Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.14, 515.16

Панов Тарас Евгеньевич

Алгебро-топологические инварианты многообразий с действием групп $\mathbb{Z}/p$ и T^n

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва – 1999

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского Государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук В. М. Бухштабер
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор Ю. П. Соловьев, кандидат физико-математических наук О. К. Миронов
Ведущая организация	—	Московский Педагогический Государственный Университет.

Защита диссертации состоится 11 июня 1999 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.053.05.05 при Московском Государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119899, ГСП, Москва, Воробьевы горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 11 мая 1999 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.053.05.05 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Изучение действий конечных циклических групп — одно из классических приложений методов алгебраической топологии. С начала 60-х годов в задачах такого рода начинают применяться обобщенные теории когомологий. Одним из основных подходов к изучению действий конечных групп и торов на многообразиях становится применение теории кобордизмов. Основы этого подхода были заложены в монографии Коннера и Флойда [CF][1], где в рамках теории кобордизмов были решены многие задачи теории неподвижных точек действий конечных групп на многообразиях и обозначены новые проблемы. Решению одной из таких проблем и посвящена глава 2 данной работы. Обширность применения методов теории кобордизмов в задачах о неподвижных точках объясняется ее геометричностью, которая позволяет описывать инварианты действия групп непосредственно в терминах классов кобордизмов неподвижных подмногообразий. Дальнейшее развитие этот метод получил благодаря применению аппарата теории формальных групп. Техника формальных групп была впервые применена в задачах о неподвижных точках действий конечных групп в работах С.П. Новикова ([No1][2], [No2][3]). В работах А.С. Мищенко ([Mi1][4], [Mi2][5]) в наиболее общем случае описан класс кобордизма многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$ (здесь и далее предполагается, что $p > 2$ — простое число) через наборы весов в неподвижных подмногообразиях и предъявлен полный набор образующих кольца унитарных $\mathbb{Z}/p$-кобордизмов. Одной из первых работ, посвященных применению методов теории кобордизмов к S^1-действиям, явилась работа С.М. Гусейн-Заде [Gu][6]. В работе О.Р. Мусина [Mu][7] найдены образующие колец унитарных S^1-кобордизмов и унитарных S^1-кобордизмов без неподвижных точек. Метод формальных групп для изучения действий группы $\mathbb{Z}/p$ получил существенное развитие в работе В.М. Бухштабера и С.П. Новикова [BN][8], где были также получены первые результаты для родов Хирцебруха многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$. Метод формальных групп оказался очень плодотворным и способствовал дальнейшему развитию взаимосвязей действий

[1][CF] П. Коннер, Э. Флойд. *Гладкие периодические отображения.* М.: Мир, 1969.

[2][No1] С.П. Новиков. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1967, т. 31, №4, с. 855–951.

[3][No2] С.П. Новиков. *Операторы Адамса и неподвижные точки,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, т. 32, №6, с. 1245–1263.

[4][Mi1] А.С. Мищенко. *Многообразия с действием группы $\mathbb{Z}_p$ и неподвижные точки,* Матем. заметки, 1968, т. 4, №4, с. 381–386.

[5][Mi2] А.С. Мищенко. *Бордизмы с действием группы $\mathbb{Z}_p$ и неподвижные точки*, Матем. сборник, 1969, т. 80, №3, с. 307–313.

[6][Gu] С.М. Гусейн-Заде. *U-действия окружности и неподвижные точки,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1971, т. 35, №5, с. 1120–1136.

[7][Mu] О.Р. Мусин. *Действия группы S^1 на многообразиях.* Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н., Москва, 1979.

[8][BN] В.М. Бухштабер, С.П. Новиков. *Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса,* Матем. сборник, 1971, т 84, №1, с. 81–118.

групп и алгебраической топологии. Многие результаты Коннера и Флойда получили красивую и простую интерпретацию в терминах так называемой "формальной группы геометрических кобордизмов".

Параллельно с применением теории кобордизмов и формальных групп развивался другой подход к изучению инвариантов действий групп $\mathbb{Z}/p$, S^1 и T^n на многообразиях, основанный на применении общей теоремы Атьи–Ботта о неподвижных точках (см. [AB][9]), обобщающей классическую формулу Лефшеца, и теоремы Атьи–Зингера об индексе эллиптического оператора.

