Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.14, 515.16

Панов Тарас Евгеньевич

Топология и комбинаторика действий торов

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант	—	член-корреспондент РАН, профессор Виктор Матвеевич Бухштабер.
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор Николай Петрович Долбилин,
		доктор физико-математических наук, профессор Владимир Павлович Лексин,
		доктор физико-математических наук, профессор Аскольд Георгиевич Хованский.
Ведущая организация	—	Санкт-Петербургский Государственный Университет.

Защита диссертации состоится 25 декабря 2009 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 25 ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория действий тора имеет длинную историю развития и образует важную область алгебраической топологии. За последние 15 лет на стыке эквивариантной топологии, алгебраической и симплектической геометрии, комбинаторики, коммутативной и гомологической алгебры возникла новая область исследований — *торическая топология*, которая быстро привлекла внимание большого числа специалистов из разных областей и активно развивается в настоящее время.

В центре внимания торической топологии находятся действия тора, пространства орбит которых несут богатую комбинаторную структуру. Такие действия естественно возникают в самых различных областях, а изучение их алгебраических, комбинаторных и топологических свойств приводит к новым взаимосвязям и интересным постановкам задач. Благодаря торической топологии фундаментальные результаты ряда областей математики получили новое развитие и нашли неожиданные замечательные приложения.

Первоначальный импульс этому развитию придала *торическая геометрия* — теория *торических многообразий* в алгебраической геометрии[1] [2]. Эта теория устанавливает взаимно однозначное соответствие между алгебраическими многообразиями с действием комплексного тора, имеющим плотную орбиту, и комбинаторными объектами — *веерами.* При помощи вееров алгеброгеометрические свойства торических многообразий полностью переводятся на язык комбинаторной геометрии. Торическая геометрия предоставляет богатый источник явных примеров алгебраических многообразий и имеет богатые приложения в таких областях, как теория особенностей и математическая физика. Пространство орбит неособого проективного торического многообразия по действию компактного тора T^n представляет собой выпуклый простой многогранник P.

В симплектической геометрии, после появления теоремы выпуклости Атьи–Гиёмина–Стернберга[3] и формулы Дуистермаата–Хекмана[4] в начале 1980-х годов, активно изучались *гамильтоновы* действия групп. В работе Делзанта[5] было показано, что в случае действия тора размерности, равной половине размерности многообразия, образ *отображения моментов* определяет многообразие с точностью до эквивариантного симплектоморфизма. В симплектической геометрии, как и в торической геометрии, различные геометрические конструкции имеют комбинаторную интерпретацию в терминах многогранников.

Имеется тесная взаимосвязь между алгебраическими и симплектическими многообразиями с действием тора: проективное вложение неособого торического многообразия определяет симплектическую форму и отображение моментов. Образом отображения моментов является многогранник, двойственный к вееру. Как в алгебраической, так и в симплектической ситуации, действие компактного тора локально изоморфно стандартному действию тора T^n на $\mathbb{C}^n$ покоординатными вращениями. Факторпространство многообразия по такому действию тора представляет собой *многообразие с углами*, которое несёт комбинаторную структуру, отражающую

---

[1] А. Г. Хованский. *Многогранники Ньютона и торические многообраия.* Функц. анализ и прил. **11** (1977), вып. 4, 56–67.

[2] В. И. Данилов. *Геометрия торических многообразий.* УМН **33** (1978), вып. 2, 85–134.

[3] M. Atiyah. *Convexity and commuting Hamiltonians.* Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.

[4] J. Duistermaat, G. Heckman. *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* Invent. Math. **69** (1982), no. 2, 259–268.

[5] T. Delzant. *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment.* Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339.

структуру частично упорядоченного множества стационарных подгрупп. Это позволяет полностью восстановить многообразие и действие. Замечательно, что такой подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространства с действием тора удаётся интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически. Оказалось, что данная специфика алгебраических торических многообразий имеет чисто топологическую природу, что вызвало глубокое проникновение идей и методов торической и симплектической геометрии в алгебраическую топологию с начала 1990-х годов.

Дальнейшие исследования выявили ряд важных классов многообразий с действием тора, происхождение которых восходит к торическим или симплектическим многообразиям. Эти более общие многообразия как правило не являются алгебраическими или симплектическими, но в то же время обладают важнейшими топологическими свойствами их алгебраических или симплектических предшественников. Таким образом, была существенно расширена область приложений методов торической топологии в комбинаторике и коммутативной алгебре. Опишем некоторые из этих классов.

Подход Дэвиса–Янушкиевича[6] к изучению торических многообразий с топологической точки зрения привёл к появлению *квазиторических многообразий*. Этот класс многообразий определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление T^n в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. (Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии.) Работы Бухштабера–Рэя[7] [8] показали, что квазиторические многообразия играют важную роль в теории комплексных кобордизмов — классической области алгебраической топологии[9]. В отличие от торических многообразий, квазиторические многообразия могут не быть комплексными или почти комплексными, однако они всегда допускают *стабильно комплексную структуру*, которая определяется в чисто комбинаторных терминах — при помощи так называемой *характеристической функции*, сопоставляющей гиперграням многогранника примитивные векторы целочисленной решётки. Характеристическая функция играет роль веера, сопоставляемого торическому многообразию в алгебраической геометрии.

Хаттори и Масуда[10] ввели намного более широкий класс *тор-многообразий*, которые также можно рассматривать как далеко идущее обобщение торических многообразий. Тор-многообразие M представляет собой $2n$-мерное гладкое компактное многообразие с эффективным локально стандартным действием тора T^n, множество неподвижных точек которого непусто (заметим, что оно всегда конечно). Несмотря на достаточную общность этого класса, тор-многообразия допускают комбинаторное описание, аналогичное описанию торических многообразиям в терминах вееров или многогранников. Роль последних играют так называемые *мультивееры* и *мультимногогранники*.

---

[6]M. Davis, T. Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.

[7]V. Buchstaber, N. Ray. *Flag manifolds and the Landweber–Novikov algebra.* Geom. Topol. **2** (1998), 79–101; arXiv:math.AT/9806168.

[8]V. Buchstaber and N. Ray. *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes.* Internat. Math. Res. Notices **4** (2001), 193–219; arXiv:math.AT/0010025.

[9]Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов (с приложением В. М. Бухштабера)* М.: Мир, 1973.

[10]A. Hattori, M. Masuda, *Theory of multi-fans.* Osaka J. Math. **40** (2003), 1–68; arXiv:math/0106229.

Пространство орбит Q квазиторического или тор-многообразия является многообразием с углами, а его грани образуют относительно обратного включения симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$. В случае квазиторического многообразия последнее представляет собой множество граней симплициального комплекса $\mathcal{K}$, двойственного к простому многограннику Q.

