ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2008, т. 263, с. 159–172

УДК 512.745+515.14

Торические множества типа Кемпфа–Несс[1]

©2008 г. Т. Е. Панов[2]

Поступило в марте 2008 г.

В теории действий алгебраических групп на аффинных многообразиях понятие множества Кемпфа–Несс позволяет заменить категорное фактор-пространство на фактор-пространство по действию максимальной компактной подгруппы. Используя последние достижения "торической топологии", мы показываем, что понятие множества Кемпфа–Несс может быть определено для класса действий алгебраического тора на квазиаффинных многообразиях (дополнениях конфигураций координатных подпространств), возникающих в подходе Батырева–Кокса к торическим многообразиям на основе геометрической теории инвариантов. Затем мы применяем наши результаты о когомологиях момент-угол-комплексов к вычислению когомологий этих "торических" множеств Кемпфа–Несс. В случае неособых проективных торических многообразий множества Кемпфа–Несс могут быть описаны как полные пересечения вещественных квадрик в комплексном пространстве.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие множества Кемпфа–Несс играет важную роль в геометрической теории инвариантов (см., например, [3, § 6.12] или [17]). Для данного аффинного многообразия S с действием редуктивной группы G можно найти компактное подмножество $KN \subset S$, для которого категорный фактор $S/\!\!/G$ гомеоморфен обычному фактор-пространству KN/K множества KN по действию максимальной компактной подгруппы $K \subset G$. Кроме того, множество Кемпфа–Несс KN является K-эквивариантным деформационным ретрактом многообразия S.

Нашей целью является расширение понятия множества Кемпфа–Несс на класс алгебраических действий тора на квазиаффинных многообразиях (дополнениях конфигураций координатных подпространств), возникающих в теории торических многообразий. Хотя мы определяем наши торические множества Кемпфа–Несс несколько иным способом, чем в аффинной ситуации, они обладают двумя приведенными выше характеристическими свойствами. В случае проективного торического многообразия наше множество Кемпфа–Несс отождествляется с поверхностью уровня отображения моментов, соответствующего некоторому действию компактного тора на комплексном пространстве [11, § 4]. В то же время торические множества Кемпфа–Несс являются частным случаем момент-угол-комплексов [2], что открывает новые взаимосвязи между торической топологией и геометрической теорией инвариантов.

В разд. 2 мы описываем конструкцию множества Кемпфа–Несс для действия редуктивной группы на аффинном многообразии. В разд. 3 мы вводим торические множества Кемпфа–Несс на основе подхода к торическим многообразиям в рамках геометрической теории инвариантов и конструкции момент-угол-комплексов. В разд. 4 мы рассматриваем действия тора, возникающие из нормальных вееров выпуклых многогранников. В этом случае торическое множество Кемпфа–Несс допускает прозрачную геометрическую интерпретацию как полное пересечение вещественных квадратичных гиперповерхностей. Соответствующее торическое многообразие

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00541, 08-01-91855-КО), гранта Президента РФ (проект НШ-1824.2008.1) и стипендии П. Делиня (премия Бальзана 2004 г. по математике).

[2] Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

является проективным, и наше множество Кемпфа–Несс представляет собой поверхность уровня для соответствующего отображения моментов, что позволяет продолжить аналогию с аффинным случаем (см. разд. 5). В последнем разд. 6 мы на основе предыдущих вычислений с момент-угол-комплексами даем описание кольца когомологий множества Кемпфа–Несс. Как видно из приведенного примера вычислений, наши множества Кемпфа–Несс могут иметь весьма сложную топологическую структуру; многие интересные явления возникают даже в случае действий тора, соответствующих простым 3-мерным веерам.

2. МНОЖЕСТВА КЕМПФА–НЕСС ДЛЯ АФФИННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В этом разделе мы кратко излагаем определения и конструкции геометрического фактор-пространства и множества Кемпфа–Несс для действия редуктивной группы на аффинном многообразии. Детали можно найти в [3, § 6.12] и [17].

Пусть *редуктивная* алгебраическая группа G действует на комплексном аффинном многообразии X. Ввиду некомпактности группы G взятие обычного (или *геометрического*) фактор-пространства X/G со стандартной фактор-топологией не всегда дает пространство с хорошими свойствами (например, это фактор-пространство может быть нехаусдорфовым). Для того чтобы переход к фактор-пространству не выводил за пределы категории алгебраических многообразий, вводится конструкция *категорного фактор-пространства*, которую мы вкратце описываем ниже.

Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}[X]$ регулярных функций на X, так что $X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[X]$. Обозначим через $X/\!\!/G$ аффинное многообразие, соответствующее G-инвариантной подалгебре $\mathbb{C}[X]^G$, и рассмотрим морфизм многообразий $\varrho\colon X \to X/\!\!/G$, двойственный к вложению алгебр $\mathbb{C}[X]^G \to \mathbb{C}[X]$. Тогда ϱ является сюръективным морфизмом, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между замкнутыми орбитами действия G на X и точками многообразия $X/\!\!/G$. Кроме того, ϱ является универсальным в классе морфизмов из X, постоянных на G-орбитах, в категории алгебраических многообразий (что объясняет термин “категорное фактор-пространство”). Категорное фактор-пространство $X/\!\!/G$ совпадает с геометрическим X/G тогда и только тогда, когда все G-орбиты замкнуты.

Пример 2.1. Рассмотрим стандартное действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}$ (здесь $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа комплексных чисел). Тогда категорное фактор-пространство $\mathbb{C}/\!\!/\mathbb{C}^*$ есть точка, а $\mathbb{C}/\mathbb{C}^*$ — нехаусдорфово пространство из двух точек.

Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ — представление группы G, пусть K — максимальная компактная подгруппа в G, и пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — некоторая K-инвариантная эрмитова форма на W с ассоциированной нормой $\|\cdot\|$. Для каждого $v \in W$ рассмотрим функцию $F_v\colon G \to \mathbb{R}$, которая на элементе g принимает значение $\frac{1}{2}\|gv\|^2$. Эта функция имеет критическую точку тогда и только тогда, когда орбита Gv замкнута, и все критические точки функции F_v являются минимумами [3, Теорема 6.18]. Теперь определим множество $KN \subset W$ одним из следующих эквивалентных условий:

$$\begin{aligned} KN &= \bigl\{v \in W\colon (dF_v)_e = 0\bigr\} = \qquad \text{(здесь } e \in G \text{ — единица)}\\ &= \bigl\{v \in W\colon T_vGv \perp v\bigr\} =\\ &= \bigl\{v \in W\colon \langle\gamma v, v\rangle = 0 \text{ для всех } \gamma \in \mathfrak{g}\bigr\} =\\ &= \bigl\{v \in W\colon \langle\kappa v, v\rangle = 0 \text{ для всех } \kappa \in \mathfrak{k}\bigr\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\mathfrak{g}$ (соответственно $\mathfrak{k}$) — алгебра Ли группы G (соответственно K) и мы считаем $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g} \subset$ $\subset \operatorname{End}(W)$. Следовательно, каждая точка $v \in KN$ является ближайшей к началу координат точкой в своей орбите Gv. Тогда KN называется *множеством Кемпфа–Несс* для W.