Одними из важнейших инвариантов класса кобордизма многообразий являются *роды Хирцебруха.* Известно (Милнор, Новиков), что кольцо комплексных кобордизмов Ω_U представляет собой кольцо полиномов $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ от образующих четных размерностей $a_i \in \Omega_U^{-2i}$. В качестве образующих кольца $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ можно взять комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$. *Родом* называется произвольный кольцевой гомоморфизм $\varphi : \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \to R \otimes \mathbb{Q}$, $\varphi(1) = 1$, где R — некоторое кольцо с 1 и без делителей нуля (обычно полагают $R = \mathbb{Z}$, но часто полезно рассматривать роды со значениями в других кольцах). Ф. Хирцебрухом было показано, что каждый род соответствует некоторому формальному ряду $Q(x) = 1 + \ldots$ с коэффициентами в $R \otimes \mathbb{Q}$. С каждым родом Хирцебруха φ_Q, соответствующим ряду $Q(x)$, связывается формальная группа, логарифмом которой является ряд $g(u)$, функционально обратный к ряду $f(x) = \frac{x}{Q(x)}$.

Многие важные роды Хирцебруха впервые возникли в алгебраической топологии как индексы эллиптических комплексов расслоений на многообразии. Теорема Атьи–Зингера в когомологической форме позволяет свести вычисление индекса эллиптического комплекса к вычислению характеристических классов расслоений входящих в комплекс и характеристических классов касательного расслоения к многообразию.

Используемый нами подход к вычислению родов Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$ основан на применении обобщенной теоремы Лефшеца, полученной Атья и Боттом в работе [AB]. Формула Атьи–Ботта–Лефшеца обобщает классическую формулу Лефшеца для числа неподвижных точек и позволяет вычислять эквивариантный индекс эллиптического комплекса расслоений на многообразии через функции неподвижных подмногообразий. В частности, если группа $\mathbb{Z}/p$ действует на многообразии с конечным числом неподвижных точек, то соответствующий эквивариантный индекс выражается через наборы весов неподвижных точек (т.е. собственных чисел дифференциала действия образующей $\mathbb{Z}/p$ в неподвижных точках). О возможности применения формулы Атьи–Ботта для вычисления родов Хирцебруха многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$ было впервые указано С.П. Новиковым в работе [No2]. Затем В.М. Бухштабером и С.П. Новиковым в работе [BN] было показано, как выражается род Тодда, являющийся индексом эллиптического ком-

[9][AB] M.F. Atiyah, R. Bott. *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I,* Ann. of Math., 1967, v. 86, №2, p. 374–407.

плекса (а именно, комплекса Дольбо) расслоений на многообразии с действием $\mathbb{Z}/p$, через эквивариантный индекс того же комплекса для действия образующей группы $\mathbb{Z}/p$, входящий в формулу Атьи–Ботта–Лефшеца. Таким образом были выведены формулы, выражающие род Тодда через веса действия группы $\mathbb{Z}/p$ в неподвижных точках. В эти формулы входил теоретико-числовой след некоторого алгебраического расширения полей степени $p-1$, который затем также был эффективно вычислен. Аналогичный подход был использован и в нашей работе для получения формул для других родов многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$: сигнатуры (L-рода), эйлеровой характеристики, $\hat{A}$-рода, общей χ_y-характеристики и эллиптического рода, а также для получения общих соотношений для произвольных родов Хирцебруха, являющихся индексами эллиптических комплексов расслоений, ассоциированных с касательным расслоением многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$.

Здесь естественно возникает вопрос о взаимоотношении результатов относительно действий групп, получаемых в рамках подходов теории кобордизмов и теории индекса. Первые важные результаты в этом направлении были получены в работе [BN], где была описана связь формул, получаемых для рода Тодда многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$ методами теории индекса и теории кобордизмов, с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда. Эти уравнения представляют собой соотношения в кольце кобордизмов Ω_U между наборами элементов $\mathbb{Z}/p$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовало действие группы $\mathbb{Z}/p$ с такими наборами весов в неподвижных точках или неподвижных многообразиях с тривиальными нормальными расслоениями. Применение рода Хирцебруха $\varphi : \Omega_U \to R$ позволяет получить численные соотношения Коннера–Флойда в кольце R, соответствующие роду φ. В работе [BN] было показано, что разность между формулами для рода Тодда, получаемыми в рамках теории индекса и теории кобордизмов, есть в точности сумма уравнений Коннера–Флойда для рода Тодда. В нашей работе мы также проводим анализ взаимосвязи результатов, получаемых в рамках двух подходов, и, в частности, обобщаем результаты работы [BN] на случай произвольного рода Хирцебруха. Исследованию действий окружности в рамках теории кобордизмов и теории индекса посвящена работа И.М. Кричевера [Kr][10].