Комбинаторный подход к изучению гамильтоновых действий тора привёл к понятию *ГКМ-многообразий.* Компактное $2n$-мерное многообразие M с эффективным действием тора T^k ($k \leqslant n$) называется ГКМ-многообразием[11], если множество неподвижных точек конечно, M обладает инвариантной почти комплексной структурой, и веса представлений тора T^k в касательных пространствах к неподвижным точкам попарно линейно независимы. Эти многообразия впервые были рассмотрены в работе Горески, Коттвица и Макферсона[12], что объясняет название. Там же было показано, что «1-остов» такого многообразия M, т.е. множество точек, имеющих стационарную подгруппу коразмерности не больше 1, может быть описано при помощи графа с метками (Γ, α). Этот граф, называемый *графом весов* (или *ГКМ-графом*), позволяет вычислять важные топологические инварианты многообразия M, такие как его числа Бетти или кольцо эквивариантных когомологий. Изучение таких графов приобрело самостоятельный комбинаторный интерес благодаря работам Гиллёмина–Зары[13] и других. В топологии идея сопоставления графа с метками многообразию с действием окружности использовалась начиная с 1970-х годов, см. работу Мусина[14].

Стенли был одним из первых, кто осознал большой потенциал торических действий для комбинаторных приложений, использовав его для доказательства *гипотезы Макмюллена* о числах граней симплициальных многогранников и *гипотезы о верхней границе* для триангуляций сфер. Его результаты и методы легли в основу известной монографии[15] и предопределили дальнейшие приложения коммутативной алгебры и гомологических методов в комбинаторной геометрии.

Многие идеи Стенли находят и топологическое применение; в частности, *кольцо граней* (или *кольцо Стенли–Риснера*) $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$ является важной составляющей в вычислении кольца когомологий квазиторического многообразия M. В ходе вычисления этого кольца Дэвис и Янушкевич сопоставили некоторое вспомогательное T^m-пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ каждому комплексу $\mathcal{K}$ с m вершинами, и рассмотрели его гомотопическое факторпространство (или *конструкцию Бореля*) $DJ(\mathcal{K})$. Определение пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ идейно связано с конструкцией Винберга[16] универсального пространства для групп отражений и аналогично определению *комплекса Кокстера.* Кольцо когомологий пространства $DJ(\mathcal{K})$ (или *эквивариантные когомологии* многообразия M) изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ для любого $\mathcal{K}$. Кольцо обычных когомологий $H^*(M)$ получается из $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ факторизацией по идеалу, порождённому некоторыми линейными формами, как и для торических многообразий.

---

[11] V. Guillemin, C. Zara. *Equivariant de Rham theory and graphs.* Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 49–76.

[12] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localisation theorem.* Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.

[13] V. Guillemin, C. Zara. *Equivariant de Rham theory and graphs.* Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 49–76; arXiv:math.DG/9808135.

[14] О. Р. Мусин. *О действиях окружности на гомотопических проективных пространствах.* Мат. заметки **28** (1980), вып. 1, 139–152.

[15] R. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition. Progr. in Math. **41**. Birkhäuser, Boston, 1996.

[16] Э. Б. Винберг. *Дискретные линейные группы, порождённые отражениями.* Известия АН СССР, сер. матем. **35** (1971), 1072–1112.

С появлением понятия кольца граней стало ясно, что многие тонкие комбинаторные свойства комплексов $\mathcal{K}$ можно интерпретировать алгебраически. Изучение колец граней получило самостоятельное развитие и привело к новому классу *колец Коэна–Маколея*, имеющему геометрическую природу. В частности, возникло новое топологическое понятие *симплициального комплекса Коэна–Маколея* $\mathcal{K}$, для которого $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ является кольцом Коэна–Маколея. Подробное изложение этих понятий можно найти в монографии[17], где также подчёркивается важность гомологического подхода. В комбинаторной коммутативной алгебре рассматриваются размерности биградуированных компонент векторных пространств $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$, называемые *алгебраическими числам Бетти* кольца $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, для любого поля $\mathbf{k}$. Эти числа являются весьма тонкими инвариантами: они зависят от комбинаторики $\mathcal{K}$, а не только от топологии его реализации $|\mathcal{K}|$, и полностью определяют «обычные» топологические числа Бетти для $|\mathcal{K}|$. Теорема Хохстера[18] выражает алгебраические числа Бетти через симплициальные когомологии полных подкомплексов в $\mathcal{K}$.

Более подробно ознакомиться с основными этапами развития торической топологии можно по монографии[19] и книге[20], в которой особо выделим обзор[21].

Цель работы. Исследование действий тора на многообразиях и комплексах, пространства орбит которых имеют богатую комбинаторную структуру. Изучение алгебраических и комбинаторных свойств этих структур в пространствах орбит и развитие приложений теории действий тора. Данные исследования проводятся в рамках новой активно развивающейся области — *торической топологии.*

Методы исследования. В работе используются методы алгебраической топологии (теория гомотопий, кобордизмы, эквивариантная топология), алгебраической геометрии (торические многообразия, геометрическая теория инвариантов), коммутативной гомологической алгебры (резольвенты, функторы Ext и Tor, в том числе в дифференциальной категории) и комбинаторной геометрии (многогранники, симплициальные и кубические комплексы, конфигурации подпространств).

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем (в порядке их изложения в тексте).

1. Алгебраическая характеризация симплициальных частично упорядоченных множеств (симплициально-клеточных комплексов) Коэна–Маколея в терминах их колец граней, что даёт полный ответ на вопрос, рассмотренный Стенли в 1991 г.
2. Реализация момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$, соответствующего простому многограннику P, в виде полного пересечения вещественных квадратичных гиперповерхностей в комплексном пространстве. В случае многогранников Дельзанта это даёт описание поверхности уровня отображения моментов, рассматриваемого

[17] W. Bruns, J. Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*, revised edition. Cambridge Studies in Adv. Math., vol. **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[18] M. Hochster. *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in *Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference).* B.R. McDonald and R. Morris, eds., Dekker, New York, 1977, pp. 171–223.

[19] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004, 272 стр.

[20] M. Harada, Y. Karshon, M. Masuda, and T. Panov, editors. *Toric Topology.* Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008

[21] V. Buchstaber, N. Ray. *An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron*, in: “Toric Topology”, pp. 1–27.

в симплектической и торической геометрии. В качестве следствия доказано существование канонической эквивариантной гладкой структуры на момент-угол-многообразии, и получена явная тривиализация его нормального расслоения.

