Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.14, 515.16

Панов Тарас Евгеньевич

Алгебро-топологические инварианты многообразий с действием групп $\mathbb{Z}/p$ и T^n

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва – 1999

Оглавление

Введение

Настоящая работа посвящена изучению алгебро-топологических инвариантов многообразий, допускающих действие циклической группы простого порядка $\mathbb{Z}/p$ или компактного тора $T^n = (S^1)^n$.

Изучение действий группы $\mathbb{Z}/p$ (т.е. преобразований простого нечетного периода) — одно из классических приложений методов алгебраической топологии. С начала 60-х годов в задачах такого рода начинают применяться обобщенные теории когомологий. Одним из основных подходов к изучению действий конечных групп и торов на многообразиях становится применение теории кобордизмов. Основы этого подхода были заложены в монографии Коннера и Флойда [8], где в рамках теории кобордизмов были решены многие задачи теории неподвижных точек действий конечных групп на многообразиях и обозначены новые проблемы. Решению одной из таких проблем и посвящена глава 2 данной работы. Обширность применения методов теории кобордизмов в задачах о неподвижных точках объясняется ее геометричностью, которая позволяет описывать инварианты действия групп непосредственно в терминах классов кобордизмов неподвижных подмногообразий. Дальнейшее развитие этот метод получил благодаря применению аппарата теории формальных групп. Техника формальных групп была впервые применена в задачах о неподвижных точках действий конечных групп в работах С.П. Новикова [15],[16]. В работах А.С. Мищенко [12], [13] в наиболее общем случае описан класс кобордизма многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$ через наборы весов в неподвижных подмногообразиях и предъявлен полный набор образующих кольца унитарных $\mathbb{Z}/p$-кобордизмов. Важные результаты о действиях $\mathbb{Z}/p$ были получены применением теории формальных групп в работе Г.Г. Каспарова [7]. В наших исследованиях мы получаем ряд результатов, обобщающих результаты этой работы. Одной из первых работ, посвященных применению методов теории кобордизмов к S^1-действиям, явилась работа С.М. Гусейн-Заде [6]. В работе О.Р. Мусина [14] найдены образующие колец унитарных S^1-кобордизмов и унитарных S^1-кобордизмов без неподвижных точек. Метод формальных групп для изучения действий группы $\mathbb{Z}/p$ получил существенное развитие в работе В.М. Бухштабера и С.П. Новикова [4], где были также получены первые результаты для родов Хирцебруха многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$. Многие результаты Коннера и Флойда получили красивую и простую интерпретацию в терминах так называемой "формальной группы геометрических кобордизмов". Метод формальных групп оказался очень плодотворным и способствовал дальнейшему развитию взаимосвязей действий групп и алгебраической топологии. В наших исследованиях мы также в значительной мере опираемся на аппарат теории формальных групп.

Параллельно с применением теории кобордизмов и формальных групп развивался другой подход к изучению инвариантов действий групп $\mathbb{Z}/p$, S^1 и T^n на многообразиях, основанный на применении общей теоремы Атьи–Ботта о неподвижных точках [20], обобщающей классическую формулу Лефшеца, и теоремы Атьи–Зингера об индексе эллиптического оператора [1]. Здесь естественно возникает вопрос о взаимоотношении результатов относительно действий групп, получаемых в рамках подходов теории кобордизмов и теории индекса. Первые важные результаты в этом направлении были получены в работе [4], где была описана связь формул, получаемых для рода Тодда многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$ методами теории индекса и теории кобордизмов, с уравнениями Коннера–Флойда. В нашей работе мы также проводим анализ взаимосвязи результатов, получаемых в рамках двух подходов, и, в частности, обобщаем результаты [4] на случай произвольного рода Хирцебруха. Исследованию действий окружности в рамках теории кобордизмов и теории индекса посвящена работа И.М. Кричевера [9].

Применение методов алгебраической топологии оказалось весьма плодотворным и при изучении специальных T^n-действий, известных как *торические многообразия*, а также в возникающих в связи с этим комбинаторных задачах, связанных с многогранниками. Торические многообразия возникли в алгебраической геометрии (см. [5]), и оказались весьма полезными благодаря применениям в теории многогранников и алгебраической топологии. В связи с этим перспективным представляется исследование этого специального типа действий тора наработанными методами теории кобордизмов и теории индекса. Кроме того интерес представляет также другой специальный тип действий тора на многообразиях, определяемых комбинаторикой простых многогранников.

Далее мы перейдем к изложению основных результатов данной работы и описанию результатов других авторов, связанных с темой наших исследований.

Работа состоит из 3-х глав, включающих в себя 16 разделов. Нумерация теорем, лемм, предложений, следствий, т.д. начинается заново в каждом разделе. Нумерация формул начинается заново в каждой главе.

Глава 1 посвящена вычислению родов Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$. Для действий, имеющих конечное число неподвижных точек, в рамках теории индекса эллиптических операторов получены общие формулы, выражающие род Хирцебруха через инварианты действия — наборы весов в неподвижных точках. Ряд результатов обобщен на случай так называемых *простых* действий — когда все неподвижные подмногообразия имеют тривиальные нормальные расслоения. Явные формулы приводятся для классических родов и для эллиптического рода. Описана связь полученных соотношений с результатами о неподвижных точках, полученными в рамках теории кобордизмов, в частности с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда на наборы весов неподвижных точек.

Глава 2 посвящена изучению простых действий $\mathbb{Z}/p$ с точки зрения теории кобордизмов. Здесь приводится решение задачи об описании множества классов кобордизмов многообразий, несущих простое действие группы $\mathbb{Z}/p$, поставленной в работах [4],[8]. Эта проблема была решена в [8] в частном случае. В настоящей работе получена полная классификация классов кобордизма многообразий, несущих простое действие группы $\mathbb{Z}/p$ в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов и в терминах характеристических чисел, что дает полное решение рассматриваемой проблемы. Формулировка классификационного результата в терминах характеристических чисел указывает на обсуждавшуюся в [4] аналогию с теоремой Стонга–Хаттори [17] о выделении наборов целых чисел, являющихся числами Чженя стабильно комплексных многообразий.

Глава 3 посвящена изучению специальных действий тора на многообразиях, определяемых простыми многогранниками. Методы алгебраической топологии (в частности, спектральная последовательность Эйленберга–Мура) позволяют вычислить кольца когомологий таких многообразий и описать взаимосвязь с комбинаторикой простых многогранников.

В разделе 1 приводится необходимая для формулировки результатов главы 1 информация о комплексных кобордизмах и родах Хирцебруха. Известно (Милнор, Новиков), что кольцо комплексных кобордизмов Ω_U представляет собой кольцо полиномов $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ от образующих четных размерностей $a_i \in \Omega_U^{-2i}$. В качестве образующих кольца $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ можно взять комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$. *Родом* называется произвольный кольцевой гомоморфизм $\varphi : \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \to R \otimes \mathbb{Q}$, $\varphi(1) = 1$ где R — некоторое кольцо с 1 и без делителей нуля (обычно полагают $R = \mathbb{Z}$, но нам также понадобятся роды со значениями в других кольцах). Ф. Хирцебрухом [18] было показано, что каждый род соответствует некоторому формальному ряду $Q(x) = 1 + \dots$ с коэффициентами в $R \otimes \mathbb{Q}$. С каждым родом Хирцебруха φ_Q, соответствующим ряду $Q(x)$, связывается формальная группа, логарифмом которой является ряд $g(u)$, функционально обратный к ряду $f(x) = \frac{x}{Q(x)}$, и соответствующая степенная система $[u]_n^\varphi$ (см. [4]). В разделе 1 приводятся формулы для рядов $f(u)$, $g(u)$ и $[u]_n$, соответствующих основным родам, исследуемым в главе 1 (за исключением эллиптического рода, которому посвящен раздел 8).

Многие важные роды Хирцебруха впервые возникли в алгебраической топологии как индексы *эллиптических комплексов* (см. определение 2.1) — наборов векторных расслоений на многообразиях, связанных комплексом дифференциальных операторов с дополнительным условием, обобщающим определение эллиптического оператора. Теорема Атьи–Зингера в когомологической форме (см. теорему 2.2) позволяет свести вычисление индекса эллиптического комплекса к вычислению характеристических классов расслоений входящих в комплекс и характеристических классов касательного расслоения к многообразию. Все необходимые формулировки и определения приводятся в разделе 2. Здесь же приводятся два эллиптических комплекса для вычисления χ_y-характеристики и $\hat{A}$-рода (теоремы 2.3 и 2.5; доказательство обеих теорем основано на теореме Атьи–Зингера). Эти комплексы будут затем применены для вычисления соответствующих родов многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$.

Используемый нами подход к вычислению родов Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$ основан на применении обобщенной теоремы Лефшеца, полученной Атья и Боттом в [20]. Формула Атьи–Ботта–Лефшеца обобщает классическую формулу Лефшеца для числа неподвижных точек и позволяет вычислять эквивариантный индекс эллиптического комплекса расслоений на многообразии через функции неподвижных подмногообразий (см. теорему 3.2). В частности, если на многообразии действует оператор с конечным числом неподвижных точек, то соответствующий эквивариантный индекс выражается через наборы весов неподвижных точек (т.е. собственных чисел дифференциала оператора в неподвижных точках). Соответствующие результаты приведены в разделе 3. О возможности применения формулы Атьи–Ботта для вычисления родов Хирцебруха многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$ было впервые указано С.П. Новиковым в [16]. Затем В.М. Бухштабером и С.П. Новиковым в работе [4] было показано, как выражается род Тодда, являющийся индексом эллиптического комплекса (а именно комплекса Дольбо) расслоений на многообразии с действием $\mathbb{Z}/p$, через эквивариантный индекс того же комплекса для действия образующей группы $\mathbb{Z}/p$, входящий в формулу Атьи–Ботта–Лефшеца. Таким образом были выведены формулы, выражающие род Тодда через веса действия группы $\mathbb{Z}/p$ в неподвижных точках. В эти формулы входил теоретико-числовой след некоторого алгебраического расширения полей степени $p-1$, который затем также был эффективно вычислен. Аналогичный подход был использован и в нашей работе для получения формул для других родов многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$: сигнатуры (L-рода), эйлеровой характеристики, $\hat{A}$-рода, общей χ_y-характеристики и эллиптического рода, а также для получения некоторых общих соотношений для произвольных родов Хирцебруха, являющихся индексами эллиптических комплексов расслоений, ассоциированных с касательным расслоением многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$.

Раздел 4 посвящен вычислению эйлеровой характеристики, рода Тодда и L-рода (сигнатуры) многообразия, несущего действие $\mathbb{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек, через веса в неподвижных точках.

В подразделе 4.1 производятся вычисления для эйлеровой характеристики. Здесь нашими методами получена формула

$$e(M) \equiv q \mod p,$$

где $e(M)$ — эйлерова характеристика (стабильно комплексного) многообразия M, q — число неподвижных точек действия $\mathbb{Z}/p$.

В подразделе 4.2 мы приводим результаты Бухштабера и Новикова для рода Тодда. Здесь же вводятся так называемые "функции Атьи–Ботта" $AB_{\mathrm{td}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ от наборов весов $(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $x_i^{(j)} \in \mathbb{Z}/p$ неподвижных точек $\mathcal{P}_j$, $j = 1, \dots, q$, соответствующие роду Тодда. Эти функции затем будут обобщены на случай произвольного рода, вычисляемого как индекс эллиптического комплекса. Для функций Атьи–Ботта имеет место соотношение

$$\mathrm{td}(M) \equiv \sum_{j=1}^{q} AB_{\mathrm{td}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \mod p,$$

что позволяет вычислять рода Тодда через веса в неподвижных точках. Однако в определение функций Атьи–Ботта входит теоретико-числовой след некоторого элемента для расширения полей $\mathbb{Q}(\zeta) \to \mathbb{Q}$, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, который в свою очередь требует явного вычисления (это вычисление и было проведено в [4]).

В подразделе 4.3 производятся вычисления для L-рода (сигнатуры). Полученные здесь формулы имеют вид

$$AB_L(x_1, \dots, x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{q} AB_L\bigl(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}\bigr) \equiv L(M) \mod p.$$

Затем производится вычисление теоретико-числового следа в определении функций Атьи–Ботта для L-рода, что окончательно дает следующую формулу

$$L(M) \equiv \sum_{j=1}^{q} \sum_{m=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^L} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^L_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m \mod p,$$

где $[u]_p^L$ — степенная система, связанная с L-родом, а $\langle \cdot \rangle_m$ обозначает коэффициент при u^m.

В нашей работе мы также используем обобщенную формулу Лефшеца в несколько иной формулировке, изложенной в работе [1]. Эта формула и особенно получаемый на ее основе и изложенный в разделе 5 “рецепт” для вычисления эквивариантного индекса комплекса через функции неподвижных точек часто более удобны в приложениях, чем формула из [20] (которая использовалась в работе [4]). Обобщенная формула Лефшеца из работы [1] была получена на основе теоремы Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме. В рамках этого подхода удается выразить род Хирцебруха φ, вычисляемый как индекс эллиптического комплекса расслоений, ассоциированных с касательным расслоением, через наборы весов неподвижных точек действия $\mathbb{Z}/p$ при помощи теоретико-числового следа некоторого расширения полей. А именно, в разделе 5 получена следующая

Теорема. *Имеет место следующая формула для* $\varphi(M)$:

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\bigl(-2\pi i x_k^{(j)}/p\bigr)} \mod p,$$

где $\operatorname{Tr} : \mathbb{Q}_p(\zeta) \to \mathbb{Q}_p$ *— теоретико-числовой след,* $\zeta = e^{2\pi i/p}$.

Таким образом, вычисление родов Хирцебруха многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек сводится в каждом конкретном случае к вычислению некоторого теоретико-числового следа. Здесь же вводятся функции Атьи–

Ботта $AB_\varphi\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big)$ от неподвижных точек для произвольного рода φ, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{q} AB_\varphi\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big) \equiv \varphi(M) \mod p.$$

В разделе 6 получены явные формулы для $\hat{A}$-рода и χ_y-характеристики. Формулы для $\hat{A}$-рода (см. подраздел 6.1) имеют вид

$$AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\bigg(\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}\bigg),$$

$$\sum_{j=1}^{q} AB_{\hat{A}}\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big) \equiv \hat{A}(M) \mod p.$$

Вычисление следа в формуле для функции Атьи–Ботта дает следующее выражение

$$AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) = -\bigg\langle p\frac{2[u]_{p-1}^{A}}{[u]_{p-1}^{A}+[u]_{p+1}^{A}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]_{x_k}^{\hat{A}}}\bigg\rangle_n,$$

где $[u]_p^{\hat{A}}$ — степенная система, связанная с $\hat{A}$-родом.

Формулы для χ_y-характеристики (см. подраздел 6.2) имеют вид

$$AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right),$$

$$\begin{aligned}\chi_y(M) &\equiv \sum_{j=1}^{q} AB_{\chi_y}\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big)\\ &\equiv \sum_{j=1}^{q}\sum_{m=0}^{n}\frac{1+(-1)^m y^{m+1}}{1+y}\bigg\langle\frac{pu}{[u]_p^{\chi_y}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}^{\chi_y}}\bigg\rangle_{n-m} \mod p,\end{aligned}$$

где $[u]_p^{\chi_y}$ — степенная система, связанная с χ_y-характеристикой.

В работе [4] был предложен другой подход для получения соотношений для родов Хирцебруха, основанный на применении теории кобордизмов. В разделе 7 мы обсуждаем взаимосвязи результатов, получаемых в рамках теории индекса, с теорией кобордизмов. В работах [7], [12], [15], [16] в рамках теории кобордизмов были получены так называемые уравнения Коннера–Флойда. Эти уравнения представляют собой соотношения в кольце кобордизмов Ω_U между наборами элементов $\mathbb{Z}/p$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовало действие группы $\mathbb{Z}/p$ с такими наборами весов. Они имеют следующий вид

$$\sum_{j=1}^{q}\bigg\langle\frac{pu}{[u]_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}}\bigg\rangle_m \equiv 0 \mod p\Omega_U, \qquad m=0,\dots,n-1,$$

где $[u]_m$ — степенная система, соответствующая формальной группе геометрических кобордизмов. Применение рода Хирцебруха $\varphi : \Omega_U \to R$ позволяет получить численные соотношения Коннера–Флойда в кольце R, соответствующие роду φ. В [4] была приведена формула, выражающая класс кобордизмов $\bmod p$ стабильно комплексного многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$ через инварианты действия, что позволило получить формулу для рода Тодда. Далее было показано, что разность между формулами для рода Тодда, получаемыми в рамках теории индекса и теории кобордизмов, есть в точности сумма уравнений Коннера–Флойда для рода Тодда. В нашей работе показывается, что разность между двумя на первый взгляд различными формулами, полученными двумя методами для произвольного рода, есть взвешенная сумма уравнений Коннера–Флойда для этого рода с целыми коэффициентами. Именно, имеет место

Теорема. *Разность между формулой*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{q} \mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}}\right) \mod p, \qquad \theta = f_{\varphi}\left(-\frac{2\pi i}{p}\right),$$

и суммой уравнений Коннера–Флойда для рода φ *с некоторыми целыми p-адическими коэффициентами дает следующую формулу для рода* φ:

$$\varphi(M) \equiv \sum_{j=1}^{q} \left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n \mod p.$$

Особого интереса заслуживает так называемый эллиптический род. В работах Э. Виттена каждому гладкому ориентированному $2n$-мерному многообразию M^{2n} был сопоставлен инвариант – эквивариантный индекс оператора Дирака для канонического действия окружности S^1 на пространстве петель этого многообразия. С. Ошанин в [27] показал, что этот индекс является родом Хирцебруха, для которого ряд $f(x)$ есть эллиптический синус; отсюда и происходит название “эллиптический род”. В работах [10], [21] и др. была доказана теорема жесткости для эллиптического рода многообразий с действием S^1, утверждающая, что эквивариантный эллиптический род $\varphi_{S^1}(M)$ такого многообразия, рассматриваемый как характер группы S^1, является тривиальным характером и равен эллиптическому роду $\varphi(M)$. В то же время эллиптический род принимает значения в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][\delta, \varepsilon]$ и его значение на любом многообразии M^{2n} является модулярной формой веса n для подгруппы $\Gamma_0(2) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (см. [25]). В разделе 8 мы получаем формулы для эллиптического рода многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек:

$$\varphi(M^{2n}) \equiv \sum_{j=1}^{r} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n \mod p\mathbb{Z}[\delta, \varepsilon],$$

где $[u]_m$ — степенная система, соответствующая эллиптическому роду. В качестве приложения мы выводим соотношения на полиномы Лежандра, которые получаются применением этих формул к некоторым специальным действиям $\mathbb{Z}/p$ на $\mathbb{C}P^n$.

В разделе 9 мы обобщаем результаты раздела 5 на случай действий $\mathbb{Z}/p$, для которых все неподвижные подмногообразия имеют тривиальные нормальные расслоения — так называемые простые действия.

Теорема. *Пусть $\varphi(M)$ — род Хирцебруха, вычисляемый как индекс некоторого эллиптического комплекса расслоений, ассоциированных с TM. Тогда имеет место следующая формула для $\varphi(M)$:*

$$\begin{aligned}\varphi(M) &\equiv -\sum_{\nu} \operatorname{Tr}\left(\prod_j \frac{1}{f\left(-2\pi i x_j^{(\nu)}/p\right)}\right)\varphi(M_\nu^g) \\ &= -\sum_{\nu} \operatorname{Tr}\left(\prod_j \frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_j^\nu}}\right)\varphi(M_\nu^g) \mod p,\end{aligned}$$

где $M^g = \bigcup_\nu M_\nu^g$ — множество неподвижных точек, $\theta = f_\varphi(-2\pi i/p)$, $[\theta]_k$ — степенная система, $\operatorname{Tr} : \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}) \to \mathbb{Q}$ — теоретико-числовой след (если род φ принимает значения не в кольце $\mathbb{Z}$, а в другом кольце R, то $\mathbb{Q}$ заменяется на соответствующее поле частных).

В главе 2 мы изучаем простые действия группы $\mathbb{Z}/p$ с точки зрения теории кобордизмов. Здесь получено полное описание множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ (т.е. действием, для которого все неподвижные подмногообразия имеют тривиальные нормальные расслоения). Классификационные результаты получены в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов и в терминах характеристических чисел.

Наряду с простыми действиями мы рассматриваем так называемые *сильно простые действия* $\mathbb{Z}/p$. Простое действие $\mathbb{Z}/p$ называется сильно простым, если наборы весов (собственных чисел дифференциала отображения, соответствующего образующей $g \in \mathbb{Z}/p$, в неподвижных точках) одинаковы для всех неподвижных подмногообразий одной размерности. Для сильно простых действий $\mathbb{Z}/p$ проблема классификации была полностью решена Коннером и Флойдом в работе [8] (сильно простое действие в смысле нашего определения называлось в [8] "действием $\mathbb{Z}/p$, множество неподвижных точек которого имеет тривиальное нормальное расслоение"). Обратим внимание на то, что даже в случае действия с изолированными неподвижными точками понятия простого и сильно простого действия отличаются (соответствующие примеры приведены в разделе 12). Результаты Коннера и Флойда получены в качестве следствия в данной работе. В то же время методы, используемые в [8] судя по всему не позволяют получить наш более общий результат.

Как уже отмечалось выше, начиная с работы [15], для решения задач, связанных с действиями $\mathbb{Z}/p$ использовалась теория формальных групп, которая вошла в топологию благодаря формальной группе геометрических кобордизмов. Рассматриваемая проблема была впервые четко сформулирована в работе [4], где была получена формула, выражающая класс кобордизма $\bmod p$ многообразия M^{2n} с простым действием $\mathbb{Z}/p$ через инварианты действия. Фактически, первые результаты по этой проблеме были получены ранее, в работе [7], где, в частности, был получен результат, сформулированный у нас в качестве следствия в разделе 12. В [7], как и в этой работе, используется описание множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ как Ω_U-модуля, натянутого на некоторую систему коэффициентов степенной системы, определяемой формальной группой геометрических кобордизмов. Новый набор образующих этого Ω_U-модуля, введенный нами, позволил решить классификационную задачу в терминах характеристических чисел.

В разделе 10 мы сводим задачу об описании множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ к описанию некоторых специальных модулей над кольцами $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$ и $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ (здесь $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел). Это удается сделать благодаря двум обстоятельствам. Во-первых, простые действия $\mathbb{Z}/p$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с соотношениями в Ω_U-модуле $U_*(B\mathbb{Z}/p)$ эквивариантных бордизмов со свободным действием $\mathbb{Z}/p$ между специальными элементами этого модуля — так называемыми *инвариантами Коннера–Флойда* (см. [4]). Во-вторых, имеется "гомоморфизм реализации" из модуля соотношений такого типа в кольцо $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$, ставящий в соответствие соотношению класс кобордизмов $\bmod p$ многообразия, на котором это соотношение реализуется. Образ этого гомоморфизма описывается в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов. Это позволяет свести нашу проблему к описанию $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$, где $\widetilde{\Lambda}(1) = \Lambda^+(1) \cdot \Omega_U$ — Ω_U-модуль, натянутый на положительную часть $\Lambda^+(1)$ кольца коэффициентов $\Lambda(1)$ степенной системы $[u]_k$. Далее это можно свести к описанию $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модулей $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ и $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, где $\widetilde{\Lambda}_p(1)$ — Ω_U-модуль, натянутый на $\Lambda^+(1)$ и p. Эти модули являются идеалами в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$.

В разделе 11 мы находим образующие модулей $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$, $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ и $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$. Пусть

$$[u]_k = ku + \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n^{(k)} u^{n+1},$$

$\alpha_n^{(k)} \in \Omega_U^{-2n}$ — коэффициенты степенной системы.

Теорема. *В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять следующие коэффициенты $\alpha_n \in \Omega_U^{-2n}$:*

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{\textit{если n не делится на $p-1$,}} \\ \alpha_n^{(p)}, & \text{\textit{если n делится на $p-1$,}} \end{cases} \qquad n = 1, 2, \dots\,,$$

где p_1 — простой первообразный корень $\mod p$ *(образующая циклической группы $(\mathbb{Z}/p)^*$).*

Следствие. *В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять следующие:*

$$\alpha_n = \begin{cases} p, & \text{если } n = 0, \\ \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1,\ p_1 \text{ – первообразный корень} \mod p, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1,\ k = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$ можно взять

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1,\ k = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

В остальных размерностях образующих нет.

Пусть

$$\Omega_U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\Big[\frac{\mathbb{C}P^1}{2}, \frac{\mathbb{C}P^2}{3}, \dots, \frac{\mathbb{C}P^n}{n+1}, \dots\Big]$$

— подкольцо в $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$, состоящее из элементов, на которых все когомологические характеристические числа принимают целые значения (это кольцо также является кольцом коэффициентов логарифма формальной группы геометрических кобордизмов). Теорема Стонга–Хаттори утверждает, что подкольцо $\Omega_U \subset \Omega_U(\mathbb{Z})$ выделяется тем условием, что на его элементах принимают целые значения все характеристические числа *в K-теории.* В разделе 12 мы, используя предыдущие теоремы, описывающие структуру $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, доказываем результат, аналогичный теореме Стонга и Хаттори — приводим описание множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ в терминах характеристических чисел.

Теорема. *Элемент $\sigma \in \Omega_U(\mathbb{Z})^{-2n} \otimes \mathbb{Z}_p$ лежит в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуле $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ и, таким образом, является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда все характеристические числа из K-теории $s_\omega(\sigma)$, $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\|\omega\| = \sum_i k_i \cdot i \leqslant n$ лежат в $\mathbb{Z}_p$ и для всех разбиений ω, кратных $p-1$ когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$ делятся на p.*

Следствие. *Элемент $\sigma \in \Omega_U$ является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда для всех разбиений ω, кратных $p-1$ когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$ делятся на p.*

Следствие. *В каждом классе кобордизма многообразий M^n, $n \leqslant 4p-6$, содержатся многообразия, несущие простое действие $\mathbb{Z}/p$.*

Глава 3 посвящена развитию взаимосвязей между алгебраической топологией гладких многообразий и комбинаторикой многогранников. Исследования в этом направлении были стимулированы задачами, возникшими впервые в теории торических многообразий. Центральным понятием данной главы является многообразие с действием компактного тора, определяемое комбинаторной структурой простого многогранника.

Под n-мерным *выпуклым многогранником* мы понимаем произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое как пересечение конечного числа полупространств. Любой выпуклый многогранник ограничивается конечным числом гиперплоскостей. Выпуклый n-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n граней коразмерности один (гиперграней). Таким образом, гиперплоскости, ограничивающие простой многогранник, находятся в общем положении. Выпуклый многогранник можно также определять как выпуклую оболочку множества точек в $\mathbb{R}^n$. При этом если множество точек находится в общем положении, то получаемый многогранник называется *симплициальным*, так как все его грани будут симплексами. Каждому простому многограннику соответствует *двойственный* симплициальный многогранник, и наоборот. Часто бывает удобно исследовать свойства простого многогранника в терминах двойственного ему симплициального многогранника, а также симплициального разбиения сферы, задаваемого границей этого двойственного многогранника.