Особого интереса заслуживает так называемый эллиптический род. В работах Э. Виттена каждому гладкому ориентированному $2n$-мерному многообразию M^{2n} был сопоставлен инвариант — эквивариантный индекс оператора Дирака для канонического действия окружности S^1 на пространстве петель этого многообразия. С. Ошанин в работе [Oc][11] показал, что этот индекс является родом Хирцебруха, для которого ряд $f(x)$ есть эллиптический синус; отсюда и происходит название "эллиптический род". Для эллиптического рода многообразий с действием S^1 имеет место

[10][Kr] И.М. Кричевер. *Формальные группы и формула Атьи–Хирцебруха,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, т. 38, №6, с. 1289–1304.

[11][Oc] S. Ochanine. *Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques,* Topology, 1987, v. 26, p. 143–151.

так называемая “теорема жесткости"(см. [BT][12]), утверждающая, что эквивариантный эллиптический род $\varphi_{S^1}(M)$ такого многообразия, рассматриваемый как характер группы S^1, является тривиальным характером и равен эллиптическому роду $\varphi(M)$. В то же время эллиптический род принимает значения в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][\delta,\varepsilon]$ и его значение на любом многообразии M^{2n} является модулярной формой веса n для подгруппы $\Gamma_0(2)\subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, что позволяет для его изучения применять методы теории аналитических функций.

Другой важной задачей, связанной с действиями групп $\mathbb{Z}/p$ и S^1 на многообразиях является описание множества классов кобордизма многообразий, несущих действие $\mathbb{Z}/p$ или S^1 специального типа. Как отмечалось выше, задачам такого рода для действия $\mathbb{Z}/p$ были посвящены работы А.С. Мищенко [Mi1], [Mi2], а для действий S^1 — работа О.Р. Мусина [Mu]. Важным специальным классом действий $\mathbb{Z}/p$ являются так называемые *простые действия* — когда все неподвижные подмногообразия имеют тривиальное нормальное расслоение. Примерами простых действий являются действия, имеющие лишь изолированные неподвижные точки. Наряду с простыми действиями мы рассматриваем так называемые *сильно простые действия* $\mathbb{Z}/p$. Простое действие $\mathbb{Z}/p$ называется сильно простым, если наборы весов (собственных чисел дифференциала отображения, соответствующего образующей $g\in\mathbb{Z}/p$, в неподвижных точках) одинаковы для всех неподвижных подмногообразий одной размерности. Для сильно простых действий $\mathbb{Z}/p$ проблема описания множества классов кобордизма многообразий, несущих такое действие была полностью решена Коннером и Флойдом в работе [CF]. Обратим внимание на то, что даже в случае действия с изолированными неподвижными точками понятия простого и сильно простого действия отличаются. Мы же в главе 2 получаем полное описание множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$. Классификационные результаты получены в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов и, что особенно важно, в терминах характеристических чисел, что позволяет сформулировать ответ в чисто когомологических терминах. Результаты Коннера и Флойда получены в качестве следствия в нашей работе. В то же время методы, используемые в [CF], судя по всему, не позволяют получить наш более общий результат.

Как уже отмечалось выше, начиная с работы [No1], для решения задач, связанных с действиями $\mathbb{Z}/p$ использовалась теория формальных групп, которая вошла в топологию благодаря формальной группе геометрических кобордизмов. Рассматриваемая классификационная проблема была впервые четко сформулирована в работе [BN]. Фактически, первые результаты по этой проблеме были получены ранее, Г.Г. Каспаровым в работе [Ka][13], где, в частности, был получен результат, сформулированный в качестве следствия в разделе 12 нашей работы. В [Ka], как и в

[12][BT] R. Bott, C. Taubes. *On the rigidity theorems of Witten,* J. of Amer. Math. Soc., 1989, v. 2, p. 137–186.

[13][Ka] Г.Г. Каспаров. *Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, т. 33, №4, с. 735–747.

нашей работе, используется описание множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ как Ω_U-модуля, натянутого на некоторую систему коэффициентов степенной системы, определяемой формальной группой геометрических кобордизмов. Новый набор образующих этого Ω_U-модуля, введенный нами, позволил решить классификационную задачу в терминах характеристических чисел.

