} . Формальная группа F_u , рассматриваемая над кольцом $A \otimes \mathbb{Q}$, является универсальной для формальных групп над \mathbb{Q} -алгебрами. По теореме V.1, такая формальная группа определяется своим логарифмом, который может быть произвольным рядом, начинающимся с u . Таким образом, если $\sum b_k \frac{u^{k+1}}{k+1}$ — логарифм формальной группы F_u , то кольцо $A \otimes \mathbb{Q}$ является кольцом многочленов $\mathbb{Q}[b_1, b_2, \dots]$. По теореме V.7, $r(b_k) = [CP^k] \in \Omega_U$. Так как $\Omega_U \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[CP^1], [CP^2], \dots]$, отсюда вытекает, что $r \otimes \mathbb{Q}$ является изоморфизмом.

По теореме V.3, кольцо A не имеет кручения, поэтому r — мономорфизм. С другой стороны, из теоремы V.6 вытекает, что образ $r(A)$ содержит классы кобордизма $[H_{ij}] \in \Omega_U$, $0 \leq i \leq j$. Так как эти классы порождают Ω_U (теорема IV.13), r является эпиморфизмом. Итак, r — изоморфизм, что завершает доказательство. \square

Роды Хирцебруха

Всякий гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \rightarrow R$ можно рассматривать как мультипликативный инвариант классов кобордизма многообразий; такой гомоморфизм называется (комплексным) R -родом.

Предположим, что кольцо R не имеет кручения. Тогда любой R -род φ однозначно задаётся соответствующим ему гомоморфизмом $\Omega_U \otimes \mathbb{Q} \rightarrow R \otimes \mathbb{Q}$, для которого мы также будем использовать обозначение φ . Конструкция Хирцебруха [Hi66] позволяет описывать гомоморфизмы $\varphi: \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \rightarrow R \otimes \mathbb{Q}$ при помощи универсальных R -значных характеристических классов специального вида.

КОНСТРУКЦИЯ V.9 (роды Хирцебруха). Рассмотрим кольцо $H^*(BU)$, изоморфное кольцу формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[[c_1, c_2, \dots]]$ от универсальных классов Чженя, $\deg c_k = 2k$. Тогда отображение, сопоставляющее классу бордизма $[M] \in \Omega_U$ набор характеристических чисел, задаёт гомоморфизм групп

$$(V.5) \quad \Omega_U \rightarrow H_*(BU),$$

где $H_*(BU)$ рассматривается как подгруппа в $\text{Hom}(H^*(BU), \mathbb{Z})$. Так как умножение в кольце $H_*(BU)$ получается из отображений $BU_k \times BU_l \rightarrow BU_{k+l}$, соответствующих сумме Уитни расслоений, а характеристические классы обладают свойством мультипликативности, отображение (V.5) является гомоморфизмом колец.

Часть 2 теоремы IV.5 утверждает, что (V.5) — мономорфизм, а часть 1 — что соответствующее отображение $\Omega_U \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(BU; \mathbb{Q})$ является изоморфизмом. Таким образом, всякий гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \rightarrow R \otimes \mathbb{Q}$ можно интерпретировать как элемент из

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_*(BU; \mathbb{Q}), R \otimes \mathbb{Q}) = H^*(BU; \mathbb{Q}) \otimes R,$$

или как набор однородных многочленов $\{K_i(c_1, \dots, c_i), i \geq 0\}$, $\deg K_i = 2i$. Этот набор многочленов не может быть произвольным: тот факт, что φ является кольцевым гомоморфизмом, накладывает соотношения. Эти соотношения можно записать следующим образом: тождество

$$1 + c_1 + c_2 + \dots = (1 + c'_1 + c'_2 + \dots) \cdot (1 + c''_1 + c''_2 + \dots)$$

влечёт тождество

$$(V.6) \quad \sum_{n \geq 0} K_n(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i \geq 0} K_i(c'_1, \dots, c'_i) \cdot \sum_{j \geq 0} K_j(c''_1, \dots, c''_j).$$

Набор однородных многочленов $K = \{K_i(c_1, \dots, c_i), i \geq 0\}$ с $K_0 = 1$, удовлетворяющий соотношениям (V.6), называется *мультипликативной последовательностью Хирцебруха*.