Мы можем предполагать, что аффинное G-многообразие X эквивариантно вложено как замкнутое подмногообразие в некотором пространстве W представления группы G. Тогда *множество Кемпфа–Несс* KN_X многообразия X определяется как $KN \cap X$.

Важность понятия множества Кемпфа–Несс для изучения действий групп объясняется следующим результатом, доказательство которого можно найти в [17, (4.7), (5.1)].

Теорема 2.2. (а) *Композиция* $KN_X \hookrightarrow X \to X/\!\!/G$ *является собственным отображением и индуцирует гомеоморфизм* $KN_X/K \to X/\!\!/G$.

(б) *Имеется* K*-эквивариантная деформационная ретракция* X *на* KN_X.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ ТОРА

Пусть $N \cong \mathbb{Z}^n$ — целочисленная решетка ранга n и $N_\mathbb{R} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ — объемлющее векторное пространство. Выпуклое подмножество $\sigma \in N_\mathbb{R}$ называется *конусом*, если существуют векторы $a_1, \dots, a_k \in N$ такие, что

$$\sigma = \bigl\{\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k\colon\ \mu_i \in \mathbb{R},\ \mu_i \geq 0\bigr\}.$$

Если при этом множество $\{a_1, \dots, a_k\}$ минимально по включению, то оно называется *набором образующих* конуса σ. Конус называется *строго выпуклым*, если он не содержит прямой; далее мы будем рассматривать лишь строго выпуклые конусы. Конус σ называется *регулярным* (соответственно *симплициальным*), если образующие $a_1, \dots, a_k$ можно выбрать так, что они составляют часть $\mathbb{Z}$-базиса решетки N (соответственно часть $\mathbb{R}$-базиса пространства $N_\mathbb{R}$). *Гранью* конуса σ называется пересечение $\sigma \cap H$ конуса с гиперплоскостью H, содержащей σ в одном из определяемых ею полупространств; грань конуса сама является конусом. Каждая образующая конуса σ порождает одномерную грань, и каждая грань порождается подмножеством набора образующих.

Конечный набор $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ конусов в $N_\mathbb{R}$ называется *веером*, если грань каждого конуса из Σ принадлежит Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Веер Σ называется *регулярным* (соответственно *симплициальным*), если каждый конус из Σ является регулярным (соответственно симплициальным). Веер $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ называется *полным*, если $N_\mathbb{R} = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_s$.

Пусть $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — мультипликативная группа комплексных чисел, а $\mathbb{S}^1$ — подгруппа чисел, равных по абсолютной величине 1. *Алгебраический тор* $T_\mathbb{C} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^n$ является коммутативной комплексной алгебраической группой с максимальной компактной подгруппой $T = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{S}^1 \cong (\mathbb{S}^1)^n$ — (компактным) *тором*. *Торическим многообразием* называется нормальное алгебраическое многообразие X, содержащее алгебраический тор $T_\mathbb{C}$ в качестве открытого по Зарискому подмножества таким образом, что естественное действие $T_\mathbb{C}$ на себе продолжается до действия на X.

Имеется классическая конструкция [5], устанавливающая взаимно однозначное соответствие между веерами в $N_\mathbb{R}$ и комплексными n-мерными торическими многообразиями. При этом регулярные вееры соответствуют неособым многообразиям, а полные вееры соответствуют компактным многообразиям. Ниже мы опишем другую конструкцию торических многообразий при помощи факторизации алгебраических действий; эта конструкция появилась в работах нескольких авторов (см. [6, 10]).

Далее в этом разделе мы предполагаем, что одномерные конусы веера Σ порождают $N_\mathbb{R}$ как векторное пространство (например, это так, если Σ — полный веер). Пусть Σ содержит m одномерных конусов. Мы занумеруем их произвольным образом и рассмотрим отображение $\mathbb{Z}^m \to N$, переводящее i-й базисный вектор из $\mathbb{Z}^m$ в целочисленный примитивный вектор a_i, порождающий i-й одномерный конус. Соответствующее отображение алгебраических торов дополняется до точной последовательности

$$1 \to G \to (\mathbb{C}^*)^m \to T_{\mathbb{C}} \to 1, \tag{3.1}$$

где группа G изоморфна произведению $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$ и конечной подгруппы. Если веер Σ является регулярным и содержит хотя бы один n-мерный конус, то $G \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n}$. Мы также имеем точную последовательность соответствующих максимальных компактных подгрупп

$$1 \to K \to \mathbb{T}^m \to T \to 1 \tag{3.2}$$

(здесь и далее мы обозначаем $\mathbb{T}^m = (\mathbb{S}^1)^m$).

Скажем, что подмножество $\{i_1, \ldots, i_k\} \in [m] = \{1, \ldots, m\}$ является *g-подмножеством*, если $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ есть подмножество образующих некоторого конуса из Σ. Набор всех g-подмножеств замкнут относительно включения, т.е. g-подмножества образуют (абстрактный) симплициальный комплекс на множестве $[m]$, который мы обозначим $\mathcal{K}_\Sigma$. Заметим, что если Σ является полным симплициальным веером, то $\mathcal{K}_\Sigma$ является триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы. Для каждого конуса $\sigma \in \Sigma$ обозначим через $g(\sigma) \subseteq [m]$ множество его образующих. Теперь положим

$$A(\Sigma) = \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_k\} \text{ не есть } g\text{-подмножество}} \bigl\{z \in \mathbb{C}^m\colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\bigr\}$$

и

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus A(\Sigma).$$

Оба множества определяются лишь комбинаторной структурой симплициального комплекса $\mathcal{K}_\Sigma$; множество $U(\Sigma)$ совпадает с *дополнением конфигурации координатных подпространств* $U(\mathcal{K}_\Sigma)$, рассматриваемым в [8, § 8.2] и [2, § 9.2].

Множество $A(\Sigma)$ является аффинным многообразием, а его дополнение $U(\Sigma)$ имеет простое аффинное покрытие, как описано в следующем утверждении.

Предложение 3.1. *Для каждого $\sigma \in \Sigma$ положим $z^{\widehat{\sigma}} = \prod_{j \notin g(\sigma)} z_j$. Определим*

$$V(\Sigma) = \bigl\{z \in \mathbb{C}^m\colon\ z^{\widehat{\sigma}} = 0 \ \text{ для всех } \ \sigma \in \Sigma\bigr\}$$

и

$$U(\sigma) = \bigl\{z \in \mathbb{C}^m\colon\ z_j \neq 0 \ \text{ при } \ j \notin g(\sigma)\bigr\}.$$

Тогда $A(\Sigma) = V(\Sigma)$ и

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus V(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma).$$

Доказательство. Мы имеем

$$\mathbb{C}^m \setminus V(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigl\{z \in \mathbb{C}^m\colon\ z^{\widehat{\sigma}} \neq 0\bigr\} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma).$$

С другой стороны, для каждой точки $z \in \mathbb{C}^m$ обозначим через $\omega(z) \subseteq [m]$ множество ее координат, обращающихся в нуль. Тогда $z \in \mathbb{C}^m \setminus A(\Sigma)$, если и только если $\omega(z)$ является g-подмножеством. Это эквивалентно тому, что $z \in U(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$. Следовательно, $\mathbb{C}^m \setminus A(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma)$, что доказывает утверждение. $\square$

Дополнение $U(\Sigma)$ инвариантно относительно действия $(\mathbb{C}^*)^m$ на $\mathbb{C}^m$. Легко видеть, что подгруппа G из (3.1) действует на $U(\Sigma)$ с конечными стационарными подгруппами, если веер Σ

является симплициальным (и действует свободно, если Σ является регулярным). Соответствующее фактор-пространство отождествляется с торическим многообразием X_Σ, соответствующим вееру Σ. Более точное утверждение выглядит следующим образом.