Применение методов алгебраической топологии оказалось весьма плодотворным и при изучении специальных T^n-действий, известных в алгебраической геометрии как *торические многообразия*, а также в возникающих в связи с этим комбинаторных задачах, связанных с многогранниками. Торические многообразия возникли в алгебраической геометрии (см. [Da][14]), и оказались весьма полезными благодаря применениям в теории многогранников и алгебраической топологии. В связи с этим перспективным представляется исследование этого специального типа действий тора наработанными методами теории кобордизмов и теории индекса. Наряду с этим интерес представляет также другой специальный тип действий тора на многообразиях, определяемых комбинаторными простыми многогранниками.

Под n-мерным *выпуклым многогранником* мы понимаем произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое как пересечение конечного числа полупространств. Любой выпуклый многогранник ограничивается конечным числом гиперплоскостей. Выпуклый n-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n граней коразмерности один (гиперграней). Таким образом, гиперплоскости, ограничивающие простой многогранник, находятся в общем положении.

В работе [DJ][15] каждому простому многограннику P^n с m гипергранями ставится в соответствие гладкое $(m+n)$-мерное многообразие $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора T^m, определяемое лишь комбинаторным типом многогранника. Многие многообразия, играющие важную роль в различных аспектах топологии, алгебраической и симплектической геометрии, могут быть реализованы в виде многообразия $\mathcal{Z}_P$ или как фактор-многообразия $\mathcal{Z}_P/T^k$ для некоторой торической подгруппы $T^k \subset T^m$, действующей на $\mathcal{Z}_P$ свободно. При этом оказывается, что ранг торической подгруппы, которая может действовать свободно на многообразии $\mathcal{Z}_P$, не превышает $m-n$. Многообразия, которые получаются при факторизации $\mathcal{Z}_P$ по действию тора максимально возможного ранга, мы называем *квазиторическими*, так как среди них содержатся все неособые проективные торические многообразия. На каждом (квази)торическом многообразии имеется индуцированное действие тора T^n, пространством орбит которого является исходный простой многогранник P^n. Квазиторические многообразия (под названием "toric manifolds") впервые появились в работе [DJ], где были описаны многие важные алгебро-топологические свойства этих многобра-

[14][Da] В.И. Данилов, *Геометрия торических многообразий,* УМН, 1978, т. 33, №2, с. 85–134.

[15][DJ] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions,* Duke Math. Journal, 1991, v. 62, №2, p. 417–451.

зий.

Таким образом, важной задачей является изучение взаимосвязи между комбинаторной структурой простых многогранников и топологией описанных выше многообразий, определяемых этими многогранниками. Этому и посвящена глава 3 нашей работы. Важнейшим алгебраическим инвариантом простого многогранника является градуированное кольцо $k(P)$ (где k — поле), называемое *кольцом граней* (или кольцом Стенли–Райснера). Это кольцо является фактор-кольцом кольца многочленов $k[v_1,\dots,v_m]$ по некоторому однородному идеалу. Тогда можно рассмотреть соответствующие градуированные модули когомологий $\mathrm{Tor}^{-i}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$, где $i>0$. Эти модули уже изучались ранее, например, ряд результатов относительно чисел Бетти $\beta^i(k(P))=\dim_k\mathrm{Tor}^{-i}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$ приведен в работе Р. Стенли [St][16]. Мы показываем, что биградуированный k-модуль $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$ является биградуированной k-алгеброй и соответствующая ей градуированная алгебра изоморфна алгебре когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$. Таким образом, когомологии многообразия $\mathcal{Z}_P$ приобретают каноническую структуру *биградуированной* алгебры. При доказательстве мы используем спектральную последовательность Эйленберга–Мура. Эта спектральная последовательность активно применялась в топологии для вычисления когомологий однородных пространств групп Ли. Далее мы показываем, что биградуированная алгебра когомологий $\mathcal{Z}_P$ является алгеброй когомологий некоторого биградуированного комплекса, тесно связанного с комбинаторной структурой P^n. Таким образом, введенная нами биградуированная алгебра когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$ несет в себе полную информацию о комбинаторике исходного многогранника P^n.

Цель работы. Получить общие формулы, выражающие род Хирцебруха стабильно комплексного многообразия в терминах действия группы $\mathbb{Z}/p$ на нем, и исследовать их на примерах различных классических родов и эллиптического рода; дать описание множества классов кобордизма многообразий, несущих простое действие $\mathbb{Z}/p$; изучить взаимосвязи алгебро-топологических инвариантов (в частности, колец когомологий) специальных многообразий с действием тора T^n, определяемых простыми многогранниками, с комбинаторикой многогранников.