3. На основе конструкции момент-угол-многообразия предложен новый подход к комбинаторному описанию квазиторических многообразий, аналогичный известной конструкции торических многообразий из вееров. Квазиторические многообразия соответствуют «комбинаторным квазиторическим парам» (P, Λ), состоящим из ориентированного комбинаторного простого многогранника P и целочисленной матрицы Λ специального вида. В терминах этих комбинаторных данных явно описаны и вычислены многие топологические инварианты квазиторических многообразий и действий тора на них: эквивариантные стабильно комплексные структуры, веса и знаки неподвижных точек действия тора, роды Хирцебруха.
4. Предложена новая конструкция эквивариантной связной суммы квазиторических многообразий, которая привела к следующему результату: в каждом классе комплексных кобордизмов содержится квазиторический представитель. Это даёт решение торического аналога известной проблемы Хирцебруха.
5. Построена когомологическая теория локально стандартных действий тора на многообразиях. Доказано, что пространство орбит такого действия является гранеацикличным многообразием с углами тогда и только тогда, когда когомологии многообразия обращаются в нуль в нечётных размерностях. Доказано, что пространство орбит является гомологическим многогранником только тогда, когда кольцо когомологий многообразия порождается двумерными классами.
6. Вычислены кольца когомологий момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Дано описание этого кольца когомологий как алгебраических когомологий (Tor-алгебры) кольца граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ симплициального комплекса, а также в терминах симплициальных когомологий полных подкомплексов в $\mathcal{K}$. Этот результат привёл к топологической интерпретации важнейших алгебраических инвариантов симплициального комплекса $\mathcal{K}$ — биградуированных чисел Бетти его кольца граней.
7. Построена гомотопическая эквивалентность (эквивариантная деформационная ретракция) дополнения конфигурации комплексных координатных подпространств на соответствующий момент-угол-комплекс. В качестве следствия получено решение широко известной задачи о вычислении колец когомологий дополнений таких конфигураций подпространств.
8. Доказано, что момент-угол-комплекс для действия алгебраического тора на специальных квазиаффинных многообразиях является множеством Кемпфа–Несс. Этот результат открывает новые взаимосвязи между торической топологией и геометрической теорией инвариантов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в исследованиях по алгебраической топологии, алгебраической геометрии, комбинаторике и комбинаторной геометрии. Результаты диссертации могут быть использованы в специальных курсах для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ, а также докладывались в виде пленарных и секционных выступлений на более 30 международных и российских конференциях, среди которых выделим следующие.

1. Международная конференция «Топология и Динамика: памяти Рохлина», посвящённая 80-летию В. А. Рохлина (С.-Петербург, 19–25 августа 1999 г.).
2. Международная конференция «Lattices, Polytopes and Tilings» (Обервольфах, Германия, 27 февраля–4 Марта 2000 г.).
3. Международная конференция по алгебраической топологии (о. Скай, Великобритания, 24–30 июня 2001 г.).
4. Международная конференция «Modern Homotopy Theory» (Лилль, Франция, 27–31 мая 2002 г.).
5. 18-я Британская топологическая конференция (Манчестер, Великобритания, 8–10 сентября 2003 г.).
6. Международная конференция «Алгебраические модели топологических пространств и расслоений», посвящённая 90-летию Г. Чогошвили (Тбилиси, Грузия, 13–18 сентября 2004 г.).
7. Международная конференция «Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics» (Сидней и Канберра, Австралия, 11–21 июля 2005 г.).
8. Международная конференция «Methods of Transformation Group Theory» (Киото, Япония, 22–26 мая 2006 г.).
9. Всероссийская конференция «Математика в Современном Мире», посвящённая 50-летию Математического Института им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 17–23 сентября 2007 г.).
10. Конференция «Новиковский День», посвящённая 70-летию С. П. Новикова (Москва, МИАН, 3 июня 2008 г.).
11. Конференция «Молодая Математика России» (Москва, НМУ, 12–13 января 2009 г.).

Результаты диссертации неоднократно докладывались на заседаниях Московского и Санкт-Петербургского Математических Обществ, научно-исследовательских семинарах по геометрии, топологии, алгебре и комбинаторике в МГУ им. М.В. Ломоносова, МИАН им. В. А. Стеклова, Независимом Московском Университете, Институте Теоретической и Экспериментальной Физики им. А. И. Алиханова, Институте Проблем Передачи Информации им. А. А. Харкевича, С.-Петербургском Отделении МИАН, Математическом Институте им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск), а также за рубежом на семинарах в Великобритании (университеты Абердина, Бристоля, Глазго, Кембриджа, Лестера, Манчестера, Шеффилда, Эдинбурга), Германии (универститет Оснабрюка, Математический Институт Обервольфах), Испании (Независимый Университет Барселоны), Южной Корее (Корейский Институт Науки и Технологий (KAIST), Тэджон), Японии (университеты Окаямы, Осаки, Токио, математический институт Киото). Материалы диссертации использованы в программе специальных курсов по торической топологии и теории кобордизмов на механико-математическом факультете МГУ и курса «Торическая Топология» Научно-Образовательного Центра при МИАН (весна 2007 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 2 монографиях и 21 работе автора, список которых приведен в конце автореферата [1-23].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав и приложений. Главы включают разделы и подразделы; все главы и большинство разделов содержат отдельные введения. Объём диссертации — 250 стр., объём приложений — 50 стр., список литературы включает 104 наименования.

Содержание работы

Во **введении** даётся общая характеристика работы, краткая история задач и их современное состояние, обосновывается актуальность темы исследования и кратко описывается содержание работы. Более подробные введение приводятся в начале глав и некоторых разделов.

Глава 1 носит вводный характер и содержит описание используемых в диссертации комбинаторных понятий — многогранников, вееров, симплициальных и кубических комплексов, симплициально клеточных комплексов и симплициальных частично упорядоченных множеств. Новой здесь является лишь комбинаторная интерпретация двойственности Александера в разделе 1.6 и её обобщение — двойственность между когомологиями полных подкомплексов и гомологиями линков, которая формулируется следующим образом.

Предложение 1.6.12. *Пусть $\mathcal{K}\ne\Delta^{m-1}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]=\{1,\dots,m\}$, а $\widehat{\mathcal{K}}:=\{\omega\subset[m]\colon [m]\setminus\omega\notin\mathcal{K}\}$ — двойственный комплекс. Тогда для любого $\sigma\notin\mathcal{K}$, т.е. $\widehat{\sigma}=[m]\setminus\sigma\in\widehat{\mathcal{K}}$, имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}^j(\mathcal{K}_\sigma)\cong\widetilde{H}_{|\sigma|-3-j}\bigl(\mathrm{lk}_{\widehat{\mathcal{K}}}\,\widehat{\sigma}\bigr),$$

где $\mathcal{K}_\sigma$ — полный подкомплекс в $\mathcal{K}$, соответствующий подмножеству σ (ограничение $\mathcal{K}$ на σ), а $\mathrm{lk}_{\widehat{\mathcal{K}}}\,\widehat{\sigma}$ — линк симплекса $\widehat{\sigma}$ в $\widehat{\mathcal{K}}$.

Этот результат находит приложение в разделе 6.6 при описании когомологий дополнений конфигураций подпространств. В случае $\sigma=[m]$ получаем комбинаторное выражение двойственности Александера.

Отметим также раздел 1.8, в котором описаны канонические кубические разбиения простых многогранников и симплициальных комплексов. Эти конструкции не являются принципиально новыми; их различные версии неоднократно появлялись в литературе и скорее являются частью математического фольклора. Наше изложение направлено на приложения этих кубических разбиений в конструкциях момент-угол-комплексов и многообразий в главе 6.