Теорема 3.2 (см. [10, Theorem 2.1]). *Предположим, что одномерные конусы веера Σ порождают $N_\mathbb{R}$ как векторное пространство.*

(а) *Торическое многообразие X_Σ канонически изоморфно категорному фактор-пространству $U(\Sigma)$ по действию G.*

(б) *X_Σ является геометрическим фактор-пространством $U(\Sigma)$ по действию G тогда и только тогда, когда веер Σ является симплициальным.*

Таким образом, если Σ является симплициальным (в частности, регулярным) веером, удовлетворяющим условию теоремы 3.2, то все орбиты G-действия на $U(\Sigma)$ замкнуты и категорное фактор-пространство $U(\Sigma)/\!\!/G$ может быть отождествлено с $U(\Sigma)/G$. Тем не менее конструкции из предыдущего раздела здесь неприменимы, так как $U(\Sigma)$ *не* является аффинным многообразием в $\mathbb{C}^m$ (в общем случае оно лишь квазиаффинно). Например, если Σ является полным веером, то действие группы G на всем $\mathbb{C}^m$ имеет лишь одну замкнутую орбиту — начало координат и фактор-пространство $\mathbb{C}^m/\!\!/G$ состоит из единственной точки. Далее в этой работе мы показываем, что тем не менее подходящее понятие множества Кемпфа–Несс имеется и для этого класса действий тора, и изучаем наиболее важные топологические свойства таких множеств.

Рассмотрим единичный полидиск

$$(\mathbb{D}^2)^m = \{z \in \mathbb{C}^m \colon |z_j| \le 1 \text{ для всех } j\}.$$

Для каждого конуса $\sigma \in \Sigma$ определим

$$\mathcal{Z}(\sigma) = \{z \in (\mathbb{D}^2)^m \colon |z_j| = 1 \text{ при } j \notin g(\sigma)\},$$

и

$$\mathcal{Z}(\Sigma) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{Z}(\sigma).$$

Подмножество $\mathcal{Z}(\Sigma) \subseteq (\mathbb{D}^2)^m$ инвариантно относительно действия тора $\mathbb{T}^m$. (Мы имеем $\mathcal{Z}(\Sigma) = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_\Sigma}$, где $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — *момент-угол-комплекс*, соответствующий симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ (см. [8, § 6.2]).) Заметим, что $\mathcal{Z}(\sigma) \subset U(\sigma)$, поэтому из предложения 3.1 вытекает, что $\mathcal{Z}(\Sigma) \subset U(\Sigma)$.

Предложение 3.3. *Пусть Σ — полный симплициальный веер. Тогда $\mathcal{Z}(\Sigma)$ является компактным $(m+n)$-мерным многообразием с действием тора $\mathbb{T}^m$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{K}_\Sigma$ является триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы, результат вытекает из [2, лемма 7.13] (см. также [16, Lemma 3.3]). □

Теорема 3.4. *Пусть Σ — симплициальный веер. Тогда*

а) *если Σ является полным, то композиция отображений $\mathcal{Z}(\Sigma) \hookrightarrow U(\Sigma) \to U(\Sigma)/G$ индуцирует гомеоморфизм $\mathcal{Z}(\Sigma)/K \to U(\Sigma)/G$;*

б) *имеется $\mathbb{T}^m$-эквивариантная деформационная ретракция $U(\Sigma)$ на $\mathcal{Z}(\Sigma)$.*

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{cone}\mathcal{K}'_\Sigma$ конус над барицентрическим подразделением комплекса $\mathcal{K}_\Sigma$ и обозначим через $C(\Sigma)$ топологическое пространство $|\operatorname{cone}\mathcal{K}'_\Sigma|$ с двойственным *разбиением на грани* (см. подробности в [16, § 3.1]). (Если Σ является полным веером, то $\mathcal{K}_\Sigma$ представляет собой триангуляцию сферы, $C(\Sigma)$ можно отождествить с единичным шаром в $N_{\mathbb{R}}$, а разбиение на грани будет двойственно по Пуанкаре к триангуляции $\mathcal{K}_\Sigma$.) Пространство $C(\Sigma)$ имеет по одной грани $C(\sigma)$ размерности $n-g(\sigma)$ для каждого конуса $\sigma\in\Sigma$. Положим

$$T(\sigma)=\bigl\{(t_1,\dots,t_m)\in\mathbb{T}^m\colon\ t_j=1 \text{ при } j\notin g(\sigma)\bigr\}.$$

Это есть некоторая $g(\sigma)$-мерная координатная подгруппа в $\mathbb{T}^m$. Как показано в [12] и [16, § 3.1], множество $\mathcal{Z}(\Sigma)$ может быть представлено как фактор-пространство по отношению эквивалентности

$$\mathcal{Z}(\Sigma)=(\mathbb{T}^m\times C(\Sigma))/{\sim},$$

где $(t,x)\in\mathbb{T}^m\times C(\Sigma)$ отождествляется с $(s,x)\in\mathbb{T}^m\times C(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда $x\in C(\sigma)$ и $t^{-1}s\in T(\sigma)$ для некоторого $\sigma\in\Sigma$. Гомоморфизм торов $\mathbb{T}^m\to T$ с ядром K индуцирует отображение фактор-пространств

$$(\mathbb{T}^m\times C(\Sigma))/{\sim}\to(T\times C(\Sigma))/{\sim}.$$

Согласно [12] если Σ является полным симплициальным веером, то второе фактор-пространство в предыдущей формуле гомеоморфно торическому многообразию $X_\Sigma=U(\Sigma)/G$. Это доказывает а). (Заметим, что если веер Σ регулярный, то $K\cong\mathbb{T}^{m-n}$ и проекция $\mathcal{Z}_\Sigma\to X_\Sigma$ является главным K-расслоением.)

Утверждение б) доказано в [8, Theorem 8.9]. $\square$

Сравнивая этот результат с теоремой 2.2, мы видим, что $\mathcal{Z}(\Sigma)$ обладает теми же свойствами по отношению к G-действию на $U(\Sigma)$, которыми обладает множество KN_S по отношению к действию редуктивной группы на аффинном многообразии S. Поэтому мы будем называть $\mathcal{Z}(\Sigma)$ *множеством Кемпфа–Несс* многообразия $U(\Sigma)$.

Пример 3.5. Пусть $n=2$ и e_1,e_2 — некоторый базис в $N_{\mathbb{R}}$.