Методы исследования. В работе используются методы теории индекса эллиптических операторов на многообразиях (обобщенная формула Лефшеца и теорема Атьи–Зингера), методы теории кобордизмов и формальных групп. Также используется техника спектральных последовательностей (спектральные последовательности Лере–Серра и Эйленберга–Мура).

[16][St] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra,* Progress in Mathematics; 41, Boston, Birkhauser, 1983.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются, в основном, в следующем:
1) Получены общие формулы, выражающие род Хирцебруха стабильно комплексного многообразия, вычисляемый как индекс эллиптического комплекса расслоений, ассоциированных с касательным расслоением, в терминах действия группы $\mathbb{Z}/p$ на нем.
2) Для большинства классических родов Хирцебруха и эллиптического рода получены явные формулы, выражающие соответствующий род через наборы весов в неподвижных точках.
3) Приведено полное описание множества классов кобордизма многообразий, несущих простое действие $\mathbb{Z}/p$.
4) При помощи спектральной последовательности Эйленберга–Мура вычислены кольца когомологий специальных многообразий с действием тора, определяемых простыми многогранниками, что позволило описать взаимосвязь с комбинаторикой многогранников.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области алгебраической топологии, теории индекса, комбинаторики многогранников и алгебраической геометрии.

Апробация диссертации. Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на топологической конференции "Александровские чтения"(Москва, май 1997), на конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, сентябрь 1998), на конференции "Геометрия и топология'98"(Орхус, Дания, август 1998), а также на семинарах механико-математического факультета МГУ "Группы Ли и теория инвариантов"каф. высшей алгебры под руководством проф. Э.Б. Винберга, "Некоммутативная геометрия, топология и анализ"каф. высшей геометрии и топологии под руководством проф. И.К. Бабенко, проф. А.С. Мищенко, проф. Ю.П. Соловьева, проф. Е.В. Троицкого, к.ф.-м.н. А.А. Ирматова, к.ф.-м.н. В.М. Мануйлова. Результаты диссертации также неоднократно обсуждались на семинаре "Вычислительная геометрия и топология"кафедры высшей геометрии и топологии под руководством д.ф.-м.н. В.М. Бухштабера.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, включающих в себя 16 разделов. Текст диссертации изложен на 87 страницах. Список литературы содержит 35 наименований.

Содержание работы

Введение. Во введении приводится краткий исторический обзор исследований по действиям групп $\mathbb{Z}/p$ и T^n, связанных с темой диссертации, и формулируются основные результаты диссертации.

Глава 1. Первая глава посвящена вычислению родов Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$. Для действий, имеющих конечное число неподвижных точек, в рамках теории индекса эллиптических операторов получены общие формулы, выражающие род Хирцебруха через инварианты действия — наборы весов в неподвижных точках. Ряд результатов обобщен на случай так называемых *простых* действий — когда все неподвижные подмногообразия имеют тривиальные нормальные расслоения. Явные формулы приводятся для классических родов и для эллиптического рода. Описана связь полученных соотношений с результатами о неподвижных точках, полученными в рамках теории кобордизмов, в частности с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда на наборы весов неподвижных точек.

В разделах 1–3 приводится необходимая информация о комплексных кобордизмах, родах Хирцебруха, эллиптических комплексах и обобщенной формуле Лефшеца. Здесь же получен ряд вспомогательных результатов, применяемых далее для вычисления конкретных родов.

Раздел 4 посвящен вычислению эйлеровой характеристики, рода Тодда и L-рода (сигнатуры) многообразия, несущего действие $\mathbb{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек, через веса в неподвижных точках.

В подразделе 4.1 производятся вычисления для эйлеровой характеристики. Здесь нашими методами получена формула

$$e(M) \equiv q \mod p,$$

где $e(M)$ — эйлерова характеристика (стабильно комплексного) многообразия M, q — число неподвижных точек действия $\mathbb{Z}/p$.

В подразделе 4.2 мы приводим результаты Бухштабера и Новикова для рода Тодда. Здесь же вводятся так называемые “функции Атьи–Ботта” $AB_{\mathrm{td}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ от наборов весов $(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $x_i^{(j)} \in \mathbb{Z}/p$ неподвижных точек $\mathcal{P}_j$, $j = 1, \dots, q$, соответствующие роду Тодда. Эти функции затем будут обобщены на случай произвольного рода, вычисляемого как индекс эллиптического комплекса. Для функций Атьи–Ботта имеет место соотношение

$$\mathrm{td}(M) \equiv \sum_{j=1}^{q} AB_{\mathrm{td}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \mod p,$$

что позволяет вычислять рода Тодда через веса в неподвижных точках. Однако в определение функций Атьи–Ботта входит теоретико-числовой след некоторого элемента для расширения полей $\mathbb{Q}(\zeta) \to \mathbb{Q}$, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, который в свою очередь требует явного вычисления (это вычисление и было проведено в работе [BuN]).

