УДК 515.14+515.16

**М. Масуда, Т. Е. Панов**

# Полусвободные действия окружности, башни Ботта и квазиторические многообразия

*Башней Ботта* называется тотальное пространство башни расслоений над $\mathbb{C}P^1$ со слоями $\mathbb{C}P^1$. Каждая башня Ботта высоты $n$ является гладким проективным торическим многообразием, для которого образ отображения моментов является многогранником, комбинаторно эквивалентным $n$-мерному кубу. Действие окружности называется *полусвободным*, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек. В работе показано, что квазиторическое многообразие над комбинаторным $n$-мерным кубом, допускающее одномерную замкнутую подгруппу с полусвободным действием и изолированными неподвижными точками, является башней Ботта. Кроме того, показано, что каждая башня Ботта, получаемая таким образом, топологически тривиальна, т.е. гомеоморфна произведению двумерных сфер. Это обобщает недавний результат Ильинского, показавшего, что гладкое компактное торическое многообразие с полусвободным действием одномерной торической подгруппы и изолированными неподвижными точками гомеоморфно произведению двумерных сфер и является продвижением в исследовании проблемы Хаттори о полусвободных действиях окружности. Наконец, показано, что если кольцо когомологий квазиторического многообразия изоморфно кольцу когомологий произведения двумерных сфер, то само многообразие гомеоморфно такому произведению. В случае башен Ботта этот гомеоморфизм является диффеоморфизмом.

Библиография: 18 названий.

## § 1. Введение

Изучая симметрические пространства, в работе [1] Ботт и Самельсон ввели семейство комплексных многообразий, получаемых как тотальные пространства итерированных расслоений над $\mathbb{C}P^1$ со слоем $\mathbb{C}P^1$. Гроссберг и Каршон показали в [2], что эти многообразия несут действие алгебраического тора и тем самым представляют собой важную серию гладких проективных торических многообразий, названных ими *башнями Ботта*. Башни Ботта изучались далее в работе Чивана и Рэя [3], где были перечислены инвариантные стабильно комплексные структуры и явно вычислены их кольца комплексной и вещественной $K$-теории и кобордизмов.

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Японского общества содействия науке (JSPS, грант P05296), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00096, 08-01-90414-Укр) и стипендией П. Делиня (премия Бальзана 2004 г. по математике).

Действие группы называется *полусвободным*, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек. Интересный класс *гамильтоновых* полусвободных действий окружности был изучен Хаттори. Он доказал в [4], что компактное симплектическое многообразие $M$ с полусвободным гамильтоновым $\mathbb{S}^1$-действием с изолированными неподвижными точками имеет то же кольцо когомологий и те же классы Чженя, что и $S^2 \times \cdots \times S^2$. Таким образом, Хаттори наложил существенные топологические ограничения на структуру многообразия. Результаты Хаттори затем были развиты в работе [5] Толман и Вайцмана. Они показали, что полусвободное симплектическое $\mathbb{S}^1$-действие с непустым множеством изолированных неподвижных точек автоматически является гамильтоновым, в то время как *эквивариантные* кольцо когомологий и классы Чженя такого многообразия $M$ также совпадают с соответствующими инвариантами многообразия $S^2 \times \cdots \times S^2$. В размерностях вплоть до шестой известно, что симплектическое многообразие с $\mathbb{S}^1$-действием, удовлетворяющим описанным выше свойствам, гомеоморфно произведению двумерных сфер, но в высших размерностях вопрос о подобной топологической классификации остается открытым.

В работе [6] Ильинским была рассмотрена алгебраическая версия описанной выше проблемы о полусвободных симплектических действиях окружности. А именно, была высказана гипотеза, что гладкое компактное комплексное алгебраическое многообразие $X$ с полусвободным действием алгебраического 1-тора $\mathbb{C}^*$, имеющим положительное число изолированных неподвижных точек, гомеоморфно произведению $\mathbb{C}P^1 \times \cdots \times \mathbb{C}P^1$. Связь между алгебраической и симплектической версиями гипотезы осуществляется через общий подкласс проективных многообразий; гладкое проективное многообразие является симплектическим. Ильинским была доказана *торическая* версия его алгебраической гипотезы, т.е. предполагалось, что $X$ является (неособым компактным) *торическим многообразием*, а полусвободно действующий 1-тор является подгруппой в большом торе (размерности $\dim_{\mathbb{C}} X$), действующем с плотной орбитой. Первым шагом в рассуждениях Ильинского было доказательство того факта, что если $X$ допускает одномерную подгруппу с полусвободным действием и изолированными неподвижными точками, то соответствующий веер комбинаторно эквивалентен вееру над гранями обобщенного октаэдра (крест-многогранника). Согласно результату Добринской [7] в этом случае $X$ является башней Ботта, и именно этот факт послужил отправной точкой в нашем исследовании полусвободных действий окружности на башнях Ботта и связанных с ними классов многообразий с действием тора, таких как *квазиторические многообразия*. Этот класс многообразий был введен Дэвисом и Янушкиевичем в [8]. Квазиторическое многообразие представляет собой компактное многообразие $M$ размерности $2n$ с локально стандартным действием $n$-мерного тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, пространство орбит которого является простым многогранником $P$. В последнее время квазиторические многообразия привлекают большой интерес в связи с исследованиями по “торической топологии”. Мы рассматриваем их определение и конструкцию в § 3, а более подробное изложение можно найти в [9; гл. 6].