Мультипликативная последовательность K однозначно определяется рядом

$$Q(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \dots \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]],$$

где $x = c_1$, а $q_i = K_i(1, 0, \dots, 0)$, и любой такой ряд задаёт мультипликативную последовательность. Действительно, рассмотрев соотношение

$$(V.7) \quad 1 + c_1 + \dots + c_n = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n),$$

мы получаем из (V.6)

$$Q(x_1) \cdots Q(x_n) = 1 + K_1(c_1) + K_2(c_1, c_2) + \dots + K_n(c_1, \dots, c_n) + K_{n+1}(c_1, \dots, c_n, 0) + \dots$$

Для дальнейшего удобно вместо ряда $Q(x)$ рассматривать ряд $f(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, задаваемый соотношением

$$Q(x) = \frac{x}{f(x)}; \quad f(x) = x + f_1x + f_2x^2 + \dots$$

Таким образом, кольцевые гомоморфизмы $\varphi: \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \rightarrow R \otimes \mathbb{Q}$ взаимно однозначно соответствуют рядам $f(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$. При этом значение φ на $2n$ -мерном классе кобордизма $[M] \in \Omega_U$ равно

$$(V.8) \quad \varphi[M] = \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x_i)}, \langle M \rangle \right),$$

где переменные x_1, \dots, x_n связаны с классами Чженя c_1, \dots, c_n стабильно комплексной структуры на M при помощи соотношения (V.7). Мы также будем обозначать характеристический класс $\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x_i)}$ расслоения ξ через $\varphi(\xi)$; так что $\varphi[M] = \varphi(\mathcal{T}M) \langle M \rangle$.

Гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \rightarrow R \otimes \mathbb{Q}$, задаваемый формулой (V.8), называется *родом Хирцебруха*, соответствующим ряду $f(x) = x + f_1x + f_2x^2 + \dots \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$. Итак, имеется взаимно однозначное

соответствие между рядами $f(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, начинающимися с x , и родами $\varphi: \Omega_U \rightarrow R \otimes \mathbb{Q}$.

Всякий род $\varphi: \Omega_U \rightarrow R$ задаёт формальную группу $\varphi(\mathcal{F})$ над R .

ТЕОРЕМА V.10. *Ряд $f(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$, соответствующий роду $\varphi: \Omega_U \rightarrow R \otimes \mathbb{Q}$, является экспонентой формальной группы $\varphi(\mathcal{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это можно доказать непосредственно, рассматривая формальную группу геометрических кобордизмов, либо косвенным образом, вычисляя значение рода Хирцебруха на проективных пространствах и сравнивая с формулой для логарифма формальной группы.

1 способ. Пусть X — некоторое многообразие и $u, v \in U^2(X)$ — два геометрических кобордизма, задаваемых элементами $x, y \in H^2(X)$ соответственно. Тогда соотношение (V.3) в $U^2(X)$ влечёт соотношение

$$[M_{x+y}] = \sum_{k,l \geq 0} \alpha_{kl} [M_{x^k y^l}]$$

в Ω_U , где $M_{x+y} \subset X$ — подмногообразие коразмерности 2, двойственное к классу $x+y \in H^2(X)$, а $M_{x^k y^l} \subset X$ — подмногообразие коразмерности $2(k+l)$, двойственное к классу $x^k y^l \in H^2(X)$. Применяя род φ , получим

$$(V.9) \quad \varphi[M_{x+y}] = \sum \varphi(\alpha_{kl}) \varphi[M_{x^k y^l}].$$

Пусть $\iota: M_{x+y} \subset X$ — вложение. Рассмотрев разложение

$$\iota^*(\mathcal{T}X) = \mathcal{T}M_{x+y} \oplus \nu(\iota)$$

и воспользовавшись свойством мультипликативности характеристического класса φ , получаем

$$\iota^* \varphi(\mathcal{T}X) = \varphi(\mathcal{T}M_{x+y}) \cdot \iota^* \left(\frac{x+y}{f(x+y)} \right).$$

Отсюда

$$(V.10) \quad \varphi[M_{x+y}] = \iota^* \left(\varphi(\mathcal{T}X) \cdot \frac{f(x+y)}{x+y} \right) \langle M_{x+y} \rangle = \left(\varphi(\mathcal{T}X) \cdot f(x+y) \right) \langle X \rangle.$$

Аналогично, рассмотрев вложение $M_{x^k y^l} \rightarrow X$, получаем

$$(V.11) \quad \varphi[M_{x^k y^l}] = \left(\varphi(\mathcal{T}X) \cdot f(x)^k f(y)^l \right) \langle X \rangle.$$

Подставляя (V.10) и (V.11) в (V.9), получаем

$$f(x+y) = \sum \varphi(\alpha_{kl}) f(x)^k f(y)^l,$$

что по определению означает, что f является экспонентой формальной группы $\varphi(\mathcal{F})$.