В подразделе 4.3 производятся вычисления для L-рода (сигнатуры). Полученные здесь формулы имеют вид

$$AB_L(x_1, \ldots, x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{q} AB_L\big(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\big) \equiv L(M) \mod p.$$

Затем производится вычисление теоретико-числового следа в определении функций Атьи–Ботта, что окончательно дает следующую формулу

$$L(M) \equiv \sum_{j=1}^{q} \sum_{m=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^L} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^L_{x_k^{(q)}}} \right\rangle_m \mod p,$$

где $[u]_p^L$ — p-я степень в формальной группе, связанной с L-родом, а $\langle\cdot\rangle_m$ обозначает коэффициент при u^m.

В разделе 5 получена общая теорема, позволяющая выразить род Хирцебруха φ, вычисляемый как индекс эллиптического комплекса расслоений, ассоциированных с касательным расслоением, через наборы весов неподвижных точек действия $\mathbb{Z}/p$ при помощи теоретико-числового следа некоторого расширения полей:

Теорема. *Имеет место следующая формула для* $\varphi(M)$:

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\big(-2\pi i x_k^{(j)}/p\big)} \mod p,$$

где $\operatorname{Tr} : \mathbb{Q}_p(\zeta) \to \mathbb{Q}_p$ *— теоретико-числовой след,* $\zeta = e^{2\pi i/p}$.

Таким образом, вычисление родов Хирцебруха многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек сводится в каждом конкретном случае к вычислению некоторого теоретико-числового следа. Здесь же вводятся функции Атьи–Ботта $AB_\varphi\big(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\big)$ от неподвижных точек для произвольного рода φ, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{q} AB_\varphi\big(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\big) \equiv \varphi(M) \mod p.$$

В разделах 6 и 7 получены явные формулы для $\hat{A}$-рода и χ_y-характеристики. Структура этих формул аналогична структуре формул для сигнатуры, полученных в разделе 4.3.

В разделе 7 мы обсуждаем взаимосвязи результатов, получаемых в рамках теории индекса, с теорией кобордизмов. Здесь показывается, что разность между формулами, полученными двумя методами для произвольного рода, есть взвешенная сумма уравнений Коннера–Флойда для этого рода с целыми коэффициентами. Именно, имеет место

Теорема. *Разность между формулой*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}}\right) \mod p, \qquad \theta = f_{\varphi}\left(-\frac{2\pi i}{p}\right),$$

и суммой уравнений Коннера–Флойда для рода φ с некоторыми целыми p-адическими коэффициентами дает следующую формулу для рода φ:

$$\varphi(M) \equiv \sum_{j=1}^{q} \left\langle \frac{pu}{[u]^{\varphi}_{p}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n \mod p.$$

В разделе 8 мы получаем формулы для эллиптического рода многообразий с действием $\mathbb{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек:

$$\varphi(M^{2n}) \equiv \sum_{j=1}^{r} \left\langle \frac{pu}{[u]_{p}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}} \right\rangle_n \mod p\mathbb{Z}[\delta, \varepsilon],$$

где $[u]_m$ — степенная система, соответствующая эллиптическому роду. В качестве приложения мы выводим соотношения на полиномы Лежандра, которые получаются применением этих формул к некоторым специальным действиям $\mathbb{Z}/p$ на $\mathbb{C}P^n$.

В разделе 9 мы обобщаем результаты раздела 5 на случай действий $\mathbb{Z}/p$, для которых все неподвижные подмногообразия имеют тривиальные нормальные расслоения — так называемые простые действия.

Теорема. *Имеет место следующая формула для $\varphi(M)$:*

$$\begin{aligned}\varphi(M) &\equiv -\sum_{\nu} \operatorname{Tr}\left(\prod_{j} \frac{1}{f\left(-2\pi i x_j^{(\nu)}/p\right)}\right)\varphi(M^g_{\nu}) \\ &= -\sum_{\nu} \operatorname{Tr}\left(\prod_{j} \frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_j^{\nu}}}\right)\varphi(M^g_{\nu}) \mod p,\end{aligned}$$

где $M^g = \bigcup_{\nu} M^g_{\nu}$ — множество неподвижных точек, $\theta = f_{\varphi}(-2\pi i/p)$, $[\theta]_k$ — k-я степень в формальной группе, соответствующей роду φ, $\operatorname{Tr} : \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}) \to \mathbb{Q}$ — теоретико-числовой след.