Каждому простому многограннику P^n с m гипергранями мы ставим в соответствие гладкое $(m+n)$-мерное многообразие $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора T^m на нем. Многие многообразия, играющие важную роль в различных аспектах топологии, алгебраической и симплектической геометрии, могут быть реализованы в виде многообразия $\mathcal{Z}_P$ или же как фактор-многообразия $\mathcal{Z}_P/T^k$ для некоторой торической подгруппы $T^k \subset T^m$, действующей на $\mathcal{Z}_P$ свободно. При этом оказывается, что ранг торической подгруппы, которая может действовать свободно на многообразии $\mathcal{Z}_P$, не превышает $m-n$. Многообразия, которые получаются при факторизации $\mathcal{Z}_P$ по действию тора максимально возможного ранга, мы называем *квазиторическими*, так как среди них содержится важный класс алгебраических многообразий, известных в алгебраической геометрии как *торические многообразия* (см. [5], [24]). Точнее, указанным выше способом можно получить все неособые проективные торические многообразия; далее под торическими многообразиями мы будем подразумевать именно этот класс. На каждом (квази)торическом многообразии имеется индуцированное действие тора T^n, пространством орбит которого является исходный простой многогранник P^n. Существуют простые многогранники P, над которыми не существует ни одного квазиторического (а значит, и торического) многообразия, т.е. нельзя найти ни одной подгруппы $T^{m-n} \subset T^m$ ранга $m-n$, действующей свободно на соответствующем многообразии $\mathcal{Z}_P$. Если же для многогранника P^n соответствующее многообразие $\mathcal{Z}_P$ допускает свободное действие торической подгруппы ранга $m-n$, то различным таким подгруппам могут соответствовать различные квазиторические многообразия над P^n и некоторые из них оказываются алгебраическими торическими многообразиями. Квазиторические многообразия (под названием "toric manifolds") впервые появились в работе [22], где были описаны многие важные алгебротопологические свойства этих многообразий.

Одной из основных целей главы 3 является изучение взаимосвязи между комбинаторной структурой простых многогранников и топологией описанных выше многообразий, определяемых этими многогранниками. Важнейшим алгебраическим инвариантом простого (или двойственного ему симплициального) многогранника является специальное градуированное кольцо $k(P)$ (где k — поле), называемое *кольцом граней* (или кольцом Стенли–Райснера). Это кольцо является фактор-кольцом кольца многочленов $k[v_1, \ldots, v_m]$ по некоторому идеалу. Тогда можно рассмотреть соответствующие градуированные модули когомологий $\operatorname{Tor}^{-i}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$, где $i > 0$. Эти модули уже изучались ранее, например, ряд результатов относительно соответствующих чисел Бетти $\beta^i(k(P)) = \dim_k \operatorname{Tor}^{-i}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$ приведен в [31]. Мы показываем, что биградуированный k-модуль $\operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$ является биградуированной k-алгеброй и соответствующая ей градуированная алгебра изоморфна алгебре когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$. Таким образом, когомологии многообразия $\mathcal{Z}_P$ приобретают каноническую структуру *биградуированной* алгебры. При доказательстве мы используем спектральную последовательность Эйленберга–Мура. Эта спектральная последовательность активно применялась в топологии для вычисления когомологий однородных пространств групп Ли (см., например, [30]). В нашем случае член E_2 этой спектральной последовательности есть в точности $\operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$, и спектральная последовательность вырождается в члене E_2. Используя при вычислении члена E_2 в качестве резольвенты комплекс Кошуля, мы показываем далее, что эта биградуированная алгебра является алгеброй когомологий некоторого биградуированного комплекса, тесно связанного с комбинаторной структурой P^n. Таким образом, введенная нами биградуированная алгебра когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$ несет в себе полную информацию о комбинаторике исходного многогранника P^n. В частности, оказывается что из биградуированной двойственности Пуанкаре для $\mathcal{Z}_P$ вытекают известные соотношения Дена–Соммервилля для многогранника P.

В разделе 13 мы вводим необходимые для дальнейшего конструкции, связанные с простыми многогранниками. Пусть P^n — простой многогранник и f_i — число граней P^n коразмерности $(i+1)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда целочисленный вектор $(f_0, \ldots, f_{n-1})$ называется *f-вектором* P^n. Для дальнейшего удобно положить также $f_{-1} = 1$. Наряду с f-вектором мы также будем рассматривать так называемый *h-вектор* $(h_0, \ldots, h_n)$, где h_i определяются из условия

$$h_0 t^n + \ldots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \ldots + f_{n-1}.$$

Пусть k — коммутативное кольцо, $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ — множество граней P^n коразмерности один, $m = f_0$. Образуем кольцо многочленов $k[v_1, \ldots, v_m]$, где v_i рассматриваются как переменные степени 2, соответствующие граням F_i. *Кольцом граней*

$k(P)$ простого многогранника P называется фактор-кольцо $k[v_1, \dots, v_m]/I$, где

$$I = (v_{i_1} \dots v_{i_s} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_s,\ F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_s} = \varnothing)\,.$$

В разделе 14 вводим мы многообразия с действием тора, определяемые простыми многогранниками и доказываем ряд вспомогательных утверждений. Рассмотрим m-мерный тор $T^m = S^1 \times \dots \times S^1$. Введем свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}^m$ и установим взаимно однозначное соответствие между гипергранями P^n и элементами базиса $\{e_1, \dots, e_m\}$ в $\mathbb{Z}^m$. Определим канонические координатные подгруппы $T^k_{i_1,\dots i_k} \subset T^m$ как торы, соответствующие координатным подрешеткам в $\mathbb{Z}^m$ (т.е. подрешеткам, натянутым на векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$). Тогда многообразие Z_P, связанное с простым многогранником P^n, определяется как

$$\mathcal{Z}_P = (T^m \times P^n)/\sim\ \mid (g_1, p) \sim (g_2, q) \Leftrightarrow p = q,\ g_1 g_2^{-1} \in T^k_{i_1,\dots,i_k},$$

где $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$ — все грани коразмерности один, содержащие точку $p \in P^n$.

Как следует из определения, $\dim \mathcal{Z}_P = m + n$; кроме того, действие тора T^m на $T^m \times P^n$ очевидно задает действие T^m на $\mathcal{Z}_P$.

Предложение. *Действие T^m на $\mathcal{Z}_P$ обладает следующими свойствами*

1) *Стационарная подгруппа любой точки $\mathcal{Z}_P$ является координатной подгруппой в T^m размерности не более n.*

2) *На пространстве орбит имеется комбинаторная структура простого многогранника P^n, для которой точки из внутренности граней коразмерности k соответствуют орбитам, стационарные подгруппы точек которых имеют размерность k. В частности, над внутренностью многогранника действие свободно.*

Рассмотрим ET^m — стягиваемое пространство универсального главного T^m-расслоения над $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Применяя конструкцию Бореля к T^m-пространству $\mathcal{Z}_P$, мы приходим к следующему определению. Определим пространство $B_T P$ как

$$B_T P = ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_P.$$

Таким образом, $B_T P$ — это пространство расслоения со слоем $\mathcal{Z}_P$, ассоциированного с универсальным расслоением при помощи действия T^m на $\mathcal{Z}_P$. Как следует из определения, гомотопический тип пространства $B_T P$ определяется простым полиэдральным комплексом P^n.

Теорема. *Пусть P — произвольный простой полиэдральный комплекс, имеющий m граней коразмерности один. Пространство $B_T P$ может быть реализовано как клеточный подкомплекс в BT^m, представляющий собой объединение клеточных подкомплексов $BT^k_{i_1,\dots,i_k}$ по всем симплексам $\Delta = (i_1, \dots, i_k)$ двойственного симплициального комплекса K_P. При этом $C^*(B_T P) = H^*(B_T P) = k(P)$, и вложение $i : B_T P \hookrightarrow BT^m$ индуцирует эпиморфизм $C^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m] \to k(P) = C^*(B_T P)$.*

В разделе 15 мы вводим спектральную последовательность Эйленберга–Мура и в качестве первого приложения выводим при помощи нее известную теорему о когомологиях (квази)торического многообразия. Пусть $\xi_0 = (E_0, p_0, B_0, F)$ — некоторое расслоение Серра над односвязной базой B_0, $f : B \to B_0$ — непрерывное отображение, и $p : E \to B$ — индуцированное расслоение. Тогда существует спектральная последовательность коммутативных алгебр $\{E_r, d_r\}$, сходящаяся к когомологиям E: $E_r \Rightarrow H^*(E)$, для которой $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B_0)}(H^*(B), H^*(E_0))$. Спектральная последовательность Эйленберга–Мура является спектральной последовательностью второго квадранта, и дифференциал d_r повышает бистепень на $(r, 1-r)$. В специальном случае, когда $B = *$ — точка (тогда $E = F$ — слой ξ), мы получаем спектральную последовательность $\{E_r, d_r\}$, $E_r \Rightarrow H^*(E)$, для которой $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B)}(H^*(E), k)$.

В разделе 16 мы вычисляем когомологии многообразий $\mathcal{Z}_P$.

Теорема. *Имеет место изоморфизм градуированных алгебр:*

$$\begin{gathered} H^*(\mathcal{Z}_P) = H[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m], d], \\ \operatorname{bideg} v_i = (0, 2), \quad \operatorname{bideg} u_i = (-1, 2), \\ d(1 \otimes u_i) = v_i \otimes 1, \quad d(v_i \otimes 1) = 0. \end{gathered}$$

Таким образом, спектральная последовательность Лере–Серра T^m-расслоения $\mathcal{Z}_P \times ET^m \to B_T P$ вырождается в члене E_3.

При помощи этой теоремы различные комбинаторные свойства простых многогранников можно интерпретировать в терминах когомологий определяемых ими многообразий $\mathcal{Z}_P$. В частности, комбинаторную интерпретацию получает двойственность Пуанкаре для многообразий $\mathcal{Z}_P$.

Лемма. *В терминах биградуированной алгебры $[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m], d]$ из теоремы 16.5 мы имеем следующие утверждения*

1) *Фундаментальный когомологический класс многообразия $\mathcal{Z}_P$ представляется любым коциклом вида $v_{i_1} \ldots v_{i_n} \otimes u_{j_1} \ldots u_{j_{m-n}}$, $j_1 < \ldots < j_{m-n}$, где $(i_1, \ldots, i_n)$ — набор индексов гиперграней, сходящихся в некоторой вершине $v \in P^n$ и $\{i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_{m-n}\} = \{1, \ldots, m\}$.*

2) *Два коцикла $v_{i_1} \ldots v_{i_p} \otimes u_{j_1} \ldots u_{j_r}$ и $v_{k_1} \ldots v_{k_s} \otimes u_{l_1} \ldots u_{l_t}$ представляют двойственные по Пуанкаре классы когомологий в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ тогда и только тогда, когда $p + s = n$, $r + t = m - n$, $(i_1, \ldots, i_p, k_1, \ldots, k_s)$ представляет собой набор индексов гиперграней, сходящихся в некоторой вершине $v \in P^n$ и $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_s, l_1, \ldots, l_t\} = \{1, \ldots, m\}$.*

Эта лемма позволяет получить новую интерпретацию соотношений Дена–Соммервилля для простых многогранников и ряд других комбинаторных свойств.

Результаты настоящей работы докладывались на семинарах по геометрии и топологии МГУ, на топологической конференции “Александровские чтения” (Москва, май 1997), на конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, сентябрь 1998), на конференции “Геометрия и топология’98” (Орхус, Дания, август 1998).

Основная часть результатов диссертации опубликована в работах [32]–[35].

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановку многих задач, стимулирующие обсуждения и внимание к работе, академику РАН С.П. Новикову за постановку ряда задач, а также Л.А. Алания и О.Р. Мусину за ценные советы и обсуждения.

Глава 1.

Вычисление родов Хирцебруха многообразий в терминах действия группы $\mathbb{Z}/p$

В настоящей работе все многообразия предполагаются гладкими и ориентируемыми и все действия групп предполагаются гладкими. В этой главе мы, в основном, будем иметь дело со *стабильно комплексными многообразиями*. Стабильно комплексное многообразие — это пара, состоящая из гладкого многообразия M и стабильной комплексной структуры в касательном расслоении к нему (это означает, что для некоторого k в расслоении $TM \oplus 2k$ фиксирована комплексная структура). Стабильно комплексные многообразия — основной объект изучения теории комплексных кобордизмов. В ранних работах по действиям групп стабильно комплексные многообразия иногда назывались квазикомплексными. Если не указано обратное, на протяжении этой главы все многообразия будут предполагаться стабильно комплексными.

1. Кобордизмы, формальные группы и роды Хирцебруха

Отношение кобордантности, согласованной с почти комплексной структурой, определяет кольцо Ω_U, элементами которого являются классы комплексно кобордантных стабильно комплексных многообразий, а сложение и умножение задаются взятием несвязного объединения и произведения многообразий соответственно. Кольцо Ω_U является кольцом коэффициентов теории комплексных кобордизмов: $\Omega_U = U^*(\mathrm{pt})$, где pt — точка. Кольцо $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ является кольцом многочленов от образующих отрицательных четных размерностей, соответствующих классам кобордизма комплексных проективных пространств: $\Omega_U \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2, \dots]$, $\deg \mathbb{C}P^i = -2i$.

Пусть M — стабильно комплексное многообразие. Запишем полный класс Чженя касательного расслоения TM в виде

$$c(TM) = 1 + c_1(M) + c_2(M) + \ldots + c_n(M) = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n),$$

то есть полный класс Чженя M записывается в виде произведения классов Чженя "виртуальных" одномерных расслоений, сумма которых дает TM. Таким образом, $c_i(M)$ есть i-я симметрическая функция от $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть R — некоторое кольцо с 1 и без делителей нуля. Каждому ряду вида $Q(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ с коэффициентами в $R \otimes \mathbb{Q}$ можно поставить в соответствие род $\varphi_Q : \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \to R \otimes \mathbb{Q}$ (см. [18]), значение которого на классе кобордизма M^{2n} определяется как

$$\varphi_Q(M^{2n}) = \Big(\prod_{i=1}^{n} Q(x_i)\Big)[M^{2n}]$$

(в правой части нужно выразить симметрический многочлен $\prod_{i=1}^{n} Q(x_i)$ через элементарные симметрические функции, заменить их на классы Чженя c_i и найти значение полученного характеристического класса на M^{2n}). Наряду с рядом $Q(x)$ введем ряды $f(x) = \frac{x}{Q(x)}$ и $g(u) = f^{-1}(u)$ (т.е. $g(u)$ — ряд, формально обратный к $f(x)$, $g\big(f(x)\big) = f\big(g(u)\big) = 1$). Как было показано С.П. Новиковым [16], коэффициенты производной ряда $g(u)$ суть значения соответствующего рода φ_Q на классах $\mathbb{C}P^n$:

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_Q[\mathbb{C}P^n]}{n+1} u^{n+1}. \tag{1}$$

С другой стороны, произвольный род φ определяется своими значениями на классах $\mathbb{C}P^n$, поэтому из формулы (1) мы можем восстановить ряд $g_\varphi(u)$, а затем $Q_\varphi(x) = x/g^{-1}(x)$. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между родами φ и формальными рядами $Q(x) = 1 + \ldots$, которое позволяет называть произвольный род "родом Хирцебруха".

Одномерной коммутативной формальной группой (далее именуемой просто *формальной группой*) F над кольцом R называется формальный степенной ряд $F(u, v) \in R[[u, v]]$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $F(u, 0) = F(0, u) = u$;

2) $F\big(F(u, v), w\big) = F\big(u, F(v, w)\big)$;

3) $F(u, v) = F(v, u)$.

Ряд $g(u)$, удовлетворяющий условию $F(u, v) = g^{-1}\big(g(u) + g(v)\big)$ называется *логарифмом* формальной группы F. С каждой формальной группой F связана *степенная* *система* $[u]_n = F(\underbrace{u, \dots, u}_{n})$. Род Хирцебруха φ определяет формальную группу F_φ, логарифмом которой является ряд $g_\varphi(u)$ (см. [4]): $F_\varphi(u,v) = g_\varphi^{-1}\big(g_\varphi(u) + g_\varphi(v)\big)$. Этой формальной группе соответствует степенная система $[u]_n^\varphi = g_\varphi^{-1}\big(ng_\varphi(u)\big)$.

Аналогично можно определить рода Хирцебруха для вещественных многообразий M^{4n}. При этом классы Чженя c_i заменяются на классы Понтрягина p_i, а x_i на x_i^2, т.е.

$$p(TM) = 1 + p_1(M) + p_2(M) + \ldots + p_n(M) = (1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2).m$$

Вместо ряда $Q(x)$ мы теперь будем иметь $Q(x^2)$.

Формулы, полученные в данной работе относятся, в основном, к следующим родам Хирцебруха.

1. *Универсальный род* $\underline{\varphi}$ соответствует тождественному гомоморфизму $id : \Omega_U \otimes \mathbf{Q} \to \Omega_U \otimes \mathbf{Q}$. Соответствующая формальная группа $\underline{F}(u,v)$ известна в теории кобордизмов как "формальная группа геометрических кобордизмов" (см. [15]). Заметим, что коэффициенты $\underline{F}(u,v)$ лежат в кольце Ω_U, а не в $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ (явные формулы получены в [3]). Известно [4],[28], что формальная группа $\underline{F}(u,v)$ является универсальной, т.е. для любой формальной группы $F(u,v)$ над любым кольцом R существует единственный кольцевой гомоморфизм $\lambda : \Omega_U \to R$ такой, что $F(u,v) = \lambda\big[\underline{F}(u,v)\big]$. Формальная группа $\underline{F}(u,v)$ имеет логарифм $\underline{g}(u)$ с коэффициентами в кольце $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$, определяемый формулой (см. (1))

$$\underline{g}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\varphi}[\mathbb{C}P^n]}{n+1} u^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{C}P^n}{n+1} u^{n+1}.$$

2. *Род Тодда* $\mathrm{td}(M)$ соответствует ряду

$$Q_{\mathrm{td}}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}, \quad f_{\mathrm{td}}(w) = 1 - e^{-w}, \quad g_{\mathrm{td}}(u) = -\ln(1-u).$$

То же самое можно получить исходя из того, что $\mathrm{td}(\mathbb{C}P^n) = 1$. Действительно, тогда из (1) следует

$$g_{\mathrm{td}}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-u).$$

Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^{\mathrm{td}} = g_{\mathrm{td}}^{-1}\big(ng_{\mathrm{td}}(u)\big) = 1 - e^{n\ln(1-u)} = 1 - (1-u)^n.$$

Итак, для рода Тодда мы имеем:

$$f_{\mathrm{td}}(w) = 1 - e^{-w}, \quad g_{\mathrm{td}}(u) = -\ln(1-u), \quad [u]_n^{\mathrm{td}} = 1 - (1-u)^n. \qquad (2_{\mathrm{td}})$$

3. *Эйлерова характеристика* $e(M)$ (касательного расслоения). Т.к. $e(\mathbb{C}P^n) = n+1$, то (см. [16])

$$g_e(u) = \frac{u}{1-u}, \quad f_e(w) = g_e^{-1}(w) = \frac{w}{1+w}.$$

Значит $Q(x) = 1 + x$ и, как и следовало ожидать,

$$e[M] = \Big(\prod_{i=1}^{n} Q(x_i)\Big)[M] = (x_1 x_2 \dots x_n)[M^{2n}] = c_n[M^{2n}].$$

Далее,

$$[u]_n^e = g_e^{-1}\big(ng_e(u)\big) = \frac{nu}{1+(n-1)u}.$$

Итак, для эйлеровой характеристики мы имеем:

$$f_e(w) = \frac{w}{1+w}, \quad g_e(u) = \frac{u}{1-u}, \quad [u]_n^e = \frac{nu}{1+(n-1)u}. \tag{2_e}$$

4. *Сигнатура*, или *L-род* соответствует ряду

$$Q_L(x) = \frac{x}{\operatorname{th}(x)} = \frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}, \quad f_L(w) = \operatorname{th}(w),$$
$$g_L(u) = \operatorname{arth}(u) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right).$$

Эти формулы можно получить также из теоремы Хирцебруха о том, что L-род равен сигнатуре, см. [18], в силу которой $L(\mathbb{C}P^{2n}) = 1$, $L(\mathbb{C}P^{2n+1}) = 0$. Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^L = g_L^{-1}\big(ng_L(u)\big) = \frac{e^{\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}} - e^{-\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}}}{e^{\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}} + e^{-\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}}} = \frac{(1+u)^n - (1-u)^n}{(1+u)^n + (1-u)^n}.$$

Итак, для L-рода мы имеем:

$$f_L(w) = \operatorname{th}(w), \quad g_L(u) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right), \quad [u]_n^L = \frac{(1+u)^n - (1-u)^n}{(1+u)^n + (1-u)^n}. \tag{2_L}$$

5. Имеется однопараметрический род, обобщающий три предыдущих примера, а именно χ_y-*характеристика*; χ_y-характеристика — это род Хирцебруха, соответствующий ряду

$$Q_{\chi_y} = \frac{x(1 + ye^{-x(1+y)})}{1 - e^{-x(1+y)}},$$
$$f_{\chi_y}(w) = \frac{w}{Q_{\chi_y}(w)} = \frac{1 - e^{-w(1+y)}}{1 + ye^{-w(1+y)}}, \quad g_{\chi_y}(u) = \frac{1}{1+y}\ln\frac{1+yu}{1-u}.$$

Пренебрегая условием нормировки $f_{\chi_y}(w) = w + \ldots$ и заменяя $w(1+y)$ на w, получим

$$\hat{f}_{\chi_y}(w) = \frac{1-e^{-w}}{1+ye^{-w}}, \quad \hat{g}_{\chi_y}(u) = \ln\frac{1+yu}{1-u}.$$

В обоих случаях выражение для степенной системы, связанной с χ_y-родом одно и то же:

$$[u]_n^{\chi_y} = \frac{(1+yu)^n - (1-u)^n}{(1+yu)^n + y(1-u)^n} = \frac{1-\left(\frac{1-u}{1+yu}\right)^n}{1+y\left(\frac{1-u}{1+yu}\right)^n}. \qquad (2_{\chi_y})$$

При $y = 0, -1, 1$ мы получаем соответственно род Тодда, эйлерову характеристику и L-род.

6. $\hat{A}$*-род* соответствует ряду

$$Q_A(x) = \frac{x/2}{\operatorname{sh}(x/2)} = \frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}},$$

$$f_A(w) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{w}{2}\right), \quad g_A(u) = 2\operatorname{arsh}\left(\frac{w}{2}\right) = \ln\left(\frac{u}{2} + \sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\right).$$

Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^A = g_A^{-1}\big(ng_A(u)\big) = 2\operatorname{sh}\big(n\operatorname{arsh}(u/2)\big) = \\ = \left(\frac{u}{2} + \sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\right)^n - \left(\frac{u}{2} + \sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\right)^{-n}.$$

Итак, для $\hat{A}$-рода мы имеем:

$$f_A(w) = 2\operatorname{sh}(w/2), \quad g_A(u) = 2\operatorname{arsh}(u/2), \quad [u]_n^A = 2\operatorname{sh}\big(n\operatorname{arsh}(u/2)\big). \qquad (2_A)$$

2. Роды Хирцебруха и теорема Атьи–Зингера об индексе

Пусть E, F — два векторных расслоения над многообразием M, $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ — дифференциальный оператор порядка m из пространства сечений $\Gamma(E)$ расслоения E в пространство сечений $\Gamma(F)$ и $\sigma^{(m)}(D) : \pi^*E \to \pi^*F$ — (старший) символ оператора D; здесь $\pi : T^*M \to M$ — проекция кокасательного расслоения к M. Символ $\sigma(D)$ определяет для любого кокасательного вектора $\eta \in T_x^*$ многообразия M в точке x линейное отображение $\sigma(D,\eta) : E_x \to F_x$ слоя E над x в слой F над x. Это отображение выглядит следующим образом. Пусть $e \in E_x$. Выберем сечение $s \in \Gamma(E)$, такое, что $s(x) = e$, и гладкую функцию f на M, такую, что $f(x) = 0$ и $df = \eta$. Тогда $\sigma(D,\eta)e = \big[D(f^m \cdot s)\big](x)$.

Определение 2.1. *Эллиптическим комплексом* на многообразии M называется набор векторных расслоений $E_0, E_1, \dots, E_m$, для которых задана последовательность дифференциальных операторов

$$D : \Gamma(E_0) \xrightarrow{D_0} \Gamma(E_1) \to \dots \xrightarrow{D_{m-1}} \Gamma(E_m),$$

такая, что $D_{i+1}D_i = 0$, $i = 0, \dots, m-1$ и для любого ненулевого кокасательного вектора $\eta \in T_x^*$ многообразия M в точке x последовательность линейных отображений

$$0 \to E_{0,x} \xrightarrow{\sigma(D_0,\eta)} E_{1,x} \to \dots \xrightarrow{\sigma(D_{m-1},\eta)} E_{m,x} \to 0$$

является точной.

Мы будем рассматривать следующие эллиптические комплексы: комплекс де Рама

$$\Lambda^* : \ \Gamma(\Lambda^0) \ \xrightarrow{\quad d \quad} \Gamma(\Lambda^1) \ \xrightarrow{\quad d \quad} \ \cdots \ \xrightarrow{\quad d \quad} \Gamma(\Lambda^n)$$

и комплекс Дольбо

$$\Lambda^{p,*} : \ \Gamma(\Lambda^{p,0}) \ \xrightarrow{\quad d'' \quad} \Gamma(\Lambda^{p,1}) \ \xrightarrow{\quad d'' \quad} \ \cdots \ \xrightarrow{\quad d'' \quad} \Gamma(\Lambda^{p,n}),$$

где $\Lambda^i = \Lambda^i(T^*M)$ — расслоение дифференциальных i-форм на M, а

$$\Lambda^{p,i} = \Lambda^p(T^*M) \wedge \Lambda^i(\overline{T}^*M) \simeq \Lambda^p(T^*M) \wedge \Lambda^i(TM)$$

— расслоение дифференциальных форм типа (p,i) ($\overline{T}^*M \simeq TM$, если на многообразии M введена эрмитова метрика).

Имеет место следующая теорема Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме (см. [1]).

Теорема 2.2. *Пусть M — компактное, ориентируемое, дифференцируемое многообразие размерности $2n$ и $E = \{D_i : \Gamma E_i \to \Gamma E_{i+1}\}$ — эллиптический комплекс ($i = 0, \dots, m-1$), ассоциированный с касательным расслоением (т.е. все расслоения E_i ассоциированы с TM). Тогда индекс этого комплекса определяется следующей формулой:*

$$\operatorname{ind}(E) = (-1)^n \left(\left(\frac{1}{e(TM)} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{ch}(E_i) \right) \operatorname{td}(TM \otimes \mathbb{C}) \right) [M].$$

Замечание. Записав $\operatorname{td}(TM \otimes \mathbb{C}) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{-x_j}{1-e^{x_j}} \right)$, $e(TM) = x_1 \dots x_n$ и формально сократив на $x_1 \dots x_n$, получим следующую формулу:

$$\operatorname{ind}(E) = \left(\left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{ch}(E_i) \right) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{1}{1-e^{x_j}} \right) \right) [M]. \qquad (3)$$

Рассмотрим эллиптический комплекс $\left\{\mathrm{X}_i^y = \bigoplus_{p=0}^n y^p \Lambda^{p,i}\right\}$ (заметим, что этот объект является эллиптическим комплексом только при конкретных целых y, однако его индекс, очевидно, определяется при любых y как многочлен от y; в дальнейшем мы будем называть аналогичные объекты *эллиптическими комплексами*). При помощи теоремы Атьи–Зингера легко доказать следующий факт, впервые доказанный Хирцебрухом (см. [18]).