2 способ. Разложение $\mathcal{T}(\mathbb{C}P^k) \oplus \mathbb{C} = \bar{\eta} \oplus \dots \oplus \bar{\eta}$ ($k+1$ слагаемых) позволяет явно вычислить значение рода на $\mathbb{C}P^k$. Пусть $x = c_1(\bar{\eta}) \in$

$H^2(\mathbb{C}P^k)$ и пусть g — ряд, функционально обратный к f ; тогда

$$\begin{aligned} \varphi[\mathbb{C}P^k] &= \left(\frac{x}{f(x)}\right)^{k+1} \langle \mathbb{C}P^k \rangle = \\ &= \text{коэф. при } x^k \text{ в } \left(\frac{x}{f(x)}\right)^{k+1} = \text{res}_0 \left(\frac{1}{f(x)}\right)^{k+1} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{1}{f(x)}\right)^{k+1} dx = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{u^{k+1}} g'(u) du = \\ &= \text{res}_0 \left(\frac{g'(u)}{u^{k+1}}\right) = \text{коэф. при } u^k \text{ в } g'(u). \end{aligned}$$

(Использование интеграла по замкнутому контуру вокруг нуля для вычисления вычета имеет смысл лишь для сходящихся рядов с коэффициентами в \mathbb{C} , однако результат верен для любых формальных рядов с коэффициентами в $R \otimes \mathbb{Q}$.) Итак,

$$g'(u) = \sum_{k \geq 0} \varphi[\mathbb{C}P^k] u^k.$$

Из теоремы V.7 вытекает, что g — логарифм формальной группы $\varphi(\mathcal{F})$, а значит f — её экспонента. \square

Параллельная теория имеется и для ориентированных многообразий. Соответствующие роды являются гомоморфизмами $\Omega_{SO} \rightarrow R$ из кольца ориентированных кобордизмов, а конструкция Хирцебруха выражает роды над \mathbb{Q} -алгебрами через классы Понтрягина вместо классов Чженя.

ПРИМЕР V.11. Мы предполагаем $R = \mathbb{Z}$ в этих примерах.

1. Старшее число Чженя $c_n(\xi)[M]$ является родом Хирцебруха, соответствующим ряду $f = \frac{x}{1+x}$. Оно равно эйлеровой характеристике многообразия M , если $c_{\mathcal{T}}$ является почти комплексной структурой.

2. L -род $L[M]$ соответствует ряду $f(x) = \text{th}(x)$ (гиперболический тангенс). Он равен *сигнатуре* $\text{sign}(M)$, в соответствии с классической теоремой Хирцебруха [Hi66].

3. Род Тодда $\text{td}[M]$ соответствует ряду $f(x) = 1 - e^{-x}$. Он принимает значение 1 на всех комплексных проективных пространствах $\mathbb{C}P^k$.

Для каждого рода $\varphi: \Omega_U \rightarrow R$ и пространства X мы можем положить $h_\varphi^*(X) = U^*(X) \otimes_{\Omega_U} R$. При некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих точность последовательностей пар, $h_\varphi^*(X)$ задаёт комплексно-ориентированную теорию когомологий с кольцом коэффициентов $\varphi(\Omega_U)$. Например, тривиальный род $\varepsilon: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}$ (соответствующий $f(x) = x$) задаёт *преобразование augmentation* $U^* \rightarrow H^*$ из комплексных кобордизмов в обычные когомологии.

Вводя формальную переменную β степени -2 и рассматривая $f(x) = 1 - e^{-\beta x}$ мы получаем род (также называемый родом Тодда), принимающий значения в кольце $\mathbb{Z}[\beta]$. Интерпретируя β как элемент Ботта в комплексной K -группе $\tilde{K}^0(S^2) = K^{-2}(pt)$, мы получаем гомоморфизм $\text{td}: \Omega_U^* \rightarrow K^*(pt)$. Он задаёт мультипликативное преобразование $U^* \rightarrow K^*$ из комплексных кобордизмов в комплексную K -теорию, также известное как гомоморфизм Коннера–Флойда.

ПРИМЕР V.12. Важным примером рода Хирцебруха является χ_y -род, соответствующий ряду

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x(1+y)}}{1 + ye^{-x(1+y)}},$$

где $y \in \mathbb{R}$ — некоторый параметр. При $y = -1$, $y = 0$ и $y = 1$ мы получаем соответственно старшее число Чжэня $c_n[M]$, род Тодда $\text{td}[M]$ и L -род $L[M] = \text{sign}(M)$.

Если M является комплексным многообразием, то значение $\chi_y[M]$ можно вычислить в терминах эйлеровых характеристик комплексов Дольбо на M , см. [Hi66]. Именно это послужило мотивацией Хирцебруху для введения понятия χ_y -рода.