Проективное гладкое торическое многообразие, образом отображения моментов которого является многогранник $P$, является квазиторическим многообразием над $P$. В то же время любая башня Ботта является торическим многообразием, образ отображения моментов которого комбинаторно эквивалентен кубу (иначе говоря, *торическим многообразием над кубом*). Таким образом, получаем следующую иерархию классов многообразий $M$ с действием тора $\mathbb{T}^n$:

$$\begin{aligned} \text{башни Ботта} &\subset \text{торические многообразия над кубами} \\ &\subset \text{квазиторические многообразия над кубами.} \end{aligned} \tag{1.1}$$

В силу упомянутого выше результата Добринской [7] первое из включений (1.1) выше на самом деле является равенством (это будет пояснено в следствии 3.5 ниже). В §§ 4 и 5 получены два результата, связывающие полусвободные действия тора на башнях Ботта, их топологическую структуру и кольца когомологий. В теореме 4.4 показано, что если башня Ботта допускает полусвободное $\mathbb{S}^1$-действие с изолированными неподвижными точками, то она $\mathbb{S}^1$-эквивариантно гомеоморфна произведению двумерных сфер. Затем в теореме 5.1 показано, что башня Ботта, кольцо когомологий которой изоморфно кольцу когомологий произведения сфер, гомеоморфна произведению сфер. Оба результата затем обобщены на гораздо более широкий класс квазиторических многообразий над кубами (теоремы 4.8 и 5.7 соответственно), что позволило также вывести результат Ильинского о полусвободных действиях на торических многообразиях (следствие 4.9).

Так как изоморфизм колец когомологий влечет гомеоморфизм в случае произведения сфер, возникает естественный вопрос о том, определяет ли кольцо когомологий топологический тип башни Ботта и в общем случае. Некоторый прогресс в этом направлении достигнут в работе [10] в случае квазиторических многообразий над произведением симплексов. Эти результаты могут рассматриваться как промежуточная стадия между квазиторическими многообразиями над кубами и общим случаем.

Также было бы интересно получить гладкие аналоги наших классификационных результатов. В случае башен Ботта устанавливаемые нами гомеоморфизмы на самом деле являются диффеоморфизмами (см. теоремы 4.4 и 5.1), однако некоторые из наших ключевых рассуждений с квазиторическими многообразиями не могут быть применены в случае гладкой категории. Хотя все квазиторические многообразия допускают гладкую структуру [8; с. 421], проблема заключается в том, что исходный классификационный результат Дэвиса–Янушкиевича [8; предложение 1.8] устанавливает лишь эквивариантный *гомео*морфизм между квазиторическим многообразием и его канонической моделью, определяемой многогранником и характеристической функцией. Поэтому мы не знаем, существуют ли экзотические эквивариантные гладкие структуры даже на 4-мерных квазиторических многообразиях. (Каноническая эквивариантная гладкая структура, совпадающая со стандартной в случае торического многообразия, описана в [11; § 4].)

## § 2. Башни Ботта

Напомним кратко основные определения, следуя [2] и [3] (в этих работах можно найти более детальное изложение истории и приложений башен Ботта).

Определение. *Башней Ботта* высоты $n$ называется такая последовательность многообразий $(B^{2k}\colon k \leqslant n)$, что $B^2 = \mathbb{C}P^1$ и $B^{2k} = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$ при $1 < k \leqslant n$, где $P(\,\cdot\,)$ обозначает комплексную проективизацию расслоения, $\xi_{k-1}$ есть некоторое комплексное одномерное расслоение над $B^{2(k-1)}$, а $\underline{\mathbb{C}}$ – тривиальное комплексное одномерное расслоение. В частности, мы имеем расслоение $B^{2k} \to B^{2(k-1)}$ со слоем $\mathbb{C}P^1$.

Мы также будем использовать термин "башня Ботта" применительно к последнему многообразию $B^{2n}$ в последовательности. Тогда из определения вытекает, что $B^{2n}$ представляет собой комплексное многообразие, получаемое как тотальное пространство итерированного расслоения со слоем $\mathbb{C}P^1$. Башни Ботта высоты два известны как *поверхности Хирцебруха*.