Теорема 2.3. *Индекс эллиптического комплекса $\{\mathrm{X}_i^y\}$ равен χ_y-характеристике многообразия M, определенной выше, т.е.*

$$\operatorname{ind}(\mathrm{X}^y) = \chi_y[M] = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}}\right)[M].$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (3):

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(\mathrm{X}^y) &= \left(\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \operatorname{ch}(\mathrm{X}_i^y)\right)\prod_{j=1}^n\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M]\\ &= \left(\operatorname{ch}\left(\sum_{i=0}^n(-1)^i\Lambda^i TM\right)\operatorname{ch}\left(\sum_{p=0}^n y^p\Lambda^p T^*M\right)\prod_{j=1}^n\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M]\\ &= \left(\prod_{j=1}^n(1-e^{x_j})\prod_{j=1}^n(1+ye^{-x_j})\prod_{j=1}^n\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M]\\ &= \left(\prod_{j=1}^n\frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}}\right)[M] = \chi_y[M].\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующим фактом (см., например, [25]). □

Лемма 2.4. *Пусть E — комплексное n-мерное расслоение над дифференцируемым многообразием M, $c(E) = 1+c_1(E)+\dots+c_n(E) = (1+x_1)\dots\dots(1+x_n)$ — формальное разложение полного класса Чженя. Пусть*

$$\Lambda_t E := \sum_{k=0}^\infty (\Lambda^k E)t^k, \qquad S_t E := \sum_{k=0}^\infty (S^k E)t^k.$$

Тогда

$$\operatorname{ch}(\Lambda_t E) = \prod_{i=1}^n (1+te^{x_i}), \qquad \operatorname{ch}(S_t E) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-te^{x_i}}. \tag{4}$$

В частности, если мы рассмотрим комплексы $\{\Lambda^{0,i}\}$, $\left\{\mathcal{E}_i = \sum_{p=0}^n (-1)^p \Lambda^{p,i}\right\}$, $\left\{L_i = \sum_{p=0}^n \Lambda^{p,i}\right\}$, то их индексы будут равны соответственно $\mathrm{td}[M] = \mathrm{ind}(\Lambda^{0,*})$, $e[M] = \mathrm{ind}(\mathcal{E})$, $L[M] = \mathrm{ind}(L)$.

Далее мы построим эллиптический комплекс, индекс которого будет равен $\hat{A}$-роду многообразия M при некоторых дополнительных условиях. Пусть $c_1(M) \equiv 0 \mod 2$ (это эквивалентно условию $w_2(M) = 0$, т.е. существованию на M спинорной структуры). Тогда существует линейное расслоение $\mathcal{L}$ над M, такое, что $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} = \Lambda^n T^* M$, т.е. если $c(M) = (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$, то $c(\mathcal{L}) = 1 - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{2}$ и $\mathrm{ch}(\mathcal{L}) = \exp\left(-\frac{x_1 + \cdots + x_n}{2}\right)$. Введем комплекс $\{A_i = \Lambda^{0,i} \otimes \mathcal{L}\}$.

Теорема 2.5. *Индекс эллиптического комплекса A, определенного выше, равен $\hat{A}$-роду многообразия M, т.е.*

$$\mathrm{ind}(A) = \hat{A}[M] = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j}{2\,\mathrm{sh}(x_j/2)}\right)[M].$$

Доказательство. Здесь мы снова воспользуемся формулами (3) и (4):

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(A) &= \left(\mathrm{ch}(\mathcal{L})\,\mathrm{ch}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^{0,i}\right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}}\right)\right)[M] \\
&= \left(\exp\left(-\frac{x_1 + \cdots + x_n}{2}\right) \mathrm{ch}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^i TM\right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}}\right)\right)[M] \\
&= \left(\prod_{j=1}^n e^{-x_j/2} \prod_{j=1}^n (1 - e^{x_j}) \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \frac{1}{1 - e^{x_j}}\right)\right)[M] \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j e^{-x_j/2}}{1 - e^{-x_j}}\right)[M] = \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_j}{2\,\mathrm{sh}(x_j/2)}\right)[M] = \hat{A}(M).
\end{aligned}$$

□

Таким образом мы построили эллиптические комплексы, ассоциированные с касательным расслоением к M, вычисляющие все основные рода Хирцебруха из раздела 1.

3. Обобщенная теорема Лефшеца о неподвижных точках (формула Атьи–Ботта) и приложения к действиям $\mathbb{Z}/p$ и родам Хирцебруха

Пусть на многообразии M^{2n} действует трансверсальный (т.е. имеющий лишь изолированные неподвижные точки) эндоморфизм такой g, что $g^p = 1$, p простое (т.е. задано действие группы $\mathbb{Z}/p$). Пусть $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_q$ — неподвижные точки и матрица Якоби $\mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)$ отображения g в точке $\mathcal{P}_j$ имеет собственные числа

$$\lambda_k^{(j)} = \exp\left(\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right), \qquad x_k^{(j)} \neq 0 \mod p, \qquad k = 1, \dots, n, \qquad j = 1, \dots, q.$$

Пусть на многообразии M задан эллиптический комплекс $E = \{D_i : \Gamma E_i \to \Gamma E_{i+1}\}$. Введем, следуя Атье и Ботту (см. [20]), следующее определение.

Определение 3.1. *Поднятием эндоморфизма g на компоненты комплекса E* называется набор линейных дифференциальных операторов $\varphi_i : \Gamma(g^* E_i) \to \Gamma(E_i)$. Здесь $g^* E_i$ — прообраз расслоения E_i при отображении g.

При помощи φ_i можно определить эндоморфизмы $T_i(g, \varphi) : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_i)$ как композицию φ и Γ_g, $T_i(g, \varphi) = \varphi_i \circ \Gamma_g$, где $\Gamma_g : \Gamma(E_i) \to \Gamma(g^* E_i)$ — естественное отображение сечений расслоения E_i в сечения индуцированного расслоения $g^* E_i$. Тогда имеет место следующая общая теорема Атьи–Ботта–Лефшеца (см. [20]).

Теорема 3.2. *Пусть $g : M \to M$ — трансверсальный эндоморфизм компактного многообразия M. Пусть E — эллиптический комплекс на M и $\varphi_i : \Gamma(g^* E_i) \to \Gamma(E_i)$ — поднятия g на компоненты комплекса E такие, что индуцированные эндоморфизмы $T_i(g, \varphi) : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_i)$ определяют эндоморфизм $T(g, \varphi)$ комплекса E (т.е. T_i коммутируют с дифференциалами d_i). Тогда "эквивариантный индекс" $\operatorname{ind}(g, E) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{tr} T_i^*$, где $T_i^* : H^i(E) \to H^i(E)$, вычисляется по формуле*

$$\operatorname{ind}(g, E) = \sum_{j=1}^{q} \sigma(\mathcal{P}_j), \tag{5}$$

где числа $\sigma(\mathcal{P}_j) \in \mathbb{C}$ зависят только от локальных свойств T и φ_i в точке $\mathcal{P}_j$.

В частности, если в каждой неподвижной точке $\mathcal{P}_j$ оператор φ_i индуцирует эндоморфизм $\varphi_i(\mathcal{P}_j) : E_{i,\mathcal{P}_j} \to E_{i,\mathcal{P}_j}$, то $\sigma(\mathcal{P}_j)$ равно

$$\sigma(\mathcal{P}_j) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\operatorname{tr} \varphi_i(\mathcal{P}_j)}{\left|\det\bigl(1 - \mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)\right|}. \tag{6}$$

Пример 3.3. Если $E_i = \Lambda^i(M)$ — комплекс де Рама, то $\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \Lambda^i \mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)$.

Пример 3.4. Если $E_i = \Lambda^{p,i}(M)$ — комплекс Дольбо, то

$$\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \Lambda^i \overline{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g),$$

где $\mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)$ — голоморфная часть отображения $\mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)$.

Найдем $\sigma(\mathcal{P}_j)$ для комплекса Дольбо $\Lambda^{p,*}$. Так как $\left|\det\bigl(1 - \mathcal{J}_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)\right| = \det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr) \det\bigl(1 - \overline{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)$, то из (6) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathcal{P}_j) &= \frac{\operatorname{tr}\Bigl(\Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \sum_i (-1)^i \Lambda^i \overline{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g)\Bigr)}{\det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr) \det\bigl(1 - \overline{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)} \\
&= \frac{\operatorname{tr}\bigl(\Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr) \det\bigl(1 - \overline{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)}{\det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr) \det\bigl(1 - \overline{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)} = \frac{\operatorname{tr} \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)}.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным равенством из линейной алгебры

$$\det(1 - A) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr} \Lambda^i A \tag{7}$$

для любого линейного оператора A. Итак,

$$\sigma_p(\mathcal{P}_j) = \frac{\operatorname{tr} \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)}. \tag{8}$$

Теорема 3.2 и формула (8) позволяют находить функции неподвижных точек $\sigma(\mathcal{P}_j)$ для комплексов $\Lambda^{0,*}$, $\mathcal{E}$, L, X^y, вычисляющих соответственно род Тодда, эйлерову характеристику, L-род и χ_y-характеристику многообразия M.

4. Вычисления для рода Тодда, эйлеровой характеристики и L-рода (сигнатуры)

4.1. Вычисления для эйлеровой характеристики

Рассмотрим комплекс $\mathcal{E}_i = \sum_{p=0}^n (-1)^p \Lambda^{p,i}$, $\operatorname{ind}(\mathcal{E}) = e(M)$. В этом случае

$$\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \Lambda^i \overline{\mathcal{J}}'_{\mathcal{P}_j}(g),$$

а функции неподвижных точек суть (см. формулу (8))

$$\sigma_e(\mathcal{P}_j) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \sigma_p(\mathcal{P}_j) = \frac{\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \operatorname{tr} \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)} = 1. \tag{9}$$

Здесь мы снова воспользовались формулой (7). Отсюда по теореме 3.2 имеем

$$\operatorname{ind}(g, \mathcal{E}) = \sum_{j=1}^{q} \sigma_e(\mathcal{P}_j) = q.$$

Так как $\frac{1}{p}\sum_{l \in \mathbb{Z}/p} \operatorname{ind}(g^l, \mathcal{E}) = s$ есть альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса $\mathcal{E}$ и $\operatorname{ind}(1, \mathcal{E}) = \operatorname{ind}(\mathcal{E}) = e(M)$, то мы имеем

$$\operatorname{ind}(1, \mathcal{E}) = e(M) = -\sum_{l=1}^{p-1} \operatorname{ind}(g^l, \mathcal{E}) + ps = ps - q(p-1) = q + p(s-q).$$

Таким образом мы получили следующую формулу для эйлеровой характеристики:

$$e(M) \equiv q \mod p. \tag{10}$$

4.2. Вычисления для рода Тодда

Вычисления рода Тодда комплексного многообразия в терминах действия группы $\mathbb{Z}/p$ на нем были проведены В. М. Бухштабером и С. П. Новиковым в работе [4]. Для полноты изложения мы здесь приведем их результаты.

Определение 4.1. *Функция Атьи–Ботта* $AB_{\mathrm{td}}(x_1, \ldots, x_n)$ *неподвижной точки* — это функция, сопоставляющая набору весов $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in \mathbb{Z}/p$, число

$$AB_{\mathrm{td}}(x_1, \ldots, x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}\right), \tag{11}$$

где $\operatorname{Tr} : \mathbb{Q}(\zeta) \to \mathbb{Q}$ — теоретико-числовой след, $\zeta = e^{2\pi i/p}$.

В [4] было показано, что

$$\sum_{j=1}^{q} AB_{\mathrm{td}}(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \equiv \operatorname{td}(M) \mod p, \tag{12}$$

и был вычислен след в определении функций Атьи–Ботта для рода Тодда:

$$
\begin{aligned}
AB_{\mathrm{td}}(x_1,\dots,x_n) &\equiv -\left\langle \frac{p[u]^{\mathrm{td}}_{p-1}}{[u]^{\mathrm{td}}_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\mathrm{td}}_{x_k}} \right\rangle_n \mod p,\\
AB_{\mathrm{td}}(x_1,\dots,x_n) &\equiv \sum_{m=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]^{\mathrm{td}}_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\mathrm{td}}_{x_k}} \right\rangle_m \mod p,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $[u]^{\mathrm{td}}_q$ — q-я степень в формальной группе, связанной с родом Тодда (см. формулу (2_T)), а $\langle h(u)\rangle_k$ — коэффициент при u^k в степенном ряде $h(u)$.

4.3. Вычисления для L-рода (сигнатуры)

Теперь рассмотрим комплекс $L = \sum_{p=0}^{n} \Lambda^{p,*}$. Его индекс есть L-род: $\mathrm{ind}(L) = L(M)$. В этом случае поднятиями g на компоненты комплекса L будут

$$
\varphi_i(\mathcal{P}_j) = \sum_{p=0}^{n} \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g) \wedge \Lambda^i \overline{\mathcal{J}}\,'_{\mathcal{P}_j}(g),
$$

а функции неподвижных точек есть (см. формулу (6))

$$
\begin{aligned}
\sigma_L(\mathcal{P}_j) = \sum_{p=0}^{n} \sigma_p(\mathcal{P}_j) &= \frac{\sum_{p=0}^{n} \operatorname{tr} \Lambda^p \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)}{\det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)}\\
&= \frac{\det\bigl(1 + \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)}{\det\bigl(1 - \mathcal{J}'_{\mathcal{P}_j}(g)\bigr)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Здесь мы снова воспользовались формулой (7). Значит, как следует из теоремы 3.2, эквивариантный индекс есть

$$
\mathrm{ind}(g, L) = \sum_{j=1}^{q} \sigma_L(\mathcal{P}_j) = \sum_{j=1}^{q} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}.
$$

Как и раньше, $\frac{1}{p}\sum_{l\in\mathbb{Z}/p} \mathrm{ind}(g^l, L) = s$ — альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса L и $\mathrm{ind}(1, L) = \mathrm{ind}(L) = L(M)$, т.е.

$$
L(M) = \mathrm{ind}(1, L) = -\sum_{l=1}^{p-1} \mathrm{ind}(g^l, L) + ps = -\sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)} l/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)} l/p}} + ps.
$$

Снова рассматриваем теоретико-числовой след $\operatorname{Tr} : \mathbb{Q}(\zeta) \to \mathbb{Q}$ и вводим функции Атьи–Ботта $AB_L(x_1, \dots, x_n)$ как

$$AB_L(x_1, \dots, x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}\right). \tag{15}$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{q} AB_L\bigl(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}\bigr) \equiv L(M) \mod p. \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) аналогичны соотношениям (11) и (12) для рода Тодда. Остается вычислить след в определении функций Атьи–Ботта $AB_L(x_1, \dots, x_n)$.

Обозначим $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$; тогда $\zeta = e^{2\pi i/p} = \frac{1-\theta}{1+\theta}$. Нам надо вычислить $\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1+\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right)$. Вычисления будем проводить в p-адическом пополнении $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ поля $\mathbb{Q}(\zeta)$. Символом $\simeq$ будем обозначать равенство по модулю группы $p\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$. Вначале докажем следующее утверждение.

Лемма 4.2. $\operatorname{Tr}(\theta^k) \simeq 0$ *для любого* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Так как $2 = \zeta^p + 1 = (\zeta + 1)(\zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta + 1)$, то

$$\theta = \frac{(1-\zeta)(\zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta + 1)}{2} = \zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta.$$

Поэтому

$$\operatorname{Tr}\theta^k = \sum_{m=1}^{p-1} \bigl((\zeta^m)^{p-1} - (\zeta^m)^{p-2} + (\zeta^m)^{p-3} - \dots - \zeta^m\bigr)^k \simeq 0,$$

так как

$$\sum_{m=1}^{p-1} \bigl((\zeta^m)^{p-1} - (\zeta^m)^{p-2} + \dots - \zeta^m\bigr)^k = \sum_{m=0}^{p-1} \bigl((\zeta^m)^{p-1} - (\zeta^m)^{p-2} + \dots - \zeta^m\bigr)^k,$$

и для любого r верно $\sum_{m=0}^{p-1} (\zeta^m)^r \simeq 0$. □

Далее имеем

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}}{1 - \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta\left(1 + \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)}{1 - \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \theta^k,$$

где $A_k \in \mathbb{Z}_p$ — целые p-адические числа (так как $1/x_k \in \mathbb{Z}_p$). Поэтому можно написать

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \theta^k\right) \simeq \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{k=0}^{n} A_k \theta^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \bigl(A_k \operatorname{Tr}(\theta^{k-n})\bigr).$$

Положим $\operatorname{Tr}\theta^{-s} = B_s$ и введем два формальных ряда $A(u) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k u^k$, $B(u) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k u^k$. Заметим, что, как следует из (2_L), $A(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^L_{x_k}}$. Таким образом, нам надо вычислить коэффициент при u^n в ряде $A(u)B(u)$. Имеем

$$\begin{aligned}
B(u) &= \operatorname{Tr}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \theta^{-s} u^s\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{1-\theta^{-1}u}\right) \\
&= \operatorname{Tr}\left(\frac{\theta}{\theta - u}\right) = \operatorname{Tr}\left(1 + \frac{u}{\theta - u}\right) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta - u}\right).
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что если $\varphi_\alpha(u)$ — минимальный многочлен элемента α относительно расширения $\mathbb{Q}_p(\zeta) \mid \mathbb{Q}_p$, то $\operatorname{Tr}\frac{1}{\alpha - u} = -\frac{\varphi'_\alpha(u)}{\varphi_\alpha(u)}$. Так как

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\zeta^p - 1}{\zeta - 1} = \frac{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^p - 1}{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right) - 1} \\
&= \frac{\big((1-\theta)^p - (1+\theta)^p\big)(1+\theta)}{(1+\theta)^p(-2\theta)} = \frac{1}{(1+\theta)^{p-1}}\frac{(1+\theta)^p - (1-\theta)^p}{2\theta},
\end{aligned}$$

то $\varphi_\theta(u) = \frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{2u}$ — минимальный многочлен элемента $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$. Тогда имеем

$$-\operatorname{Tr}\frac{1}{\theta - u} = \frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} = p\frac{(1+u)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} - \frac{1}{u}.$$

Таким образом,

$$B(u) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta - u}\right) = \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p},$$

$$\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right) \simeq \big\langle A(u)B(u)\big\rangle_n = \left\langle p\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n,$$

т.е.

$$AB_L(x_1, \ldots, x_n) \equiv -\left\langle p\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n \mod p.$$

Эта формула аналогична первой из формул (13). Далее,

$$\begin{aligned}
p\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} &= p\frac{(1-u)(1+u)^p - (1+u)(1-u)^p}{(1-u)(1+u)\big((1+u)^p - (1-u)^p\big)} \\
&= p\frac{(1+u)^p - (1-u)^p - u\big((1+u)^p + (1-u)^p\big)}{(1-u^2)\big((1+u)^p - (1-u)^p\big)} \\
&= \frac{p}{1-u^2} - \frac{pu}{(1-u^2)\frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{(1+u)^p + (1-u)^p}} = \frac{p}{1-u^2} - \frac{pu}{(1-u^2)[u]^L_p} \\
&\simeq -\frac{pu}{[u]^L_p}(1 + u^2 + u^4 + \cdots).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}AB_L(x_1,\dots,x_n) &\equiv -\left\langle p\frac{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+u)^p-(1-u)^p}\prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n \\ &\equiv \left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]^L_{x_k}}(1+u^2+u^4+\cdots)\right\rangle_n \mod p.\end{aligned}$$

Отсюда

$$AB_L(x_1,\dots,x_n) \equiv \sum_{i=0}^{[n/2]}\left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_{n-2i}.$$

Но так как $[u]^L_k = \frac{(1+u)^k-(1-u)^k}{(1+u)^k+(1-u)^k} = \operatorname{th}(k\operatorname{arth} u)$, а ряд $\operatorname{arth} u$ (как и $\operatorname{th} u$) содержит только нечетные степени u, то ряд $\frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]^L_{x_k}}$ содержит только четные степени u, и мы можем теперь записать формулы для функций Атьи–Ботта для L-рода, аналогичные формулам (13) для рода Тодда:

$$\begin{aligned}AB_L(x_1,\dots,x_n) &\equiv -\left\langle p\frac{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+u)^p-(1-u)^p}\prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n \mod p,\\ AB_L(x_1,\dots,x_n) &\equiv \sum_{m=0}^{n}\left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_m \mod p.\end{aligned} \tag{17}$$

Тогда по формуле (16)

$$L(M) \equiv \sum_{j=1}^{q}\sum_{m=0}^{n}\left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^n \frac{u}{[u]^L_{x_k^{(j)}}}\right\rangle_m \mod p. \tag{18}$$

Здесь $[u]^L_p = \frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{(1+u)^p+(1-u)^p}$.

Заметим, что соотношение типа (12) или (16) можно получить и для эйлеровой характеристики. Функциями Атьи–Ботта будут

$$AB_e(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^n \frac{1-\zeta}{1-\zeta}\right) = -\operatorname{Tr}(1) = -(p-1) \equiv 1 \mod p.$$

Тогда

$$q = \sum_{j=1}^{q} AB_e(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}) \equiv e(M) \mod p. \tag{19}$$

Это соотношение аналогично соотношениям (12) и (16) для рода Тодда и L-рода.

5. Общие результаты о вычислении родов Хирцебруха через инварианты действия $\mathbb{Z}/p$

Ниже мы рассмотрим другой подход к вычислению эквивариантного индекса $\operatorname{ind}(g, E) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \operatorname{tr}(g, H^i)$ эллиптического комплекса E, изложенный в [1]; см. также [25].

Вначале мы несколько ослабим условия на действие оператора g, $g^p = 1$, на многообразии M^{2n}. Именно, мы уберем условие трансверсальности. Пусть теперь $M^g = \{x \in M \mid gx = x\}$ — множество неподвижных точек. Представим его в виде объединения связных компонент: $M^g = \cup_\nu M^g_\nu$. Тогда эквивариантный индекс представляется в виде суммы функций неподвижных подмногообразий $\sigma(M^g_\nu)$, которые вычисляются следующим образом.

Пусть $Y = M^g_\nu$ — одна из компонент связности множества неподвижных точек. Для любой точки $p \in Y$ оператор g линейно действует на касательном пространстве T_pM, которое раскладывается в прямую сумму собственных подпространств $N_{p,\lambda}$, соответствующих собственным значениям λ, $|\lambda| = 1$. Таким образом, для любого собственного значения λ мы получаем расслоение N_λ над Y. При этом N_1 — это в точности касательное расслоение TY к Y. Пусть $d_\lambda = \operatorname{rk} N_\lambda$. Тогда мы имеем

$$TM|_Y = \bigoplus_\lambda N_\lambda, \qquad c(N_\lambda) = \prod_{i=1}^{d_\lambda}(1 + z_i^\lambda), \tag{20}$$

т.е.

$$c(TM|_Y) = \prod_\lambda \prod_{i=1}^{d_\lambda}(1 + z_i^\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(1 + z_i),$$

(здесь z_i — первые классы Чженя “виртуальных” одномерных подрасслоений, в сумме дающих TM, см. раздел 1). Тогда функция $\sigma(Y)$ находится следующим образом. Рассмотрим формулу (3) для индекса из теоремы 2.2:

$$\operatorname{ind}(E) = \left(\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \operatorname{ch}(E_i)\right) c_n(M) \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1 - e^{-z_j}}\frac{1}{1 - e^{z_j}}\right)\right)[M], \tag{21}$$

и заменим в ней M на Y и e^{z_i} на $\lambda^{-1}e^{z_i}$. То же самое проделаем и с $\operatorname{ch}(E_i)$. Это всегда можно сделать, если все расслоения E_i ассоциированы с касательным расслоением к M. Этот “рецепт” взят нами из [25].

В случае конечного числа неподвижных точек имеем $Y = \mathbf{pt}$, $c_n(Y) = 1$, т.е. мы должны заменить $z_1 z_2 \dots z_n$ на 1, $e^{z_j^\lambda}$ на λ_j^{-1}, т.е. если, как и выше, ввести “веса” x_i по формуле $\lambda_j = \exp\left(\frac{2\pi i x_j}{p}\right)$, то мы должны заменить z_j^λ на $-\frac{2\pi i}{p}x_j$.

Пример 5.1. Рассмотрим χ_y-характеристику многообразия M. Применив к формуле из теоремы 2.2 наш “рецепт”, мы получим следующую формулу для функции неподвижной точки $\mathcal{P}$:

$$\sigma(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + y e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}. \tag{22}$$

Подставив сюда значения $y = -1, 0, 1$, мы получим формулы для функций неподвижных точек для эйлеровой характеристики, рода Тодда и L-рода:

$$\sigma_e(\mathcal{P}) = 1, \qquad \sigma_{\mathrm{td}}(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}, \qquad \sigma_L(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}},$$

которые совпадают с формулами (9), (14), и формулой из работы [4], полученными из теоремы 3.2 Атьи-Ботта.

Рассмотрим теперь общий случай произвольного рода Хирцебруха φ:

$$\varphi(M) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{z_i}{f_\varphi(z_i)} \right)[M],$$

где $g_\varphi(u) = f_\varphi^{-1}(u)$ — логарифм соответствующей формальной группы. Пусть существует эллиптический комплекс E_φ расслоений, ассоциированных с TM, индекс которого равен $\varphi(M)$. Применив описанный выше “рецепт”, мы получим, что функции неподвижных точек действия g на M будут вычислятся по формуле

$$\sigma(\mathcal{P}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi(-2\pi i x_k/p)}, \tag{23}$$

где x_k — “веса” неподвижной точки $\mathcal{P}$, определяемые из условия $\lambda_k = \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)$, $x_k \neq 0 \mod p$, λ_k — собственные числа матрицы Якоби $\mathcal{J}_{\mathcal{P}}(g)$ отображения g в точке $\mathcal{P}$. Эквивариантный индекс комплекса E_φ определяется тогда по формуле

$$\mathrm{ind}(g, E_\varphi) = \sum_{j=1}^{q} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\big(-2\pi i x_k^{(j)}/p\big)}.$$

Далее, $\frac{1}{p} \sum_{l \in \mathbb{Z}/p} \mathrm{ind}(g^l, E_\varphi) = s$ — альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса E_φ и $\mathrm{ind}(1, E_\varphi) = \mathrm{ind}(E_\varphi) = \varphi(M)$. Поэтому имеем

$$\varphi(M) = \mathrm{ind}(1, E_\varphi) = -\sum_{l=1}^{p-1} \mathrm{ind}(g^l, E_\varphi) + ps = -\sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\big(-2\pi i x_k^{(j)} l/p\big)} + ps.$$

Рассмотрим теоретико-числовой след $\operatorname{Tr} : \mathbb{Q}_p(\zeta) \to \mathbb{Q}_p$, где $\zeta = e^(2\pi i/p)$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\bigl(-2\pi i x_k^{(j)} l/p\bigr)} = \operatorname{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\bigl(-2\pi i x_k^{(j)}/p\bigr)}.$$

Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть имеется эллиптический комплекс расслоений, ассоциированных с TM, индекс которого равен некоторому роду Хирцебруха $\varphi(M)$ многообразия M. Тогда если на M действует голоморфный трансверсальный эндоморфизм g такой, что $g^p = 1$, то имеется следующая формула для $\varphi(M)$:*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\bigl(-2\pi i x_k^{(j)}/p\bigr)} \mod p.$$

Здесь уместно ввести следующее

Определение 5.3. *Функция Атьи–Ботта $AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ неподвижной точки, соответствующая роду φ* – это функция, сопоставляющая набору весов $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{Z}/p$, число

$$AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n) = -\operatorname{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\bigl(-2\pi i x_k/p\bigr)}.$$

Тогда получаем

$$\sum_{j=1}^{q} AB_\varphi\bigl(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\bigr) \equiv \varphi(M) \mod p. \tag{24}$$

Обозначим теперь $\theta = f_\varphi(-2\pi i/p)$. Тогда $-2\pi i/p = g_\varphi(\theta)$ и $f_\varphi(-2\pi i/p x_k) = f_\varphi\bigl(x_k g_\varphi(\theta)\bigr) = [\theta]^\varphi_{x_k}$. Поэтому имеет место следующее

Предложение 5.4. *Функцию Атьи–Ботта $AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ неподвижной точки, соответствующую роду φ, можно представить в виде*

$$AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]^\varphi_{x_k}}\right), \qquad \theta = f_\varphi\left(\frac{-2\pi i}{p}\right).$$

Лемма 5.5. *Для любого $k > 0$ $\operatorname{Tr}\theta^k \simeq 0$ (т.е. $\operatorname{Tr}\theta^k \in p\mathbb{Z}_p$).*

Доказательство. Пусть $\theta = f_\varphi\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) = C_0 + C_1\zeta + \dots + C_{p-1}\zeta^{p-1} \in \mathbb{Q}_p(\zeta),\ C_i \in \mathbb{Z}_p$. Тогда $C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \dots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m} = f_\varphi\left(-\frac{2\pi i}{p}m\right)$, в частности, $C_0 + C_1 + \dots + C_{p-1} = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\theta^k &= \sum_{m=1}^{p-1} f_\varphi\left(-\frac{2\pi i}{p}m\right) = \sum_{m=1}^{p-1}\big(C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \dots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m}\big)\\ &= \sum_{m=0}^{p-1}\big(C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \dots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m}\big) \simeq 0,\end{aligned}$$

так как для любого r верно $\sum_{m=0}^{p-1}\zeta^{rm} \simeq 0$. Лемма доказана. ☐

Пример 5.6. Для рода Тодда $\theta = f_{\mathrm{td}}\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) = 1 - e^{2\pi i/p} = 1 - \zeta$ (см. формулу (2_{td})), т.е. $C_0 = 1,\ C_1 = -1, C_i = 0$ при $i > 1$.