Инвариантные стабильно комплексные структуры

Пусть дано $2n$ -мерное многообразие M со стабильно комплексной структурой, задаваемой изоморфизмом

$$(V.12) \quad c_{\mathcal{T}}: \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{2(l-n)} \rightarrow \xi.$$

Предположим, что на M действует тор \mathbb{T}^k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ V.13. Стабильно комплексная структура называется \mathbb{T}^k -инвариантной, если для любого $t \in \mathbb{T}^k$ композиция

$$(V.13) \quad r(t): \xi \xrightarrow{c_{\mathcal{T}}^{-1}} \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{2(l-n)} \xrightarrow{dt \oplus \text{id}} \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{2(l-n)} \xrightarrow{c_{\mathcal{T}}} \xi$$

является отображением комплексных расслоений; здесь dt обозначает дифференциал действия элементом t . Таким образом, (V.13) задаёт представление $r: \mathbb{T}^k \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\xi, \xi)$.

Пусть $x \in M$ — изолированная неподвижная точка действия \mathbb{T}^k на M . Тогда мы имеем представление $r_x: \mathbb{T}^k \rightarrow GL(l, \mathbb{C})$ в слое расслоения ξ над x . Этот слой $\xi_x \cong \mathbb{C}^l$ раскладывается в сумму $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{l-n}$, где r_x действует без тривиальных слагаемых на \mathbb{C}^n и тривиально на \mathbb{C}^{l-n} . Кроме того, изоморфизм $c_{\mathcal{T},x}$ из (V.12) задаёт ориентацию касательного пространства $\mathcal{T}_x(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ V.14. Знак $\sigma(x)$ неподвижной точки $x \in M$ полагается равным $+1$, если отображение

$$\mathcal{T}_x(M) \xrightarrow{\text{id} \oplus 0} \mathcal{T}_x(M) \oplus \mathbb{R}^{2(l-n)} \xrightarrow{c_{\mathcal{T},x}} \xi_x \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^n,$$

сохраняет ориентацию, и -1 иначе; здесь p обозначает проекцию на первое слагаемое.

Заметим, что если M — почти комплексное \mathbb{T}^k -многообразие (т.е. $l = n$), то $\sigma(x) = 1$ для любой неподвижной точки.

Необходимые сведения из геометрической теории инвариантов

В этом разделе мы кратко излагаем определения и конструкции геометрического факторпространства и множества Кемпфа–Несс для действия редуктивной группы на аффинном многообразии. Детали можно найти в [FM82] или [ВП89].

Пусть *редуктивная* алгебраическая группа G действует на комплексном аффинном многообразии X . Ввиду некомпактности группы G , взятие обычного (или *геометрического*) факторпространства X/G со стандартной фактортопологией не всегда даёт пространство с хорошими свойствами (например, это факторпространство может быть нехаусдорфовым). Для того, чтобы переход к факторпространству не выводил за пределы категории алгебраических многообразий, вводится конструкция *категорного факторпространства*, которую мы вкратце описываем ниже.

Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}[X]$ регулярных функций на X , так что $X = \text{Spec } \mathbb{C}[X]$. Обозначим через $X//G$ аффинное многообразие, соответствующее G -инвариантной подалгебре $\mathbb{C}[X]^G$, и рассмотрим морфизм $\varrho: X \rightarrow X//G$, двойственный к вложению алгебр $\mathbb{C}[X]^G \rightarrow \mathbb{C}[X]$. Тогда ϱ является сюръективным морфизмом, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между замкнутыми орбитами действия G на X и точками многообразия $X//G$. Кроме того, ϱ является универсальным в классе морфизмов из X , постоянных на G -орбитах, в категории алгебраических многообразий (что объясняет термин «категорное факторпространство»). Категорное факторпространство $X//G$ совпадает с геометрическим X/G тогда и только тогда, когда все G -орбиты замкнуты.

В случае произвольного алгебраического G -многообразия, получаемого склейкой G -инвариантных аффинных подмногообразий, можно пытаться определять факторпространство, склеивая соответствующие аффинные факторпространства. Однако это далеко не всегда приводит к алгебраическому многообразию с требуемыми категорными свойствами. Различные конструкции категорных факторпространств играют важную роль в геометрической теории инвариантов.

ПРИМЕР VI.1. Рассмотрим стандартное действие \mathbb{C}^\times на \mathbb{C} . Тогда категорное факторпространство $\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times$ есть точка, а геометрическое $\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times$ — нехаусдорфово пространство из двух точек.