Следующее описание колец когомологий башни Ботта вытекает из стандартных результатов о когомологиях проективизаций расслоений (все группы когомологий рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, если не оговорено противное).

Лемма 2.1. *$H^*(B^{2k})$ является свободным модулем над $H^*(B^{2(k-1)})$ с двумя образующими $1$ и $u_k$, имеющими размерность нуль и два соответственно. Кольцевая структура задается единственным соотношением*

$$u_k^2 = c_1(\xi_{k-1})u_k,$$

*а ограничение $u_k$ на слой $\mathbb{C}P^1 \subset B^{2k}$ является первым классом Чженя канонического одномерного линейного расслоения над $\mathbb{C}P^1$.*

Пусть $u_1$ – каноническая образующая группы $H^2(\mathbb{C}P^1)$ (первый класс Чженя канонического одномерного расслоения). Тогда башня Ботта однозначно определяется набором целых чисел $a_{ij}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, где

$$u_k^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} u_i u_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.1}$$

Кольцо когомологий многообразия $B^{2n}$ получается факторизацией кольца многочленов $\mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n]$ по соотношениям (2.1).

Числа $a_{ij}$ удобно рассматривать как элементы следующей верхнетреугольной целочисленной матрицы размера $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Пример 2.2. Пусть $n = 2$. Тогда башня Ботта $B^4$ задается одним одномерным расслоением $\xi_1$ над $\mathbb{C}P^1$. Мы имеем $\xi_1 = \gamma^m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, где $\gamma$ – каноническое одномерное расслоение над $B^2 = \mathbb{C}P^1$. Следовательно, кольцо когомологий задается двумя соотношениями $u_1^2 = 0$ и $u_2^2 = mu_1u_2$. Хорошо известно, что $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^m) \cong P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{m'})$ тогда и только тогда, когда $m \equiv m' \pmod 2$, где $\cong$ означает "диффеоморфизм".

Это можно доказать следующим образом. Заметим, что $P(E) \cong P(E \otimes \eta)$ для любого комплексного одномерного расслоения $\eta$. Пусть $m \equiv m' \pmod 2$. Тогда $m' - m = 2\ell$ для некоторого $\ell \in \mathbb{Z}$ и мы имеем диффеоморфизмы

$$P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^m) \cong P((\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^m) \otimes \gamma^\ell) = P(\gamma^\ell \oplus \gamma^{m+\ell}).$$

Здесь $\gamma^\ell \oplus \gamma^{m+\ell}$ и $\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{m'}$ являются расслоениями над $\mathbb{C}P^1$ с одинаковыми первыми классами Чженя, так что эти два расслоения изоморфны. Поэтому последнее пространство в предыдущей формуле можно отождествить с $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{m'})$. С другой стороны, нетрудно видеть, что если $H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^m)) \cong H^*(P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{m'}))$ как кольца, то $m \equiv m' \pmod 2$.

Этот пример показывает, что кольцо когомологий определяет топологический тип башни Ботта $B^{2n}$ при $n = 2$. Разбор случаев, основанный на классификационном результате [7; § 3], показывает, что этот факт также имеет место для $n = 3$. Поэтому можно поставить следующий вопрос.

Вопрос 2.3. Верно ли, что изоморфизм колец когомологий

$$H^*(B_1^{2n}) \cong H^*(B_2^{2n})$$

башен Ботта $B_1^{2n}$ и $B_2^{2n}$ влечет их гомеоморфизм?

Мы исследуем этот вопрос в § 5 и дадим на него частичный ответ.

## § 3. Квазиторические многообразия

В работе [8] Дэвисом и Янушкиевичем был введен класс $2n$-мерных многообразий $M$ с действием $n$-мерного тора $T$. На действие налагалось условие *локальной стандартности* (т.е. действие локально изоморфно стандартному представлению $n$-мерного тора в $\mathbb{C}^n$). Кроме того, требовалось, чтобы пространство орбит $M/T$ было *простым* $n$-мерным многогранником $P$, т.е. имелась бы проекция $\pi\colon M \to P$, слоями которой являются орбиты действия. Дэвис и Янушкиевич называли введенные ими многообразия *торическими*, однако позднее в литературе стал использоваться термин *квазиторические многообразия*, чтобы отличать их от торических многообразий, рассматриваемых в алгебраической геометрии. В настоящей работе мы будем следовать этой терминологии, называя многообразия Дэвиса–Янушкиевича *квазиторическими* и используя термин "торические многообразия" лишь для алгебраических многообразий. Заметим, что неособое проективное торическое многообразие является квазиторическим. Более подробное обсуждение соотношений между торическими и квазиторическими многообразиями можно найти в [9; гл. 6].