Глава 2 посвящена кольцам граней (также известным как *кольца Стенли–Риснера*) — одному из основных алгебраических инструментов торической топологии. Пусть $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей. Если $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, то его *кольцом граней* называется факторкольцо

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ — идеал, порождённый мономами $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$, для которых $\{i_1,\dots,i_k\}$ не является симплексом в $\mathcal{K}$. Введём градуировку в кольце $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, положив $\deg v_i=2$. Определим $(-i,2j)$*-е алгебраическое число Бетти* $\beta^{-i,2j}(\mathcal{K})$ как размерность $2j$-й градуированной компоненты i-го члена минимальной резольвенты $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуля $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Эти биградуированные числа Бетти можно определить и инвариантным образом, как размерности биградуированных компонент соответствующих Tor-модулей:

$$\beta^{-i,2j}\bigl(\mathbf{k}[\mathcal{K}]\bigr):=\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}\bigr),\qquad 0\leqslant i,j\leqslant m.$$

В разделах 2.1 и 2.2 вводятся и изучаются кольца граней и алгебраические числа Бетти; особое внимание здесь уделяется функториальным свойствам этих инвариантов, которые играют важную роль в топологических приложениях. Разделы 2.3 и 2.4 посвящены важным классам комплексов Коэна–Маколея и Горенштейна. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *комплексом Коэна–Маколея* (соотв. *Горенштейна*) над $\mathbf{k}$, если $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является кольцом Коэна–Маколея (соотв. Горенштейна). Первая часть главы 2 (разделы 2.1–2.4) также носит вводный характер и содержит описание известных конструкций и результатов.

Во второй части главы 2 изучаются симплициально клеточные комплексы $\mathcal{S}$ (или симплициальные частично упорядоченные множества) и их кольца граней. Симплициально клеточный комплекс $\mathcal{S}$ называется *комплексом Коэна–Маколея*, если его барицентрическое подразбиение $\mathcal{S}'$ является симплициальным комплексом Коэна–Маколея. При этом для симплициально клеточных комплексов можно определить понятие кольца граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$, которое в случае симплициальных комплексов совпадает с введённым выше, но, вообще говоря, кольцо $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ не порождается элементами степени два (это описано в разделе 2.5). Возникает вопрос о характеризации симплициально клеточных комплексов Коэна–Маколея в терминах их колец граней, впервые рассмотренный Стенли[22]. В разделе 2.6 мы даём полный ответ на этот вопрос.

Теорема 2.6.9. *Симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$ обладает свойством Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда кольцо граней $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$ является кольцом Коэна–Маколея.*

Другим новым результатом главы 2 являются обобщённые соотношения Дена–Соммервилля для симплициально клеточных комплексов. Простейшим комбинаторным инвариантом симплициального или симплициально клеточного комплекса является его *f-вектор* — целочисленный вектор, i-й компонентной которого является число граней размерности i. Классические соотношения Дена–Соммервилля утверждают, что компоненты f-вектора границы n-мерного симплициального многогранника удовлетворяют $[\frac{n}{2}]$ линейным соотношениям. В терминах так называемого *h-вектора* $(h_0, \dots, h_n)$, состоящего из некоторых целочисленных линейных комбинаций компонент f-вектора, соотношения Дена–Соммервилля записываются особенно просто: $h_i = h_{n-i}$ для всех i. В разделе 2.8 мы получаем обобщение соотношений Дена–Соммервилля на произвольные симплициально клеточные комплексы.

Теорема 2.8.1. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{i=0}^{n}(h_{n-i} - h_i)t^i = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}}\Bigl(1 + (-1)^n \chi(\mathcal{S}_{\geqslant\sigma})\Bigr)(t-1)^{n-\operatorname{rank}\sigma},$$

где χ — эйлерова характеристика. В частности, классические соотношения Дена–Соммервилля $h_i = h_{n-i}$ имеют место, если $\chi(\mathcal{S}_{\geqslant\sigma}) = (-1)^{n-1}$ для любого $\sigma \in \mathcal{S}$.

Эти соотношения обобщают соотношения Дена–Соммервилля для эйлеровых частично упорядоченных множеств[23]. Другим важным частным случаем являются симплициальные разбиения многообразий.

Следствие 2.8.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение замкнутого $(n-1)$-мерного многообразия. Тогда имеют место соотношения*

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i C_n^i(\chi(\mathcal{K}) - \chi(S^{n-1})), \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Здесь $\chi(\mathcal{K}) = f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1} h_n$ — эйлерова характеристика комплекса $\mathcal{K}$ и $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$.

Результаты главы 2 о симплициально клеточных комплексах получают приложения и дальнейшее развитие в главе 5 при изучении локально стандартных действий тора.

---

[22]R. Stanley. *f-vectors and h-vectors of simplicial posets.* J. Pure Appl. Algebra. **71** (1991), 319–331.

[23]см. формулу (3.40) в книге Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика,* М.: Мир, 1990.

В **главе 3** описываются различные подходы к определению алгебраических торических многообразий и приводятся результаты, которые далее используются в топологических приложениях.

В разделе 3.1 мы описываем классическую конструкцию торических многообразий через вееры, и отдельно обсуждаем нормальные вееры многогранников и соответствующие им проективные многообразия. В разделе 3.2 обсуждается конструкция Батырева–Кокса торических многообразий как факторпространств дополнений конфигураций координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$ по действию подгрупп алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^m$. В разделе 3.3 обсуждается конструкция неособых проективных торических многообразий при помощи симплектической редукции — как факторпространств поверхности уровня отображения моментов для гамильтоновых действий торических подгрупп в T^m на $\mathbb{C}^m$. Новым здесь является подраздел 3.3.2, где получено общее описание поверхности уровня отображения моментов как невырожденного пересечения вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$. Опишем эту конструкцию более подробно.

Рассмотрим выпуклый n-мерный многогранник с m гипергранями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданный как пересечение m полупространств:

$$P = \bigl\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i \geqslant 0 \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant m\bigr\}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$ — некоторые векторы и $b_i \in \mathbb{R}$. Многогранник P называется *простым*, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении в каждой его вершине; далее мы будем рассматривать лишь простые многогранники.

Многогранник (1) можно задать одним матричным неравенством $A_P\boldsymbol{x}+b_P \geqslant 0$, где A_P — матрица размера $m \times n$ со строками $\boldsymbol{a}_i$, а b_P — столбец из чисел b_i; неравенство считается покоординатным. Тогда аффинное отображение

$$i_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \boldsymbol{x} \mapsto A_P\boldsymbol{x} + b_P$$

отождествляет P с пересечением *положительного ортанта* $\mathbb{R}^m_\geqslant$ и n-мерной плоскости $i_P(\mathbb{R}^n)$. Ортант $\mathbb{R}^m_\geqslant$ является пространством орбит *стандартного* (покоординатного) действия тора T^m на комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$; в качестве проекции на пространство орбит возьмем стандартное отображение моментов

$$\mu \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m_\geqslant; \quad (z_1, \ldots, z_m) \mapsto (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2).$$

Теперь определим пространство $\mathcal{Z}_P$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu} \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_\geqslant. \end{array} \tag{2}$$

По построению, $\mathcal{Z}_P$ является T^m-инвариантным подмножеством в $\mathbb{C}^m$ с пространством орбит P, а i_Z является T^m-эквивариантным вложением.