Глава 2 Вторая глава посвящена изучению простых действий $\mathbb{Z}/p$ с точки зрения теории кобордизмов. Здесь приводится описание множества классов кобордизмов многообразий, несущих простое действие группы $\mathbb{Z}/p$, что дает решение задачи, поставленной в работах [BN], [CF]. Формулировка классификационного результата в терминах характеристических чисел указывает на обсуждавшуюся в [BN] аналогию с теоремой Стонга–Хаттори о выделении наборов целых чисел, являющихся числами Чженя стабильно комплексных многообразий.

В разделе 10 мы сводим задачу об описании множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ к описанию некоторых специальных модулей над кольцами $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$ и $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ (здесь $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел). Это удается сделать благодаря двум обстоятельствам. Во-первых, простые действия $\mathbb{Z}/p$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с соотношениями в Ω_U-модуле $U_*(B\mathbb{Z}/p)$ эквивариантных бордизмов со свободным действием $\mathbb{Z}/p$ между специальными элементами этого модуля — так называемыми *инвариантами Коннера–Флойда* (см. [BN]). Во-вторых, имеется "гомоморфизм реализации"из модуля соотношений такого типа в кольцо $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$, ставящий в соответствие соотношению класс кобордизмов $\mod p$ многообразия, на котором это соотношение реализуется. Образ этого гомоморфизма описывается в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов. Это позволяет свести нашу проблему к описанию $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$, где $\widetilde{\Lambda}(1) = \Lambda^+(1) \cdot \Omega_U$ — Ω_U-модуль, натянутый на положительную часть $\Lambda^+(1)$ кольца коэффициентов $\Lambda(1)$ степенной системы $[u]_k$. Далее это можно свести к описанию $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модулей $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ и $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, где $\widetilde{\Lambda}_p(1)$ — Ω_U-модуль, натянутый на $\Lambda^+(1)$ и p. Эти модули являются идеалами в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$.

В разделе 11 мы находим образующие модулей $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$, $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ и $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$. Рассмотрим степени в формальной группе геометрических кобордизмов (степенную систему)

$$[u]_k = ku + \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n^{(k)} u^{n+1}, \quad \alpha_n^{(k)} \in \Omega_U^{-2n}.$$

Теорема. *В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять следующие коэффициенты $\alpha_n \in \Omega_U^{-2n}$:*

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1, \\ \alpha_n^{(p)}, & \text{если } n \text{ делится на } p-1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где p_1 — простой первообразный корень $\mod p$ (образующая циклической группы $(\mathbb{Z}/p)^*$).

Следствие. *В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять* *следующие:*

$$\alpha_n = \begin{cases} p, & \text{если } n = 0, \\ \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1,\ p_1 \text{ — то же, что и выше}, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1,\ k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$ можно взять

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1,\ k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

В остальных размерностях образующих нет.

Пусть $\Omega_U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mathbb{C}P^1/2, \mathbb{C}P^2/3, \ldots, \mathbb{C}P^{n-1}/n, \ldots]$ — подкольцо в $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$, состоящее из элементов, на которых все когомологические характеристические числа принимают целые значения (это кольцо также является кольцом коэффициентов логарифма формальной группы геометрических кобордизмов). Теорема Стонга–Хаттори утверждает, что подкольцо $\Omega_U \subset \Omega_U(\mathbb{Z})$ выделяется тем условием, что на его элементах принимают целые значения все характеристические числа *в K-теории*. В разделе 12 мы, используя описание структуры $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$, доказываем результат, аналогичный теореме Стонга и Хаттори — даем описание множества классов кобордизма многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ в терминах характеристических чисел.