Пусть $\rho: G \rightarrow GL(W)$ — представление группы G , пусть K — максимальная компактная подгруппа в G , и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — некоторая K -инвариантная эрмитова форма на W с ассоциированной нормой $\|\cdot\|$. Для каждого $v \in W$ рассмотрим функцию $F_v: G \rightarrow \mathbb{R}$, которая на элементе g принимает значение $\frac{1}{2}\|gv\|^2$. Эта функция имеет критическую точку тогда и только тогда, когда орбита Gv замкнута, и все критические точки функции F_v являются минимумами [Sc89, (4.2)]. Теперь определим множество Кемпфа–Несс $KN \subset W$ одним из следующих эквивалентных условий:

$$\begin{aligned} KN &= \{v \in W : (dF_v)_e = 0\} = \quad (\text{здесь } e \in G \text{ — единица}) \\ &= \{v \in W : \mathcal{T}_v(Gv) \perp v\} = \\ &= \{v \in W : \langle \gamma v, v \rangle = 0 \text{ для всех } \gamma \in \mathfrak{g}\} = \\ \text{(VI.1)} \quad &= \{v \in W : \langle \kappa v, v \rangle = 0 \text{ для всех } \kappa \in \mathfrak{k}\}, \end{aligned}$$

где \mathfrak{g} (соответственно, \mathfrak{k}) — алгебра Ли группы G (соответственно, K), и мы считаем $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g} \subseteq \text{End}(W)$. Следовательно, каждая точка $v \in KN$ является ближайшей к началу координат точкой в своей орбите Gv .

Рассмотрим теперь линейную функцию $f_v = (dF_v)_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, переводящую $\gamma \in \mathfrak{g}$ в $\langle \gamma v, v \rangle$, см. (VI.1). Мы можем рассматривать f_v как элемент двойственной алгебры Ли \mathfrak{g}^* . Так как группа G редуктивна, мы имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$. Так как действие компактной подгруппы $K \subset G$ сохраняет норму, f_v обращается в нуль на \mathfrak{k} , так что f_v можно рассматривать как элемент из $i\mathfrak{k}^* \cong \mathfrak{k}^*$. Варьируя $v \in W$, мы получаем отображение моментов $\mu: W \rightarrow \mathfrak{k}^*$, которое переводит $v \in W$ в линейную функцию $\kappa \mapsto \langle i\kappa v, v \rangle$, где $\kappa \in \mathfrak{k}$. Тогда множество Кемпфа–Несс совпадает с множеством нулей отображения μ :

$$\text{(VI.2)} \quad KN = \mu^{-1}(0).$$

Мы можем предполагать, что аффинное G -многообразие X эквивариантно вложено как замкнутое подмногообразие в некотором пространстве W представления группы G . Тогда множество Кемпфа–Несс KN_X многообразия X определяется как $KN \cap X$.

Важность понятия множества Кемпфа–Несс для изучения пространств орбит объясняется следующим результатом, доказательство которого можно найти в [Sc89, (4.7), (5.1)].

ТЕОРЕМА VI.2. а) Композиция $KN_X \hookrightarrow X \rightarrow X//G$ является собственным отображением и индуцирует гомеоморфизм $KN_X/K \rightarrow X//G$;

б) [Нееман] имеется K -эквивариантная деформационная ретракция X на KN_X .

Литература

- [Ба02] И. В. Баскаков. *Когомологии K -степеней пространств и комбинаторика симплицальных разбиений*. Успехи Мат. Наук **57** (2002), вып. 5, стр. 147–148.
- [Ба03] И. В. Баскаков. *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов*. Успехи Мат. Наук **58** (2003), вып. 5, стр. 199–200.
- [ББП04] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебры клеточных коцепей и действия торов*. Успехи Мат. Наук **59** (2004), вып. 3, стр. 159–160; arXiv:math.AT/0407189.
- [БП98] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками*. Успехи Мат. Наук **53** (1998), вып. 3, стр. 195–196.
- [БП99] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора и комбинаторика многогранников*. Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **225** (1999), стр. 96–131; arXiv:math.AT/9909166.
- [БП00-2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*. Успехи Мат. Наук **55** (2000), вып. 5, стр. 3–106; arXiv:math.AT/0010073.
- [БП00-3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Момент-угол комплексы и комбинаторика симплицальных многообразий*. Успехи Мат. Наук **55** (2000), вып. 3, стр. 171–172.
- [БП00-4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора, эквивариантные момент-угол-комплексы и конфигурации координатных подпространств*. Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **266** (2000), стр. 29–50.
- [БП04-1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Комбинаторика симплицально-клеточных комплексов и торические действия*. Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **247** (2004), стр. 41–58.
- [БП04-2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике*. Издательство МЦНМО, Москва, 2004, 272 стр.
- [БР98] В. М. Бухштабер, Н. Рэй. *Торические многообразия и комплексные кобордизмы*. Успехи Мат. Наук **53** (1998), вып. 2, стр. 139–140.
- [Ви71] Э. Б. Винберг. *Дискретные линейные группы, порождённые отражениями*. Известия АН СССР, сер. матем. **35** (1971), стр. 1072–1112.
- [ВП89] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов. *Теория инвариантов*. В сборнике «Алгебраическая геометрия-4». ВИНТИ, Москва, 1989.
- [ГТ04] Е. Грбич, С. Терио. *Гомотопический тип дополнения конфигурации координатных подпространств коразмерности два*. Успехи Мат. Наук **59** (2004), вып. 6, стр. 203–204; arXiv:math.AT/0512258.
- [Да78] В. И. Данилов. *Геометрия торических многообразий*. Успехи Мат. Наук **33** (1978), вып. 2, стр. 85–134.