Теорема 3.3.4. *$\mathcal{Z}_P$ является T^m-инвариантным гладким вещественным $(m+n)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением.*

Выбрав вещественную $(m-n) \times m$-матрицу $C = (c_{ki})$ ранга $(m-n)$, такую что $CA_P = 0$, можно задать $\mathcal{Z}_P$ как полное пересечение вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$:

$$\sum_{i=1}^m c_{ki}(|z_i|^2 - b_i) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-n;$$

это приводит к канонической тривиализации нормального расслоения вложения $i_Z \colon \mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^m$. Мы называем $\mathcal{Z}_P$ *момент-угол-многообразием* многогранника P.

Действие тора T^m на $\mathcal{Z}_P$ не является свободным: орбиты, соответствующие вершинам многогранника имеют максимальные (n-мерные) стационарные подгруппы. Во многих случаях удаётся найти $(m-n)$-мерную подгруппу в T^m, действующую на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Важнейшие примеры возникают, когда многогранник P является *целочисленным*, т.е. имеет вершины в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае векторы $\boldsymbol{a}_i$ в (1) можно выбрать целочисленными и примитивными; тогда отображение A_P происходит из эпиморфизма решёток $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, который задаёт эпиморфизм торов $T^m \to T^n$. Обозначим его ядро через $K(P)$.

Предположим, что для каждой вершины многогранника P набор из n векторов $\boldsymbol{a}_i$, ортогональных к гиперграням, содержащим эту вершину, образует базис целочисленной решётки. Тогда $K(P)$ является $(m-n)$-мерным тором, действующим на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Соответствующее фактормногообразие $V_P = \mathcal{Z}_P/K(P)$ (размерности $2n$) и есть *торическое многообразие*, соответствующее целочисленному многограннику P. Оно является неособым проективным алгебраическим многообразием с действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^n$, имеющим плотную орбиту. Компактный тор $T^n = T^m/K(P)$ является максимальной компактной подгруппой в $(\mathbb{C}^\times)^n$.

В разделе 3.4 изучаются топологические свойства торических многообразий и их пространств орбит; этот раздел можно рассматривать как подготовительный для следующих двух глав.

Глава 4 посвящена *квазиторическим многообразиям* — одному из важнейших топологических обобщений торических многообразий[24]. Этот класс многообразий с действием тора определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление T^n в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником P. Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии. В разделе 4.1 вводится набор комбинаторных данных, полностью описывающий квазиторическое многообразие. Это описание аналогично описанию проективных торических многообразий через нормальные вееры многогранников.

В разделе 4.2 предлагается другая конструкция квазиторических многообразий как факторпространств момент-угол-многообразий по свободному действию тора, по аналогии с построением торических многообразий при помощи симплектической редукции. Торические подгруппы в T^m, действующие на $\mathcal{Z}_P$ свободно, можно получать следующим образом. Пусть Λ — целочисленная $m \times n$-матрица. При некотором условии на строки матрицы Λ (аналогичному описанному выше условию на векторы $\boldsymbol{a}_i$) ядро $K(\Lambda)$ соответствующего отображения торов $T^m \to T^n$ действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно. На фактормногообразии $M = M(P,\Lambda)$ действует тор $T^n = T^m/K(\Lambda)$, и это действие обладает двумя свойствами, характеризующими квазиторические многообразия. Мы называем M квазиторическим многообразием, задаваемым данными (P,Λ). Любое квазиторическое многообразие получается таким образом. Торические многообразия получаются как частный случай при $\Lambda = A_P$. Этот подход обладает тем преимуществом, что на квазиторических многообразиях вводится каноническая гладкая структура, относительно которой действие тора является гладким.

Квазиторические многообразия обладают многими топологическими свойствами торических многообразия, однако, вообще говоря, не являются алгебраическими (и даже комплексными) многообразиями. Следующая конструкция, излагаемая в разделе 4.3, показывает, что на каждом квазиторическом многообразии имеется *стабильно комплексная структура*. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — гиперграни многогранника P

[24] M. Davis, T. Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.

и $\pi\colon M \to P$ — проекция на пространство орбит квазиторического многообразия. Тогда $M_i = \pi^{-1}(F_i)$ является ориентируемым подмногообразием в M коразмерности два, называемым *характеристическим подмногообразием.* Тем самым определено вещественное 2-мерное ориентируемое расслоение ρ_i над M, ограничение которого на M_i совпадает с нормальным расслоением вложения $M_i \subset M$. Тогда имеет место изоморфизм вещественных $2m$-мерных расслоений [25]:

$$\mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)} \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m,$$

где $\mathcal{T}M$ — касательное расслоение, а $\underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)}$ — тривиальное $2(m-n)$-мерное расслоение над M. Так как выбор ориентации в вещественном 2-мерном расслоении эквивалентен заданию на нём комплексной структуры, стабильное касательное расслоение к M допускает комплексную структуру. Выбор этой структуры становится однозначным, если зафиксировать ориентацию самого M и всех характеристических подмногообразий M_i. Такой набор ориентаций называется *полиориентацией.* Для каждого полиориентированного квазиторического многообразия M определён его класс $[M] \in \Omega_U$ в кольце комплексных кобордизмов.

Разделы 4.4–4.7 можно рассматривать как подготовительные для следующего результата, доказательство которого завершается в разделе 4.8.

Теорема 4.8.15. *Каждый класс комплексных кобордизмов размерности > 2 содержит квазиторическое многообразие (непременно связное), стабильно комплексная структура которого задаётся некоторой полиориентацией, а следовательно согласована с действием тора.*

Данный результат можно рассматривать как решение квазиторического аналога известной проблемы Хирцебруха о классах кобордизма, представляемых связными неособыми алгебраическими многообразиях.

В разделе 4.4 вводится понятие знака неподвижной точки действия тора на полиориентированном квазиторическом многообразии. Эти знаки определяются эквивариантной стабильно комплексной структурой и играют важную роль при вычислении инвариантов класса кобордизма квазиторических многообразий. В разделе 4.5 дано описание кольца когомологий и характеристических классов квазиторического многообразия. Мы включили эти известные результаты для полноты изложения. В разделе 4.6 получен следующий результат, вычисляющий χ_y-род Хирцебруха квазиторического многообразия в терминах его комбинаторных данных.

Теорема 4.6.3. *Для любого целочисленного вектора $\boldsymbol{\nu}$ общего положения χ_y-род полиориентированного квазиторического многообразия M вычисляется как*

$$\chi_y[M] = \sum_{v \in P} (-y)^{\mathrm{ind}_\nu(v)} \sigma(v),$$

где сумма берётся по всем вершинам многогранника P, а $\sigma(v)$ и $\mathrm{ind}_\nu(v)$ — знак и индекс вершины v.