1. Рассмотрим полный веер Σ, содержащий следующие три 2-мерных конуса: первый конус порожден векторами e_1 и e_2, второй — векторами e_2 и $-e_1-e_2$ и третий — векторами $-e_1-e_2$ и e_1. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}_\Sigma$ представляет собой полный граф на трех вершинах (или границу треугольника). Мы имеем

$$U(\Sigma)=\mathbb{C}^3\setminus\{z\colon\ z_1=z_2=z_3=0\}=\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$$

и

$$\mathcal{Z}(\Sigma)=(\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1)\cup(\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2)\cup(\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2)=\partial((\mathbb{D}^2)^3)\cong\mathbb{S}^5.$$

Подгруппа G из точной последовательности (3.1) представляет собой диагональную 1-мерную подгруппу в $(\mathbb{C}^*)^3$, а K — диагональную окружность в $\mathbb{T}^3$. Следовательно, мы имеем $X_\Sigma=U(\Sigma)/G=\mathcal{Z}(\Sigma)/K=\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, т.е. X_Σ — комплексная проективная плоскость.

2. Теперь рассмотрим веер Σ, содержащий три 1-мерных конуса, порожденных векторами e_1, e_2 и $-e_1-e_2$. Этот веер не является полным, но его 1-мерные конусы порождают $N_{\mathbb{R}}$ как векторное пространство. Поэтому теорема 3.2 применима, а теорема 3.4, а) — нет. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}_\Sigma$ состоит из трех отдельных точек. Пространство $U(\Sigma)$ представляет собой дополнение до трех координатных прямых в $\mathbb{C}^3$:

$$U(\Sigma)=\mathbb{C}^3\setminus\bigl\{z\colon\ z_1=z_2=0,\ z_1=z_3=0,\ z_2=z_3=0\bigr\},$$

и

$$\mathcal{Z}(\Sigma)=(\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)\cup(\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1)\cup(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2).$$

Оба этих пространства гомотопически эквивалентны $\mathbb{S}^3\vee\mathbb{S}^3\vee\mathbb{S}^3\vee\mathbb{S}^4\vee\mathbb{S}^4$ (см. [2, пример 9.13] и [4]). Как и в предыдущем примере, подгруппа G есть диагональ в $(\mathbb{C}^*)^3$. По теореме 3.2 $X_\Sigma=U(\Sigma)/G$ — квазипроективное многообразие, получаемое удалением трех точек из $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. Это многообразие не является компактным и не может быть отождествлено с $\mathcal{Z}(\Sigma)/K$.

4. НОРМАЛЬНЫЕ ВЕЕРЫ

Следующим естественным шагом в изучении множеств Кемпфа–Несс для торических действий на квазиаффинных многообразиях $U(\Sigma)$ было бы получить явное описание этих множеств, аналогичное описанию (2.1) в аффинном случае. Хотя такое описание в общем случае отсутствует, оно имеется в случае, когда Σ является нормальным веером простого многогранника.

Пусть $M_{\mathbb{R}} = (N_{\mathbb{R}})^*$ — двойственное векторное пространство. Для данных примитивных векторов $a_1, \dots, a_m \in N$ и целых чисел $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим множество

$$P = \bigl\{x \in M_{\mathbb{R}} \colon \langle a_i, x\rangle + b_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\bigr\}. \tag{4.1}$$

Мы предположим далее, что множество P ограничено, его аффинная оболочка есть все пространство $M_{\mathbb{R}}$ и пересечение P с каждой гиперплоскостью, задаваемой уравнением $(a_i, x) + b_i = 0$, порождает аффинное подпространство размерности $n-1$ для $i = 1, \dots, m$ (или, эквивалентно, невозможно удалить никакое из неравенств, не увеличивая определяемое ими множество P). Эти условия означают, что P является *выпуклым многогранником*, имеющим в точности *m гиперграней*. (В общем случае множество P всегда выпукло, но может быть неограниченным или иметь неполную размерность, а среди неравенств могут быть лишние.) Вводя евклидову метрику в пространстве $N_{\mathbb{R}}$, мы можем рассматривать a_i как нормальный вектор к соответствующей гиперграни F_i, направленный внутрь многогранника, для $i = 1, \dots, m$. Для любой грани $Q \subset P$ мы скажем, что вектор a_i *нормален* к Q, если $Q \subset F_i$. Если размерность грани Q равна q, то множество ее нормальных векторов $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ порождает $(n-q)$-мерный конус σ_Q. Набор конусов $\{\sigma_Q \colon Q$ — грань в $P\}$ является полным веером в пространстве N, который мы обозначим Σ_P и будем называть *нормальным веером* многогранника P. Нормальный веер является симплициальным тогда и только тогда, когда многогранник P является *простым*, т.е. в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней. В этом случае конусы веера Σ_P порождаются такими подмножествами $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$, для которых пересечение $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}$ соответствующих гиперграней непусто.

Множества Кемпфа–Несс (или момент-угол-комплексы) $\mathcal{Z}(\Sigma_P)$, соответствующие нормальным веерам простых многогранников, имеют очень простую геометрическую интерпретацию как *полные пересечения вещественных алгебраических квадрик*, как описано в [9] (эти полные пересечения квадрик также изучались в [7]). Ниже мы приводим соответствующую конструкцию.

Далее в этом разделе мы предполагаем, что P является простым многогранником, а следовательно, Σ_P — симплициальный веер. Мы можем задать многогранник P матричным неравенством $A_P x + b_P \geq 0$, где A_P — матрица размера $m \times n$ с векторами-строками a_i, а b_P — столбец из чисел b_i. Линейное преобразование $M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^m$, задаваемое матрицей A_P, есть в точности преобразование, получаемое из гомоморфизма $\mathbb{T}^m \to T$ в (3.2) применением функтора $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{S}^1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Так как точки из P выделяются неравенствами $A_P x + b_P \geq 0$, формула $i_P(x) = A_P x + b_P$ задает аффинное вложение

$$i_P \colon M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^m, \tag{4.2}$$

которое переводит P в положительный конус $\mathbb{R}^m_{\geq} = \{y \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geq 0\}$.

Теперь определим пространство $\mathcal{Z}_P$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_P \arrow[r, "i_Z"] \arrow[d, "\varrho_P"'] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\varrho"] \\ P \arrow[r, "i_P"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

где $\varrho(z_1,\dots,z_m)=(|z_1|^2,\dots,|z_m|^2)$. Вертикальные стрелки в этой диаграмме задают проекции на пространства орбит действий тора $\mathbb{T}^m$, а i_Z является $\mathbb{T}^m$-инвариантным вложением.

Предложение 4.1. (а) *Мы имеем* $\mathcal{Z}_P\subset U(\Sigma_P)$.

(б) *Имеется* $\mathbb{T}^m$*-эквивариантный гомеоморфизм* $\mathcal{Z}_P\cong\mathcal{Z}(\Sigma_P)$.

Доказательство. Пусть $z\in\mathcal{Z}_P\subset\mathbb{C}^m$, и обозначим через $\omega(z)$ множество нулевых координат точки z. Так как гипергрань F_i есть пересечение P с гиперплоскостью $(a_i,x)+b_i=0$, точка $\varrho_P(z)$ лежит в пересечении $\bigcap_{i\in\omega(z)}F_i$, которое, таким образом, непусто. Следовательно, векторы $\{a_i\colon i\in\omega(z)\}$ порождают конус из Σ_P. Итак, $\omega(z)$ является g-подмножеством и $z\in U(\Sigma_P)$, что доказывает (а).