- [До01] Н. Э. Добринская. *Проблема классификации квазиторических многообразий над заданным простым многогранником*. Функци. анализ и его прил. **35** (2001), вып. 2, стр. 3–11.
- [Ил06] Д. Г. Ильинский. *О почти свободном действии одномерного тора на торическом многообразии*. Мат. Сборник **197** (2006), вып. 5, стр. 51–74.
- [Кр74] И. М. Кричевер. *Формальные группы и формула Атьи–Хирцебруха*. Изв. АН СССР, сер. матем. **38** (1974), вып. 6, стр. 1289–1304.
- [МП08] М. Масуда, Т. Е. Панов. *Полусвободные действия окружности, башины Ботта и квазиторические многообразия*. Мат. Сборник **199** (2008), вып. 8, стр. 95–122; arXiv:math.AT/0607094.
- [Му80] О. Р. Мусин. *О действиях окружности на гомотопических проективных пространствах*. Мат. заметки **28** (1980), вып. 1, стр. 139–152.
- [Но67] С. П. Новиков. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов*. Изв. АН СССР, сер. матем. **31** (1967), вып. 4, стр. 855–951.
- [Па97] Т. Е. Панов. *Эллиптический род для многообразий с действием группы \mathbb{Z}/p* . Успехи мат. наук **52** (1997), вып. 2, стр. 181–182.
- [Па98-1] Т. Е. Панов. *Классификация с точностью до кобордизма многообразий, несущих простое действие группы \mathbb{Z}/p* . Мат. заметки **63** (1998), вып. 2, стр. 260–268.
- [Па98-2] Т. Е. Панов. *Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы \mathbb{Z}/p через инварианты действия*. Известия РАН, сер. матем. **62** (1998), вып. 3, стр. 87–120.
- [Па99] Т. Е. Панов. *Комбинаторные формулы для χ_y -рода полиориентированного квазиторического многообразия*. Успехи Мат. Наук **54** (1999), вып. 5, стр. 169–170.
- [Па01] Т. Е. Панов. *Роды Хирцебруха многообразий с действием тора*. Известия РАН, сер. матем. **65** (2001), вып. 3, стр. 123–138; arXiv:math.AT/9910083.
- [Па08] Т. Е. Панов. *Торические множества типа Кемпфа–Несс*. Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **263** (2008), стр. 159–172; arXiv:math.AG/0603556.
- [ФФ89] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. М.: Наука, 1989.
- [Хо77] А. Г. Хованский. *Многогранники Ньютона и торические многообразия*. Функци. анализ и прил. **11** (1977), вып. 4, стр. 56–67.
- [Хо86] А. Г. Хованский. *Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского*. Функци. анализ и прил. **20** (1986), вып. 1, стр. 50–61.
- [At82] Michael F. Atiyah. *Convexity and commuting Hamiltonians*. Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.
- [AB67] Michael F. Atiyah and Raoul Bott. *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I*. Ann. of Math. **86** (1967), no. 2, 374–407.
- [AH70] Michael F. Atiyah and Friedrich Hirzebruch. *Spin-manifolds and group actions*. In: Essays in Topology and Related Topics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970, pp. 18–28.
- [Au91] Michèle Audin. *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds*. Progress in Mathematics **93**. Birkhäuser, Basel, 1991.