Теорема. *Элемент $\sigma \in \Omega_U(\mathbb{Z})^{-2n} \otimes \mathbb{Z}_p$ лежит в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$-модуле $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_p$ и, таким образом, является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда все характеристические числа из K-теории $s_\omega(\sigma)$, $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\|\omega\| = \sum_i k_i \cdot i \leqslant n$ лежат в $\mathbb{Z}_p$ и для всех разбиений ω, кратных $p-1$ когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$ делятся на p.*

Следствие. *Элемент $\sigma \in \Omega_U$ является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда для всех разбиений ω, кратных $p-1$ когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$ делятся на p.*

Следствие. *В каждом классе кобордизма многообразий M^n, $n \leqslant 4p-6$, содержатся многообразия, несущие простое действие $\mathbb{Z}/p$.*

Глава 3 Третья глава посвящена развитию взаимосвязей между алгебраической топологией гладких многообразий и комбинаторикой многогранников. Исследования в этом направлении были стимулированы задачами, возникшими впервые в теории торических многообразий. Центральным понятием данной главы является многообразие с действием компактного тора, определяемое комбинаторной структурой простого многогранника.

В разделе 13 мы вводим необходимые для дальнейшего конструкции, связанные с простыми многогранниками. Пусть P^n — простой многогранник, $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ — множество граней P^n коразмерности один и k — коммутативное кольцо. Образуем кольцо многочленов $k[v_1, \ldots, v_m]$, где v_i рассматриваются как переменные степени 2, соответствующие граням F_i. *Кольцом граней* $k(P)$ простого многогранника P называется фактор-кольцо $k[v_1, \ldots, v_m]/I$, где

$$I = (v_{i_1} \ldots v_{i_s} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_s} = \varnothing).$$

В разделе 14 мы вводим многообразия с действием тора, определяемые простыми многогранниками и доказываем ряд вспомогательных утверждений. Рассмотрим m-мерный тор $T^m = S^1 \times \ldots \times S^1$. Введем свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}^m$ и установим взаимно однозначное соответствие между гипергранями P^n и элементами базиса $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в $\mathbb{Z}^m$. Определим канонические координатные подгруппы $T^k_{i_1,\ldots i_k} \subset T^m$ как торы, соответствующие координатным подрешеткам в $\mathbb{Z}^m$ (т.е. подрешеткам, натянутым на векторы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$). Тогда многообразие Z_P, связанное с простым многогранником P^n, определяется как

$$\mathcal{Z}_P = (T^m \times P^n)/\sim\ \mid (g_1, p) \sim (g_2, q) \Leftrightarrow p = q,\ g_1 g_2^{-1} \in T^k_{i_1,\ldots,i_k},$$
$$\text{где } F_{i_1}, \ldots, F_{i_k} \text{ — все гиперграни, содержащие точку } p \in P^n.$$

Как следует из определения, $\dim \mathcal{Z}_P = m + n$; кроме того, действие тора T^m на $T^m \times P^n$, очевидно, задает действие T^m на $\mathcal{Z}_P$.

В разделе 15 мы описываем спектральную последовательности Эйленберга–Мура и в качестве первого приложения выводим при помощи нее известную теорему о когомологиях (квази)торического многообразия.

В разделе 16 мы вычисляем когомологии многообразий $\mathcal{Z}_P$. Мы доказываем, что алгебра когомологий $\mathcal{Z}_P$ изоморфна алгебре когомологий $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$ кольца граней $k(P)$ соответствующего простого многогранника P^n. Далее, имеет место

Теорема. *Имеет место изоморфизм градуированных алгебр:*

$$H^*(\mathcal{Z}_P) = H[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m], d],$$
$$\operatorname{bideg} v_i = (0, 2), \quad \operatorname{bideg} u_i = (-1, 2); \quad d(1 \otimes u_i) = v_i \otimes 1, \quad d(v_i \otimes 1) = 0.$$

При помощи этой теоремы различные комбинаторные свойства простых многогранников можно интерпретировать в терминах когомологий определяемых ими многообразий $\mathcal{Z}_P$. Ряд примеров рассмотрен здесь же.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановку многих задач, стимулирующие обсуждения и внимание к работе, академику РАН С.П. Новикову за постановку ряда задач, а также Л.А. Алания и О.Р. Мусину за ценные советы и обсуждения.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Т. Е. Панов. *Эллиптический род для многообразий с действием группы* $\mathbb{Z}/p$, Успехи мат. наук, 1997, т. 52, № 2, с. 181–182.

[2] Т. Е. Панов. *Классификация с точностью до кобордизма многообразий, несущих простое действие группы* $\mathbb{Z}/p$, Матем. заметки, 1998, т. 63, № 2, с. 260–268.

[3] Т. Е. Панов. *Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы* $\mathbb{Z}/p$*, через инварианты действия*, Известия РАН. Серия матем., 1998, т. 62, № 3, с. 87–120.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками*, Успехи мат. наук, 1998, т. 53, № 3, с. 195–196.