Пример 5.7. Для L-рода $\theta = \hat{f}_L\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) = \frac{1-e^{2\pi i/p}}{1+e^{2\pi i/p}} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \dots - \zeta$ (см. лемму 4.2), т.е. $C_0 = 0,\ C_{2i+1} = -1,\ C_{2i} = 1$ при $i > 1$.

6. Вычисления для $\hat{A}$-рода и χ_y-характеристики

6.1. Вычисления для $\hat{A}$-рода

Рассмотрим $\hat{A}$-род

$$\hat{A}(M) = \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j e^{-x_j/2}}{1 - e^{-x_j}}\right)[M]$$

для стабильно комплексных многообразий M, у которых $c_1(M) \equiv 0 \mod 2$. Эллиптический комплекс, индекс которого равен $\hat{A}(M)$, задается теоремой 2.5. Функции Атьи–Ботта для $\hat{A}$-рода имеют следующий вид (см. определение 5.3):

$$AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp\left(\frac{2\pi i x_k}{2p}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)}\right) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta^{x_k/2}}{1 - \zeta^{x_k}}\right), \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{q} AB_{\hat{A}}\big(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}\big) \equiv \hat{A}(M) \mod p. \tag{26}$$

Теперь необходимо вычислить теоретико-числовой след в определении функций Атьи–Ботта $AB_{\hat{A}}(x_1, \dots, x_n)$. Имеем в силу предложения 5.4 $\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}} = \frac{1}{[\theta]^A_{x_k}}$, где $[u]^A_m =$

$2\operatorname{sh}\left(m\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)$ — степенная система, связанная с $\hat{A}$-родом (см. формулу (2_A)), а $\theta = 2\operatorname{sh}\left(-\frac{2\pi i}{2p}\right) = -2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{p}\right) = e^{-\pi i/p} - e^{\pi i/p} = \zeta^{-1/2} - \zeta^{1/2} = \zeta^{(p+1)/2} - \zeta^{(p-1)/2}$.

Найдем минимальный многочлен элемента $\theta = -2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{p}\right)$. Очевидно, это будет

$$\varphi_\theta(u) = \frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u},$$

так как

$$\varphi_\theta(\theta) = \frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\left(-2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{p}\right)\right)\big/2\right)\right)}{\theta} = \frac{-2\operatorname{sh}\left(p\cdot\frac{\pi i}{p}\right)}{\theta} = 0$$

и $\varphi_\theta(u)$ — многочлен степени $p-1$ со старшим членом u^{p-1}; например, при $p=3$ $\varphi_\theta(u) = u^2+3$, при $p=5$ $\varphi_\theta(u) = u^4+5u^2+5$ и т.д.

Далее, имеем

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{\hat A}\left(x_k g_{\hat A}(\theta)\right)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\hat A}_{x_k}}$$
$$= \frac{1}{\theta^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta}{[\theta]^{\hat A}_{x_k}} =: \frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{\infty}A_i\theta^i = \frac{1}{\theta^n}A(\theta),$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\hat A}_{x_k}} = \sum_{i=0}^{\infty}A_i u^i$, $A_i \in \mathbb{Z}_p$ — целые p-адические числа. Из леммы 5.4 следует, что для любого $k>0$ $\operatorname{Tr}(\theta^k) \simeq 0$ $(\theta = \zeta^{(p+1)/2} - \zeta^{(p-1)/2})$. Поэтому интересующий нас след есть

$$\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{\infty}A_i\theta^i\right) \simeq \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{n}A_i\theta^i\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(A_i\operatorname{Tr}(\theta^{i-n})\right) = \left\langle A(u)B(u)\right\rangle_n,$$

где $B_s := \operatorname{Tr}\theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty}B_i u^i$. Как и ранее, имеем $B(u) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right)$,

$\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right) = -\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)}$. Здесь

$$\varphi_\theta(u) = \frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u}, \qquad \varphi'_\theta(u) = \frac{p\operatorname{ch}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}} - \frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u^2},$$

$$\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} = \frac{p}{2\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}}\frac{\operatorname{ch}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} - \frac{1}{u},$$

$$\begin{aligned} B(u) &= p-1-u\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} = p - \frac{p\frac{u}{2}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}}\frac{\operatorname{ch}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} = \frac{p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\ \operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами $\operatorname{ch}\big(\operatorname{arsh}(u/2)\big) = \sqrt{1+u^2/4}$ и $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y - \operatorname{sh}y\operatorname{ch}x$. Далее имеем

$$\begin{aligned} B(u) &= \frac{p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{2p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \operatorname{sh}\left((p+1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} \\ &= p\frac{2[u]^A_{p-1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}} \simeq p\frac{[u]^A_{p-1}-[u]^A_{p+1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}}. \end{aligned}$$

Здесь $[u]^A_m = 2\operatorname{sh}\big(m\operatorname{arsh}(u/2)\big)$, и мы воспользовались формулой $2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y = \operatorname{sh}(y+x)+\operatorname{sh}(y-x)$. Итак, для функций Атьи–Ботта $AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^n \frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}\right)$ для $\hat{A}$-рода мы имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) &= -\left\langle p\frac{\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\ \operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}\prod_{k=1}^n\frac{u}{[u]^{\hat{A}}_{x_k}}\right\rangle_n, \\ AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) &= -\left\langle p\frac{2[u]^A_{p-1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}}\prod_{k=1}^n\frac{u}{[u]^{\hat{A}}_{x_k}}\right\rangle_n, \qquad (27) \\ AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) &\simeq \left\langle p\frac{[u]^A_{p+1}-[u]^A_{p-1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}}\prod_{k=1}^n\frac{u}{[u]^{\hat{A}}_{x_k}}\right\rangle_n. \end{aligned}$$

Тогда для $\hat{A}$-рода имеем $\hat{A}(M) \equiv \sum_{j=1}^q AB_{\hat{A}}\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big)$.

6.2. Вычисления для χ_y-характеристики

Рассмотрим χ_y-характеристику

$$\chi_y(M) = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}}\right)[M]$$

для многообразия M. Эллиптический комплекс, индекс которого равен $\chi_y(M)$, дается теоремой 2.3. Функции Атьи–Ботта для $\chi_y(M)$-характеристики имеют следующий вид (см. определение 5.3):

$$\begin{aligned} AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &= -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1+y\exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)}{1-\exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)}\right) \\ &= -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{q} AB_{\chi_y}\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big) \equiv \chi_y(M) \mod p. \tag{29}$$

Те же формулы можно получить и из теоремы 3.2 Атьи-Ботта аналогично тому, как это делалось в п. 4.3 для L-рода.

Теперь вычислим след в определении функций Атьи–Ботта $AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n)$. Имеем в силу предложения 5.4 $\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} = \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}}$, где $[u]_m^{\chi_y} = \frac{(1+yu)^m-(1-u)^m}{(1+yu)^m+y(1-u)^m}$ (при $y\neq -1$) — степенная система, связанная с χ_y-характеристикой (см. формулу (2_{χ_y})), а

$$\theta = \hat{f}_{\chi_y}\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) = \frac{1-e^{2\pi i/p}}{1+ye^{2\pi i/p}} = \frac{1-\zeta}{1+y\zeta}.$$

Тогда $\zeta = \frac{1-\theta}{1+y\theta}$. Далее мы будем предполагать $y\in\mathbb{Z}_p$, $y\neq -1 \mod p$. Случай $y=-1 \mod p$ сводится к эйлеровой характеристике, рассмотренной выше. Заметим, что при $y=0,1$ получается $\theta = 1-\zeta$ и $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, что соответствует полученным выше значениям для рода Тодда и L-рода.

Найдем минимальный многочлен элемента $\theta = \frac{1-\zeta}{1+y\zeta}$. Очевидно, это будет

$$\varphi_\theta(u) = \frac{(1+yu)^p-(1-u)^p}{(1+y)u},$$

так как

$$0 = \frac{\zeta^p-1}{\zeta-1} = \frac{\left(\frac{1-\theta}{1+y\theta}\right)^p - 1}{\frac{1-\theta}{1+y\theta}-1} = \frac{1}{(1+y\theta)^{p-1}}\varphi_\theta(\theta),$$

т.е. $\varphi_\theta(\theta) = 0$ и $\varphi_\theta(u)$ — многочлен степени $p-1$ со старшим членом u^{p-1}.

Далее имеем

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\hat{f}_{\chi_y}\big(x_k \hat{g}_{\chi_y}(\theta)\big)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}} \\ &= \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i = \frac{1}{\theta^n} A(\theta),\end{aligned}$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, $A_i \in \mathbb{Z}_p$ — целые p-адические числа. Из леммы 5.5 следует, что для любого $k > 0$ $\operatorname{Tr}(\theta^k) \simeq 0$.

Замечание. Представление θ в виде $\theta = C_0 + C_1\zeta + \cdots + C_{p-1}\zeta^{p-1}$, $C_i \in \mathbb{Z}_p$, используемое при доказательстве леммы 5.4, получается следующим образом. Так как

$$1 + y^p = 1 + (y\zeta)^p = (1+y\zeta)\big((y\zeta)^{p-1} - (y\zeta)^{p-2} + (y\zeta)^{p-3} - \cdots - y\zeta + 1\big),$$

то

$$\begin{aligned}\theta = \frac{1-\zeta}{1+y\zeta} &= \frac{(1-\zeta)\big((y\zeta)^{p-1} - (y\zeta)^{p-2} + (y\zeta)^{p-3} - \cdots - y\zeta + 1\big)}{1+y^p} = \frac{1}{1+y^p} \\ &\times \Big(\big(y^{p-1} + y^{p-2}\big)\zeta^{p-1} - (y^{p-2} + y^{p-3})\zeta^{p-2} + \cdots - (y+1)\zeta + 1 - y^{p-1}\Big).\end{aligned}$$

Из малой теоремы Ферма вытекает, что $y^p + 1 \equiv y + 1 \neq 0 \mod p$, поэтому $C_i = (-1)^i \frac{y^i + y^{i-1}}{1+y^p} \in \mathbb{Z}_p$, $(i > 0)$, $C_0 = \frac{1-y^{p-1}}{1+y^p} \in \mathbb{Z}_p$.

Интересующий нас след есть

$$\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right) \simeq \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{n} A_i \theta^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \big(A_i \operatorname{Tr}(\theta^{i-n})\big) = \big\langle A(u)B(u)\big\rangle_n,$$

где $B_s := \operatorname{Tr}\theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty} B_i u^i$. Как и ранее, имеем $B(u) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right)$, $\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right) = -\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)}$. Здесь

$$\begin{aligned}\varphi_\theta(u) &= \frac{(1+yu)^p - (1-u)^p}{(1+y)u}, \\ \varphi'_\theta(u) &= \frac{py(1+yu)^{p-1} + p(1-u)^{p-1}}{(1+y)u} - \frac{(1+yu)^p - (1-u)^p}{(1+y)u^2}, \\ \frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} &= p\frac{y(1+yu)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p} - \frac{1}{u}, \\ B(u) = (p-1) - u\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)}& \\ &= p - up\frac{y(1+yu)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p} = p\frac{(1+yu)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &= -\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\biggr)\\
&= -\biggl\langle p\frac{(1+yu)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+yu)^{p}-(1-u)^{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\biggr\rangle_n .
\end{aligned}
$$

Далее имеем

$$
\begin{aligned}
B(u) &= p\frac{(1+yu)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+yu)^{p}-(1-u)^{p}} = p\frac{(1-u)(1+yu)^{p}-(1+yu)(1-u)^{p}}{(1-u)(1+yu)\bigl((1+yu)^{p}-(1-u)^{p}\bigr)}\\
&= \frac{p}{(1-u)(1+yu)} - \frac{pu}{(1-u)(1+yu)\frac{(1+yu)^{p}-(1-u)^{p}}{(1+yu)^{p}+y(1-u)^{p}}}\\
&\simeq -\frac{pu}{[u]^{\chi_y}_{p}}\frac{1}{(1-u)(1+yu)},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{(1-u)(1+yu)} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{m}y^{m+1}}{1+y}u^{m},
$$

$$
\begin{aligned}
AB_{\chi_y}\left(x_1,\dots,x_n\right) &\simeq \biggl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_{p}}\frac{1}{(1-u)(1+yu)}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\biggr\rangle_n\\
&= \biggl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{m}y^{m+1}}{1+y}u^{m}\biggr\rangle_n .
\end{aligned}
$$

Окончательно имеем следующие формулы для функций Атьи–Ботта для χ_y-характеристики $AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right)$ (при $y \neq -1 \mod p$):

$$
\begin{aligned}
AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &= -\biggl\langle p\frac{(1+yu)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+yu)^{p}-(1-u)^{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\biggr\rangle_n ,\\
AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &\simeq \sum_{m=0}^{n}\frac{1+(-1)^{m}y^{m+1}}{1+y}\biggl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\biggr\rangle_{n-m} .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Здесь $[u]^{\chi_y}_{m} = \frac{(1+yu)^{m}-(1-u)^{m}}{(1+yu)^{m}+y(1-u)^{m}}$ — степенная система, связанная с χ_y-характеристикой. Тогда для χ_y-характеристики имеем

$$
\begin{aligned}
\chi_y(M) &\equiv \sum_{j=1}^{q} AB_{\chi_y}\bigl(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\bigr)\\
&\equiv \sum_{j=1}^{q}\sum_{m=0}^{n}\frac{1+(-1)^{m}y^{m+1}}{1+y}\biggl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k^{(j)}}}\biggr\rangle_{n-m} \mod p.
\end{aligned}
$$

Эти формулы обобщают формулы (13), (17) для рода Тодда и L-рода, которые получаются подстановкой $y = 0$ и $y = 1$ соответственно.

7. Связь с кобордизмами и уравнениями Коннера–Флойда

Здесь мы рассматриваем связь результатов раздела 5 с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда, введенными С. П. Новиковым в работах [15], [16] (аналогичные соотношения были также получены в работах [7], [12]). А именно, в этих работах было доказано, что наборы весов $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$, $x_k^{(j)} \in \mathbb{Z}/p$, являются наборами весов действия группы $\mathbb{Z}/p$ на многообразии M^{2n} тогда и только тогда, когда они связаны уравнениями Коннера–Флойда

$$\sum_{j=1}^{q} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m \simeq 0, \qquad m = 0, \dots, n-1. \tag{31}$$

Здесь $[u]_m$ — степенная система, соответствующая формальной группе геометрических кобордизмов (см. [3], [15]). Применив род Хирцебруха $\varphi : \Omega_U \to R$, мы получаем уравнения Коннера–Флойда, соответствующие роду φ:

$$\sum_{j=1}^{q} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\varphi}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m \simeq 0, \qquad m = 0, \dots, n-1, \tag{32}$$

где $[u]_m^{\varphi}$ — степенная система, соответствующая роду φ.

Кроме того, в работе [4] из теории кобордизмов была выведена следующая формула для рода Тодда:

$$\mathrm{td}(M) \simeq \sum_{j=1}^{q} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\mathrm{td}}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\mathrm{td}}_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n, \tag{33}$$

и показано, что разность между формулой

$$\mathrm{td}(M) \simeq -\sum_{j=1}^{q} \mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \zeta^{x_k^{(j)}}} \right) \simeq \sum_{j=1}^{q} \sum_{m=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\mathrm{td}}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\mathrm{td}}_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m,$$

выведенной из теоремы Атьи–Ботта (см. п. 4.2), и суммой уравнений Коннера–Флойда (32) для рода Тодда есть в точности формула (33) (здесь $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $[u]_m^{\mathrm{td}} = 1 - (1-u)^m$).

Далее мы обобщим этот результат на случай произвольного рода φ, удовлетворяющего условиям теоремы 5.2.

Теорема 7.1. *Разность между формулой из теоремы 5.2*

$$\varphi(M) \simeq -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}}\right), \qquad \theta = f_\varphi\left(-\frac{2\pi i}{p}\right),$$

и суммой уравнений Коннера–Флойда (32) для рода φ с некоторыми целыми p-адическими коэффициентами дает следующую формулу для рода φ:

$$\varphi(M) \simeq \sum_{j=1}^{q} \left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}} \right\rangle_n .$$

Доказательство. Имеем

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i = \frac{1}{\theta^n} A(\theta),$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, $A_i \in \mathbb{Z}_p$ — целые p-адические числа. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}}\right) &= \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \theta^i\right) \simeq \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{n} A_i \theta^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} A_i \operatorname{Tr} \theta^{i-n} = \left\langle \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}} B(u) \right\rangle_n , \end{aligned}$$

где $B_s := \operatorname{Tr} \theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty} B_i u^i$.

Введем теперь ряд $h(u)$:

$$h(u) = p \frac{[u]^{\varphi}_{p} - u}{B(u)[u]^{\varphi}_{p}}. \tag{34}$$

Тогда $h(u)$ — ряд с целыми p-адическими коэффициентами и свободным членом 1. Действительно,

$$h(0) = p \frac{[u]^{\varphi}_{p} - u}{B(u)[u]^{\varphi}_{p}}\bigg|_{u=0} = p \frac{1 - \frac{u}{[u]^{\varphi}_{p}}}{B(u)}\bigg|_{u=0} = \frac{p\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p-1} = 1,$$

так как $B(0) = B_0 = \operatorname{Tr} \theta^0 = p - 1$, $[u]^{\varphi}_{p} = pu + \cdots$. Из формулы (34) следует, что

$$B(u) = \frac{p}{h(u)} - \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}} \frac{1}{h(u)},$$

т.е.

$$B(u) \simeq -\frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}} \frac{1}{h(u)} = -\frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} H_i u^i\right),$$

где H_i — коэффициенты ряда $\frac{1}{h(u)}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}}\right) &\simeq -\left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}H_i u^i\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}\right\rangle_n \\
&= -\left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}\right\rangle_n - \sum_{m=0}^{n-1}H_{n-m}\left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}\right\rangle_m, \\
\varphi(M) \simeq -\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Tr}&\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}}\right) \\
\simeq \sum_{j=1}^{q}&\left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}}\right\rangle_n + \sum_{m=0}^{n-1}H_{n-m}\left(\sum_{j=1}^{q}\left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}}\right\rangle_m\right).
\end{aligned}$$

□

Пример 7.2. Рассмотрим род Тодда $\operatorname{td}(M)$. Тогда $[u]^{\operatorname{td}}_p = 1-(1-u)^p$, $B(u) = p\frac{1-(1-u)^{p-1}}{1-(1-u)^p}$ (см. п. 4.2). Таким образом,

$$h(u) = \frac{1-(1-u)^p-u}{1-(1-u)^{p-1}} = 1-u$$

(см. формулу (34)).

Пример 7.3. Рассмотрим L-род $L(M)$. Тогда

$$[u]^{L}_p = \frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{(1+u)^p+(1-u)^p}, \qquad B(u) = p\frac{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+u)^p-(1-u)^p}$$

(см. п. 4.3). Поэтому

$$\begin{aligned}
h(u) &= \frac{\frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{(1+u)^p+(1-u)^p}-u}{\frac{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+u)^p+(1-u)^p}} \\
&= \frac{(1+u)^p-(1-u)^p-u(1+u)^p-u(1-u)^p}{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}} = (1+u)(1-u).
\end{aligned}$$

Это вполне согласуется с вычислениями из пп. 4.2, 4.3.

Пример 7.4. Рассмотрим $\hat{A}$-род $\hat{A}(M)$. Тогда

$$[u]^{\hat{A}}_p = 2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\frac{u}{2}\right), \qquad B(u) = p\frac{\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}$$

(см. п. 6.1). Таким образом,

$$\begin{aligned}
h(u) &= \frac{\big(2\operatorname{sh}\big(\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big) - u\big)\operatorname{ch}\big(\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)}{2\operatorname{sh}\big((p-1)\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)} \\
&= \frac{\big(\operatorname{sh}\big(\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big) - \operatorname{sh}\big(\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)\big)\operatorname{ch}\big(\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)}{\operatorname{sh}\big((p-1)\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)} \\
&= \frac{2\operatorname{sh}\big(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)\operatorname{ch}\big(\frac{p+1}{2}\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)\operatorname{ch}\big(\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)}{2\operatorname{sh}\big(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)\operatorname{ch}\big(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)} \\
&= \frac{\operatorname{ch}\big(\frac{p+1}{2}\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)\operatorname{ch}\big(\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)}{\operatorname{ch}\big(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\big(\frac{u}{2}\big)\big)}.
\end{aligned}$$

8. Эллиптический род и приложения, связанные со специальными многочленами

Пусть M^{2n} – $2n$-мерное вещественное гладкое многообразие с комплексной структурой в стабильном касательном расслоении.

Определение 8.1. (см. [25]) *Эллиптическим родом* называется род Хирцебруха $\varphi(M^{2n}) = \Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{f(x_i)}[M^{2n}]\Big)$, для которого функция f удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

1) $f'^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, $f(0) = 0$;
2) $f(u+v) = \dfrac{f(u)f'(v) + f'(u)f(v)}{1 - \varepsilon f(u)^2 f(v)^2}$.

Пусть $L = 2\pi i(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ — решетка в $\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, $L' = L\backslash\{0\}$, $\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega\in L'}\Big(\frac{1}{(x-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big)$ — $\wp$-функция Вейерштрасса, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3 = 4\big(\wp(x) - e_1\big)\big(\wp(x) - e_2\big)\big(\wp(x) - e_3\big),$$

где $e_1 = \wp(\pi i)$, $e_2 = \wp(\pi i\tau)$, $e_3 = \wp\big(\pi i(\tau+1)\big)$ — нули производной $\wp$-функции. Функция $f(x) = 1\big/\sqrt{\wp(x) - e_1}$ (т.е. $f(x) = \operatorname{sn}(x)$ — эллиптический синус) удовлетворяет условиям из определения (8.1) для $\delta = -\frac{3}{2}e_1$, $\varepsilon = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$ (см. [25]); поэтому соответствующий род будет эллиптическим. Однако так как все числа e_1, e_2, e_3 различны, то $\varepsilon = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \neq 0$ и $\delta^2 - \varepsilon = \frac{1}{4}(e_2 - e_3)^2 \neq 0$. Вырожденные случаи соответствуют рассмотренным выше родам: вырождение $e_1 = e_2$ или $e_1 = e_3$ соответствуют $\hat{A}$-роду (действительно, $\varepsilon = 0$ и положив $\delta = -1/8$, мы получаем $f'^2 = 1 + \frac{1}{4}f^2$, т.е. $f(x) = 2\operatorname{sh}(x/2)$), а вырождение $e_2 = e_3$ соответствует L-роду (действительно, $\delta^2 - \varepsilon = 0$ и положив $\delta = \varepsilon = 1$, мы получаем $f'^2 = (1 - f^2)^2$, т.е. $f(x) = \operatorname{th} x$).

Из рассмотрения дифференциального уравнения, которому удовлетворяет $f(x)$ для эллиптического рода, ясно, что коэффициент при x^{2k} степенного ряда $f(x)$ является взвешенным однородным полиномом степени $2k$ от δ и ε с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, если считать, что $\deg\varepsilon = 4$, $\deg\delta = 2$. Таким образом, эллиптический род $\varphi(M^{2n}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x_i)}\right)[M^{2n}]$ является однородным полиномом степени $2n$ от δ и ε, т.е. φ можно рассматривать как гомоморфизм из кольца комплексных кобордизмов Ω_U в кольцо $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][\delta,\varepsilon]$ или в кольцо $\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]$, $p > 2$.