- [BBCG] Antony Bahri, Martin Bendersky, Frederic Cohen, and Samuel Gitler. *The polyhedral product functor: a method of computation for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*. Preprint (2007); arXiv:0711.4689.
- [Ba93] Victor V. Batyrev. *Quantum cohomology rings of toric manifolds*. In: Journées de Géométrie Algébrique d’Orsay (Juillet 1992), Astérisque **218**, Société Mathématique de France, Paris, 1993, pp. 9–34; arXiv:alg-geom/9310004.
- [BM06] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. *Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes*. Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.
- [BS58] Raoul Bott and Hans Samelson. *Application of the theory of Morse to symmetric spaces*. Amer. J. of Math. **80** (1958), 964–1029.
- [Br72] Glen E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, New York–London, 1972. [Русский перевод: Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, М.: Наука, 1980.]
- [Br83] Arne Brønsted. *An Introduction to Convex Polytopes*. Graduate Texts in Math. **90**, Springer-Verlag, New-York, 1983. [Русский перевод: А. Брønстед, *Введение в теорию выпуклых многогранников*, М.: Мир, 1988.]
- [BH98] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*, revised edition. Cambridge Studies in Adv. Math., vol. **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [BP00] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus actions determined by simple polytopes*. Contemp. Math., vol. **258**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000, pp. 33–46.
- [BP02] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*. University Lecture Series **24**. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 2002.
- [BPR07] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*. Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2, 219–242; arXiv:math.AT/0609346.
- [BR98] Victor M. Buchstaber and Nigel Ray. *Flag manifolds and the Landweber–Novikov algebra*. Geom. Topol. **2** (1998), 79–101; arXiv:math.AT/9806168.
- [BR01] Victor M. Buchstaber and Nigel Ray. *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes*. Internat. Math. Res. Notices **4** (2001), 193–219; arXiv:math.AT/0010025.
- [BR08] Victor M. Buchstaber and Nigel Ray. *An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron*, in: “Toric Topology” (M. Harada et al, eds.). Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 1–27.
- [CMS07] Suyoung Choi, Mikiya Masuda and Dong Youp Suh. *Quasi-toric manifolds over a product of simplices*. Preprint (2008); arXiv:0803.2749.
- [CR05] Yusuf Civan and Nigel Ray. *Homotopy decompositions and K-theory of Bott towers*. K-Theory **34** (2005), no. 1, 1–33.
- [Co95] David A. Cox. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*. J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 1, 17–50; arXiv:alg-geom/9210008.
- [Co97] David A. Cox. *Recent developments in toric geometry*, in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*. Proc. Sympos. Pure Math. **62**, Part 2. AMS, Providence, R.I., 1997, pp. 389–436; arXiv:alg-geom/9606016.
- [Da78] Michael W. Davis. *Smooth G-manifolds as collections of fiber bundles*. Pacific J. Math., **77** (1978), 315–363.

- [Da83] Michael W. Davis. *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*. Ann. of Math. **117** (1983), no. 2, 293–324.
- [DJ91] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*. Duke Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.
- [dL00] Mark de Longueville. *The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements*. Math. Z. **233** (2000), no. 3, 553–577.
- [De88] Thomas Delzant. *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*. Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339.
- [DS05] Graham Denham and Alexander I. Suciu. *Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products*. Pure Appl. Math. Q. **3** (2007), no. 1, 25–60; arXiv:math.AT/0512497.
- [DH82] J. Duistermaat and G. Heckman. *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*. Invent. Math. **69** (1982), no. 2, 259–268.
- [FM82] John Fogarty and David Mumford. *Geometric Invariant Theory*. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [Fr06] Matthias Franz. *On the integral cohomology of smooth toric varieties*. Proc. Steklov Inst. Math. **252** (2006), 53–62; arXiv:math.AT/0308253.
- [Fu93] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Ann. of Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [GKM98] Mark Goresky, R. Kottwitz and Robert MacPherson. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localisation theorem*. Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.
- [GM88] Mark Goresky and Robert MacPherson. *Stratified Morse Theory*. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1988. [Русский перевод: М. Горески, Р. Макферсон, *Стратифицированная теория Морса*, М.: Мир, 1991.]
- [GT07] Jelena Grbić and Stephen Theriault. *The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement*. Topology **46** (2007), no. 4, 357–396; arXiv:math/0601279.
- [GK94] Michael Grossberg and Yael Karshon. *Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations*. Duke Math. J. **76** (1994), 23–58.
- [Gr67] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., London–New York–Sydney, 1967.
- [Gu94] Victor Guillemin. *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n -spaces*. Progress in Mathematics **122**. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [GS99] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg. *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999.
- [GZ99] Victor W. Guillemin and Catalin Zara. *Equivariant de Rham theory and graphs*. Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 49–76; arXiv:math.DG/9808135.
- [GZ01] Victor W. Guillemin and Catalin Zara. *One-skeleta, Betti numbers and equivariant cohomology*. Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 283–349; arXiv:math/9903051.
- [Ha92] Akio Hattori. *Symplectic manifolds with semi-free Hamiltonian S^1 -action*. Tokyo J. Math. **15** (1992), no. 2, 281–296.
- [HM03] Akio Hattori and Mikiya Masuda. *Theory of multi-fans*. Osaka J. Math. **40** (2003), 1–68; arXiv:math/0106229.