Каждое квазиторическое многообразие может быть наделено гладкой структурой, относительно которой действие тора является гладким (см. замечание в [8; с. 421] и более подробное изложение в [11; § 3]).

Пусть $m$ обозначает число *гиперграней* (граней коразмерности один) многогранника $P$. Будем считать, что гиперграни занумерованы таким образом, что первые $n$ из них имеют непустое пересечение. Обозначим гиперграни через $F_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и обозначим множество всех гиперграней через $\mathscr{F}$. Прообраз $\pi^{-1}(F_i)$ представляет собой связное подмногообразие коразмерности два в $M$, которое остается неподвижным под действием некоторой одномерной подгруппы-окружности в $T$. Обозначим это подмногообразие через $M_i$ и будем называть его *характеристическим подмногообразием*, соответствующим гиперграни $F_i$. *Полиориентация* [12] многообразия $M$ состоит из ориентации самого $M$ и каждого из его характеристических подмногообразий.

Пусть $N$ – целочисленная решетка однопараметрических подгрупп в $T$, т.е. $N \cong \mathbb{Z}^n$. Для каждого характеристического подмногообразия $M_j$ обозначим через $\lambda_j$ примитивный вектор в $N$, порождающий одномерную подгруппу $T_{M_j} \subset T$, оставляющую многообразие $M_j$ неподвижным. Вектор $\lambda_j$ определен лишь с точностью до знака. Соответствие $\lambda\colon F_j \mapsto \lambda_j$ было названо в [8] *характеристической функцией* квазиторического многообразия $M$.

При помощи полиориентации можно интерпретировать характеристическую функцию как линейное отображение $\lambda\colon \mathbb{Z}^{\mathscr{F}} \to N$. Действительно, для этого нужно лишь указать канонический способ выбора одного из двух направлений для каждого вектора $\lambda_j$. Сначала заметим, что действие параметризованной подгруппы $T_{M_j} \subset T$ задает ориентацию в нормальном расслоении $\nu_j$ вложения $M_j \subset M$. Полиориентация многообразия $M$ также задает ориентацию в $\nu_j$ при помощи следующего разложения касательного расслоения:

$$\tau(M)\big|_{M_j} = \tau(M_j) \oplus \nu_j.$$

Теперь выберем направление примитивного вектора $\lambda_j$ таким образом, чтобы эти две ориентации совпадали для всех $1 \leqslant j \leqslant m$.

Вообще говоря, канонический способ выбора полиориентации для $M$ отсутствует. Тем не менее, если $M$ допускает *$T$-эквивариантную почти комплексную структуру*, то выбор такой структуры дает канонический способ ориентации $M$ и каждого нормального расслоения $\nu_j$ для $1 \leqslant j \leqslant m$. Тем самым получаем полиориентацию, *ассоциированную* с эквивариантной почти комплексной структурой. В дальнейшем в случае, когда $M$ является эквивариантно почти комплексным (например, если $M$ – неособое компактное торическое многообразие), всегда будем его снабжать ассоциированной полиориентацией. В других случаях будем фиксировать полиориентацию произвольно.

По определению характеристическая функция удовлетворяет следующему *условию неособости*: если пересечение гиперграней $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ непусто, то соответствующие векторы $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$ образуют базис решетки $N$. Тогда мы можем использовать первые $n$ векторов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ для отождествления $N$ с $\mathbb{Z}^n$

и задать отображение $\lambda$ целочисленной матрицей размера $n \times m$ вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{1,n+1} & \dots & \lambda_{1,m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_{2,n+1} & \dots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n,n+1} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Часто удобно представлять $\Lambda$ в виде $(E \mid \Lambda_\star)$, где $E$ – единичная матрица, а $\Lambda_\star$ – матрица размера $n \times (m-n)$. Для любой вершины $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ многогранника соответствующие столбцы $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$ матрицы $\Lambda$ образуют базис в $\mathbb{Z}^n$ и определитель составленной из них матрицы равен $\pm 1$. Будем называть (3.1) *приведенной формой* характеристической матрицы $\Lambda$, а подматрицу $\Lambda_\star$ – *приведенной подматрицей*.