Функция $f(x)$ является эллиптической по отношению к подрешетке $\tilde{L} = 2\pi i(\mathbb{Z}\cdot 2\tau + \mathbb{Z})$ решетки L. Дивизор этой функции есть $(0) + (\pi i 2\tau) - (\pi i) - \big(\pi i(1 + 2\tau)\big)$. Имеется следующее разложение $f(x)$ в бесконечное произведение (см. [25]):

$$f(\tau,x) = 2\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^k e^{x})(1-q^k e^{-x})(1+q^k)^2}{(1+q^k e^{x})(1+q^k e^{-x})(1-q^k)^2}, \qquad q = e^{2\pi i\tau}. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь

$$\left\{L_i^{(q)} = \sum_{p=0}^{n}\Lambda^{p,i}\otimes\left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\right)\right\},$$

где $T_{\mathbb{C}}M$ — комплексификация касательного расслоения к M, $\Lambda_t E := \sum_{k=0}^{\infty}(\Lambda^k E)t^k$, $S_t E := \sum_{k=0}^{\infty}(S^k E)t^k$. $L^{(q)}$ — это степенной ряд от q, коэффициентами которого являются эллиптические комплексы расслоений над M, ассоциированных с TM. Его индекс $\operatorname{ind}(L^{(q)}) = \operatorname{sign}\big(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\big)$ есть так называемая "скрученная" сигнатура (см. [25]). Как следует из теоремы Атьи-Зингера 2.2 и леммы 2.4,

$$\operatorname{ind}(L^{(q)}) = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(x_j\frac{1+e^{-x_j}}{1-e^{-x_j}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+q^k e^{x_j})(1+q^k e^{-x_j})}{(1-q^k e^{x_j})(1-q^k e^{-x_j})}\right)\right)[M^{2n}]. \tag{36}$$

Это степенной ряд от q с целочисленными коэффициентами и свободным членом (коэффициентом при q^0) $L(M) = \operatorname{sign} M$ (см. [25]). Сравнивая это выражение с (35) и учитывая, что

$$\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^k)^2}{(1+q^k)^2} = \varepsilon^{1/4} \tag{37}$$

(см. [25]), получаем

$$\varphi(M) = \operatorname{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\right)\varepsilon^{n/4}. \tag{38}$$

Пусть теперь на многообразии M^{2n} действует оператор g, $g^p=1$, с конечным числом неподвижных точек $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_r$. В соответствии с изложенным в разделе 5, эквивариантный индекс комплекса $L^{(q)}$, $\operatorname{ind}\bigl(g,L^{(q)}\bigr)$, равен сумме функций неподвижных точек $\sigma_{L^{(q)}}(\mathcal{P}_j)$, которые получаются из формулы (36) заменой M^{2n} на $\mathcal{P}_j$, $x_1x_2\ldots x_n$ на 1 и x_k на $-\frac{2\pi i}{p}x_k^{(j)}$:

$$\sigma_{L^{(q)}}(\mathcal{P}_j)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}\right),\qquad \zeta=e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Далее, $\frac{1}{p}\sum_{l\in\mathbb{Z}/p}\operatorname{ind}\bigl(g^l,L^{(q)}\bigr)=s(q)$ — степенной ряд от q, коэффициентом которого при q^k является альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g в когомологиях комплекса, который является коэффициентом при q^k в разложении $L^{(q)}$:

$$L^{(q)}=L+2L\otimes T_{\mathbb{C}}Mq+L\otimes(2T_{\mathbb{C}}M+T_{\mathbb{C}}M\otimes T_{\mathbb{C}}M+S^2T_{\mathbb{C}}M+\Lambda^2T_{\mathbb{C}}M)q^2+\cdots,$$

где $L=\sum_{p=0}^{n}\Lambda^{p,i}$. Таким образом, $s(q)$ — ряд с целыми коэффициентами. Кроме того, $\operatorname{ind}\bigl(1,L^{(q)}\bigr)=\operatorname{sign}\bigl(M,\bigotimes_{k=1}^{\infty}S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\otimes\bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\bigr)$. Поэтому

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}\left(M,\bigotimes_{k=1}^{\infty}S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\otimes\bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\right)\\&\quad=\operatorname{ind}(1,L^{(q)})=-\sum_{l=1}^{p-1}\operatorname{ind}(g^l,L^{(q)})+ps(q)\\&\quad=-\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{lx_k^{(j)}}}{1-\zeta^{lx_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}\right)+ps(q).\end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения лежит в кольце $\mathbb{Z}\bigl[[q]\bigr]$ степенных рядов с целыми коэффициентами, а правая в его расширении — кольце $\mathbb{Z}\bigl[[q]\bigr](\zeta)$, $\zeta^p=1$. Погрузим обе части в p-адические пополнения соответствующих полей и рассмотрим теоретико-числовой след $\operatorname{Tr}:\mathbb{Q}_p\{q\}(\zeta)\to\mathbb{Q}_p\{q\}$, где $\mathbb{Q}_p\{q\}$ — поле лорановских рядов от q с рациональными p-адическими коэффициентами, а $\mathbb{Q}_p\{q\}(\zeta)$ — его алгебраическое расширение элементом ζ, $\zeta^p=1$. Тогда

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{lx_k^{(j)}}}{1-\zeta^{lx_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}\right)\\&\qquad=\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}\right)\right).\end{aligned}$$

Тем самым мы доказали

Предложение 8.2. *Имеет место следующая формула для "скрученной" сигнатуры — индекса комплекса* $\left\{L_i^{(q)} = \sum_{p=0}^{n} \Lambda^{p,i} \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \right)\right\}$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k} T_{\mathbb{C}} M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Lambda_{q^k} T_{\mathbb{C}} M\right) \\ &\equiv -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}\right)\right) \mod p\mathbb{Z}[[q]]. \end{aligned} \tag{39}$$

С учетом соотношений (37) и (38) получаем отсюда соотношение для эллиптического рода $\varphi(M)$:

$$\begin{aligned} \varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Tr}\Bigg(\prod_{k=1}^{n}\Bigg(&\frac{1}{2} \cdot \frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}} \\ &\times \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)(1-q^i)^2}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)(1+q^i)^2}\Bigg)\Bigg) \quad \mod p\mathbb{Z}_p\big[[q]\big]. \end{aligned}$$

С учетом разложения (35) функции $f(\tau, x) = \operatorname{sn} x$ в бесконечное произведение мы можем переписать последнее соотношение в виде

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right)}\right) \quad \mod p\mathbb{Z}_p\big[[q]\big], \qquad q = e^{2\pi i\tau}.$$

Однако $\varphi(M)$ — взвешенный однородный многочлен от δ, ε с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{Z}_p$, и поэтому нам бы хотелось получить соотношение для $\varphi(M)$ в кольце $\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, а не в кольце $\mathbb{Z}_p\big[[q]\big]$ ($\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$ является подкольцом $\mathbb{Z}_p\big[[q]\big]$). Введем, как и выше, $\theta = f\left(\tau, -\frac{2\pi i}{p}\right)$. Тогда $f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k}{p}\right) = [\theta]_{x_k}$, где $[\theta]_m = f\big(mf^{-1}(\theta)\big)$ — степенная система, связанная с эллиптическим родом. Заметим, что θ — алгебраический элемент над полем $\mathbb{Q}(\delta, \varepsilon)$. Действительно,

$$[\theta]_p = f\left(\tau, -\frac{2\pi i p}{p}\right) = f(\tau, -2\pi i) = 0,$$

а $[u]_p$ при нечетных p является рациональной функцией от u с коэффициентами δ, ε (например, $[u]_3 = u\frac{3-8\delta u^2+6\varepsilon u^4-\varepsilon^2 u^8}{1-6\varepsilon u^4+8\delta\varepsilon u^6-3\varepsilon^2 u^8}$; это следует из рассмотрения дифференциального уравнения и теоремы сложения для $f(\tau, x) = \operatorname{sn} x$). Числитель $[u]_p$ является многочленом от u с коэффициентами, зависящими от δ, ε, для которого θ является корнем (этот многочлен имеет степень p^2 по u, а корнями его являются значения f в точках кратности p решетки $2\pi i(\mathbb{Z}2\tau+\mathbb{Z})$, т.е. $f\left(\tau, 2\pi i\frac{2k\tau+l}{p}\right)$, $k, l\in\mathbb{Z}$, в частности $\theta, [\theta]_2, \dots, [\theta]_{p-1}$ и $[\theta]_p = 0$).

Окончательно имеем

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]_{x_k}}\right) \mod p\mathbb{Z}_p\big[[q]\big], \qquad \theta = f\left(\tau, -\frac{2\pi i}{p}\right), \tag{40}$$

причем левая и правая части являются многочленами от δ, ε.

Лемма 8.3. *Пусть $P(\delta,\varepsilon)$ — некоторый многочлен от δ, ε такой, что $P(\delta,\varepsilon)\equiv 0 \mod p\mathbb{Z}_p\big[[q]\big]$. Тогда $P(\delta,\varepsilon)\equiv 0 \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]$, т.е. все коэффициенты $P(\delta,\varepsilon)$ лежат в $p\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. Функции δ, ε являются модулярными формами веса 2 и 4 соответственно для подгруппы $\Gamma_0(2)\subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\Gamma_0(2) := \left\{A\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; A\equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod 2\right\}$, и имеют следующие разложения Фурье вблизи бесконечности (т.е. при малых $q = e^{2\pi i\tau}$):

$$\begin{aligned}
\delta &= -\frac{3}{2}e_1 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1 \mod 2}} dq^n \\
&= \frac{1}{4} + 6(q + q^2 + 4q^3 + q^4 + 6q^5 + 4q^6 + \cdots), \\
\varepsilon &= (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \\
&= \frac{1}{16} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} (-1)^d d^3 q^n = \frac{1}{16} - q + 7q^2 - 28q^3 + 71q^4 - \cdots
\end{aligned}$$

Кроме того, $\delta(0) = -\frac{1}{8}$, $\varepsilon(0) = 0$, $\delta\left(\frac{1+i}{2}\right) = 0$, $\varepsilon\left(\frac{1+i}{2}\right) \neq 0$ (см., например, [25]).

Доказательство леммы будем проводить по индукции по степени $\deg P = 2n$ многочлена P. Если $\deg P(\delta,\varepsilon) = 2$, то $P(\delta,\varepsilon) = b\delta$, поэтому $b\in p\mathbb{Z}_p$, так как $\delta\notin p\mathbb{Z}_p$. Предположим теперь, что лемма верна для всех многочленов степени $< 2k$, и пусть $\deg P(\delta,\varepsilon) = 2k$. Представим $P(\delta,\varepsilon)$ в виде $P(\delta,\varepsilon) = a\varepsilon^{k/2} + Q(\delta,\varepsilon)\varepsilon\delta + b\delta^k$. Тогда $\deg Q(\delta,\varepsilon) < 2k$, значит, $Q(\delta,\varepsilon)\equiv 0 \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]$. Подставив $\tau = \frac{1+i}{2}$ в $P(\delta,\varepsilon)$, мы получаем, что $a\varepsilon\left(\frac{1+i}{2}\right)^{k/2}$ делится на p, т.е. a делится на p. Подставив $\tau = 0$, получаем, что $\left(-\frac{1}{8}\right)^k b$ делится на p, т.е. b делится на p, и все коэффициенты $P(\delta,\varepsilon)$ лежат в $p\mathbb{Z}_p$. □

Из предыдущей леммы и соотношения (40) вытекает следующее утверждение.

Теорема 8.4. *Если на* M^{2n} *действует трансверсальный эндоморфизм* g *такой, что* $g^p = 1$*, то имеется следующая формула для эллиптического рода* $\varphi(M^{2n})$*:*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right)}\right) \mod p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon], \tag{41}$$

где в правой части стоит теоретико-числовой след $\mathbb{Q}_p(\delta,\varepsilon)(\zeta) \to \mathbb{Q}_p(\delta,\varepsilon)$.

Все дальнейшие построения из разделов 5 и 7, в частности, лемма 5.5 и теорема 7.1, без труда переносятся на случай эллиптического рода (надо лишь заменить в формулировках кольцо $\mathbb{Z}_p$ на $\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]$). Таким образом, разность между формулой (41) и суммой с коэффициентами уравнений Коннера–Флойда для эллиптического рода:

$$\sum_{j=1}^{r} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_m \equiv 0 \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon], \qquad m = 0, \dots, n-1,$$

дает следующую формулу для эллиптического рода:

$$\varphi(M^{2n}) \equiv \sum_{j=1}^{r} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]. \tag{42}$$

В последних двух формулах $[u]_m$ означает степенную систему, соответствующую эллиптическому роду.

В качестве примера применения формул для эллиптического рода рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}/p$ на $\mathbb{C}P^n$, при котором образующая g действует так (в однородных координатах): $(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \to (\lambda_0 z_0 : \lambda_1 z_1 : \dots : \lambda_n z_n)$, $\lambda_i = e^{\frac{2\pi i}{p} y_i}$. Если $y_0, \dots, y_n$ — все различные вычеты $\mathrm{mod}\, p$ (в частности, отсюда следует, что $n < p$), то на $\mathbb{C}P^n$ будет конечное число неподвижных точек относительно такого действия, а именно неподвижными будут точки $\mathcal{P}_j = \left(0, \dots, \overset{j}{\to} 1, \dots, 0\right)$, $j = \overline{0, n}$. В локальных координатах $\left(\frac{z_0}{z_j}, \frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right)$ вблизи $\mathcal{P}_j$ действие g будет линейным: $\frac{z_i}{z_j} \to \frac{\lambda_i z_i}{\lambda_j z_j} = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(y_i - y_j)\right) \frac{z_i}{z_j}$. Поэтому собственными числами матрицы Якоби отображения g в точке $\mathcal{P}_j$ будут $\exp\left(\frac{2\pi i}{p}(y_i - y_j)\right)$, $i \neq j$, а соответствующими весами будут $x_i^{(j)} = y_i - y_j$.

Рассмотрим эллиптический род φ. Как известно,

$$\varphi(\mathbb{C}P^n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_n. \tag{43}$$

Действительно, из формулы (1) следует, что $\varphi(\mathbb{C}P^n) = \left\langle g'_\varphi(u)\right\rangle_n$, где $g_\varphi(u) = f_\varphi^{-1}(u)$ — логарифм соответствующей формальной группы. Но так как $(f')^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, то $g'_\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2\delta u^2+\varepsilon u^4}}$. С другой стороны, из формулы (42) следует, что

$$\varphi(\mathbb{C}P^n) \equiv \sum_{j=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i\neq j} \frac{u}{[u]_{y_i-y_j}} \right\rangle_n \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon].$$

Таким образом, для любого набора различных вычетов $y_0, y_1, \ldots, y_n \mod p$, где $n < p$, имеем

$$\sum_{j=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i\neq j} \frac{u}{[u]_{y_i-y_j}} \right\rangle_n \equiv \left\langle \frac{1}{\sqrt{1-2\delta u^2+\varepsilon u^4}} \right\rangle_n \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon].$$

Функция $\left(1 - 2\delta u + u^2\right)^{-1/2}$ является производящей для полиномов Лежандра $P_n(\delta)$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{1-2\delta u+u^2}} = 1 + \sum_{n>0} P_n(\delta)u^n$; поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\delta u^2+\varepsilon u^4}} = 1 + \sum_{n>0} P_n\left(\frac{\delta}{k}\right)(ku^2)^n,$$

где $k^2 = \varepsilon$. Отсюда

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{1-2\delta u^2+\varepsilon u^4}} \right\rangle_{2m} &= k^m P_m\left(\frac{\delta}{k}\right), \\ \sum_{j=0}^{2m} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i\neq j} \frac{u}{[u]_{y_i-y_j}} \right\rangle_{2m} &\equiv k^m P_m\left(\frac{\delta}{k}\right) \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]. \end{aligned} \tag{44}$$

В простейшем случае $2m = n = p-1$ набор $y_0 - y_j, y_1 - y_j, \ldots, \widehat{y_j - y_j}, \ldots, y_{p-1} - y_j$ представляет собой полный набор ненулевых вычетов $1, 2, \ldots, p-1$ (так как все y_i различны); поэтому все слагаемые в левой части последней формулы равны и мы имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p^2u^p}{u[u]_2[u]_3\cdots[u]_{p-1}[u]_p} \right\rangle_{p-1} &\equiv \left\langle \frac{1}{\sqrt{1-2\delta u^2+\varepsilon u^4}} \right\rangle_{p-1} \\ &= k^{\frac{p-1}{2}} P_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\delta}{k}\right) \mod p\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]. \end{aligned} \tag{45}$$

Это соотношение можно вывести также из известного сравнения

$$[u]_p \equiv P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \cdots \mod p\mathbb{Z}_p[\delta]$$

(см. [26]), где мы положили для простоты $k = 1$, а многоточие обозначает члены более высокого порядка. Действительно, запишем последнее сравнение в виде

$$[u]_p = pu(1 + b_1u + \cdots + b_{p-1}u^{p-1}) + P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \cdots,$$

где $b_1, \dots, b_{p-1} \in \mathbb{Z}[\delta]$. Отсюда

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{p^2 u^p}{u[u]_2 \cdots [u]_{p-1}[u]_p} \right\rangle_{p-1} \\
&\quad = \left\langle \frac{p^2}{u(2u + \cdots) \dots \big((p-1)u + \cdots\big)} \right. \\
&\qquad \times \left. \frac{u^p}{\big(pu(1 + b_1 u + \cdots + b_{p-1}u^{p-1}) + P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \cdots\big)} \right\rangle_{p-1} \\
&\quad = \left\langle \frac{1}{(p-1)!} \frac{p^2}{p(1 + c_1 u + \cdots + c_{p-1}u^{p-1}) + P_{(p-1)/2}(\delta)u^{p-1} + \cdots} \right\rangle_{p-1} \\
&\quad = \frac{1}{(p-1)!} \left\langle \frac{p}{1 + c_1 u + \cdots + c_{p-2}u^{p-2} + \big(c_{p-1} + P_{(p-1)/2}(\delta)/p\big)u^{p-1}} \right\rangle_{p-1},
\end{aligned}$$

где $c_1, \dots, c_{p-1}$ снова лежат в $\mathbb{Z}[\delta]$. При вычислении последнего выражения $\operatorname{mod} p$ получим

$$\left\langle \frac{p^2 u^p}{u[u]_2[u]_3 \cdots [u]_{p-1}[u]_p} \right\rangle_{p-1} \equiv -\frac{1}{(p-1)!} P_{(p-1)/2}(\delta) \equiv P_{(p-1)/2}(\delta) \mod p\mathbb{Z}_p[\delta],$$

так как $(p-1)! \equiv -1 \mod p$, что и требовалось доказать.

9. Действия группы $\mathbb{Z}/p$ с неподвижными подмногообразиями, имеющими тривиальное нормальное расслоение (простые действия)

Определение 9.1. Назовем действие группы $\mathbb{Z}/p$ на стабильно комплексном многообразии M *простым*, если множество неподвижных точек представляет собой объединение конечного числа подмногообразий, имеющих тривиальное нормальное расслоение, и *сильно простым*, если кроме того наборы весов (собственных чисел дифференциала отображения, соответствующего образующей $g \in \mathbb{Z}/p$, в неподвижных точках) одинаковы для всех неподвижных подмногообразий одной размерности.

Понятие сильно простого действия нам понадобится в главе 2, а здесь нас будут интересовать простые действия. Пусть на M задано простое действие $\mathbb{Z}/p$ и $M^g = \bigcup_\nu M^g_\nu$ — множество неподвижных точек, где подмногообразия M^g_ν имеют тривиальные нормальные расслоения в M.

Рассмотрим некоторый род Хирцебруха φ, вычисляемый как индекс эллиптического комплекса E_φ расслоений, ассоциированных с касательным расслоением TM.

Пусть как и выше, $c(TM) = (1 + z_1)\dots(1 + z_n)$, где z_i — первые классы Чженя “виртуальных” одномерных, дающих в сумме TM.

Пусть $Y = M_k^g$ — одно из неподвижных подмногообразий действия g. Согласно формулам (20) из раздела 5 имеем

$$TM|_Y = \bigoplus_j N_{\lambda_j}, \qquad c(N_{\lambda_j}) = \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \Bigl(1 + z_i^{(\lambda_j)}\Bigr),$$

$$c(TM|_Y) = \prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \Bigl(1 + z_i^{(\lambda_j)}\Bigr) = \prod_{i=1}^{n} (1 + z_i),$$

где N_{λ_j} — подрасслоение $TM|_Y$, соответствующее собственному значению λ_j дифференциала g; $\lambda_j^p = 1$, т.е. $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p}$, $N_1 = TY$ — касательное расслоение к Y, $d_{\lambda_j} = \dim N_{\lambda_j}$. В соответствии с результатами Атьи–Зингера [1], изложенными в разделе 5, эквивариантный индекс $\mathrm{ind}(g, E_\varphi)$ комплекса E_φ вычисляется по формуле $\mathrm{ind}(g, E_\varphi) = \sum_\nu \sigma(M_\nu^g)$, и имеется следующий “рецепт” для вычисления функций неподвижных многообразий $\sigma(M_\nu^g)$, входящих в сумму: для вычисления функции $\sigma(Y)$ надо в формуле (21) для индекса E_φ заменить M на Y и $e^{z_i^{(\lambda_j)}}$ на $\lambda_j^{-1} e^{z_i^{(\lambda_j)}}$, или, с учетом $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p}$, мы должны заменить $z_i^{(\lambda_j)}$ на $z_i^{(\lambda_j)} - 2\pi i x_j/p$.

Так как $\mathrm{ind}(E_\varphi) = \varphi(M)$, то мы имеем

$$\mathrm{ind}(E_\varphi) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{z_i}{f(z_i)}\right)[M] = \left(\prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \frac{z_i^{(\lambda_j)}}{f\bigl(z_i^{(\lambda_j)}\bigr)}\right)[M].$$

Поэтому наш “рецепт” дает в этом случае

$$\sigma(Y) = \left(\prod_{\lambda_j \neq 1} \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \frac{1}{f\bigl(z_i^{(\lambda_j)} - 2\pi i x_j/p\bigr)} \prod_{i=1}^{d_1} \frac{z_i^{(1)}}{f\bigl(z_i^{(1)}\bigr)}\right)[Y],$$

так как от $c_n(X) = \prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} z_i^{(\lambda_j)}$ остается лишь $c_n(Y) = \prod_{i=1}^{d_1} z_i^{(1)}$, и все веса x_k, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$, равны нулю. Далее, так как Y имеет тривиальное нормальное расслоение в M, то $z_i^{(\lambda_j)} = 0$ при $\lambda_j \neq 1$, и мы имеем $\sigma(Y) = \prod_j \frac{1}{f(-2\pi i x_j/p)} \varphi(Y)$, где x_j — веса, соответствующие всем неединичным собственным значениям $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p} \neq 1$; x_j — ненулевые вычеты $\mathrm{mod}\, p$. Окончательно для эквивариантного индекса имеем соотношение

$$\mathrm{ind}(g, E_\varphi) = \sum_\nu \left(\prod_j \frac{1}{f\bigl(-2\pi i x_j^{(\nu)}\bigr)} \varphi(M_\nu^g)\right).$$

Теорема 5.2 и предложение 5.4 естественным образом обобщаются на случай простых действий, и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 9.2. *Пусть* $\varphi(M)$ *— род Хирцебруха, вычисляемый как индекс некоторого эллиптического комплекса расслоений, ассоциированных с* TM*. Тогда имеет место следующая формула для* $\varphi(M)$*:*

$$\begin{aligned}\varphi(M) &\equiv -\sum_{\nu}\operatorname{Tr}\left(\prod_{j}\frac{1}{f\left(-2\pi i x_j^{(\nu)}/p\right)}\right)\varphi(M_{\nu}^{g})\\ &= -\sum_{\nu}\operatorname{Tr}\left(\prod_{j}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_j^{\nu}}}\right)\varphi(M_{\nu}^{g}) \mod p,\end{aligned}$$

где $M^g = \bigcup_{\nu} M_{\nu}^{g}$ *— множество неподвижных точек,* $\theta = f_{\varphi}(-2\pi i/p)$*,* $[\theta]_k$ *— степенная система,* $\operatorname{Tr}: \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}) \to \mathbb{Q}$ *— теоретико-числовой след (если род* φ *принимает значения не в кольце* $\mathbb{Z}$*, а в другом кольце* R*, то* $\mathbb{Q}$ *заменяется на соответствующее поле частных).*

Глава 2.

Описание множества классов кобордизмов многообразий, несущих простое действие $\mathbb{Z}/p$

В этой главе мы даем полное описание множества классов кобордизма $\sigma \in \Omega_U$, в которых содержатся многообразия, несущие действие группы $\mathbb{Z}/p$, для которого все неподвижные подмногообразия имеют тривиальное нормальное расслоение. Это множество является Ω_U-модулем, и мы описываем его в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов (теорема 11.1) и в терминах характеристических чисел (теорема 12.2, следствие 12.3). Данная классификационная проблема была решена в частном случае Коннером и Флойдом, и поставлена в полной общности Бухштабером и Новиковым. Мы также устанавливаем взаимосвязь с результатами Коннера и Флойда и с теоремой Стонга–Хаттори о выделении наборов целых чисел, являющихся характеристическими числами стабильно комплексных многообразий.

10. Кольцо $U^*(\mathbb{Z}/p)$ эквивариантных кобордизмов со свободным действием $\mathbb{Z}/p$ и уравнения Коннера–Флойда

Пусть на стабильно комплексном многообразии M^{2n} действует преобразование g простого периода $p > 2$ (т.е. $g^p = \mathrm{id}$) так, что множество неподвижных точек представляет собой объединение подмногообразий с тривиальными нормальными расслоениями (например, лишь изолированные неподвижные точки), т.е. задано простое $\mathbb{Z}/p$-действие. Пусть множество неподвижных точек преобразования g представляет собой объединение неподвижных подмногообразий классов $\lambda_j \in \Omega_U$, имеющих веса

$(x_k^{(j)}) \in (\mathbb{Z}/p)^*$ (т.е. неединичные собственные числа дифференциала отображения g в неподвижных точках) в тривиальных нормальных расслоениях к ним. Эти данные определяют класс кобордизма многообразия M^{2n} в Ω_U с точностью до элементов из $p\Omega_U$ (см. [4]). Это следует из того, что класс кобордизма любого многообразия со свободным действием $\mathbb{Z}/p$ (т.е. без неподвижных точек) лежит в $p\Omega_U$, и наоборот, любой класс кобордизмов из $p\Omega_U$ очевидно содержит многообразие, допускающее действие $\mathbb{Z}/p$ без неподвижных точек (например, действие, переставляющее компоненты связности).

Каждому неподвижному подмногообразию класса $\lambda_j \in \Omega_U$ с набором весов $(x_1^{(j)}, \ldots, x_{m_j}^{(j)})$, $2m_j + \dim \lambda_j = 2n$ соответствует *инвариант Коннера-Флойда*

$$\alpha_{2m_j-1}(x_1^{(j)}, \ldots, x_{m_j}^{(j)}) \in U_{2m_j-1}(B\mathbb{Z}/p)$$

(см. [15]). Чтобы определить его, заметим, что модуль бордизмов $U_*(B\mathbb{Z}/p)$ изоморфен модулю $U_*(\mathbb{Z}/p)$ эквивариантных бордизмов со свободным действием $\mathbb{Z}/p$ (также называемому модулем главных $\mathbb{Z}/p$-эквивариантных бордизмов, см. [8]). Этот изоморфизм переводит класс эквивариантных бордизмов многообразия N со свободным действием $\mathbb{Z}/p$ в класс бордизмов из $U_*(B\mathbb{Z}/p)$, задаваемый классифицирующим отображением $N/(\mathbb{Z}/p) \to B\mathbb{Z}/p$. Тогда $\alpha_{2m_j-1}(x_1^{(j)}, \ldots, x_{m_j}^{(j)})$ есть класс эквивариантных бордизмов единичной сферы в слое (тривиального) нормального расслоения к λ_j. Если мы зададим единичную сферу S^{2m_j-1} как

$$\Big\{(z_1, \ldots, z_{m_j}) \in \mathbb{C}^{m_j} \;\Big|\; |z_1|^2 + \ldots + |z_{m_j}|^2 = 1\Big\},$$

то (свободное) действие $\mathbb{Z}/p$ задается следующим образом

$$g : (z_1, \ldots, z_{m_j}) \to (\exp(2\pi i x_1^{(j)}/p) z_1, \ldots, \exp(2\pi i x_{m_j}^{(j)}/p) z_{m_j}).$$

Кольцо кобордизмов $U^*(B\mathbb{Z}/p)$ имеет вид $U^*(B\mathbb{Z}/p) = \Omega_U[[u]]/[u]_p = 0$, где $[u]_p$ — p-я степень в формальной группе геометрических кобордизмов (см. [4]). Из того, что $D(\alpha_i(1, \ldots, 1)) = u^{n-i}$, где D — оператор двойственности Пуанкаре-Атья между $U_*(L_p^{2n-1})$ и $U^*(L_p^{2n-1})$, следует, что Ω_U-модуль $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ порождается элементами $\alpha_{2i-1}(1, \ldots, 1)$ с соотношениями

$$0 = \frac{[u]_p}{u} \cap \alpha_{2i-1}(1, \ldots, 1), \tag{1}$$

где $\cap$ — оператор "высечения" Чеха, $u^k \cap \alpha_{2i-1}(1, \ldots, 1) = \alpha_{2(i-k)-1}(1, \ldots, 1)$.