Для доказательства утверждения (б) мы рассмотрим конструкцию фактор-пространства из доказательства теоремы 3.4 в случае, когда Σ является нормальным веером. Тогда пространство $C(\Sigma_P)$ можно отождествить с многогранником P, а $C(\sigma)$ есть грань $\bigcap_{i\in g(\sigma)}F_i$ в P. Множество Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P)$, таким образом, отождествляется с фактор-пространством

$$(\mathbb{T}^m\times P)/{\sim}. \tag{4.4}$$

Теперь заметим, что если в этом фактор-пространстве заменить P на положительный конус $\mathbb{R}^m_{\geq}$ (с очевидной структурой граней), то мы получим $(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^m_{\geq})/{\sim}=\mathbb{C}^m$. Так как отображение i_P из (4.3) сохраняет коразмерность граней, пространство $\mathcal{Z}_P$ также можно отождествить с (4.4), что доказывает (б). $\square$

Выбирая базис в $\operatorname{coker}A_P$, мы получим $((m-n)\times m)$-матрицу C, причем соответствующая точная последовательность

$$0\to M_{\mathbb{R}}\xrightarrow{A_P}\mathbb{R}^m\xrightarrow{C}\mathbb{R}^{m-n}\to 0 \tag{4.5}$$

совпадает с последовательностью отображений, получаемой из (3.2) применением функтора $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot,\mathbb{S}^1)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$.

Мы можем предположить, что первые n векторов $a_1,\dots,a_n$ порождают конус в Σ_P (т.е. соответствующие гиперграни имеют общую вершину в P), и взять эти векторы за базис в $M_{\mathbb{R}}$. В этом базисе первые n строк матрицы (a_{ij}) отображения A_P образуют единичную $(n\times n)$-матрицу и мы можем взять

$$C=\begin{pmatrix}-a_{n+1,1}&\dots&-a_{n+1,n}&1&0&\dots&0\\-a_{n+2,1}&\dots&-a_{n+2,n}&0&1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{m,1}&\dots&-a_{m,n}&0&0&\dots&1\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Тогда из диаграммы (4.3) мы получаем, что отображение i_Z вкладывает $\mathcal{Z}_P$ в $\mathbb{C}^m$ как множество общих решений $m-n$ вещественных квадратичных уравнений

$$\sum_{k=1}^m c_{jk}(|z_k|^2-b_k)=0\qquad\text{при}\quad 1\leq j\leq m-n, \tag{4.7}$$

где $C=(c_{jk})$ задается формулой (4.6). Это пересечение вещественных квадрик невырожденно [9, Lemma 3.2] (нормальные векторы линейно независимы в каждой точке), а следовательно, $\mathcal{Z}_P\subset\mathbb{R}^{2m}$ является гладким подмногообразием с тривиальным нормальным расслоением.

5. ПРОЕКТИВНЫЕ ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ МОМЕНТОВ

В обозначениях разд. 2 положим $f_v=(dF_v)_e\colon\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$. Это отображение переводит $\gamma\in\mathfrak{g}$ в $\operatorname{Re}\langle\gamma v,v\rangle$ (см. (2.1)). Мы можем рассматривать f_v как элемент двойственной алгебры Ли $\mathfrak{g}^*$. Так как группа G редуктивна, мы имеем $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus i\mathfrak{k}$. Так как действие K сохраняет норму, f_v

обращается в нуль на $\mathfrak{k}$, так что f_v можно рассматривать как элемент из $i\mathfrak{k}^* \cong \mathfrak{k}^*$. Изменяя $v \in V$, мы получаем *отображение моментов* $\mu\colon V \to \mathfrak{k}^*$, которое переводит $v \in V$, $\kappa \in \mathfrak{k}$ в $\langle i\kappa v, v\rangle$. Тогда множество Кемпфа–Несс совпадает с множеством нулей отображения μ:

$$KN = \mu^{-1}(0). \tag{5.1}$$

Это описание, однако, неприменимо в случае действий алгебраического тора на $U(\Sigma)$, рассмотренных в двух предыдущих разделах: как видно из простых примеров ниже, множество $\mu^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^m\colon \langle \kappa z, z\rangle = 0$ для всех $\kappa \in \mathfrak{k}\}$ в этом случае состоит лишь из нуля. Тем не менее мы покажем, что описание торического множества Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma)$, аналогичное (5.1), существует в случае, когда Σ является нормальным веером. Это продолжает аналогию с аффинными множествами Кемпфа–Несс.

Как указано в [5] или [2, § 6.1], торическое многообразие X_Σ проективно в том и только том случае, когда Σ является нормальным веером для некоторого выпуклого многогранника. На самом деле множество целых чисел $\{b_1, \dots, b_m\}$ из (4.1) определяет *обильный* дивизор на X_{Σ_P} и тем самым задает проективное вложение. Заметим, что вершины многогранника P не обязательно лежат в точках целочисленной решетки M (они могут иметь рациональные координаты). Это можно исправить, умножая все $b_1, \dots, b_m$ на некоторое целое число, что соответствует переходу от обильного дивизора к *очень обильному*.

Предположим теперь, что Σ_P — регулярный веер, т.е. X_{Σ_P} является гладким проективным многообразием. Это означает, что X_{Σ_P} является кэлеровым, а значит, симплектическим многообразием. Имеется следующая симплектическая версия конструкции из разд. 3.

Пусть (W, ω) — симплектическое многообразие с действием тора K, которое сохраняет симплектическую форму ω. Для каждого $\kappa \in \mathfrak{k}$ обозначим через ξ_κ соответствующее K-инвариантное векторное поле на W. Действие тора K называется *гамильтоновым*, если 1-форма $\omega(\cdot, \xi_\kappa)$ точна для любого $\kappa \in \mathfrak{k}$, т.е. если существует функция H_κ на W, удовлетворяющая условию

$$\omega(\xi, \xi_\kappa) = dH_\kappa(\xi) = \xi(H_\kappa)$$

для любого векторного поля ξ на W. При этом предположении определено *отображение моментов*

$$\mu\colon W \to \mathfrak{k}^*, \qquad (x, \kappa) \mapsto H_\kappa(x).$$

Пример 5.1. 1. Основополагающим примером является $W = \mathbb{C}^m$ с симплектической формой $\omega = 2\sum_{k=1}^m dx_k \wedge dy_k$, где $z_k = x_k + iy_k$. Покоординатное действие тора $\mathbb{T}^m$ является гамильтоновым, а отображение моментов $\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m$ имеет вид $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$ (здесь мы отождествили двойственную алгебру Ли тора $\mathbb{T}^m$ с $\mathbb{R}^m$).

2. Пусть теперь Σ — регулярный веер, а K — подгруппа в $\mathbb{T}^m$, определяемая из (3.2). Мы можем ограничить действие из предыдущего примера до действия K на инвариантном подмногообразии $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$. Соответствующее отображение моментов задается как композиция

$$\mu_\Sigma\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m \to \mathfrak{k}^*. \tag{5.2}$$

Подходящим образом задав изоморфизм $\mathfrak{k} \cong \mathbb{R}^{m-n}$, мы можем отождествить отображение $\mathbb{R}^m \to \mathfrak{k}^*$ с линейным преобразованием, задаваемым матрицей (4.6) (см. (4.5)).