Выбрав базис решетки $N$, можно отождествить тор $T$ со стандартным произведением единичных окружностей в $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{T}^n = \{(e^{2\pi i \varphi_1}, \dots, e^{2\pi i \varphi_n}) \in \mathbb{C}^n\}, \tag{3.2}$$

где $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ пробегает пространство $\mathbb{R}^n$. Будем также обозначать точки $\mathbb{T}^n$ через $(t_1, \dots, t_n)$. Тогда однопараметрическая подгруппа, оставляющая неподвижным подмногообразие $M_j$, может быть задана следующим образом:

$$\begin{gathered} T_{M_j} = \bigl\{(t^{\lambda_{1j}}, \dots, t^{\lambda_{nj}}) = (e^{2\pi i \lambda_{1j}\varphi}, \dots, e^{2\pi i \lambda_{nj}\varphi}) \in \mathbb{T}^n\bigr\}, \\ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad t = e^{2\pi i \varphi}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Замечание. Не любое неособое компактное торическое многообразие $X$ является квазиторическим многообразием, так как пространство орбит $X/T$ может не быть выпуклым многогранником (хотя оно является многогранником, если $X$ проективно). Тем не менее, можно определить характеристические подмногообразия $X_j \subset X$ (как $T$-инвариантные дивизоры) и также имеется каноническая полиориентация, индуцированная комплексными структурами на $X$ и $X_j$. Поэтому характеристическая матрица $\Lambda$ определена для любого компактного неособого торического многообразия $X$. Векторы $\lambda_j$ суть примитивные векторы вдоль ребер веера, соответствующего многообразию $X$.

Пусть $v_j$ обозначает класс в $H^2(M)$, двойственный к фундаментальному классу подмногообразия $M_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Согласно результату [8; теорема 4.14] кольцо $H^*(M)$ порождено элементами $v_1, \dots, v_m$, которые удовлетворяют двум наборам соотношений. Первый набор составляют мономиальные соотношения, возникающие из *идеала Стенли–Райснера* многогранника $P$; второй набор состоит из линейных соотношений, определяемых характеристической матрицей:

$$v_i = -\lambda_{i,n+1} v_{n+1} - \dots - \lambda_{i,m} v_m, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.4}$$

Отсюда вытекает, что кольцо $H^*(M)$ мультипликативно порождается элементами $v_{n+1}, \dots, v_m$.

Квазиторические многообразия $M_1$ и $M_2$ называются *слабо $T$-эквивариантно гомеоморфными* (или просто *слабо $T$-гомеоморфными*), если существуют автоморфизм $\theta\colon T \to T$ и гомеоморфизм $f\colon M_1 \to M_2$ такие, что

$$f(t \cdot x) = \theta(t) \cdot f(x)$$

для любых $t \in T$ и $x \in M_1$. Если $\theta$ – тождественный автоморфизм, то $M_1$ и $M_2$ называются *$T$-гомеоморфными.* Следуя Дэвису и Янушкиевичу, назовем квазиторические многообразия $M_1$ и $M_2$ над одним и тем же многогранником $P$ *эквивалентными*, если существует слабый $T$-гомеоморфизм $f\colon M_1 \to M_2$, накрывающий тождественное отображение многогранника $P$. В силу [8; предложение 1.8] квазиторическое многообразие $M$ над $P$ определено с точностью до эквивалентности своей характеристической функцией $\lambda$. Это вытекает из "базовой конструкции", определяющей каноническое квазиторическое многообразие $M(P,\lambda)$, зависящее лишь от $P$ и $\lambda$, и слабый $T$-гомеоморфизм $M(P,\lambda) \to M$, накрывающий тождественное отображение на $P$.

Пусть $\operatorname{ch} f(P)$ обозначает множество характеристических функций для $P$, т.е. множество отображений $\lambda\colon \mathscr{F} \to N$, удовлетворяющих условию неособости. Группа $\mathrm{GL}(N) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ автоморфизмов решетки $N$ действует слева на множестве $\operatorname{ch} f(P)$ (автоморфизм $g\colon N \to N$ действует при помощи композиции $\lambda \mapsto g \cdot \lambda$). Так как автоморфизмы решетки соответствуют автоморфизмам тора $T$, имеется взаимно однозначное соответствие

$$\mathrm{GL}(N) \setminus \operatorname{ch} f(P) \longleftrightarrow \{\text{классы эквивалентности } M \text{ над } P\}. \tag{3.5}$$

Каждом элементу $\lambda \in \operatorname{ch} f(P)$ можно сопоставить $(n \times m)$-матрицу $\Lambda$ путем упорядочивания гиперграней и выбора базиса для $N$, как это было сделано выше. Выбор матрицы $\Lambda$ приведенного вида (3.1) теперь можно рассматривать как выбор специального представителя в левом классе сопряженных элементов $\mathrm{GL}(N) \setminus \operatorname{ch} f(P)$. Если же характеристическая матрица задана в неприведенном виде $\Lambda = (A \mid B)$, где $A$ имеет размер $n \times n$, а $B$ – размер $n \times (m-n)$, то приведенный представитель в ее классе сопряженных элементов задается матрицей $(E \mid A^{-1}B)$.