В [16] было доказано, что

$$\alpha_{2k-1}(x_1, \ldots, x_k) = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{u}{[u]_{x_j}}\right) \cap \alpha_{2k-1}(1, \ldots, 1). \tag{2}$$

Расширив систему образующих модуля $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ элементами $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k)$ для $x_j \neq 1 \mod p$ и добавив к соотношениям (1) соотношения (2), мы получим $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-свободную резольвенту модуля $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ (здесь $\mathbb{Z}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, которое можно рассматривать как кольцо p-адических чисел):

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p) \longrightarrow 0,$$

где F_0 — свободный $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуль, натянутый на образующие $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k)$, а F_1 — свободный $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуль соотношений, натянутый на соотношения

$$a(x_1, \dots, x_k) = \alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k) - \Bigl(\prod_{j=1}^{k} \frac{u}{[u]_{x_j}}\Bigr) \cap \alpha_{2k-1}(1, \dots, 1)$$
$$a_k = \frac{[u]_p}{u} \cap \alpha_{2k-1}(1, \dots, 1).$$

Таким образом, каждое простое действие $\mathbb{Z}/p$ на M^{2n} задает соотношение между элементами $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k)$ в $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$. В силу определения элементов $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ как классов бордизмов многообразий со свободным действием группы $\mathbb{Z}/p$, верно и обратное: каждое соотношение в $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ вида

$$\sum_j \lambda_j \alpha_{2m_j-1}(x_1^{(j)}, \dots x_{m_j}^{(j)}) = 0, \quad \lambda_j \in \Omega_U, \quad 2m_j + \dim \lambda_j = 2n$$

реализуется на некотором многообразии M^{2n} с простым действием $\mathbb{Z}/p$, причем класс кобордизма M^{2n} в Ω_U определен однозначно с точностью до элементов $p\Omega_U$. Это многообразие M^{2n} получается из "пленки" со свободным действием $\mathbb{Z}/p$, натянутой на объединение многообразий $\lambda_j \times S^{2m_j-1}$, соответствующей соотношению в $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$, путем приклеивания $\lambda_j \times D^{2m_j}$. Таким образом, определен "гомоморфизм реализации"

$$\Phi : F_1 \to \Omega_U / p\Omega_U = \Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p,$$

ставящий в соответствие соотношению между $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k) \in \widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ класс кобордизмов $\mod p$ многообразия, на котором это соотношение реализуется в указанном выше смысле. В силу результатов Коннера-Флойда (см. [8], а также [7]) для базисных соотношений из F_1 имеем:

$$\Phi\bigl(a(x_1, \dots, x_k)\bigr) = \Bigl\langle \prod_{i=1}^{k} \frac{u}{[u]_{x_i}} \Bigr\rangle_k \mod p \in \Omega_U / p\Omega_U,$$
$$\Phi(a_k) = -\Bigl\langle \frac{[u]_p}{u} \Bigr\rangle_k \mod p \in \Omega_U / p\Omega_U,$$

где $\langle\cdot\rangle_k$ обозначает коэффициент при u^k. Отсюда следует, что $\operatorname{Im}\Phi = \widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}/p$, где $\widetilde{\Lambda}(1) = \Lambda^+(1)\cdot\Omega_U$ — Ω_U-модуль, натянутый на положительную часть $\Lambda^+(1)$ кольца коэффициентов $\Lambda(1)$ степенной системы $[u]_k$. Гомоморфизм Φ поднимается до гомоморфизмов $\Phi : F_1 \to \widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}_p$, или $\Phi : F_1 \to \widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_p$, где $\widetilde{\Lambda}_p(1)$ — Ω_U-модуль, натянутый на $\Lambda^+(1)$ и p.

Таким образом, задача об описании множества классов кобордизмов многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ сводится к описанию $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}/p$ или $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_p$-модулей $\widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}_p$, $\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_p$. Эти модули являются идеалами в $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}/p$ и $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_p$ соответственно.

11. Образующие $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}/p$ и $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_p$-модулей $\widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}_p$, $\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_p$.

Пусть

$$[u]_k = ku + \sum_{n\geqslant 1}\alpha_n^{(k)}u^{n+1},$$

$\alpha_n^{(k)}\in\Omega_U^{-2n}$ — коэффициенты степенной системы.

Теорема 11.1. *В качестве образующих $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}_p$ можно взять следующие коэффициенты $\alpha_n\in\Omega_U^{-2n}$:*

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1,\\ \alpha_n^{(p)}, & \text{если } n \text{ делится на } p-1,\end{cases} \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где p_1 — простой первообразный корень $\mod p$ (образующая циклической группы $(\mathbb{Z}/p)^*$).

Замечание. Из теоремы Дирихле следует, что среди всех первообразных корней $\mod p$ имеются простые числа.

Доказательство теоремы 11.1. Рассмотрим вначале коэффициенты $\alpha_n^{(r)}$, где r не является простым. Пусть $r = p_1q$, где p_1 — простое число. Т.к. $[x]_r = [[x]_{p_1}]_q$, то имеем:

$$rx + \sum_n \alpha_n^{(r)}x^{n+1} = q[x]_{p_1} + \sum_n \alpha_n^{(q)}([x]_{p_1})^{n+1} =$$

$$= p_1qx + q\sum_n \alpha_n^{(p_1)}x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(q)}\left(p_1x + \sum_m \alpha_m^{(p_1)}x^{m+1}\right)^{n+1}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\alpha_n^{(r)} = P(\alpha_1^{(p_1)}, \ldots, \alpha_n^{(p_1)}, \alpha_1^{(q)}, \ldots, \alpha_n^{(q)}),$$

где P — некоторый полином с целыми коэффициентами (без свободного члена). Отсюда получаем представление

$$\alpha_n^{(r)} = \lambda_1\alpha_1^{(p_1)} + \ldots + \lambda_n\alpha_n^{(p_1)} + \mu_1\alpha_1^{(q)} + \ldots + \mu_n\alpha_n^{(q)}, \quad \lambda_i, \mu_i \in \Omega_U.$$

Таким образом, коэффициенты $\alpha_n^{(r)}$, $r = p_1 q$ можно исключить из системы образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$. Если q снова не является простым, то мы повторяем эту процедуру и т.д. В итоге получаем систему образующих модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, состоящую лишь из коэффициентов $\alpha_n^{(p_1)}$ с простыми p_1. Среди всех простых p_1 имеется выделенное простое число p. Далее мы покажем, что эту систему образующих можно сузить до системы (3).

Вначале заметим, что в размерности 1 (т.е. в Ω_U^{-2}) в качестве образующей $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ можно взять $\alpha_1^{(p_1)}$, где p_1 — простой первообразный корень $\mod p$. Действительно, пусть p_2 — любое простое число. Тогда $[[x]_{p_2}]_{p_1} = [[x]_{p_1}]_{p_2}$, т.е.

$$p_1p_2x + p_1\sum_n \alpha_n^{(p_2)}x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(p_1)}\left(p_2x + \sum_m \alpha_m^{(p_2)}x^{m+1}\right)^{n+1} =$$

$$p_2p_1x + p_2\sum_n \alpha_n^{(p_1)}x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(p_2)}\left(p_1x + \sum_m \alpha_m^{(p_1)}x^{m+1}\right)^{n+1}. \quad (4)$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, получаем $p_1\alpha_1^{(p_2)} + p_2^2\alpha_1^{(p_1)} = p_2\alpha_1^{(p_1)} + p_1^2\alpha_1^{(p_2)}$, т.е. $(p_1 - p_1^2)\alpha_1^{(p_2)} = (p_2 - p_2^2)\alpha_1^{(p_1)}$. Т.к. p_1 — первообразный корень, то $p_1 - p_1^2$ обратимо в $\mathbb{Z}_p$, значит $\alpha_1^{(p_2)} = \lambda\alpha_1^{(p_1)}$, где $\lambda \in \mathbb{Z}_p \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$, т.е. для любого p_2 $\alpha_1^{(p_2)}$ выражается через $\alpha_1^{(p_1)}$.

Рассмотрим теперь систему (3) коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ (т.е. α_i — коэффициент при x^{i+1} в $[x]_{p_1}$, если i не делится на $p-1$ и коэффициент при x^{i+1} в $[x]_p$, если i делится на $p-1$). Предположим, что мы доказали, что эта система является системой образующих $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ до размерности $n-1$, т.е. для любого $k \leqslant n-1$ и любого q имеется представление

$$\alpha_k^{(q)} = \lambda_1^{(q)}\alpha_1 + \ldots + \lambda_k^{(q)}\alpha_k,$$

где $\lambda_i^{(q)} \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$. Докажем,что такое представление имеется и для $\alpha_n^{(q)}$. Из сказанного выше следует, что достаточно ограничиться простыми q.

Предположим вначале, что n не делится на $p-1$, т.е. $\alpha_n = \alpha_n^{(p_1)}$, где p_1 — первообразный корень $\mod p$, и пусть p_2 — произвольное простое число. Приравняем в (4) коэффициенты при x^{n+1}:

$$p_1\alpha_n^{(p_2)} + p_2^{n+1}\alpha_n^{(p_1)} + \mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_{n-1}\alpha_{n-1} = p_2\alpha_n^{(p_1)} + p_1^{n+1}\alpha_n^{(p_2)} + \nu_1\alpha_1 + \ldots + \nu_{n-1}\alpha_{n-1}$$

(мы разложили все коэффициенты $\alpha_k^{(p_1)}, \alpha_k^{(p_2)}$, $k < n$ по образующим $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, т.е. $\mu_i, \nu_i \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$). Отсюда

$$p_1(1-p_1^n)\alpha_n^{(p_2)} = (p_2 - p_2^{n+1})\alpha_n^{(p_1)} + (\nu_1 - \mu_1)\alpha_1 + \ldots + (\nu_{n-1} - \mu_{n-1})\alpha_{n-1}. \qquad (5)$$

Т.к. p_1 — первообразный корень $\mod p$ и n не делится на $p-1$, то $p_1(1-p_1^n)$ обратимо в $\mathbb{Z}_p$. Тогда из (5) мы получаем, что $\alpha_n^{(p_2)}$ является линейной комбинацией $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ и $\alpha_n = \alpha_n^{(p_1)}$ с коэффициентами из $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$.

Пусть теперь n делится на $p-1$. Сделаем вначале несколько предварительных замечаний. Известно (Милнор, Новиков), что Ω_U является кольцом полиномов: $\Omega_U = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, $a_n \in \Omega_U^{-2n}$. Кольцо Ω_U является кольцом коэффициентов (универсальной) формальной группы геометрических кобордизмов, а кольцом коэффициентов логарифма этой формальной группы является кольцо $\Omega_U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]$, $b_n = \frac{\mathbb{C}P_n}{n+1}$ (напомним, что этот логарифм имеет вид $g(u) = u + \sum_n \frac{\mathbb{C}P_n}{n+1}u^{n+1}$). При этом в кольцах Ω_U, $\Omega_U(\mathbb{Z})$, можно выбрать мультипликативные образующие $\{a_i^*\}$, $\{b_i^*\}$ так, что вложение $\iota_0 : \Omega_U \to \Omega_U(\mathbb{Z})$ задается следующим образом:

$$\iota_0(a_i^*) = \begin{cases} p \cdot b_i^*, & \text{если } i = p^k - 1 \text{ для некоторого } k, \\ \quad b_i^* & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть B^+ — положительная часть кольца $B = \Omega_U(\mathbb{Z})$. Тогда $(B^+)^2$ — разложимые в произведение двух нетривиальных сомножителей элементы в $\Omega_U(\mathbb{Z})$. При вложении $\iota_0 : \Omega_U \to \Omega_U(\mathbb{Z})$ коэффициенты $\alpha_n^{(p)}$ ряда $[x]_p$ переходят в элементы $(p - p^{n+1})b_n + ((B^+)^2)$. Таким образом, коэффициенты $\alpha_{p^k-1}^{(p)}$ можно взять в качестве мультипликативных образующих кольца $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ в размерностях $p^k - 1$. В остальных размерностях $l \neq p^k - 1$ имеем $\alpha_l^{(p)} \in p\Omega_U$, т.е. $\alpha_l^{(p)}$ делится на p в Ω_U.

Вернемся теперь доказательству. Перепишем соотношение (4), подставляя p вместо p_1:

$$pp_2x + p\sum_m \alpha_m^{(p_2)}x^{m+1} + \sum_m \alpha_m^{(p)}(p_2x + \alpha_1^{(p_2)}x^2 + \alpha_2^{(p_2)}x^3 + \ldots)^{m+1} =$$
$$= p_2px + p_2\sum_m \alpha_m^{(p)}x^{m+1} + \sum_m \alpha_m^{(p_2)}(px + \alpha_1^{(p)}x^2 + \alpha_2^{(p)}x^3 + \ldots)^{m+1}.$$

Приравняем коэффициенты при x^{n+1}:

$$p\alpha_n^{(p_2)} + p_2^{n+1}\alpha_n^{(p)} + \left\langle \sum_{m<n} \alpha_m^{(p)}(p_2x + \alpha_1^{(p_2)}x^2 + \alpha_2^{(p_2)}x^3 + \dots)^{m+1} \right\rangle_{n+1} =$$

$$= p_2\alpha_n^{(p)} + p^{n+1}\alpha_n^{(p_2)} + \left\langle \sum_{m<n} \alpha_m^{(p_2)}(px + \alpha_1^{(p)}x^2 + \alpha_2^{(p)}x^3 + \dots)^{m+1} \right\rangle_{n+1},$$

где $\langle\cdot\rangle_{n+1}$ означает коэффициент при x^{n+1}. Разложим коэффициенты $\alpha_m^{(p_2)}$ при $m < n$ по образующим $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Т.к. $\alpha_m^{(p)} \in p\Omega_U$ при $m \neq p^k - 1$, то мы можем переписать последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} p(1-p^n)\alpha_n^{(p_2)} &= p_2(1-p_2^n)\alpha_n^{(p)} + p(\mu_1\alpha_1 + \dots \mu_n\alpha_n) - \\ &- \left\langle \sum_{k:p^k-1<n} \alpha_{p^k-1}^{(p)} \left(p_2x + \alpha_1^{(p_2)}x^2 + \alpha_2^{(p_2)}x^3 + \dots\right)^{p^k} \right\rangle_{n+1} + \\ &+ \left\langle \sum_{m<n} \alpha_m^{(p_2)} \left(\alpha_{p-1}^{(p)}x^p + \alpha_{p^2-1}^{(p)}x^{p^2} + \dots + \alpha_{p^k-1}^{(p)}x^{p^k} + \dots\right)^{m+1} \right\rangle_{n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последние два слагаемых мы можем записать в виде $\alpha_{p-1}^{(p)}\nu_1 + \alpha_{p^2-1}^{(p)}\nu_2 + \dots + \alpha_{p^k-1}^{(p)}\nu_k$, где $p^k - 1 < n$, $\nu_i \in \Omega_U$. Остальные члены предыдущего соотношения лежат в $p\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ (т.е. делятся на p). Коэффициенты $\alpha_{p^i-1}^{(p)}$ являются полиномиальными образующими $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ в размерностях $p^i - 1$. Отсюда следует, что и $\nu_i \in p\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$, т.е. ν_i делятся на p в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$. Пусть $\nu_i = p\kappa_i$, $\kappa_i \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$. Тогда (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(1-p^n)\alpha_n^{(p_2)} &= p_2(1-p_2^n)\alpha_n^{(p)} + p(\mu_1\alpha_1 + \dots + \mu_n\alpha_n) + \\ &+ p(\alpha_{p-1}^{(p)}\kappa_1 + \alpha_{p^2-1}^{(p)}\kappa_2 + \dots + \alpha_{p^k-1}^{(p)}\kappa_k), \end{aligned}$$

где $p^k - 1 < n$, а $\mu_i, \kappa_i \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$. Так как n делится на $p-1$, то $1 - p_2^n$ делится на p (при $p_2 \neq p$). Таким образом, все соотношение делится на p. Разделим его на p с учетом того, что $1 - p^n$ обратимо в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ и получим, что $\alpha_n^{(p_2)}$ представляется в виде

$$\alpha_n^{(p_2)} = \frac{p_2(1-p_2^n)}{p(1-p^n)}\alpha_n^{(p)} + \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Полагая

$$\lambda_n = \frac{p_2(1-p_2^n)}{p(1-p^n)} \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p,$$

получим искомое представление и для $\alpha_n^{(p_2)}$ (так как у нас $\alpha_n = \alpha_n^{(p)}$). ☐

Следствие 11.2. *В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ можно взять следующие:*

$$\alpha_n = \begin{cases} p, & \text{если } n = 0, \\ \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1, \ p_1 \text{ – первообразный корень} \quad \bmod p, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1, \ k = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$ можно взять

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1, \ k = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

В остальных размерностях образующих нет.

Доказательство. Это следует из того, что для системы образующих $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, построенной в теореме 11.1, при n кратных $p-1$, но $n \neq p^k - 1$, элементы α_n делятся на p, т.е. лежат в $p\Omega_U$, а остальные α_n не лежат в $p\Omega_U$. ☐

12. Описание множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ и некоторые следствия

В этом разделе мы, используя описание структуры $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ мы докажем результат, аналогичный теореме Стонга и Хаттори — опишем множество классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ в терминах характеристических чисел.

Как было указано в работе [4], гомоморфизм $\Phi : F_1 \to \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ продолжается до гомоморфизма $\gamma_p : F_0 \to \Omega_U(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$, причем имеет место формула

$$\gamma_p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left\langle \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{u}{[u]_{x_j}} \right) \frac{pu}{[u]_p} \right\rangle_k ,$$

где $\gamma_p(x_1, x_2, \dots, x_k) := \gamma_p(\alpha_{2k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k))$, $\alpha_{2k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k) \in F_0$. В частности,

$$\gamma_p(1, \dots, 1) = \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \right\rangle_k .$$

Таким образом для (простого) действия группы $\mathbb{Z}/p$ на M^{2n} с неподвижными подмногообразиями классов $\lambda_j \in \Omega_U$, имеющими веса $(x_k^{(j)}) \in (\mathbb{Z}/p)^*$ в тривиальных нормальных расслоениях к ним, имеет место соотношение

$$[M^{2n}] \equiv \sum_j \lambda_j \gamma_p(x_1^{(j)}, \dots , x_{m_j}^{(j)}) \mod p\Omega_U \tag{7}$$

Здесь возникает вопрос, аналогичный проблеме Милнора-Хирцебруха (ответ на которую дает теорема Стонга-Хаттори [17], [8]), поставленный в работе [4]: какие из элементов вида

$$\sum_j \lambda_j \gamma_p(x_1^{(j)}, \dots , x_{m_j}^{(j)}) \ \in\ \Omega_U(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$$

представляют собой классы кобордизма многообразий, несущих простое действие $\mathbb{Z}/p$? Ответ на этот вопрос дает теорема 12.2. Вначале дадим следующее

Определение 12.1. Пусть $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $k_i \geqslant 0$ — разбиение числа $n = \|\omega\| = \sum_i k_i \cdot i$. Назовем разбиение ω *кратным* $p-1$, если все i, для которых $k_i \neq 0$, кратны $p-1$ (естественно, такие разбиения существуют только для n, кратных $p-1$). Назовем разбиение ω *не p-адическим*, если для любого $j > 0$ $k_{p^j-1} = 0$ (т.е. разбиение не содержит слагаемых вида p^j-1).

Теорема 12.2. *Элемент $\sigma \in \Omega_U(\mathbb{Z})^{-2n} \otimes \mathbb{Z}_p$ лежит в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуле $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ и, таким образом, является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда все характеристические числа из K-теории $s_\omega(\sigma)$, $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\|\omega\| = \sum_i k_i \cdot i \leqslant n$ лежат в $\mathbb{Z}_p$ и для всех разбиений ω, кратных $p-1$ когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$ делятся на p.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\sigma \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$. Заметим, что система образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, описанная в следствии 11.2 обладает тем свойством, что каждый элемент $\alpha_j \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ из системы образующих является также полиномиальной образующей $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ в размерности $-2j$. Дополним эту систему образующих полиномиальными образующими α_i в недостающих размерностях $-2i$ таких, что i делится на $p-1$, но $i \neq p^k - 1$. Таким образом $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$.

Так как $\sigma \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$, то все K-характеристические числа $s_\omega(\sigma)$ лежат в $\mathbb{Z}_p$.

Если n не делится на $p-1$, то разбиений ω, кратных $p-1$ не существует.

Пусть $n = m(p-1)$. Представим σ как однородный многочлен от α_i степени $-2m(p-1)$:

$$\sigma = \sum_{\|\omega\|=m(p-1)} r_\omega \alpha_\omega = r_{m(p-1)} \alpha_{m(p-1)} + \dots , \tag{8}$$

где $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\alpha_\omega = \alpha_1^{k_1} \cdot \alpha_2^{k_2} \cdot \dots$. Из описания структуры $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ (см. следствие 11.2) следует, что $\sigma \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда для всех не

p-адических разбиений ω, кратных $p-1$ коэффициенты r_ω в разложении (8) делятся на p.

Рассмотрим характер Чженя–Дольда в кобордизмах (см. [3]):

$$\mathrm{ch}_U(u) = t + \sum_{i \geqslant 1} \beta_i t^{i+1},$$

где $u = c_1^U(\zeta) \in U^2(\mathbb{C}P(\infty))$ — первый класс Чженя универсального одномерного расслоения в теории кобордизмов, $t = c_1^H(\zeta) \in H^2(\mathbb{C}P(\infty))$ — первый класс Чженя универсального одномерного расслоения в когомологиях, а коэффициенты β_i лежат в $\Omega_U(\mathbb{Z})$. Тогда для любого $\sigma \in \Omega_U^{-2n}$ имеем:

$$\sigma = \sum_{\|\omega\|=n} s_\omega(\sigma)\beta_\omega \quad \text{и} \quad B = \Omega_U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \dots].$$

Кроме того

$$\alpha_i = \begin{cases} e_i \cdot \beta_i + ((B^+)^2) & \text{для } i \neq p^k - 1, \\ pe_i \cdot \beta_i + ((B^+)^2) & \text{для } i = p^k - 1, \end{cases}$$

где $e_i \in \mathbb{Z}_p$ — обратимый элемент. Запишем теперь σ как однородный полином от β_i. Так как все когомологические характеристические числа элементов β_i целые, для доказательства необходимости утверждения теоремы достаточно показать, что коэффициент при β_ω в разложении σ равен нулю по модулю p для всех разбиений $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, кратных $p-1$. Этот коэффициент есть соответствующее когомологическое характеристическое число $s_\omega(\sigma)$, которое можно разложить следующим образом

$$s_\omega(\sigma) = \sum_{\omega' : \omega' \supset \omega} r_{\omega'} s_\omega(\alpha_{\omega'}), \tag{9}$$

где $\omega' \supset \omega$ означает, что ω является измельчением разбиения ω'. Этот коэффициент делится на p. Действительно, если разбиение $\omega' = \sum_i k'_i \cdot (i)$ кратно $p-1$ и не p-адическое, то $r_{\omega'}$ делится на p, так как $\sigma \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ (см. выше). Если же среди i таких, что $k'_i \neq 0$ есть числа вида $p^k - 1$ (т.е. слагаемые вида $p^k - 1$ входят в разбиение ω'), то $\alpha_{\omega'} \in p\Omega_U(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$, т.е. $s_\omega(\alpha_{\omega'})$ делится на p.

Достаточность. Т.к. все K-характеристические числа σ лежат в $\mathbb{Z}_p$, то по теореме Стонга-Хаттори (см. [31]) $\sigma \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$. Пусть кроме того, для любого разбиения $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\|\omega\| = n$, кратного $p-1$, число $s_\omega(\sigma)$ делится на p.

Рассмотрим построенную выше систему образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Для того, чтобы доказать, что $\sigma \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ необходимо доказать что для любого кратного $p-1$ и не p-адического разбиения $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$ коэффициент r_ω в разложении (8) делится на p. Пусть ω — такое разбиение. Перепишем соотношение (9) в виде

$$s_\omega(\sigma) = r_\omega s_\omega(\alpha_\omega) + \sum_{\omega' \supset \omega, \omega' \neq \omega} r_{\omega'} s_\omega(\alpha_{\omega'}). \tag{10}$$

По индукции можно считать, что для любого не p-адического, кратного $p-1$ разбиения $\omega' \supset \omega$, $\omega' \neq \omega$, $\|\omega'\| = m(p-1)$ имеем, что $r_{\omega'}$ делится на p. Если же разбиение $\omega' = \sum_i k'_i \cdot (i)$ не является не p-адическим (т.е. в него входят слагаемые вида p^k-1), то $s_\omega(\alpha_{\omega'})$ делится на p. В любом случае, получаем, что второе слагаемое в правой части делится на p. По предположению $s_\omega(\sigma)$ также делится на p, а $s_\omega(\alpha_\omega)$ не делится на p, т.к. при нашем выборе ω имеем $\alpha_\omega = e \cdot \beta_\omega + \dots$, где $e \in \mathbb{Z}_p$ — обратимый элемент. Поэтому из (10) следует, что r_ω делится на p. ☐

Следствие 12.3. *Элемент $\sigma \in \Omega_U$ является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда для всех разбиений ω, кратных $p-1$ когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$ делятся на p.*

Следствие 12.4. *В каждом классе кобордизма многообразий M^n, $n \leqslant 4p-6$, содержатся многообразия, несущие простое действие $\mathbb{Z}/p$.*

Этот результат был получен в [7]. В размерности $n = 4p-4$ уже имеется многообразие (например, $\mathbb{C}P^{2p-2}$), в классе кобордизма которого не содержится многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$.

В работе Коннера и Флойда [8] методами, не использующими технику формальных групп было показано, что класс кобордизма $\sigma \in \Omega_U$ тогда и только тогда содержит многообразие с *сильно* простым действием $\mathbb{Z}/p$, когда *все* характеристические числа $\sigma_\omega(\sigma)$ делятся на p. Точнее, там было показано, что множество классов кобордизма, содержащих многообразия с сильно простым действием $\mathbb{Z}/p$ совпадает с Ω_U-модулем, натянутым на систему образующих $Y^0 = p, Y^1, Y^2, \dots$, где $Y^i \in \Omega_U^{p^i-1}$ — так называемые "многообразия Милнора", однозначно определяемые условиями: $s_{(p^i-1)}(Y^i) = p$, $s_\omega(Y^i)$ делятся на p при любом ω. Если вместо Ω_U-модулей рассматривать $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модули (этого вполне достаточно для описания множества классов кобордизма в терминах характеристических чисел), то в качестве представителей Y^i можно взять элементы $\alpha^p_{p^i-1}$ из следствия 11.2. Отсюда становится ясно, каким образом $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуль $\Omega_U\langle p, Y^1, Y^2, \dots\rangle \otimes \mathbb{Z}_p$, изучавшийся Коннером и Флойдом вложен в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуль $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, изученный нами (система образующих модуля Коннера и Флойда является подсистемой образующих модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$).

Заметим наконец, что если некоторый класс $\sigma \in \Omega_U$ содержит представителя M, несущего сильно простое действие $\mathbb{Z}/p$, то не обязательно любое простое действие $\mathbb{Z}/p$ на M будет сильно простым. Действительно, рассмотрим $M_1 = \mathbb{C}P^{p-1}$ с действием образующей $\rho(z_1 : \dots : z_p) = (z_1 : \rho z_2 : \dots : \rho^{p-1} z_p)$ (это действие с p неподвижными точками является сильно простым действием) и $M_2 = \mathbb{C}P^1$, $\rho(z_1 : z_2) = (z_1 : \rho z_2)$ (это простое действие с 2 неподвижными точками не является сильно простым). Тогда на $M = M_1 \times M_2$ имеется два простых действия $\mathbb{Z}/p$: $\rho(a,b) = (\rho a, b)$ и $\rho(a,b) = (a, \rho b)$, $a \in \mathbb{C}P^{p-1}$, $b \in \mathbb{C}P^1$, первое из которых является сильно простым, а второе — нет.

Глава 3.

Применение методов алгебраической топологии для изучения действий тора на многообразиях, определяемых простыми многогранниками

Под n-мерным *выпуклым многогранником* мы понимаем произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое как пересечение конечного числа полупространств. Любой выпуклый многогранник ограничивается конечным числом гиперплоскостей. Выпуклый n-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n граней коразмерности один (гиперграней). Таким образом, гиперплоскости, ограничивающие простой многогранник, находятся в общем положении. Выпуклый многогранник можно также определять как выпуклую оболочку множества точек в $\mathbb{R}^n$. При этом если множество точек находится в общем положении, то получаемый многогранник называется *симплициальным*, так как все его грани будут симплексами.