Непосредственное сравнение с (5.1) подсказывает нам связать множество уровня $\mu_\Sigma^{-1}(0)$ отображения моментов (5.2) с торическим множеством Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P)$ для действия G на $U(\Sigma_P)$. Однако оказывается, что эта аналогия не столь очевидна: множество $\mu_\Sigma^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^m\colon \langle \kappa z, z\rangle = 0$ для всех $\kappa \in \mathfrak{k}\}$ задается уравнениями $\sum_{k=1}^m c_{jk}|z_k|^2 = 0$, $1 \le j \le m-n$, которые имеют лишь нулевое решение. (Действительно, так как пересечение $\mathbb{R}^m_{\geq}$ с аффинной n-мерной плоскостью $i_P(M_{\mathbb{R}}) = A_P(M_{\mathbb{R}}) + b_P$ ограничено, его пересечение с плоскостью $A_P(M_{\mathbb{R}})$ содержит лишь начало координат.) С другой стороны, сравнивая (5.2) с (4.7), мы получаем следующее утверждение.

Предложение 5.2. *Пусть Σ_P — нормальный веер простого многогранника, заданного, как в* (4.1), *и* (5.2) *— соответствующее отображение моментов. Тогда для торического множества Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P)$ действия G на $U(\Sigma_P)$ имеем*

$$\mathcal{Z}(\Sigma_P) \cong \mu^{-1}_{\Sigma_P}(Cb_P).$$

Другими словами, разница между нашей ситуацией и аффинной заключается в том, что мы должны в качестве уровня отображения моментов брать Cb_P вместо 0. Дело в том, что Cb_P является *регулярным значением* отображения μ в отличие от 0.

Производя небольшое возмущение $b_i \mapsto b_i + \varepsilon_i$ значений b_i в (4.1), но оставляя векторы a_i неизменными, мы получим другое выпуклое множество $P(\varepsilon)$, задаваемое неравенствами (4.1). При условии, что это возмущение мало, множество $P(\varepsilon)$ по-прежнему является простым выпуклым многогранником одинакового с P *комбинаторного типа*. Тогда нормальные вееры многогранников P и $P(\varepsilon)$ совпадают, а многообразия $\mathcal{Z}_P$ и $\mathcal{Z}_{P(\varepsilon)}$, определяемые из диаграммы (4.7), будут $\mathbb{T}^m$-эквивариантно гомеоморфны. Более того, вектор $Cb_{P(\varepsilon)}$, рассматриваемый как элемент из $\mathfrak{k}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{S}^1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong H^2(X_{\Sigma_P}; \mathbb{R})$, принадлежит *кэлерову конусу* торического многообразия X_{Σ_P} [11, § 4]. В случае, когда Σ является нормальным веером, утверждение a) из нашей теоремы 3.4 эквивалентно следующему утверждению, известному в торической геометрии.

Теорема 5.3 (см. [11, Theorem 4.1]). *Пусть X_Σ — проективное симплициальное торическое многообразие и $c \in H^2(X_\Sigma; \mathbb{R})$ лежит в кэлеровом конусе. Тогда $\mu_\Sigma^{-1}(c) \subset U(\Sigma)$, а естественное отображение*

$$\mu_\Sigma^{-1}(c)/K \to U(\Sigma)/G = X_\Sigma$$

является диффеоморфизмом.

Это утверждение лежит в основе конструкции гладких проективных торических многообразий при помощи *симплектической редукции.* Подмногообразие $\mu_\Sigma^{-1}(c) \subset \mathbb{C}^m$ может не быть симплектическим, так как ограничение стандартной симплектической формы ω в $\mathbb{C}^m$ на $\mu_\Sigma^{-1}(c)$ может быть вырожденным. Тем не менее ограничение формы ω индуцирует симплектическую форму на фактор-многообразии $\mu_\Sigma^{-1}(c)/K$.

Пример 5.4. Пусть $P = \Delta^n$ — *стандартный симплекс*, задаваемый $n+1$ неравенствами $\langle e_i, x\rangle \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и $\langle -e_1 - \ldots - e_n, x\rangle + 1 \geq 0$ в $M_{\mathbb{R}}$ (здесь $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис, который мы используем для отождествления $N_{\mathbb{R}}$ с $\mathbb{R}^n$). Конусы соответствующего нормального веера Σ порождаются собственными подмножествами множества векторов $\{e_1, \dots, e_n, -e_1 - \ldots - e_n\}$. Группы $G \cong \mathbb{C}^*$ и $K \cong \mathbb{S}^1$ являются диагональными подгруппами в $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ и $\mathbb{T}^{n+1}$ соответственно, и $U(\Sigma) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Матрица $A_P = (a_{ij})$ размера $(n+1) \times n$ имеет $a_{ij} = \delta_{ij}$ при $1 \leq i, j \leq n$ и $a_{n+1,j} = -1$ при $1 \leq j \leq n$. Матрица C (4.6) есть строка из единиц. Отображение моментов (5.2) имеет вид $\mu_\Sigma(z_1, \dots, z_{n+1}) = |z_1|^2 + \ldots + |z_{n+1}|^2$. Так как $Cb_P = 1$, множество Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}_P = \mu_\Sigma^{-1}(1)$ представляет собой единичную сферу $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, а $X_\Sigma = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/G = \mathbb{S}^{2n+1}/K$ есть комплексное проективное пространство $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

В следующем разделе мы рассмотрим более сложный пример, а пока предложим один открытый вопрос.

Проблема 5.5. Как известно (см., например, [2, гл. 6]), имеется много полных регулярных вееров Σ, которые нельзя реализовать в виде нормальных вееров выпуклых многогранников. Соответствующие торические многообразия X_Σ не являются проективными (будучи при этом неособыми). В этом случае торическое множество Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma)$ по-прежнему определено (см. разд. 3). Однако другие конструкции из последних двух разделов здесь неприменимы; в частности, мы не можем описать множество $\mathcal{Z}(\Sigma)$, как в (4.7). Можно ли задать $\mathcal{Z}(\Sigma)$ как полное пересечение вещественных квадратичных (или более высокого порядка) гиперповерхностей?

6. КОГОМОЛОГИИ ТОРИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ КЕМПФА–НЕСС

Здесь мы применяем результаты [2] и [16] о момент-угол-комплексах для описания и вычисления колец целочисленных когомологий торических множеств Кемпфа–Несс. Как видно из приводимого ниже примера, топология пространства $\mathcal{Z}(\Sigma)$ может быть достаточно сложной даже для простых вееров.

Пусть дан абстрактный симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$. Его *кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Риснера*) $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ называется следующее фактор-кольцо кольца многочленов от m переменных:

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(v_{i_1} \dots v_{i_k} \colon \{i_1, \dots, i_k\} \text{ не симплекс в } \mathcal{K}).$$

Мы введем градуировку, положив $\deg v_i = 2$, $1 \le i \le m$. Отображение проекции на фактор-кольцо вводит в $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ структуру модуля над кольцом $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$, и возникают биградуированные Tor-*модули*

$$\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z})$$

(см. [18]). Их можно вычислять, например, при помощи *резольвенты Кошуля* тривиального $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-модуля $\mathbb{Z}$. Эта процедура также снабжает $\operatorname{Tor}^{*}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z})$ структурой градуированной коммутативной алгебры (относительно градуировки полной степенью) (см. [2, Гл. 8]).