Построенная Дэвисом и Янушкиевичем каноническая модель $M(P,\lambda)$ может быть получена как фактор *момент-угол многообразия* $\mathscr{Z}_P$ по свободно действующей $(m-n)$-мерной торической подгруппе в $\mathbb{T}^m$, задаваемой как ядро характеристического отображения $\lambda\colon \mathbb{Z}^m \to N$, см. [8], [9; гл. 7]. Момент-угол многообразие $\mathscr{Z}_P$ вкладывается в $\mathbb{C}^m$ как полное пересечение $m-n$ вещественных квадратичных гиперповерхностей [11; § 3]. Отсюда вытекает, что $\mathscr{Z}_P$ и $M(P,\lambda)$ являются гладкими многообразиями. Поэтому каждое квазиторическое многообразие $M$ над $P$ с характеристической функцией $\lambda$ может быть наделено *канонической эквивариантной гладкой структурой.* Тем не менее, нам не известно, единственна ли эта эквивариантная гладкая структура (см. обсуждение этого вопроса в § 1).

Нас будет интересовать случай, когда многогранник-пространство орбит $P = M/\mathbb{T}^n$ является $n$-мерным кубом $\mathbb{I}^n$. Тогда $m = 2n$, и предположим дополнительно, что гиперграни занумерованы таким образом, что $F_j$ и $F_{n+j}$ являются противоположными (т.е. не пересекаются) при $1 \leqslant j \leqslant n$. В случае $P = \mathbb{I}^n$ момент-угол многообразие является произведением $n$ трехмерных сфер и вкладывается в $\mathbb{C}^{2n}$ как

$$\bigl\{(z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n} \colon |z_j|^2 + |z_{n+j}|^2 = 1 \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant n\bigr\}.$$

Факторпространство $(S^3)^n/\mathbb{T}^{2n}$ по покоординатному действию является кубом $\mathbb{I}^n$. Торическая подгруппа $T(\Lambda) \subset \mathbb{T}^{2n}$ размерности $n$, задаваемая как ядро характеристического отображения (3.1), может быть записана как

$$\begin{aligned}(t_1, \dots, t_n) \mapsto (&t_1^{-\lambda_{1,n+1}} t_2^{-\lambda_{1,n+2}} \cdots t_n^{-\lambda_{1,2n}}, \\ &\dots, t_1^{-\lambda_{n,n+1}} t_2^{-\lambda_{n,n+2}} \cdots t_n^{-\lambda_{n,2n}}, t_1, t_2, \dots, t_n). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Эта подгруппа действует на $(S^3)^n$ свободно, и $(S^3)^n/T(\Lambda)$ есть квазиторическое многообразие, определяемое матрицей $\Lambda$. Тор $\mathbb{T}^{2n}/T(\Lambda) \cong \mathbb{T}^n$ действует на $(S^3)^n/T(\Lambda) \cong M$ с пространством орбит $\mathbb{I}^n$. В координатах элемент $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$ действует на $[z_1, \dots, z_{2n}] \in (S^3)^n/T(\Lambda)$ покоординатным умножением на $(t_1, \dots, t_n, 1, \dots, 1)$.

Предложение 3.1. *Башня Ботта несет естественное действие тора, задающее на ней структуру квазиторического многообразия над кубом с приведенной характеристической подматрицей* $\Lambda_\star = A^t$ (*см.* (2.2) *и* (3.1)).

Доказательство. Как показано в [3; предложение 3.1], башня Ботта, соответствующая матрице (2.2), может быть получена факторизацией $(S^3)^n$ по действию $n$-мерного подтора в $\mathbb{T}^{2n}$, определяемого вложением

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, t_1^{-a_{12}} t_2, \dots, t_1^{-a_{1n}} t_2^{-a_{2n}} \cdots t_{n-1}^{-a_{n-1,n}} t_n, t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Остается заметить, что это совпадает с $T(\Lambda)$ из (3.6) для $\Lambda_\star = A^t$.

Замечание. Соотношения Стенли–Райснера для $n$-мерного куба имеют вид $v_i v_{i+n} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Эти соотношения вместе с (3.4) дают (2.1) при подстановке $\Lambda_\star = A^t$ и $u_i = v_{i+n}$.

По определению башня Ботта является комплексным многообразием. В [2] рассматривалась алгебраическая версия предыдущей конструкции (формула (3.6) также определяет вложение алгебраических, т.е. некомпактных, торов) и башни Ботта были описаны как неособые проективные торические многообразия. Как показано в [3; § 2], топологический и алгебраический подходы приводят к одному результату.

Для каждой перестановки $\sigma$ на $n$ элементах обозначим через $P(\sigma)$ соответствующую $(n \times n)$-*матрицу перестановки*, элементами которой являются единицы в позициях $(i, \sigma(i))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и нули в остальных местах. Имеется действие симметрической группы $S_n$ на $(n \times n)$-матрицах при помощи сопряжений $A \mapsto P(\sigma)^{-1} A P(\sigma)$, т.е. при помощи перестановок строк и столбцов матриц $A$.