13. Простые многогранники и их кольца граней

Пусть P^n — простой многогранник и f_i — число граней P^n коразмерности $(i+1)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда целочисленный вектор $(f_0, \ldots, f_{n-1})$ называется *f-вектором* P^n. Для дальнейшего удобно положить также $f_{-1} = 1$. Наряду с f-вектором мы также будем рассматривать так называемый *h-вектор* $(h_0, \ldots, h_n)$, где h_i определяются из условия

$$h_0t^n + \ldots + h_{n-1}t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \ldots + f_{n-1}. \tag{1}$$

Таким образом, мы имеем

$$h_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{n-i}{k-i}f_{i-1}. \tag{2}$$

Далее мы фиксируем коммутативное кольцо k, называемое основным кольцом. С комбинаторной структурой простого многогранника P^n связано определенное градуированное кольцо, называемое кольцом граней (или кольцом Стенли–Райснера). Именно, пусть P^n — простой многогранник, $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ — множество граней коразмерности один, $m = f_0$. Образуем кольцо многочленов $k[v_1, \ldots, v_m]$, где v_i рассматриваются как переменные, соответствующие граням F_i.

Определение 13.1. *Кольцом граней* $k(P)$ простого многогранника P называется фактор-кольцо $k[v_1, \ldots, v_m]/I$, где

$$I = \left(v_{i_1} \ldots v_{i_s} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_s} = \varnothing\right).$$

Изначально (см., например, [31]) кольцо граней определялось для произвольного конечного симплициального комплекса следующим образом. Пусть K — конечный симплициальный комплекс с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Образуем кольцо многочленов $k[v_1, \ldots, v_m]$, где v_i рассматриваются как переменные.

Определение 13.2. Кольцом граней симплициального комплекса K (обозначается $k(K)$) называется фактор-кольцо $k[v_1, \ldots, v_m]/I$, где

$$I = \left(v_{i_1} \ldots v_{i_s} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\} \text{ не порождают симплекс } K\right).$$

Будем считать, что переменные v_i в $k[v_1, \ldots, v_m]$ имеют степень два; таким образом $k(P)$ и $k(K)$ становятся градуированными кольцами.

Определение 13.3. Для любого выпуклого многогранника $P^n \subset \mathbb{R}^n$ определим *двойственный* (или *полярный*) многогранник $(P^n)^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ как

$$(P^n)^* = \{x' \in (\mathbb{R}^n)^* \ :\ \langle x', x\rangle \leqslant 1 \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Можно доказать (см. [2]), что это множество действительно является выпуклым многогранником. В случае, если P^n — простой многогранник, его двойственный $(P^n)^*$ будет симплициальным, и грани-симплексы $(P^n)^*$ размерности i находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями P^n коразмерности $i{+}1$. Граница $(P^n)^*$

задает симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}, которое мы далее будем обозначать K_P. Тогда оба определения 13.1 и 13.2 кольца граней, очевидно, дают одно и то же кольцо: $k(P) = k(K_P)$. Кольца граней простых многогранников обладают весьма специальными алгебраическими свойствами. Для того чтобы описать эти свойства, приведем некоторые определения из коммутативной алгебры.

Пусть теперь k — поле, R — градуированная алгебра над k и n — максимальное число алгебраически независимых элементов R (это число называется *размерностью Крулля* алгебры R и обозначается $\mathrm{Krull}\, R$). Последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ однородных элементов R называется *регулярной последовательностью*, если λ_{i+1} не является делителем нуля в $R/(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ для любого i (другим словами, умножение на λ_{i+1} является мономорфизмом $R/(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ в себя). Можно доказать, что $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ тогда и только тогда является регулярной последовательностью, когда $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ алгебраически независимы и R является свободным модулем над $k[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$. Регулярные последовательности нашли применение в различных аспектах алгебраической топологии (см., например, [30]). Последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ однородных элементов R называется *однородной системой параметров*, если $\mathrm{Krull}\,(R/(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 0$. Алгебра R над полем k называется *алгеброй Коэна–Маколея*, если в R существует регулярная последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ длины $n = \mathrm{Krull}\, R$ (которая автоматически является однородной системой параметров). Из сказанного выше следует, что R является алгеброй Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда в R существует последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ алгебраически независимых элементов такая, что R является свободным конечномерным $k[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$-модулем.

В нашем случае имеет место следующее предложение (см. [31]).

Предложение 13.4. *Если P^n является простым многогранником, то кольцо граней $k(P^n)$ является алгеброй Коэна–Маколея.*

Далее нам понадобятся два последовательных обобщения понятия простого многогранника. Как было отмечено во введении, гиперплоскости, ограничивающие простой многогранник, находятся в общем положении. Вначале мы определим n-мерный *неограниченный простой многогранник* как произвольное (не обязательно ограниченное) выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, ограничиваемое набором гиперплоскостей, находящихся в общем положении. Очевидным образом определяются грани неограниченного простого многогранника, которые также будут неограниченными простыми многогранниками. Для неограниченного простого многогранника P^n можно также определить $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс K_P, двойственный к его границе (так что симплексы K_P размерности i находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями P^n коразмерности $i+1$). Однако, этот симплициальный комплекс K_P уже не обязательно задает симплициальное разбиение сферы S^{n-1}.

Пример 13.5. Рассмотрим неограниченный простой многогранник

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0\},$$

ограничиваемый n координатными гиперплоскостями. Тогда двойственным к нему симплициальным комплексом будет $(n-1)$-мерный симплекс Δ^{n-1}.

Заметим, что, тем не менее, не любой $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс является двойственным к некоторому n-мерному неограниченному простому многограннику. Поэтому нам понадобится еще одно обобщение простого многогранника — так называемые *простые полиэдральные комплексы.* Простой n-мерный полиэдральный комплекс — это объект, “двойственный к общему $(n-1)$-мерному симплициальному комплексу”. Эта конструкция взята нами из [22]. Пусть K — симплициальный комплекс размерности $n-1$ и K' — его барицентрическое подразделение. Таким образом, вершинами K' являются симплексы Δ комплекса K, а симплексами K' являются наборы $(\Delta_1, \Delta_2, \dots , \Delta_k)$, $\Delta_i \in K$, такие, что $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots \subset \Delta_k$. Для каждого симплекса $\Delta \in K$ обозначим через F_Δ подкомплекс в K', состоящий из всех симплексов K' вида $\Delta = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_k$. Если Δ является $(k-1)$-симплексом, то скажем, что F_Δ — грань коразмерности k. Пусть P_K — конус над K. Тогда P_K вместе с разбиением на ”грани” $\{F_\Delta\}_{\Delta\in K}$ называется *простым полиэдральным комплексом.* Простой многогранник P^n (ограниченный или неограниченный) может быть получен применением этой конструкции к симплициальному комплексу K^{n-1}, двойственному к границе P^n.

14. Многообразия, определяемые простыми многогранниками

Ниже мы, следуя [22], для любого полиэдрального комплекса P (в частности, для любого простого многогранника) построим два топологических пространства $\mathcal{Z}_P$ и B_TP.

Рассмотрим $T^m = S^1 \times \dots \times S^1$ — m-мерный тор. Пусть, как и выше, $\mathcal{F} = (F_1, \dots , F_m)$ — множество граней P^n коразмерности один (или множество вершин двойственного симплициального комплекса K^{n-1}). Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}^m$ и установим взаимно однозначное соответствие между гипергранями P^n и элементами базиса $\{e_1, \dots , e_m\}$ в $\mathbb{Z}^m$. Определим канонические координатные подгруппы $T^k_{i_1,\dots i_k} \subset T^m$ как торы, соответствующие координатным подрешеткам в $\mathbb{Z}^m$ (т.е. подрешеткам, натянутым на векторы $e_{i_1}, \dots , e_{i_k}$).

Определение 14.1. Пространство Z_P, связанное с простым многогранником P^n, определяется как

$$\mathcal{Z}_P = (T^m \times P^n)/\sim \; | \, (g_1, p) \sim (g_2, q) \Leftrightarrow p = q, \; g_1 g_2^{-1} \in T^k_{i_1,\dots,i_k},$$

где $F_{i_1}, \dots , F_{i_k}$ — все грани коразмерности один, содержащие точку $p \in P^n$.

Как следует из определения, $\dim \mathcal{Z}_P = m + n$; кроме того, действие тора T^m на $T^m \times P^n$ очевидно задает действие T^m на $\mathcal{Z}_P$. В [22] доказано, что $\mathcal{Z}_P$ является гладким многообразием.

Ограничимся пока случаем, когда P^n — простой многогранник. Тогда имеет место

Предложение 14.2. *Действие T^m на $\mathcal{Z}_P$ обладает следующими свойствами*

1) *Стационарная подгруппа любой точки $\mathcal{Z}_P$ является координатной подгруппой в T^m размерности не более n.*

2) *На пространстве орбит имеется комбинаторная структура простого многогранника P^n, для которой точки из внутренности граней коразмерности k соответствуют орбитам, стационарные подгруппы точек которых имеют размерность k. В частности, над внутренностью многогранника действие свободно.*

Доказательство. Это сразу вытекает из определения $\mathcal{Z}_P$. □

Пусть теперь снова P^n — произвольный простой полиэдральный комплекс. Рассмотрим ET^m — стягиваемое пространство универсального главного T^m-расслоения над $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Применяя конструкцию Бореля к T^m-пространству $\mathcal{Z}_P$, мы приходим к следующему определению.

Определение 14.3. Определим пространство B_TP как

$$B_TP = ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_P. \tag{3}$$

Таким образом, B_TP — это пространство расслоения со слоем $\mathcal{Z}_P$, ассоциированного с универсальным расслоением при помощи действия T^m на $\mathcal{Z}_P$. Как следует из определения, гомотопический тип пространства B_TP определяется простым полиэдральным комплексом P^n.

Выше мы для любого простого многогранника P^n определили гладкое многообразие $\mathcal{Z}_P$ с действием T^m и комбинаторной структурой P^n в пространстве орбит (предложение 14.2). Другой класс многообразий, обладающих такими свойствами, хорошо известен в алгебраической геометрии. Это неособые проективные *торические многообразия* (как указывалось во введении, мы ограничимся рассмотрением лишь такого класса торических многообразий). Ниже мы изложим основные факты о торических многообразиях, которые нам понадобятся в дальнейшем. Подробное изложение можно найти в [5], [24].

Определение 14.4. Торическим многообразием называется нормальное алгебраическое многообразие M, содержащее n-мерный алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n$ в качестве открытого (по Зарискому) подмногообразия, для которого стандартное диагональное действие тора на себе продолжается до действия тора на всем многообразии M (таким образом, $(\mathbb{C}^*)^n$ содержится в M в качестве всюду плотной орбиты).

На неособом проективном торическом многообразии имеется очень обильное линейное расслоение, для которого базис в пространстве глобальных сечений состоит из сечений, соответствующих точкам с целочисленными координатами внутри некоторого простого многогранника с вершинами в точках целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Обратно, задав простой многогранник P^n с вершинами в $\mathbb{Z}^n$, мы можем при помощи известной конструкции (см., например, [24]) построить по нему проективное торическое многообразие M^{2n} вещественной размерности $2n$, которое, однако, не всегда оказывается неособым. А именно можно доказать, что неособые многообразия будут получаться только в том случае, если для любой вершины P^n направляющие ковекторы гиперграней, сходящихся в этой вершине, образуют базис двойственной решетки $(\mathbb{Z}^n)^*$. При этом торическое многообразие не вполне определяется комбинаторным типом многогранника: оно также зависит от целочисленного вложения. Из сказанного вытекает, что для данного комбинаторного типа простого многогранника может существовать любое число различных *неособых* проективных торических многообразий (в том числе, их может не существовать вообще). Соответствующие примеры мы обсудим ниже.

На (неособом проективном) торическом многообразии M^{2n} имеется действие компактного тора $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$. Можно доказать, что все стационарные подгруппы точек для этого действия будут торическими подгруппами $T^k \subset T^m$ и на пространстве орбит имеется комбинаторная структура простого многогранника P^n в смысле п. 2 предложения 14.2 (где P^n — тот же самый многогранник, который соответствовал очень обильному линейному расслоению). Действие T^n на M^{2n} *локально эквивалентно стандартному диагональному действию T^n на $\mathbb{C}^n$* в следующем смысле: для любой точки $x \in M^{2n}$ существует T^n-инвариантная окрестность $U \subset M^{2n}$, которая T^n-эквивариантно гомеоморфна некоторому (T^n-инвариантному) открытому множеству $V \subset \mathbb{C}^n$. Кроме того, имеется явное отображение $M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ (отображение моментов), образом которого является P^n, а слоями — соответствующие орбиты. Гладкое многообразие, соответствующее торическому многообразию M^{2n}, может быть получено как $T^n \times P^n/\sim$ для некоторого отношения эквивалентности $\sim$ (ср. с определением $\mathcal{Z}_P$). Теперь, забывая про структуру алгебраического комплексного многообразия и действие комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$, мы приходим к следующему определению.

Определение 14.5. Топологическим торическим (или квазиторическим) многообразием над простым многогранником P^n называется вещественное ориентируемое $2n$-мерное многообразие M^{2n} с действием тора T^n, локально эквивалентным диагональному действию T^n на $\mathbb{C}^n$, и комбинаторной структурой многогранника P^n в пространстве орбит M^{2n}/T^n (в смысле п. 2 предложения 14.2).

Квазиторические многообразия впервые были введены в [22] (где они назывались просто “торическими многообразиями”). Из сказанного выше следует, что все (проективные неособые) алгебраические торические многообразия являются квазиторическими. Обратное, вообще говоря, неверно — соответствующие примеры можно найти в [22]. Там же были получены многие важные результаты о квазиторических многообразиях, в частности, описаны кольца когомологий этих многообразий, которые оказались устроенными аналогично кольцам когомологий торических многообразий (см. [5]). Ниже мы приводим основные конструкции и результаты, связанные с квазиторическими многообразиями, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательства можно найти в [22].

Пусть M^{2n} — квазиторическое многообразие над простым многогранником P^n и $\pi : M^{2n} \to P^n$ — проекция на пространство отбит. Пусть F^{n-1} — грань P^n коразмерности один. Тогда для любого $x \in \pi^{-1}(\mathrm{int} F^{n-1})$ стабилизатор x есть подгруппа $G_F \in T^n$ ранга один. Эта подгруппа определяется примитивным вектором $v \in \mathbb{Z}^n$. Таким образом строится функция λ на множестве $\mathcal{F}$ граней P^n коразмерности один со значениями в примитивных векторах из $\mathbb{Z}^n$.

Определение 14.6. Функция $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}^n$, определенная выше, называется характеристической функцией квазиторического многообразия M^{2n}.

Характеристическую функцию также можно рассматривать как гомоморфизм $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, где $m = \#\mathcal{F} = f_0$ и $\mathbb{Z}^m$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный элементами $\mathcal{F}$.

Из того что действие тора локально эквивалентно стандартному, вытекает, что характеристическая функция обладает следующим свойством: если $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ — грани коразмерности один, сходящиеся в одной вершине, то $\lambda(F_{i_1}), \dots, \lambda(F_{i_n})$ образуют базис $\mathbb{Z}^n$. Для любой функции $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющей этому условию, существует квазиторическое многообразие $M^{2n}(\lambda)$ над P^n с характеристической функцией λ, и M^{2n} определяется своей характеристической функцией однозначно с точностью до эквивариантного гомеоморфизма. Заметим, однако, что существуют простые многогранники, для которых не существует ни одной характеристической функции. Примерами таких многогранников являются так называемые циклические многогранники C_k^n для $k \geqslant 2^n$. Над такими многогранниками не существует ни одного квазиторического (а значит, и торического) многообразия.

Квазиторические многообразия M^{2n} над простым многогранником P^n тесно связаны с введенными нами ранее пространствами $\mathcal{Z}_P$ и B_TP. Рассматривая M^{2n} как T^n-многообразие, мы можем взять конструкцию Бореля $ET^n \times_{T^n} M^{2n}$. Оказывается, что все эти пространства для данного P^n имеют гомотопический тип B_TP:

$$B_TP \cong ET^n \times_{T^n} M^{2n}. \tag{4}$$

Что же касается $\mathcal{Z}_P$, то это T^m-пространство связано с квазиторическими многообразиями над P^n следующим образом: для любого квазиторического многообразия

M^{2n} над P^n проекция $\mathcal{Z}_P \to P^n$ раскладывается в композицию $\mathcal{Z}_P \to M^{2n} \xrightarrow{\pi} P^n$, где $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$ — некоторое главное T^{m-n}-расслоение и $M^{2n} \xrightarrow{\pi} P^n$ — проекция на пространство орбит для M^{2n}. Таким образом, если над P^n существуют квазиторические многообразия, то в T^m имеется подгруппа, изоморфная T^{m-n}, действующая на $\mathcal{Z}_P$ свободно, и каждая такая подгруппа соответствует некоторому квазиторическому многообразию. Как следует из предложения 14.2, подгруппы большего ранга уже не могут свободно действовать на $\mathcal{Z}_P$, поэтому максимальный ранг для свободного действия достигается как раз в случае квазиторических многообразий. Позднее мы обсудим этот вопрос более подробно.

Пусть теперь P — произвольный простой полиэдральный комплекс (например, простой многогранник) с m гранями коразмерности один. Из (3) мы получаем расслоение $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Далее все когомологии рассматриваются с коэффициентами в основном кольце k.

Теорема 14.7. *Отображение* $p^* : H^*(BT^m) \to H^*(B_TP)$ *является эпиморфизмом, который при отождествлении* $H^*(BT^m) \cong k[v_1, \dots, v_m]$ *переходит в эпиморфизм* $k[v_1, \dots, v_m] \to k(P)$, *где* $k(P)$ *— кольцо граней. В частности,* $H^*(B_TP) \cong k(P)$.

Пусть теперь P^n — простой многогранник и M^{2n} — квазиторическое многообразие над P^n с характеристической функцией λ. Если k — поле, то характеристическую функцию можно рассматривать как линейное отображение $k^m \to k^n$. Из (4) мы получаем расслоение $p_0 : B_TP \to BT^n$ со слоем M^{2n}.

Теорема 14.8. *Отображение* $p_0^* : H^*(BT^n) \to H^*(B_TP)$ *является мономорфизмом и* $p_0^* : H^2(BT^n) \to H^2(B_TP)$ *при соответствующих отождествлениях переходит в* $\lambda^* : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$. *Кроме того, при каноническом отождествлении* $H^*(BT^n, k) \cong k[t_1, \dots, t_n]$ *элементы* $\lambda_i = p^*(t_i) \in H^*(B_TP, k) \cong k(P)$ *образуют регулярную последовательность длины* n *элементов* $k(P)$ *степени два.*

Естественно, во всех предыдущих конструкциях можно заменить квазиторические многообразия на (алгебраические) торические многообразия. При этом каждому торическому многообразию соответствует конкретное вложение многогранника P^n в $\mathbb{R}^n$, при котором все вершины имеют целые координаты. Тогда, как следует из сказанного выше, соответствующая характеристическая функция получается следующим образом: ее значение на гиперграни $F^{n-1} \in \mathcal{F}$ есть соответствующий направляющий ковектор. Все характеристические функции, соответствующие (алгебраическим) торическим многообразиям, могут быть получены таким образом.

Далее мы для любого полиэдрального комплекса P^n введем в пространство B_TP каноническую структуру клеточного комплекса.

Введем в $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$ стандартную клеточную структуру (т.е. каждое $\mathbb{C}P^\infty$ имеет по одной клетке в каждой четной размерности). При этом для алгебры клеточных коцепей $C^*(BT^m)$ мы имеем $C^*(BT^m) = H^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m]$.

Теорема 14.9. *Пусть P — произвольный простой полиэдральный комплекс, имеющий m граней коразмерности один. Пространство B_TP может быть реализовано как клеточный подкомплекс в BT^m, представляющий собой объединение клеточных подкомплексов $BT^k_{i_1,\dots,i_k}$ по всем симплексам $\Delta = (i_1, \dots, i_k)$ двойственного симплициального комплекса K_P. При этом $C^*(B_TP) = H^*(B_TP) = k(P)$, и вложение $i : B_TP \hookrightarrow BT^m$ индуцирует эпиморфизм $C^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m] \to k(P) = C^*(B_TP)$.*

Доказательство. Рассмотрим симплициальный комплекс K с m вершинами, двойственный к границе простого полиэдрального комплекса P. В силу определения простых полиэдральных комплексов мы можем считать, что P является конусом над барицентрическим подразделением K с соответствующим разбиением на грани. Мы будем строить вложение $i : B_TP \hookrightarrow BT^m$ при помощи индукции по размерности K. Если $\dim K = 0$, то K представляет собой набор из m вершин $v_1, \dots, v_m$ и P — конус над K. В этом случае B_TP — букет из m копий $\mathbb{C}P^\infty$ и имеется очевидное вложение $i : B_TP \to BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. В размерности нуль $C^*(B_TP)$ есть просто k, а в размерностях $\geqslant 1$ эта алгебра изоморфна $k[v_1] \oplus \dots \oplus k[v_m]$. Таким образом, $C^*(B_TP) = k[v_1, \dots, v_m]/I$, где I — идеал, порожденный всеми мономами степени $\geqslant 2$ без квадратов и i^* — проекция на фактор-кольцо. Итак, в случае $\dim K = 0$ теорема верна.

Пусть теперь $\dim K = k - 1$. По предположению индукции теорема верна для $(k-2)$-остова $K' \subset K$ и соответствующего ему простого полиэдрального комплекса P', т.е. $i^*C^*(BT^m) = C^*(B_TP') = k(K') = k[v_1, \dots, v_m]/I'$. Будем добавлять $(k-1)$-симплексы по очереди. Добавление к K' симплекса Δ^{k-1} с вершинами $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ соответствует присоединению к $B_TP' \subset BT^m$ всех клеток клеточного подкомплекса $BT^k_{i_1,\dots,i_k} = BT^1_{i_1} \times \ldots \times BT^1_{i_k} \subset BT^m$. При этом ясно, что $C^*(B_TP' \cup BT^k_{i_1,\dots,i_k}) = k(K' \cup \Delta^{k-1}) = k[v_1, \dots, v_m]/I$, где $I \subset I'$ и $I'/I = (v_{i_1}v_{i_2} \dots v_{i_k})$. Кроме того, если $i : B_TP' \cup BT^k_{i_1,\dots,i_k} \hookrightarrow BT^m$ — естественное вложение, то i^* — проекция на фактор-кольцо. ☐

В частности, мы видим, что в случае $K_P = \Delta^{m-1}$ (тогда $P = \mathbb{R}^m_+$) мы имеем $B_TP = BT^m$.

15. Спектральная последовательность Эйленберга–Мура

В работе [23] Эйленбергом и Муром была введена спектральная последовательность, которая оказалась весьма полезной в наших исследованиях. В описании этой спектральной последовательности мы следуем [30].

Пусть $\xi_0 = (E_0, p_0, B_0, F)$ — некоторое расслоение Серра над односвязной базой B_0 и $f : B \to B_0$ — непрерывное отображение. Тогда мы можем построить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
E \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & E_0 \arrow[d, "p_0"] \\
B \arrow[r, "f"] & B_0,
\end{tikzcd} \tag{5}$$

где $\xi = (E, p, B, F)$ — индуцированное расслоение. При этих условиях имеет место следующая теорема

Теорема 15.1 (Эйленберг–Мур)**.** *Существует спектральная последовательность коммутативных алгебр $\{E_r, d_r\}$, для которой*

1) *$E_r \Rightarrow H^*(E)$ (спектральная последовательность сходится к когомологиям E в обычном смысле);*

2) *$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B_0)}(H^*(B), H^*(E_0))$.*

Спектральная последовательность Эйленберга–Мура является спектральной последовательностью второго квадранта, и дифференциал d_r повышает бистепень на $(r, 1-r)$. В специальном случае, когда $B = *$ — точка (тогда $E = F$ — слой ξ), мы имеем

Следствие 15.2. *Пусть $F \hookrightarrow E \to B$ — некоторое расслоение над односвязным пространством B. Тогда существует спектральная последовательность коммутативных алгебр $\{E_r, d_r\}$, для которой*

1) *$E_r \Rightarrow H^*(E)$;*

2) *$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B)}(H^*(E), k)$.*

В качестве первого применения спектральной последовательности Эйленберга–Мура мы вычислим кольцо когомологий квазиторического многообразия M^{2n} над простым многогранником P^n (как уже говорилось, этот результат был получен в [22] другими методами). Наряду с идеалом I, для которого $k(P) = k[v_1, \ldots, v_m]/I$, введем идеал $J \subset k(P)$ как $J = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где λ_i — элементы $k(P)$, определенные в теореме 14.8 при помощи характеристической функции λ многообразия M^{2n}. Как показывет теорема 14.8, $\lambda_i = \lambda_{i1}v_1 + \lambda_{i2}v_2 + \ldots + \lambda_{im}v_m$ — алгебраически независимые элементы степени 2 в $k(P)$ и $k(P)$ — свободный конечномерный модуль над $k[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Прообраз идеала J в $k[v_1, \ldots, v_m]$ является идеалом, порожденным $\lambda_i = \lambda_{i1}v_1 + \ldots + \lambda_{im}v_m$, рассматриваемыми как элементы $k[v_1, \ldots, v_m]$. Этот прообраз мы также будем обозначать J.

Теорема 15.3. *Для любого квазиторического многообразия M^{2n} имеет место следующий изоморфизм колец:*

$$H^*(M^{2n}) \cong k(P)/J = k[v_1, \dots, v_m]\,/\,I{+}J.$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения

$$\begin{tikzcd} M^{2n} \arrow[r] \arrow[d] & B_TP \arrow[d, "p_0"] \\ * \arrow[r] & BT^n \end{tikzcd}$$

Тогда в силу теоремы 14.8 мы имеем мономорфизм

$$\begin{array}{rcl} H^*(BT^n) = k[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{p_0^*} & H^*(B_TP) = k(P), \\ t_i & \longrightarrow & \lambda_i, \end{array}$$

т.е. $\operatorname{Im} p_0^* = k[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \subset k(P)$. Член E_2 спектральной последовательности Эйленберга–Мура имеет вид

$$E_2^{*,*} = \operatorname{Tor}^{*,*}_{H^*(BT^n)}(H^*(B_TP), k) = \operatorname{Tor}^{*,*}_{k[\lambda_1, \dots, \lambda_n]}(k(P), k).$$

Здесь правая часть является биградуированным k-модулем (см. [11], [30]). Первая (“внешняя”) градуировка происходит из проективной резольвенты $H^*(B_TP)$ как $H^*(BT^n)$-модуля, используемой в определении функтора Tor. Вторая (“внутренняя”) градуировка происходит из градуировки самих $H^*(BT^n)$-модулей, входящих в резольвенту; мы предполагаем ее нетривиальной только в четных размерностях ($\deg \lambda_i = 2$). Так как $k(P)$ — свободный модуль над $k[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, то

$$\operatorname{Tor}^{*,*}_{k[\lambda_1, \dots, \lambda_n]}(k(P), k) = \operatorname{Tor}^{0,*}_{k[\lambda_1, \dots, \lambda_n]}(k(P), k) = k(P) \otimes_{k[\lambda_1, \dots, \lambda_n]} k = k(P)/J.$$

Таким образом, $E_2^{0,*} = k(P)/J$ и $E_2^{p,*} = 0$ при $p \neq 0$. Отсюда следует, что $E_2 = E_\infty$ и $H^*(M^{2n}) = k(P)/J$. □

Следствие 15.4. $H^*(M^{2n}) = \operatorname{Tor}_{k[\lambda_1, \dots, \lambda_n]}(k(P), k)$.

16. Вычисление когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$

При помощи спектральной последовательности Эйленберга–Мура мы получаем описание кольца когомологий $\mathcal{Z}_P$ в терминах кольца граней $k(P)$ и описываем некоторые взаимосвязи с комбинаторикой многогранников. В этом разделе мы предполагаем, что k — поле.

16.1. Аддитивная структура когомологий $\mathcal{Z}_P$.