- [HM05] Akio Hattori and Mikiya Masuda, *Elliptic genera, torus manifolds and multi-fans*. Internat. J. of Math. **16** (2005), no. 9, 957–998; arXiv:math/0107014.
- [HY76] Akio Hattori and Tomoyoshi Yoshida. *Lifting compact group actions in fiber bundles*. Japan. J. Math. **2** (1976), 13–25.
- [Hi66] Friedrich Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd edition. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1966. [Русский перевод: Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, М.: Мир, 1973.]
- [HBJ94] Friedrich Hirzebruch, Thomas Berger and Rainer Jung. *Manifolds and Modular Forms*, Second Edition. A Publication from the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1994.
- [Ho77] Melvin Hochster. *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in *Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference)*. B. R. McDonald and R. Morris, eds., Dekker, New York, 1977, pp. 171–223.
- [K164] Victor Klee. *A combinatorial analogue of Poincaré’s duality theorem*. Canad. J. Math. **16** (1964), 517–531.
- [Ma63] Saunders MacLane. *Homology*. Springer-Verlag, Berlin, 1963. [Русский перевод: С. Маклейн, *Гомология*, М.: Мир, 1966.]
- [MMP07] Hiroshi Maeda, Mikiya Masuda and Taras Panov. *Torus graphs and simplicial posets*. Advances in Math. **212** (2007), no. 2, 458–483; arXiv:math/0511582.
- [Ma99] Mikiya Masuda. *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*. Tohoku Math. J. **51** (1999), no. 2, 237–265.
- [Ma05] Mikiya Masuda. *h -vectors of Gorenstein* simplicial posets*. Adv. Math. **194** (2005), no. 2, 332–344; arXiv:math/0305203.
- [MP06] Mikiya Masuda and Taras Panov. *On the cohomology of torus manifolds*. Osaka J. Math. **43** (2006), 711–746; arXiv:math/0306100.
- [NR05] Dietrich Notbohm and Nigel Ray. *On Davis–Januszkiewicz homotopy types I; formality and rationalisation*. Algebraic & Geometric Topology **5** (2005), 31–51; arXiv:math/0311167.
- [Od88] Tadao Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An introduction to the theory of toric varieties*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Pa08] Taras Panov. *Cohomology of face rings, and torus actions*, in “Surveys in Contemporary Mathematics”. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **347**, Cambridge, U.K., 2008, pp. 165–201; arXiv:math.AT/0506526.
- [PR08] Taras Panov and Nigel Ray. *Categorical aspects of toric topology*, in: “Toric Topology” (M. Harada *et al*, eds.). Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322; arXiv:0707.0300.
- [PRV04] Taras Panov, Nigel Ray and Rainer Vogt. *Colimits, Stanley–Reiner algebras, and loop spaces*. Progress in Math., vol. **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 261–291; arXiv:math/0202081.
- [Qu71] Daniel G. Quillen. *Elementary proofs of some results of cobordism theory using steenrod operations*. Adv. Math. **7** (1971), 29–56.
- [Ra86] Nigel Ray. *On a construction in bordism theory*. Proc. Edin. Math. Soc. **29** (1986), 413–422.
- [Re76] Gerald A. Reisner. *Cohen–Macaulay quotients of polynomial rings*, Adv. Math. **21** (1976), no. 1, 30–49.
- [Sc89] Gerald W. Schwarz. *The topology of algebraic quotients*, in *Topological methods in algebraic transformation groups*. Progr. in Math **80**. Birkhäuser, Boston, 1989, pp. 135–151.

- [Sm67] L. Smith. *Homological algebra and the Eilenberg–Moore spectral sequence*. Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 58–93.
- [St86] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics*, Vol. 1. Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey, California, 1986. [Русский перевод: Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, М.: Мир, 1990.]
- [St91] Richard P. Stanley. *f-vectors and h-vectors of simplicial posets*. J. Pure Appl. Algebra. **71** (1991), 319–331.
- [St96] Richard P. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition. Progr. in Math. **41**. Birkhäuser, Boston, 1996.
- [St68] Robert E. Stong. *Notes on Cobordism Theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1968. [Русский перевод: Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов (с приложением В. М. Бухштабера)* М.: Мир, 1973.]
- [Sz64] R. H. Szczarba. *On tangent bundles of fibre spaces and quotient spaces*. Amer. J. Math. **86** (1964), 685–697.
- [Th67] Emery Thomas. *Complex structures on real vector bundles*. Amer. J. Math. **89** (1967), 887–908.
- [TW00] Susan Tolman and Jonathan Weitsman. *On semifree symplectic circle actions with isolated fixed points*. Topology **39** (2000), no. 2, 299–309.
- [Zi95] Günter M. Ziegler. *Lectures on polytopes*. Graduate Texts in Mathematics, vol. **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.