Предложение 3.2. *Квазиторическое многообразие $M$ над кубом с приведенной подматрицей $\Lambda_\star$ эквивалентно башне Ботта тогда и только тогда, когда $\Lambda_\star$ сопряжена при помощи матрицы перестановки верхнетреугольной матрице.*

Доказательство. Пусть $\Lambda_\star$ сопряжена при помощи матрицы перестановки верхнетреугольной матрице. Ясно, что это условие эквивалентно тому, что $\Lambda_\star$ сопряжена нижнетреугольной матрице. Рассмотрим действие $S_n$ на множестве гиперграней куба $\mathbb{I}^n$ перестановками пар противоположных гиперграней. Переупорядочивание гиперграней соответствует переупорядочиванию столбцов характеристической $(n\times 2n)$-матрицы $\Lambda$, так что элемент $\sigma\in S_n$ действует как

$$\Lambda \mapsto \Lambda\cdot\begin{pmatrix} P(\sigma) & 0\\ 0 & P(\sigma)\end{pmatrix}.$$

Это действие не сохраняет приведенную форму матрицы $\Lambda$, так как $(E\mid\Lambda_\star)$ превращается в $(P(\sigma)\mid\Lambda_\star P(\sigma))$. Приведенным представителем в левом классе сопряженных элементов (3.5) матрицы $\Lambda$ является матрица $(E\,|\,P(\sigma)^{-1}\Lambda_\star P(\sigma))$. (Другими словами, чтобы сохранить матрицу в приведенном виде, нам нужно компенсировать перестановку пар гиперграней автоморфизмом тора $\mathbb{T}^n$, переставляющим координатные окружности.) Таким образом, действие перестановками на парах противоположных гиперграней индуцирует действие сопряжениями на приведенных подматрицах. Значит, с точностью до эквивалентности мы можем предположить, что $M$ имеет нижнетреугольную приведенную подматрицу $\Lambda_\star$. Условие неособости гарантирует, что на диагонали матрицы $\Lambda_\star$ стоят $\pm1$. Изменяя, если необходимо, полиориентацию $M$, можно добиться того, что все диагональные элементы матрицы $\Lambda_\star$ суть $-1$. Тогда $M$ и башня Ботта, соответствующая матрице $A=\Lambda_\star^t$, имеют одинаковые характеристические матрицы $\Lambda$ в силу предложения 3.1. Следовательно, $M$ и башня Ботта эквивалентны согласно [8; предположение 1.8].

Обратное утверждение вытекает из предложения 3.1.

Теперь становится понятно, что не все квазиторические многообразия над кубами являются башнями Ботта. Например, четырехмерное квазиторическое многообразие над квадратом с приведенной характеристической подматрицей

$$\Lambda_\star=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

не может быть башней Ботта, так как $\Lambda_\star$ не является сопряженной к верхнетреугольной матрице. (Соответствующее многообразие гомеоморфно $\mathbb{C}P^2\,\#\,\mathbb{C}P^2$ и поэтому даже не допускает комплексной структуры [8].)

Для каждого $k$-элементного подмножества $\{i_1,\dots,i_k\}$ множества из $n$ элементов определен *главный минор* квадратной $n$-матрицы $A$ – определитель подматрицы, образованной элементами в столбцах и строках с номерами $i_1,\dots,i_k$. В случае башен Ботта согласно предложению 3.1 все главные миноры матрицы $-\Lambda_\star$ равны 1; а для произвольного квазиторического многообразия условие неособости лишь гарантирует, что все главные миноры матрицы $\Lambda_\star$ равны $\pm1$.

Напомним, что верхнетреугольная матрица называется *унипотентной*, если все ее диагональные элементы равны 1. Следующая ключевая техническая лемма может быть извлечена из доказательства намного более общего результата Добринской [7; теорема 6]. Мы приводим более подробное доказательство для полноты изложения.

Лемма 3.3. *Пусть $R$ – коммутативное целостное кольцо с единицей $1$, и пусть $A$ – некоторая $(n\times n)$-матрица с элементами из $R$. Предположим, что все собственные главные миноры матрицы $A$ равны единице. Если* $\det A = 1$, *то матрица $A$ сопряжена при помощи матрицы перестановки унипотентной верхнетреугольной матрице. В противном случае матрица $A$ сопряжена при помощи матрицы перестановки матрице вида*

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

*где $b_i \neq 0$ для всех $i$* [7].