Теорема 6.1 (см. [2, теорема 8.6; 16, Theorem 4.7])**.** *Для любого симплициального веера Σ имеет место изоморфизм алгебр*

$$H^*\bigl(\mathcal{Z}(\Sigma); \mathbb{Z}\bigr) \cong \operatorname{Tor}^{*}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbb{Z}[\mathcal{K}_\Sigma], \mathbb{Z}\bigr) \cong H\bigl[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}_\Sigma], d\bigr],$$

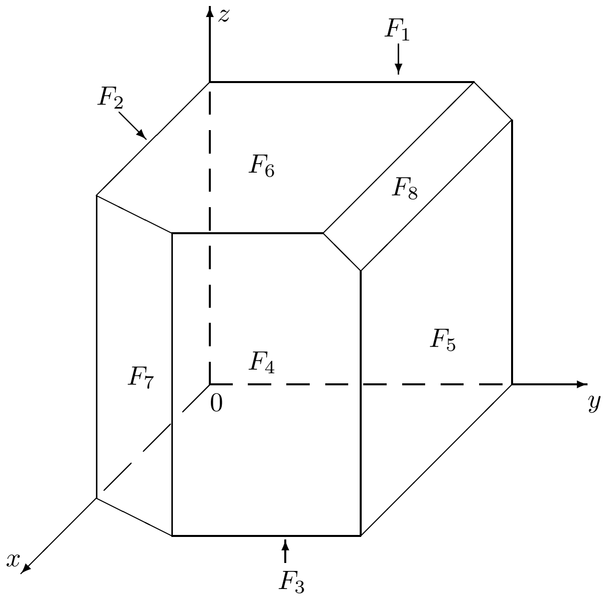
где в конце стоит алгебра когомологий дифференциальной градуированной алгебры с $\deg u_i = 1$, $\deg v_i = 2$, $du_i = v_i$, $dv_i = 0$ при $1 \le i \le m$.

Для каждого подмножества $I \subseteq [m]$ обозначим через $\mathcal{K}(I)$ соответствующий ему *полный подкомплекс* в $\mathcal{K}$, т.е. ограничение $\mathcal{K}$ на I. Мы также будем обозначать через $\widetilde{H}^i(\mathcal{K}(I))$ группу i-х приведенных симплициальных когомологий комплекса $\mathcal{K}(I)$ с целыми коэффициентами. Теорема Хохстера [14] выражает Tor-модули $\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z})$ в терминах полных подкомплексов в $\mathcal{K}$, что приводит к следующему описанию когомологий пространства $\mathcal{Z}(\Sigma)$.

Теорема 6.2 (см. [16, Corollary 5.2])**.** *Мы имеем*

$$H^k(\mathcal{Z}(\Sigma)) \cong \bigoplus_{I \subseteq [m]} \widetilde{H}^{k-|I|-1}(\mathcal{K}_\Sigma(I)).$$

Имеется также описание произведения в $H^*(\mathcal{Z}(\Sigma))$ в терминах полных подкомплексов в $\mathcal{K}_\Sigma$ (см. [16, Theorem 5.1]).



Пример 6.3. Пусть P — простой многогранник, полученный "срезанием" двух несмежных ребер куба в $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^3$, как показано на рисунке. Мы можем задать такой многогранник восемью неравенствами

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0, \qquad -x+3 \geq 0, \qquad -y+3 \geq 0, \qquad -z+3 \geq 0,$$

$$-x+y+2 \geq 0, \qquad -y-z+5 \geq 0.$$

Таким образом, он имеет восемь гиперграней $F_1, \ldots, F_8$, занумерованных, как на рисунке. Одномерные конусы соответствующего нормального веера Σ_P порождаются следующими примитивными векторами:

$$a_1 = e_1, \qquad a_2 = e_2, \qquad a_3 = e_3, \qquad a_4 = -e_1, \qquad a_5 = -e_2, \qquad a_6 = -e_3,$$

$$a_7 = -e_1 + e_2, \qquad a_8 = -e_2 - e_3.$$

Торическое многообразие X_{Σ_P} есть результат раздутия произведения $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ (соответствующего кубу) в двух комплексных 1-мерных подмногообразиях $\{\infty\} \times \{0\} \times \mathbb{C}P^1$ и $\mathbb{C}P^1 \times \{\infty\} \times \{\infty\}$. Матрица (4.6) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее транспонированная матрица задает вложение $G \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^8$ (или $K \hookrightarrow T^8$), и мы имеем $X_{\Sigma_P} = U(\Sigma_P)/G = \mathcal{Z}(\Sigma_P)/K$ в силу теоремы 3.4. Торическое множество Кемпфа–Несс $\mathcal{Z}(\Sigma_P) \cong \mathcal{Z}_P$ (4.7) задается пятью вещественными квадратичными уравнениями:

$$|z_1|^2 + |z_4|^2 - 3 = 0, \qquad |z_2|^2 + |z_5|^2 - 3 = 0, \qquad |z_3|^2 + |z_6|^2 - 3 = 0,$$

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_7|^2 - 2 = 0, \qquad |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_8|^2 - 5 = 0.$$

Двойственная триангуляция $\mathcal{K}_\Sigma$ получается из границы октаэдра применением двух звездных подразбиений относительно несмежных ребер [15]. Ее кольцо граней есть

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}_\Sigma] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_8] / \big(v_1v_4, v_1v_7, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_8, v_3v_6, v_3v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_7v_8\big).$$

В соответствии с теоремой 6.2 группа $H^3(\mathcal{Z}_P)$ имеет по одной образующей на каждую пару вершин комплекса $\mathcal{K}_\Sigma$, не соединенных ребром (т.е. на каждую пару несмежных гиперграней в P). Следовательно, $H^3(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^{10}$ и образующие представляются следующими 3-коциклами в дифференциальной градуированной алгебре из теоремы 6.1:

$$u_1v_4, \quad u_1v_7, \quad u_2v_4, \quad u_2v_5, \quad u_2v_8, \quad u_3v_6, \quad u_3v_8, \quad u_5v_6, \quad u_5v_7, \quad u_7v_8.$$

Снова применяя теорему 6.2, мы видим, что вклад в $H^4(\mathcal{Z}_P)$ дают лишь группы приведенных 0-мерных когомологий полных подкомплексов из трех вершин в $\mathcal{K}_\Sigma$. Имеется два вида несвязных симплициальных комплексов на трех вершинах: "три отдельные точки" и "ребро и точка". Комплекс $\mathcal{K}_\Sigma$ не содержит полных подкомплексов первого типа и содержит 16 подкомплексов второго типа. Соответствующие 4-коциклы в дифференциальной градуированной алгебре $\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}_\Sigma]$ суть

$$u_4u_7v_1, \quad u_4u_5v_2, \quad u_4u_8v_2, \quad u_5u_8v_2, \quad u_6u_8v_3, \quad u_1u_2v_4, \quad u_2u_6v_5, \quad u_2u_7v_5,$$
$$u_6u_7v_5, \quad u_3u_5v_6, \quad u_1u_5v_7, \quad u_1u_8v_7, \quad u_5u_8v_7, \quad u_2u_3v_8, \quad u_2u_7v_8, \quad u_3u_7v_8.$$

Следовательно, $H^4(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^{16}$.