Эта формула переносит на случай квазиторических многообразий известные результаты торической геометрии, опирающиеся на теорему Римана–Роха–Хирцебруха. Частными случаями χ_y-рода являются старшее число Чженя c_n ($y = -1$) и род Тодда ($y = 0$). Соответствующие формулы приводят к препятствиям к существованию эквивариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии.

Раздел 4.7 играет двойную роль. Результаты и конструкции предыдущих разделов хорошо иллюстрируются на примере *многообразий ограниченных флагов*. В то же

[25] V. M. Buchstaber, N. Ray. *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes.* Internat. Math. Res. Notices **4** (2001), 193–219.

время, эти многообразия играют важнейшую роль в приложениях квазиторических многообразий в теории кобордизмов и доказательстве теоремы 4.8.15. В разделе 4.9 обсуждаются взаимосвязи между различными классами торических и квазиторических многообразий, и приводятся соответствующие примеры.

Последний раздел 4.10 посвящён изучению *башен Ботта* — важного класса проективных торических многообразий, представляющих собой тотальные пространства башен расслоений над $\mathbb{C}P^1$ со слоями $\mathbb{C}P^1$. При этом требуется, чтобы каждый следующий этаж башни получался как проективизация суммы двух одномерных комплексных расслоений над предыдущим этажом. Многогранник в пространстве орбит башни Ботта по действию тора комбинаторно эквивалентен кубу (размерности, равной высоте башни). Мы показываем в теореме 4.10.13, что квазиторическое многообразие над кубом с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками является башней Ботта (действие группы называется полусвободным, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек). Затем мы показываем в теореме 4.10.18, что такая башня Ботта топологически тривиальна, т.е. гомеоморфна произведению 2-мерных сфер. Это обобщает недавний результат Ильинского[26], согласно которому неособое компактное торическое многообразие с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками гомеоморфно произведению 2-мерных сфер, и является дальнейшим продвижением в проблеме Хаттори о полусвободных действиях окружности. Кроме того, мы показываем в теореме 4.10.28, что если кольцо когомологий квазиторического многообразия (или башни Ботта) изоморфно кольцу когомологий произведения 2-мерных сфер, то само многообразие гомеоморфно такому произведению.

В **главе 5** изучаются общие локально стандартные действия тора T на многообразиях M. В отличие от квазиторических многообразий, рассматриваемых в главе 4, здесь не предполагается, что пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. При этом пространство орбит является многообразием с углами, и исследование его комбинаторики является одним из основных инструментов для описания топологических свойств многообразия и действия тора.

Важную роль играет класс локально стандартных T-многообразий M, у которых когомологии обращаются в нуль в нечётных размерностях. Этот класс характеризуется тем, что эквивариантные когомологии такого многообразия являются кольцом Коэна–Маколея — свободным конечно порождённым модулем над кольцом эквивариантных когомологий точки (лемма 5.1.2). Также в разделе 5.1 доказано, что свойство обращения в нуль нечётномерных когомологий и свойство порождённости кольца когомологий двумерными классами наследуются связными компонентами множества неподвижных точек (леммы 5.1.3 и 5.1.4). В разделе 5.2 для эффективных действий тора половинной размерности введено понятие характеристического подмногообразия и полиориентации (по аналогии с квазиторическими многообразиями), получены некоторые структурные результаты о кольцах когомологий.

Собственно изучению локально стандартных действий посвящены разделы 5.3–5.7, где получен ряд результатов о взаимосвязи когомологических свойств локально стандартных T-многообразий M и комбинаторики их пространств орбит Q. В разделе 5.3 вводятся понятия гранеацикличного многообразия с углами Q (когда все грани, включая само Q, ацикличны) и гомологического многогранника (когда дополнительно предполагается, что все непустые пересечения граней связны). В разделе 5.4 на

[26] Д. Г. Ильинский. *О почти свободном действии одномерного тора на торическом многообразии.* Мат. Сборник **197** (2006), вып. 5, 51–74.

основе построений раздела 2.5 вводится понятие кольца граней многообразия с углами и описываются его алгебраические свойства.

Среди основных результатов отметим следующие.

Теорема 5.6.5. *Кольцо когомологий локально стандартного T-многообразия порождено двумерными классами тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гомологическим многогранником.*

В этом случае само кольцо когомологий $H^*(M)$ описывается таким же образом, как кольцо когомологий неособого компактного торического многообразия. Пространство орбит локально стандартного T-многообразия M с $H^{odd}(M)=0$ не обязательно является гомологическим многогранником, как показывает простой пример действия тора на чётномерной сфере.

Теоремы 5.7.5, 5.5.12. $H^{odd}(M)=0$ *тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гранеацикличным. При этом кольцо эквивариантных когомологий $H^*_T(M)$ изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[Q]$ пространства орбит.*

Имеется также описание кольца обычных когомологий $H^*(M)$ (теорема 5.5.13). Таким образом в торической топологии возникает класс колец Коэна–Маколея, более широкий, чем кольца граней многогранников или симплициальных комплексов. Эти кольца, вообще говоря, не порождаются элементами степени два.

Комбинаторные данные, необходимые для восстановления локально стандартного n-мерного T-многообразия M с $H^{odd}(M)=0$, можно задать при помощи регулярного n-валентного графа Γ с векторными метками на рёбрах, который мы называем *T-графом.* T-граф является частным случаем общего понятия *графа весов*, который сопоставляется многообразиям с действием тора в работах различных авторов, начиная с 1980-х годов. Другим важным классом графов весов являются так называемые *ГКМ-графы*, введённые в работе Горески–Коттвица–Макферсона[27] для формализации комбинаторных структур в пространствах орбит гамильтоновых действий тора на симплектических многообразиях. По аналогии с ГКМ-графами, в разделе 5.8 мы вводим понятие кольца эквивариантных когомологий T-графа. Каждому T-графу Γ сопоставляется симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}(\Gamma)$.

Теорема 5.8.13. *Кольцо эквивариантных когомологий T-графа Γ изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}(\Gamma)]$.*

Эта теорема обобщает наше вычисление эквивариантных когомологий локально стандартных T-многообразий (заметим, что не любой T-граф реализуется действием на многообразии). В отличие от соответствующей теоремы для ГКМ-графов, наш результат даёт полное описание кольца эквивариантных когомологий образующими и соотношениями.

Последний раздел главы 5 посвящён изучению раздутий T-многообразий и T-графов. Здесь мы связываем воедино топологическую конструкцию раздутия вдоль T-инвариантного подмногообразия, геометрическую конструкцию «срезания грани» простого многогранника и комбинаторную конструкцию звёздного подразбиения симплициального или симплициально клеточного комплекса.

Глава 6 посвящена изучению момент-угол-комплексов и многообразий, которые являются одним из основных инструментов приложений торической топологии. В разделе 6.1 мы приводим общую конструкцию момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующего симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ с m вершинами. Рассмотрим единичный

[27] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localisation theorem.* Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.