Для описания когомологий $\mathcal{Z}_P$ мы, в основном, будем использовать спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Эта спектральная последовательность определяет убывающую фильтрацию в $H^*(\mathcal{Z}_P)$, обозначаемую $\{F^{-p}H^*(\mathcal{Z}_P)\}$, $p \geqslant 0$, обладающую тем свойством, что

$$E_\infty^{-p,n+p} = F^{-p}H^n(\mathcal{Z}_P)/F^{-p+1}H^n(\mathcal{Z}_P).$$

Предложение 16.1. *$F^0H^*(\mathcal{Z}_P) = H^0(\mathcal{Z}_P) = k$ (основное поле).*

Доказательство. Как следует из [30, Предложение 4.2], для спектральной последовательности Эйленберга–Мура произвольного коммутативного квадрата (5) мы имеем $F^0H^*(E) = \mathrm{Im}\{H^*(B) \otimes H^*(E_0) \to H^*(E)\}$. В нашем случае это дает $F^0H^*(\mathcal{Z}_P) = \mathrm{Im}\{H^*(B_TP) \to H^*(\mathcal{Z}_P)\}$. Теперь наше предложение следует из рассмотрения спектральной последовательности Лере-Серра расслоения $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$ и того факта, что $p^* : H^*(BT^m) \to H^*(B_TP)$ является эпиморфизмом (см. теорему 14.7). □

Для спектральной последовательности Эйленберга–Мура расслоения $p : B_TP \to BT^m$ мы имеем $E_2 = \mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$. Рассмотрим свободную резольвенту $k(P)$ как $k[v_1, \dots , v_m]$-модуля:

$$0 \longrightarrow R^{-h} \xrightarrow{d^{-h}} R^{-h+1} \xrightarrow{d^{-h+1}} \dots \longrightarrow R^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} R^0 \xrightarrow{d^0} k(P) \longrightarrow 0. \qquad (6)$$

Для наших целей удобно считать, что R^i занумерованы неположительными числами, т.е. $h > 0$. Минимальное число h, для которого существует резольвента (6), называется *гомологической размерностью* $k(P)$, обозначается $\mathrm{hd}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P))$. Из теоремы Гильберта о сизигиях следует, что $\mathrm{hd}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P)) \leqslant m$. Но так как $k(P)$ является кольцом Коэна–Маколея, то известно [29, гл. IV], что

$$\mathrm{hd}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P)) = m - n,$$

где n — размерность Крулля (максимальное число алгебраически независимых элементов) $k(P)$. В нашем случае $n = \dim P$.

Нам понадобится особая свободная резольвента (6), называемая *минимальной* резольвентой (см. [19]). Эта резольвента определяется следующим образом. Пусть A — градуированная связная коммутативная алгебра и N, N' — модули над A. Положим $I(A) = \sum_{q>0} A_q = \{a \in A |\deg a \neq 0\}$ и $J(N) = I(A) \cdot N$. Отображение $f : N \to N'$ называется минимальным, если $\mathrm{Ker}\, f \subset J(N)$. Резольвента (6) называется *минимальной*, если все d^i минимальны. Один из способов построения минимальной резольвенты заключается в следующем: свободные A-модули $R^0, R^{-1}, \dots , R^{-h}$ строятся последовательно и, построив R^i и d^i, мы берем в качестве базиса R^{i+1} минимальный набор однородных образующих $\operatorname{Ker} d^i$. Для градуированной алгебры A имеется естественный способ выбора минимального набора образующих для A-модуля R. Этот способ заключается в следующем. Пусть k_1 — наименьшая степень, в которой R ненулевой. Выберем в $(R)^{k_1}$ базис векторного пространства, скажем $x_1, \ldots, x_p$. Пусть теперь $R_1 = (x_1, \ldots, x_p) \subset R$ — подмодуль, порожденный $x_1, \ldots, x_p$. Если $R = R_1$, то построение минимального набора образующих R закончено. Иначе рассмотрим первую степень k_2, в которой $R \neq R_1$, тогда в этой степени имеется разложение в прямую сумму $R = R_1 \oplus \widehat{R_1}$. Теперь выберем в $\widehat{R_1}$ базис векторного пространства $x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ и положим $R_2 = (x_1, \ldots, x_{p_2})$. Если $R = R_2$, то минимальный базис построен, иначе будем повторять описанный выше процесс до тех пор, пока не получим минимальный набор образующих для R. Минимальный набор образующих A-модуля R обладает следующим свойством: ни для одного элемента x_k не существует разложения вида $x_k = \sum a_i x_i$, где $a_i \in A$, $\deg a_i \neq 0$. Минимальная резольвента единственна с точностью до изоморфизма.

Пусть теперь (6) — минимальная резольвента $k(P)$ как $k[v_1, \ldots, v_m]$-модуля. В силу минимальности мы имеем в (6): $h = m-n$, а R^0 является $k[v_1, \ldots, v_m]$-свободным модулем с одной образующей 1 степени 0. Система образующих R^{-1} состоит из элементов $v_{i_1 \ldots i_k}$ степени $2k$ таких, что $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ не порождают симплекс в K, но если мы заберем любую вершину из набора $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, то оставшийся набор вершин уже будет порождать симплекс в K.

Структура $k[v_1, \ldots, v_m]$-модуля в k задается при помощи отображения, переводящего все v_i в 0. Если резольвента (6) минимальна, то все дифференциалы d^i в комплексе

$$0 \longrightarrow R^{-(m-n)} \otimes_{k[v_1,\ldots,v_m]} k \xrightarrow{d^{-(m-n)}} \ldots \longrightarrow R^{-1} \otimes_{k[v_1,\ldots,v_m]} k \xrightarrow{d^{-1}} R^0 \otimes_{k[v_1,\ldots,v_m]} k \longrightarrow 0 \tag{7}$$

тривиальны. Модуль $R^i \otimes_{k[v_1,\ldots,v_m]} k$ является конечномерным векторным пространством над k, размерность которого равна размерности R^i как свободного модуля над $k[v_1, \ldots, v_m]$:

$$\dim_k R^i \otimes_{k[v_1,\ldots,v_m]} k = \dim_{k[v_1,\ldots,v_m]} R^i.$$

Следовательно, в силу тривиальности всех дифференциалов комплекса (7) для минимальной резольвенты (6) выполнено следующее соотношение:

$$\dim_k \operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k) = \sum_{i=0}^{m-n} \dim_{k[v_1,\ldots,v_m]} R^{-i}. \tag{8}$$

Теперь все готово для описания аддитивной структуры когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$.

Теорема 16.2. *Имеет место следующий изоморфизм градуированных k-модулей:*

$$H^*(\mathcal{Z}_P) \cong \operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$$

(правая часть превращается из биградуированного k-модуля в градуированный k-модуль взятием полной степени). Более подробно, в $H^*(\mathcal{Z})$ имеется фильтрация $\{F^{-p}H^*(\mathcal{Z})\}$, для которой

$$F^{-p}H^*(\mathcal{Z})/F^{-p+1}H^*(\mathcal{Z}) = \operatorname{Tor}^{-p}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k).$$

Доказательство. Вначале мы докажем, что

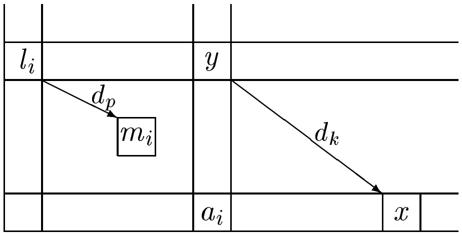
$$\dim_k H^*(\mathcal{Z}) \geqslant \dim_k \operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k). \tag{9}$$

Для этого рассмотрим спектральную последовательность Лере–Серра расслоения $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Первый столбец члена E_2 этой спектральной последовательности соответствует когомологиям слоя $\mathcal{Z}$: $H^*(\mathcal{Z}) = E_2^{0,*}$. Мы поставим в соответствие каждой образующей $k[v_1,\ldots,v_m]$-свободного модуля R^i некоторую образующую $H^*(\mathcal{Z})$, причем различным образующим модулей R^i будут соответствовать различные образующие $H^*(\mathcal{Z})$.

В силу теоремы 14.7 и свойств спектральной последовательности Лере–Серра ненулевые элементы могут появиться в члене E_∞ только в нижней строке, и эта нижняя строка представляет собой кольцо $k(P) = H^*(B_TP)$:

$$E_\infty^{*,p} = 0,\ p > 0;\ E_\infty^{*,0} = k(P).$$

Таким образом, все элементы из ядра отображения $d^0 : R^0 = k[v_1,\ldots,v_m] = E_2^{*,0} \to E_\infty^{*,0} = k(P)$ из минимальной резольвенты (6) должны убиваться дифференциалами спектральной последовательности. Это ядро у нас обозначалось I (идеал в $k[v_1,\ldots,v_m]$). Пусть $(x_1,\ldots,x_p)$ — минимальный базис идеала I, построенный при помощи описанной выше процедуры. Ниже мы докажем, что элементы x_i могут убиваться только трансгрессией (т.е. дифференциалами, бьющими из первого столбца). Пусть это не так, т.е. пусть x — элемент минимального базиса I, который убивается не трансгрессивным дифференциалом: $x = d_ky$ для некоторого k, где y лежит не в первом столбце. Тогда y является циклом всех дифференциалов вплоть до d_{k-1}. Пусть y происходит из некоторого элемента $\sum_i l_ia_i$ в члене E_2, $l_i \in E_2^{0,*}$, $a_i \in E_2^{*,0} = k[v_1,\ldots,v_m]$. Предположим сначала, что все элементы l_i трансгрессивны, т.е. являются циклами всех дифференциалов d_i для $i < k$ и $d_k(l_i) = m_i$, $m_i \in E_k^{*,0}$. Так как все m_i убиваются дифференциалами, их прообразы в E_2 лежат в I. Отсюда получаем $x = d_ky = \sum_i m_ia_i$, $m_i \in I$, что противоречит минимальности базиса $(x_1,\ldots,x_p)$. Таким образом, среди l_i имеются не трансгрессивные элементы, т.е. существует $p < k$ и i такие, что $d_p(l_i) = m_i \neq 0$. Тогда этот m_i доживает до E_p и



мы, выбрав среди всех таких p минимальное, получаем $d_p(y) = m_i a_i + \ldots \neq 0$ — противоречие. Это означает, что все элементы из минимального набора образующих I убиваются трансгрессией, т.е. им соответствуют некоторые (различные) элементы $l_i^{(1)} \in H^*(\mathcal{Z})$.

Так как $E_2 = H^*(\mathcal{Z}) \otimes k[v_1, \ldots, v_m]$, то в член E_2 вкладывается в качестве подмодуля свободный $k[v_1, \ldots, v_m]$-модуль, порожденный элементами $l_i^{(1)}$. Поэтому мы имеем $R^{-1} \subset E_2$ и отображение $d^{-1} : R^{-1} \to R^0 = k[v_1, \ldots, v_m]$ задается дифференциалами спектральной последовательности. Ядро этого отображения, $\operatorname{Ker} d^{-1}$ не может убиваться уже построенными дифференциалами. Используя предыдущее рассуждение, мы получаем, что образующие минимального базиса $\operatorname{Ker} d^{-1} \in R^{-1}$ могут убиваться только элементами из первого столбца, скажем $l_1^{(2)}, \ldots, l_q^{(2)}$. Таким образом, свободный $k[v_1, \ldots, v_m]$-модуль, порожденный элементами $l_i^{(2)}$, также вкладывается в член E_2 как подмодуль, т.е. $R^{-2} \subset E_2$, и т.д. В конце мы получим $\sum_{i=0}^{m-n} \dim_{k[v_1,\ldots,v_m]} R^{-i}$ образующих в первом столбце члена E_2. Отсюда в силу (8) мы получаем требуемое неравенство (9).

Теперь рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения $p : B_T P \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Для нее мы имеем: $E_2 = \operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$, $E_r \Rightarrow H^*(\mathcal{Z})$. В силу неравенства (9), мы получаем $E_2 = E_\infty$, что и доказывает нашу теорему. ☐

16.2. Мультипликативная структура когомологий $\mathcal{Z}_P$.

Здесь мы даем описание кольца $H^*(\mathcal{Z}_P)$.

В предыдущем пункте для вычисления $\operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$ мы использовали минимальную резольвенту кольца граней $k(P)$, рассматриваемого как модуль над кольцом многочленов $k[v_1, \ldots, v_m]$. Ниже мы используем другой подход: рассматриваем так называемую *резольвенту Кошуля* для $k[v_1, \ldots, v_m]$-модуля k. В результате биградуированный k-модуль $\operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$ приобретает структуру биградуированной k-алгебры, для которой соответствующая градуированная k-алгебра изоморфна $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Это также дает описание алгебры $H^*(\mathcal{Z}_P)$ как алгебры когомологий некоторой дифференциальной (би)градуированной алгебры.

Пусть $\Gamma = k[y_1, \ldots, y_n]$, $\deg y_i = 2$, — градуированная алгебра многочленов над k, а $\Lambda[u_1, \ldots, u_n]$ — внешняя алгебра над k с образующими $u_1, \ldots, u_n$. Рассмотрим биградуированную дифференциальную алгебру

$$\mathcal{E} = \Gamma \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_n],$$

в которой градуировки и дифференциал определены следующим образом:

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathrm{bideg}(y_i \otimes 1) & = & (0,2), & \qquad & d(y_i \otimes 1) & = & 0; \\ \mathrm{bideg}(1 \otimes u_i) & = & (-1,2), & \qquad & d(1 \otimes u_i) & = & y_i \otimes 1. \end{array}$$

Дифференциал повышает бистепень на $(1,0)$, поэтому компоненты $\mathcal{E}^{-i,*}$ задают некоторый комплекс, который мы также обозначим $\mathcal{E}$. Этот комплекс представляет собой Γ-свободную резольвенту модуля k (рассматриваемого как Γ-модуль), называемую *резольвентой Кошуля* (см. [11]).

Предложение 16.3. *Пусть* $\Gamma = k[y_1, \dots, y_n]$ *и* A *— произвольный* Γ*-модуль, тогда*

$$\mathrm{Tor}_\Gamma(A, k) = H[A \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n], d],$$

где d *определяется как* $d(a \otimes u_i) = (y_i \cdot a) \otimes 1$ *для любого* $a \in A$*.*

Доказательство. Рассмотрим Γ-свободную резольвенту $\mathcal{E} = \Gamma \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n]$ для модуля k (резольвенту Кошуля). Тогда

$$\mathrm{Tor}_\Gamma(A, k) = H[A \otimes_\Gamma \Gamma \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n], d] = H[A \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n], d].$$

□

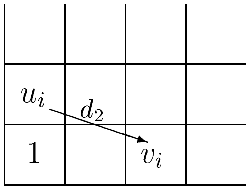
Теперь рассмотрим главное T^m-расслоение $\mathcal{Z}_P \times ET^m \to B_T P$, индуцированное из универсального расслоения при помощи отображения $p : B_T P \to BT^m$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 16.4. *Член* $E_3^{(s)}$ *спектральной последовательности Лере–Серра* $\{E_r^{(s)}, d_r\}$ *расслоения* $\mathcal{Z}_P \times ET^m \to B_T P$ *имеет следующий вид:*

$$E_3^{(s)} \cong \mathrm{Tor}_{k[v_1, \dots, v_m]}(k(P), k).$$

Доказательство. Рассмотрим член $E_2^{(s)}$ спектральной последовательности Лере–Серра данного расслоения. Мы имеем $H^*(T^m) = \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, $H^*(B_T P) = k(P) = k[v_1, \dots, v_m]/I$. Следовательно,

$$E_2^{(s)} = k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m].$$



Легко видеть, что дифференциал $d_2^{(s)}$ действует следующим образом:

$$d_2^{(s)}(1 \otimes u_i) = v_i \otimes 1, \quad d_2^{(s)}(v_i \otimes 1) = 0.$$

Так как $E_3^{(s)} = H[E_2^{(s)}, d_2^{(s)}]$, то доказываемое утверждение получается, если положить $\Gamma = k[v_1, \dots, v_m]$, $A = k(P)$ в предложении 16.3.

□

Теперь мы можем доказать основной результат о когомологиях $\mathcal{Z}_P$.

Теорема 16.5. *Имеет место изоморфизм градуированных алгебр:*

$$\begin{gathered} H^*(\mathcal{Z}_P) = H[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d], \\ \operatorname{bideg} v_i = (0, 2), \quad \operatorname{bideg} u_i = (-1, 2), \\ d(1 \otimes u_i) = v_i \otimes 1, \quad d(v_i \otimes 1) = 0. \end{gathered}$$

Таким образом, спектральная последовательность Лере–Серра T^m-расслоения $\mathcal{Z}_P \times ET^m \to B_T P$ вырождается в члене E_3.

Доказательство. Рассмотрим расслоение $p : B_T P \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. В силу теоремы 14.9 мы имеем для алгебр коцепей: $C^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m]$ и $C^*(B_T P) = k(P)$, причем действие $C^*(BT^m)$ на $C^*(B_T P)$ задается эпиморфизмом на фактор-кольцо. В [30, Предложение 3.4] было доказано, что имеет место изоморфизм алгебр

$$\theta^* : \operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}(C^*(B_T P), k) \to H^*(\mathcal{Z}_P).$$

Но из сказанного выше и предложения 16.3 вытекает, что

$$\operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}(C^*(B_T P), k) \cong H[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d].$$

□

Теорема 16.5 позволяет ввести в когомологии многообразия $\mathcal{Z}_P$ структуру биградуированной алгебры. Легко видеть, что двойственность Пуанкаре в когомологиях $\mathcal{Z}_P$ сохраняет эту биградуированную структуру. Именно имеет место следующее комбинаторное описание двойственности Пуанкаре.

Лемма 16.6. *В терминах биградуированной алгебры $[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d]$ из теоремы 16.5 мы имеем следующие утверждения*

1) *Фундаментальный когомологический класс многообразия $\mathcal{Z}_P$ представляется любым коциклом вида $v_{i_1} \dots v_{i_n} \otimes u_{j_1} \dots u_{j_{m-n}}$, $j_1 < \dots < j_{m-n}$, где $(i_1, \dots, i_n)$ — набор индексов гиперграней, сходящихся в некоторой вершине $v \in P^n$ и $\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_{m-n}\} = \{1, \dots, m\}$.*

2) *Два коцикла $v_{i_1} \dots v_{i_p} \otimes u_{j_1} \dots u_{j_r}$ и $v_{k_1} \dots v_{k_s} \otimes u_{l_1} \dots u_{l_t}$ представляют двойственные по Пуанкаре классы когомологий в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ тогда и только тогда, когда $p + s = n$, $r + t = m - n$, $(i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_s)$ представляет собой набор индексов гиперграней, сходящихся в некоторой вершине $v \in P^n$ и $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_r, k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_t\} = \{1, \dots, m\}$.*

Доказательство. Утверждение п. 1 вытекает из того факта, что описанный там класс когомологий является образующей группы $\operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}^{-(m-n),2m}(k(P),k)$, которая изоморфна $H^{m+n}(\mathcal{Z}_P^{m+n})$ (см. теорему 16.5). Утверждение п. 2 следует из того, что два класса когомологий двойственны по Пуанкаре тогда и только тогда, когда их произведение есть фундаментальный класс когомологий. $\square$

Введем следующие обозначения. Положим $\mathcal{T}^i = \operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}^{-i}(k(P),k)$, $\mathcal{T}^{i,2j} = \operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}^{-i,2j}(k(P),k)$ и введем *биградуированные числа Бетти* многообразия $\mathcal{Z}_P$ как

$$b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P) = \dim_k \operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}^{-i,2j}(k(P),k). \tag{10}$$

Тогда из теоремы 16.2 вытекает, что $b^k(\mathcal{Z}_P) = \sum_{2j-i=k} b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P)$. Вторая часть леммы 16.6 утверждает, что $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P) = b^{-(m-n-i),2(m-j)}(\mathcal{Z}_P)$ для любых i,j. Это можно записать в виде следующего соотношения на ряды Пуанкаре $F(\mathcal{T}^i,t) = \sum_{r=0}^{m} b^{-i,2r}t^{2r}$ модулей $\mathcal{T}^i$:

$$F(\mathcal{T}^i,t) = t^{2m}F\left(\mathcal{T}^{m-n-i},\tfrac{1}{t}\right). \tag{11}$$

Это соотношение хорошо известно в коммутативной алгебре для так называемых колец Горенштейна (см. [31]). Кольца граней симплициальных комплексов K^{n-1}, задающих триангуляции сферы S^{n-1}, являются кольцами Горенштейна. В частности, кольцами Горенштейна являются все кольца $k(P^n)$ для простых многогранников P^n.

Простое комбинаторное рассуждение (см. [31, гл. II]) показывает, что для любого $(n-1)$-мерного симплициального комплекса K ряд Пуанкаре $F(k(K),t)$ имеет вид

$$F(k(K),t) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i t^{2(i+1)}}{(1-t^2)^{i+1}},$$

где $(f_0,\dots,f_{n-1})$ — f-вектор K. То же самое можно записать в терминах h-вектора $(h_0,\dots,h_n)$:

$$F(k(K),t) = \frac{h_0 + h_1t^2 + \ldots + h_nt^{2n}}{(1-t^2)^n}. \tag{12}$$

С другой стороны, ряд Пуанкаре $k[v_1,\dots,v_m]$-модуля $k(P)$ (или $k(K)$) можно вычислять при помощи произвольной свободной резольвенты $k(P)$. А именно имеет место следующая общая теорема (см., например, [31]).

Теорема 16.7. *Пусть M — конечно порожденный градуированный $k[v_1,\dots,v_m]$-модуль, $\deg v_i = 2$, и задана конечная свободная резольвента M:*

$$0 \longrightarrow R^{-h} \xrightarrow{d^{-h}} R^{-h+1} \xrightarrow{d^{-h+1}} \cdots \longrightarrow R^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} R^0 \xrightarrow{d^0} M \longrightarrow 0.$$

Предположим, что образующие свободных $k[v_1, \dots , v_m]$-модулей R^{-i} имеют размерности $d_{1i}, \dots , d_{q_i i}$, где $q_i = \dim_{k[v_1,\dots,v_m]} R^{-i}$. Тогда ряд Пуанкаре модуля M вычисляется по формуле:

$$F(M,t) = \frac{\sum_{i=0}^{-h}(-1)^i(t^{d_{1i}} + \ldots + t^{d_{q_i i}})}{(1-t^2)^m}.$$

Применим эту теорему к минимальной резольвенте (6) кольца $k(P) = k[v_1, \dots , v_m]/I$. Тогда, ввиду тривиальности дифференциалов комплекса (7), мы получаем следующую формулу

$$F(k(P),t) = (1-t^2)^{-m}\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i F(\mathcal{T}^i,t). \tag{13}$$

Отсюда и из соотношения (11) получаем:

$$F(k(P),t) = (1-t^2)^{-m}\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i t^{2m} F(\mathcal{T}^{m-n-i},\tfrac{1}{t}) =$$
$$= (1-(\tfrac{1}{t})^2)^{-m}\cdot(-1)^m\sum_{j=0}^{m-n}(-1)^{m-n-j}F(\mathcal{T}^j,\tfrac{1}{t}) = (-1)^n F(k(P),\tfrac{1}{t}).$$

Подставляя вместо $F(k(P),t)$ и $F(k(P),\frac{1}{t})$ выражения из правой части формулы (12), мы получаем

$$h_i = h_{n-i}. \tag{14}$$

Это так называемые соотношения Дена–Соммервилля, хорошо известные в теории простых многогранников.

Литература

[1] *М. Атья, И. Зингер.* Индекс эллиптических операторов. III, УМН, 1969, т. 24, №1, с. 127–182.

[2] *А. Бренстед,* Введение в теорию выпуклых многогранников, Москва, Мир, 1988.

[3] *В.М. Бухштабер.* Характер Чженя–Дольда в теории кобордизмов. I, Матем. сборник, 1970, т. 83, №4, с. 575–595.

[4] *В.М. Бухштабер, С.П. Новиков.* Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса, Матем. сборник, 1971, т 84, №1, с. 81–118.

[5] *В.И. Данилов*, Геометрия торических многообразий, УМН, 1978, т. 33, №2, с. 85–134.

[6] *С.М. Гусейн-Заде.* U-действия окружности и неподвижные точки, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1971, т. 35, №5, с. 1120–1136.

[7] *Г.Г. Каспаров.* Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, т. 33, №4, с. 735–747.

[8] *П. Коннер, Э. Флойд.* Гладкие периодические отображения. Москва, Мир, 1969.

[9] *И.М. Кричевер.* Формальные группы и формула Атьи–Хирцебруха, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, т. 38, №6, с. 1289–1304.

[10] *И.М. Кричевер.* Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера, Матем. заметки, 1990, т. 47, №2, с. 34–45.

[11] *С. Маклейн,* Гомология, Москва, Мир, 1966.

[12] *А.С. Мищенко.* Многообразия с действием группы $\mathbb{Z}_p$ и неподвижные точки, Матем. заметки, 1968, т. 4, №4, с. 381–386.

[13] *А.С. Мищенко.* Бордизмы с действием группы $\mathbb{Z}_p$ и неподвижные точки, Матем. сборник, 1969, т. 80, №3, с. 307–313.

[14] *О.Р. Мусин.* Действия группы S^1 на многообразиях. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н., Москва, 1979.

[15] *С.П. Новиков.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1967, т. 31, №4, с. 855–951.

[16] *С.П. Новиков.* Операторы Адамса и неподвижные точки, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, т. 32, №6, с. 1245–1263.

[17] *Р. Стонг.* Заметки по теории кобордизмов. Москва, Мир, 1973.

[18] *Ф. Хирцебрух.* Топологические методы в алгебраической геометрии. Москва, Мир, 1973.

[19] *J.F. Adams,* On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Annals of Math., 1960, v. 72, №1, p. 20–104.

[20] *M.F. Atiyah, R. Bott.* A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I, Ann. of Math., 1967, v. 86, №2, p. 374–407.

[21] *R. Bott, C. Taubes.* On the rigidity theorems of Witten, J. of Amer. Math. Soc., 1989, v. 2, p. 137–186.

[22] *M. Davis, T. Januszkiewicz,* Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions, Duke Math. Journal, 1991, v. 62, №2, p. 417–451.

[23] *S. Eilenberg, J.C. Moore,* Homology and fibrations. I, Comment. Math. Helv., 1966, v. 40, p. 199–236.

[24] *W. Fulton*, Introduction to Toric Varieties, Princeton Univ. Press, 1993.

[25] *F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung.* Manifolds and Modular Forms. Second Edition, Bonn,. A Publication of the Max-Planc-Institut für Mathematik, 1994.

[26] Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology, Ed. P.S. Landweber // Lecture Notes in Mathematics; 1326, Berlin–Heidelberg, Springer, 1988

[27] *S. Ochanine.* Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques, Topology, 1987, v. 26, p. 143–151.

[28] *D. Quillen.* On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc., 1969, v. 75, №6, p. 1293–1298.

[29] *J.-P. Serre,* Algèbre locale-multiplicitiés, Lecture Notes in Mathematics; 11, Berlin, Springer-Verlag, 1965.

[30] *L. Smith,* Homological Algebra and the Eilenberg–Moore Spectral Sequence, Transactions of Amer. Math. Soc., 1967, v.129, p. 58–93.

[31] *R. Stanley,* Combinatorics and Commutative Algebra, Progress in Mathematics; 41, Boston, Birkhauser, 1983.

[32] *Т.Е. Панов.* Эллиптический род для многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$, УМН, 1997, т. 53, №2, с. 181–182.

[33] *Т.Е. Панов.* Классификация с точностью до кобордизма многообразий, несущих простое действие группы $\mathbb{Z}/p$, Матем. заметки, 1998, т. 63, №2, с. 260–268.

[34] *Т.Е. Панов.* Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы $\mathbb{Z}/p$, через инварианты действия. Изв. РАН. Сер. матем., 1998, т. 62, №3, с. 87–120.

[35] *В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов.* Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками. УМН, 1998, т. 53, №3, с. 195–196.