Группа пятых когомологий пространства $\mathcal{Z}_P$ есть сумма групп первых когомологий 3-вершинных полных подкомплексов в $\mathcal{K}_\Sigma$ и групп приведенных 0-мерных когомологий 4-вершинных полных подкомплексов. 3-вершинный полный подкомплекс в $\mathcal{K}_\Sigma$ может иметь ненулевую группу первых когомологий, только если соответствующие три гиперграни в P образуют "пояс", т.е. попарно смежны, но не имеют общей вершины. Так как такие пояса из трех гиперграней в нашем P отсутствуют, вклад в $H^5(\mathcal{Z}_P)$ дают только приведенные 0-мерные когомологии 4-вершинных подкомплексов. Соответствующие 5-коциклы суть

$$u_1u_5u_8v_7, \quad u_2u_3u_7v_8, \quad u_4u_5u_8v_2, \quad u_2u_6u_7v_5, \quad u_2u_7u_5v_8 - u_2u_7u_8v_5$$

(заметим, что последний коцикл не может быть представлен мономом). Следовательно, $H^5(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^5$. В силу двойственности Пуанкаре это полностью определяет вектор чисел Бетти $(1,0,0,10,16,5,5,16,10,0,0,1)$ многообразия $\mathcal{Z}_P$ размерности 11. Образующие шестой группы когомологий $H^6(\mathcal{Z}_P) \cong \mathbb{Z}^5$ соответствуют поясам из четырех гиперграней в P, а соответствующие 6-коциклы суть

$$u_2u_3v_4v_6, \quad u_1u_5v_4v_6, \quad u_1u_3v_6v_7, \quad u_1u_3v_4v_8, \quad u_1u_3v_4v_6.$$

Они двойственны 5-коциклам. Фундаментальный класс многообразия $\mathcal{Z}_P$ представляется (с точностью до знака) коциклом $u_4u_5u_6u_7u_8v_1v_2v_3$ или любым коциклом вида

$$u_{\sigma(4)}u_{\sigma(5)}u_{\sigma(6)}u_{\sigma(7)}u_{\sigma(8)}v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}v_{\sigma(3)},$$

где $\sigma \in S_8$ — любая подстановка, для которой гиперграни $F_{\sigma(1)}$, $F_{\sigma(2)}$ и $F_{\sigma(3)}$ имеют общую вершину.

Из этого описания легко восстанавливается мультипликативная структура кольца $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Например, мы имеем соотношения

$$[u_1v_4]\cdot[u_1v_7] = 0, \qquad [u_1v_7]\cdot[u_2v_4] = 0, \qquad [u_1v_4]\cdot[u_3v_6] = [u_1u_3v_4v_6],$$
$$[u_2v_4]\cdot[u_3v_6]\cdot[u_1u_5u_8v_7] = [u_1u_2u_3u_5u_8v_4v_6v_7] \qquad \text{и т.д.}$$

Еще одним интересным свойством многообразия $\mathcal{Z}_P$ из этого примера является наличие нетривиальных произведений Масси в кольце $H^*(\mathcal{Z}_P)$ [1]. Рассмотрим три коцикла $a = u_1v_4$,

$b = u_2v_5$, $c = u_3v_6$, представляющие классы когомологий $\alpha, \beta, \gamma \in H^3(\mathcal{Z}_P)$. Так как $\alpha\beta = 0$ и $\beta\gamma = 0$, определено тройное произведение Масси $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$. Оно состоит из классов когомологий в $H^8(\mathcal{Z}_P)$, представленных коциклами вида $af + ec$ для всевозможных e и f, удовлетворяющих условию $ab = de$ и $bc = df$ (здесь d обозначает дифференциал; так как выбор элементов e и f неоднозначен, произведение Масси, вообще говоря, является многозначной операцией). Произведение Масси называется *тривиальным*, если оно содержит нуль. В нашем случае мы можем взять $e = u_1u_2u_5v_4$ и $f = 0$, так что $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ содержит ненулевой класс когомологий $[u_1u_2u_5u_3v_4v_6] \in H^8(\mathcal{Z}_P)$. Более того, произведение Масси $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ нетривиально (см. [2, пример 8.27]). Отсюда вытекает, что многообразие $\mathcal{Z}_P$ не является *формальным*. Дальнейшему изучению произведений Масси в когомологиях момент-угол-комплексов посвящена работа [13].

Автор выражает благодарность И.В. Аржанцеву за интересные и полезные обсуждения, а также за консультации по теории действий алгебраических групп и геометрической теории инвариантов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков И.В.* Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов // УМН. 2003. Т. 58, №5. С. 199–200.
2. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
3. *Винберг Э.Б., Попов В.Л.* Теория инвариантов // Алгебраическая геометрия–4. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 137–314. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 55).
4. *Грбич Е., Терио С.* Гомотопический тип дополнения конфигурации координатных подпространств коразмерности два // УМН. 2004. Т. 59, №6. С. 203–204.
5. *Данилов В.И.* Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33, №2. С. 85–134.
6. *Batyrev V.V.* Quantum cohomology rings of toric manifolds // Astérisque. 1993. V. 218. P. 9–34; arXiv: alg-geom/9310004.
7. *Bosio F., Meersseman L.* Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes // Acta math. 2006. V. 197, N 1. P. 53–127.
8. *Buchstaber V.M., Panov T.E.* Torus actions and their applications in topology and combinatorics. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002. (Univ. Lect. Ser.; V. 24).
9. *Buchstaber V.M., Panov T.E., Ray N.* Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds // Moscow Math. J. 2007. V. 7, N 2. P. 219–242; arXiv: math.AT/0609346.
10. *Cox D.A.* The homogeneous coordinate ring of a toric variety // J. Alg. Geom. 1995. V. 4, N 1. P. 17–50; arXiv: alg-geom/9210008.
11. *Cox D.A.* Recent developments in toric geometry // Algebraic geometry: Proc. Summer Res. Inst., Santa Cruz, 1995. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1997. P. 389–436. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 62, Pt. 2); arXiv: alg-geom/9606016.
12. *Davis M.W., Januszkiewicz T.* Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62, N 2. P. 417–451.
13. *Denham G., Suciu A.I.* Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products // Pure and Appl. Math. Quart. 2007. V. 3, N 1. P. 25–60; arXiv: math.AT/0512497.
14. *Hochster M.* Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes // Ring theory II: Proc. 2nd Oklahoma Conf. / Ed. by B.R. McDonald, R.A. Morris. New York: M. Dekker, 1977. P. 171–223.
15. *Masuda M., Panov T.* On the cohomology of torus manifolds // Osaka J. Math. 2006. V. 43. P. 711–746; arXiv: math.AT/0306100.
16. *Panov T.* Cohomology of face rings, and torus actions // Surveys in contemporary mathematics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. P. 165–201. (LMS Lect. Note Ser.; V. 347); arXiv: math.AT/0506526.
17. *Schwarz G.W.* The topology of algebraic quotients // Topological methods in algebraic transformation groups. Boston: Birkhäuser, 1989. P. 135–151. (Progr. Math.; V. 80).
18. *Stanley R.P.* Combinatorics and commutative algebra. 2nd ed. Boston: Birkhäuser, 1996. (Progr. Math.; V. 41).