комплексный полидиск

$$(\mathbb{D}^2)^m = \{(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C}^m\colon |z_i|^2\leqslant 1,\quad i=1,\dots,m\}.$$

С каждым симплексом $\sigma\in\mathcal{K}$ свяжем подмножество

$$B_\sigma = \{(z_1,\dots,z_m)\in(\mathbb{D}^2)^m\colon |z_i|^2=1 \text{ при } i\notin\sigma\},$$

и определим *момент-угол-комплекс*

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} B_\sigma \subset (\mathbb{D}^2)^m,$$

где объединение берётся в полидиске $(\mathbb{D}^2)^m$. По построению, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является T^m-инвариантным подпространством, содержащим стандартный тор $\mathbb{T}^m\subset(\mathbb{D}^2)^m$. Эта конструкция момент-угол-комплекса, с одной стороны, обобщает понятие момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$, а, с другой стороны, эквивалентна конструкции вспомогательного T^m-пространства, введённого Дэвисом–Янушкевичем при изучении квазиторических многообразий.

Теоремы 6.1.1 и 6.1.6.

1. *Пусть $\mathcal{K}=\mathcal{K}_P$ — граница симплициального многогранника, двойственного к простому многограннику P. Тогда соответствующий момент-угол-комплекс T^m-эквивариантно гомеоморфен момент-угол многообразию $\mathcal{Z}_P$.*

2. *Если $\mathcal{K}$ является симплициальным разбиением $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является (компактным) T^m-многообразием.*

3. *Если $\mathcal{K}$ является симплициальным разбиением $(n-1)$-мерного многообразия, то дополнение $\mathcal{Z}_\mathcal{K}\setminus\mathbb{T}^m$ до стандартного тора $\mathbb{T}^m\subset(\mathbb{D}^2)^m$ является (некомпактным) T^m-многообразием.*

В разделе 6.2 изучаются гомотопические свойства момент-угол-комплексов. Гомотопическое факторпространство (конструкция Бореля) $ET^m\times_{T^m}\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ называется *пространством Дэвиса–Янушкевича* и обозначается $DJ(\mathcal{K})$. Известно, что когомологии пространства $DJ(\mathcal{K})$ (т.е. эквивариантные когомологии момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$) изоморфны кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$. Мы показываем (в теореме 6.2.3), что пространство $DJ(\mathcal{K})$ реализуется, с точностью до гомотопической эквивалентности, в виде простого клеточного подкомплекса в стандартном клеточном разбиении классифицирующего пространства BT^m (которое представляет собой произведение m экземпляров $\mathbb{C}P^\infty$). Таким образом, момент-угол-комплекс представляется в виде гомотопического слоя простого вложения клеточных комплексов (следствие 6.2.4). Этот результат играет ключевую роль в дальнейшем описании гомотопических типов момент-угол-комплексов, соответствующих различным сериям симплициальных комплексов $\mathcal{K}$. Результат Дэвиса–Янушкевича об эквивариантных когомологиях момент-угол-комплекса также непосредственно вытекает из нашего описания $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ в виде гомотопического слоя (следствие 6.2.5). Наконец, мы получаем некоторую информацию о гомотопических группах момент-угол-комплексов (предложение 6.2.7), из которой в частности вытекает, что все они являются 2-связными.

В разделе 6.3 строится каноническое клеточное разбиение момент-угол-комплексов. Соответствующий комплекс клеточных цепей приобретает вторую градуировку, и тем самым можно рассматривать биградуированные клеточные когомологии и числа Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ момент-угол-комплексов. Доказывается, что соответствие $\mathcal{K}\mapsto\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ задаёт функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений. Оно также индуцирует естественное преобразование между функтором симплициальных коцепей на $\mathcal{K}$ и функтором клеточных коцепей на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. При этом все отображения сохраняют клеточную биградуировку, так что биградуированные когомологии и числа Бетти момент-угол-комплексов также функториальны.

В разделе 6.4 даётся описание кольца когомологий момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Теорема 6.4.6. *Имеют место функториальные по $\mathcal{K}$ изоморфизмы градуированных алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathrm{Tor}^*_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}\bigl(\mathbb{Z}[\mathcal{K}],\mathbb{Z}\bigr) \cong H\bigl[\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}],d\bigr].$$

Здесь справа стоит алгебра когомологий дифференциальной градуированной алгебры $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, где образующие u_i внешней алгебры имеют степень 1, а дифференциал задан на образующих следующим образом: $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.

Второй изоморфизм в теореме основан на стандартном вычислении Tor-алгебры при помощи комплекса Кошуля. Доказательство первого изоморфизма основано на анализе биградуированных клеточных коцепей и построении специальной клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta\colon \mathcal{Z}_\mathcal{K}\to\mathcal{Z}_\mathcal{K}\times\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, обладающей нужными функториальными свойствами. Таким образом, алгебраические биградуированные числа Бетти кольца граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ отождествляются с топологическими биградуированными числами Бетти момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Теорема 6.4.6 даёт достаточно эффективное описание кольца $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ и легко применяется для конкретных вычислений с симплициальными комплексами. В случае комплексов с большим числом вершин для вычисления размерностей биградуированных компонент Tor-модулей можно привлечь известные пакеты компьютерных программ (Macaulay2 и др.). Кроме того, применение теоремы Хохстера позволяет свести вычисление к когомологиям полных подкомплексов в $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$H^k(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{\omega\subset[m]} \widetilde{H}^{k-|\omega|-1}(\mathcal{K}_\omega),$$

где $\mathcal{K}_\omega$ — полный подкомплекс. Умножение в когомологиях момент-угол-комплекса также допускает описание через полные подкомплексы в $\mathcal{K}$ (теорема 6.4.9).

В разделе 6.5 описываются свойства биградуированных чисел Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, как в общем случае, так и для момент-угол-комплексов, соответствующих различным специальным классам симплициальных комплексов. Доказано, что числа граней симплициального комплекса $\mathcal{K}$ (т.е. его f- и h-векторы) выражаются через биградуированные числа Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ (теорема 6.5.2). Если $\mathcal{K}$ является симплициальным разбиением сферы, то $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является многообразием, и двойственность Пуанкаре в когомологиях $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ сохраняет биградуированную структуру в когомологиях. Это приводит к дополнительным соотношениям на числа $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ (предложение 6.5.5). В более общем случае, имеет место следующий результат.

Теорема 6.5.7. *$\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является пространством с двойственностью Пуанкаре тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ является горенштейновым комплексом.*

Вычислены числа Бетти и умножение в когомологиях момент-угол-многообразий, соответствующих многоугольникам (теорема 6.5.10). Уже из этого вычисления видно, что, несмотря на простоту конструкций момент-угол-комплексов и многообразий, их топология достаточно сложна. Более того, оказалось, что в кольцах когомологий момент-угол-комплексов существуют нетривиальные произведения Масси[28].

[28] И. В. Баскаков. *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол-комплексов.* Успехи Мат. Наук **58** (2003), вып. 5, 199–200.

Важным аспектом теории момент-угол-комплексов является её тесная взаимосвязь с конфигурациями координатных подпространств и их дополнениями, которые играют важную роль в алгебраической геометрии, теории особенностей и конфигурационных пространств. Этим вопросам посвящён раздел 6.6.

Координатное подпространство в $\mathbb{C}^m$ можно задать в виде

$$L_\omega = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\},$$

где $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$. Для каждого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ рассмотрим *конфигурацию комплексных координатных подпространств* $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \{L_\omega \colon \omega \notin \mathcal{K}\}$ и её *дополнение* в $\mathbb{C}^m$:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\omega \notin \mathcal{K}} L_\omega.$$

Сопоставление $\mathcal{K} \mapsto U(\mathcal{K})$ определяет взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве $[m]$ и дополнениями координатных конфигураций в $\mathbb{C}^m$, сохраняющее отношение вложения.

Теорема 6.6.5. *Для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ имеется T^m-эквивариантная деформационная ретракция*

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_\mathcal{K}.$$

Наличие гомотопической эквивалентности $U(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ позволяет применять наши результаты о момент-угол-комплексах в теории конфигураций. В частности, мы получаем решение известной задачи об описании кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Отметим, что другие известные результаты о когомологиях дополнений конфигураций координатных подпространств не описывают мультипликативной структуры (как общая теорема Горески–Макферсона[29], либо дают лишь описание произведения двух данных коциклов в комбинаторных терминах (как результат де Лонгвилле[30]). Наш результат о момент-угол-комплексах даёт исчерпывающее глобальное описание кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Результаты Горески–Макферсона (в части координатных конфигураций) и де Лонгвилле сводятся к частным случаям нашего результата при помощи двойственности Александера (предложение 6.6.8).

В разделе 6.7 показано, что полученные ранее свойства момент-угол-комплекса позволяют интерпретировать его как *множество Кемпфа–Несс* для действия алгебраического тора на алгебраическом многообразии $U(\mathcal{K})$. Классическое понятие множества Кемпфа–Несс используется в теории действий алгебраических групп на аффинных многообразиях и позволяет заменить категорное факторпространство на факторпространство по действию максимальной компактной подгруппы. Хотя дополнение $U(\mathcal{K})$ не является аффинным многообразием (оно лишь квазиаффинно), момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \subset U(\mathcal{K})$ обладает всеми свойствами аффинных множеств Кемпфа–Несс. Это позволяет поместить конструкции момент-угол-комплексов в контекст теории действий алгебраических групп и геометрической теории инвариантов.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту члену-корреспонденту РАН Виктору Матвеевичу Бухштаберу за многолетнее плодотворное сотрудничество, поддержку и внимание к данной работе. Автор чрезвычайно

[29]М. Горески, Р. Макферсон, *Стратифицированная теория Морса,* М.: Мир, 1991.

[30]M. de Longueville. *The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements.* Math. Z. **233** (2000), no. 3, 553–577.

признателен всем сотрудникам кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за тёплую и дружескую атмосферу, которая весьма способствовала работе над диссертацией, а также лично академику РАН С. П. Новикову, Л. А. Алании, А. А. Гайфуллину, И. А. Дынникову и Д. В. Миллионщикову за полезные обсуждения и замечания о результатах диссертации. Автор также выражает благодарность российским и зарубежным коллегам и соавторам, среди которых стоит особо выделить И. В. Аржанцева, Н. Э. Добринскую, М. Масуду и Н. Рэя.

Список публикаций по теме диссертации

[1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004, 272 стр.

[2] V. Buchstaber and T. Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics.* University Lecture Series **24**. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 2002, 152 pp.

[3] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебры клеточных коцепей и действия торов.* Успехи Мат. Наук **59** (2004), вып. 3, стр. 159–160.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками.* Успехи Мат. Наук **53** (1998), вып. 3, стр. 195–196.

[5] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора и комбинаторика многогранников.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **225** (1999), стр. 96–131.

[6] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора, комбинаторная топология и гомологическая алгебра.* Успехи Мат. Наук **55** (2000), вып. 5, стр. 3–106.

[7] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Момент-угол комплексы и комбинаторика симплициальных многообразий.* Успехи Мат. Наук **55** (2000), вып. 3, стр. 171–172.

[8] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора, эквивариантные момент-угол-комплексы и конфигурации координатных подпространств.* Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **266** (2000), стр. 29–50.

[9] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **247** (2004), стр. 41–58.

[10] М. Масуда, Т. Е. Панов. *Полусвободные действия окружности, башни Ботта и квазиторические многообразия.* Мат. Сборник **199** (2008), вып. 8, стр. 95–122.

[11] Т. Е. Панов. *Эллиптический род для многообразий с действием группы* $\mathbb{Z}/p$. Успехи мат. наук **52** (1997), вып. 2, стр. 181–182.

[12] Т. Е. Панов. *Классификация с точностью до кобордизма многообразий, несущих простое действие группы* $\mathbb{Z}/p$. Мат. заметки **63** (1998), вып. 2, стр. 260–268.

[13] Т. Е. Панов. *Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы* $\mathbb{Z}/p$ *через инварианты действия.* Известия РАН, сер. матем. **62** (1998), вып. 3, стр. 87–120.

[14] Т. Е. Панов. *Комбинаторные формулы для* χ_y*-рода полиориентированного квазиторического многообразия.* Успехи Мат. Наук **54** (1999), вып. 5, стр. 169–170.

[15] Т. Е. Панов. *Роды Хирцебруха многообразий с действием тора.* Известия РАН, сер. матем. **65** (2001), вып. 3, стр. 123–138.

[16] Т. Е. Панов. *Торические множества типа Кемпфа–Несс.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **263** (2008), стр. 159–172.

[17] V. Buchstaber and T. Panov. *Torus actions determined by simple polytopes.* Contemp. Math., vol. **258**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000, pp. 33–46.

[18] V. Buchstaber, T. Panov and N. Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds.* Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2, 219–242.

[19] H. Maeda, M. Masuda and T. Panov. *Torus graphs and simplicial posets.* Advances in Math. **212** (2007), no. 2, 458–483.

[20] M. Masuda and T. Panov. *On the cohomology of torus manifolds.* Osaka J. Math. **43** (2006), 711–746.

[21] T. Panov. *Cohomology of face rings, and torus actions*, in "Surveys in Contemporary Mathematics". London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **347**, Cambridge, U.K., 2008, pp. 165–201.

[22] T. Panov and N. Ray. *Categorical aspects of toric topology* , in: "Toric Topology" (M. Harada *et al*, eds.). Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322.

[23] T. Panov, N. Ray and R. Vogt. *Colimits, Stanley–Reiner algebras, and loop spaces.* Progress in Math., vol. **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 261–291.

Из совместных работ в диссертацию включены результаты автора.