Доказательство. Из условия вытекает, что на диагонали матрицы $A$ стоят единицы. Будем говорить, что $i$-я строка матрицы является *элементарной*, если ее $i$-й элемент равен единице, а остальные элементы равны нулю. Предполагая по индукции, что теорема верна для матриц размера $n-1$, выводим, что сама матрица $A$ сопряжена унипотентной верхнетреугольной матрице тогда и только тогда, когда она содержит элементарную строку. Обозначим через $A_i$ квадратную $(n-1)$-матрицу, получаемую удалением $i$-го столбца и $i$-й строки из $A$.

По индукции можно предположить, что $A_n$ является унипотентной верхнетреугольной матрицей. Теперь применим предположение индукции к матрице $A_1$. Перестановка строк и столбцов, превращающая $A_1$ в унипотентную верхнетреугольную матрицу, превращает $A$ в "почти" унипотентную верхнетреугольную матриц, которая может иметь лишь один ненулевой элемент ниже диагонали, и этот элемент должен быть в первом столбце. Если этот ненулевой элемент не $a_{n1}$, то $n$-я строка матрицы $A$ является элементарной и $A$ сопряжена унипотентной верхнетреугольной матрице при помощи матрицы перестановки. В противном случае получаем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $b_{n-1} \neq 0$ и $b_n \neq 0$ (иначе $A$ содержит элементарную строку). Пусть теперь $a_{1j_1}$ – последний ненулевой элемент в первой строке матрицы $A$. Если $A$ не содержит элементарных строк, то можно индуктивно определить $a_{j_i j_{i+1}}$ как последний ненулевой недиагональный элемент в $j_i$-й строке матрицы $A$. Очевидно, имеем

$$1 < j_1 < \dots < j_i < j_{i+1} < \dots < j_k = n$$

для некоторого $k < n$. Если $j_i = i+1$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то $A$ имеет вид (3.7) с $b_i = a_{j_{i-1}j_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. В противном случае подматрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a_{1j_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{j_1 j_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{j_{k-1}n} \\ b_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

составленная из элементов, стоящих в столбцах и строках с номерами $1, j_1, \dots, j_k$, является собственной и имеет определитель, равный $1 \pm b_n \prod a_{j_i j_{i+1}} \neq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следующая теорема не является новой; эквивалентность утверждений а) и б) является частным случаем [7; теорема 6], а эквивалентность утверждений б) и в) вытекает из результатов [13] и [14; предложение 5.53] (посвященного более общему случаю квазиторических многообразий над произвольными многогранниками). Мы приведем доказательство, так как оно понадобится далее.

Теорема 3.4. *Пусть $M = M(I^n, \Lambda)$ – квазиторическое многообразие над кубом с канонической эквивариантной гладкой структурой и $\Lambda_\star$ – соответствующая приведенная подматрица. Следующие условия эквивалентны*:

а) *$M$ эквивалентно башне Ботта*;

б) *все главные миноры матрицы $-\Lambda_\star$ равны единице*;

в) *$M$ допускает $\mathbb{T}^n$-эквивариантную почти комплексную структуру* (*с ассоциированной полиориентацией*).

Доказательство. Импликация б) $\Rightarrow$ а) вытекает из леммы 3.3 и предложения 3.2. Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна. Докажем в) $\Rightarrow$ б). Напомним определение *знака* $\sigma(p)$ неподвижной точки $\mathbb{T}^n$-действия на $M$ из [13; § 4], [7] и [15]. Каждая неподвижная точка $p$ получается как пересечение $M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_n}$ некоторых $n$ характеристических подмногообразий и соответствует вершине многогранника $P$, получаемой как пересечение $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ соответствующих гиперграней. Касательное пространство к $M$ в точке $p$ разлагается в сумму нормальных подпространств к подмногообразиям $M_{j_k}$ для $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\tau_p(M) = \nu_{j_1}|_p \oplus \dots \oplus \nu_{j_n}|_p. \tag{3.8}$$

При помощи полиориентации $M$ это пространство может быть ориентировано двумя различными способами: положим $\sigma(p) = 1$, если эти две ориентации совпадают, и $\sigma(p) = -1$ в противоположном случае. Этот знак может быть вычислен в терминах многогранника $P$ и характеристической матрицы $\Lambda$ следующим образом:

$$\sigma(p) = \operatorname{sign}\bigl(\det(\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}) \cdot \det(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})\bigr) \tag{3.9}$$

(см. [15; § 1]), где $a_i$ обозначает нормальный вектор к гиперграни $F_i$, направленный внутрь многогранника. Если $P = \mathbb{I}^n$, то каждая неподвижная точка $p$ соответствует вершине, задаваемой как

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \cap F_{n+l_1} \cap \dots \cap F_{n+l_{n-k}}$$

для некоторых $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$ и $1 \leqslant l_1 < \dots < l_{n-k} \leqslant n$. При этом $a_i = e_i$ ($i$-й базисный вектор) для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $a_j = -e_j$ для $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$. Следовательно, выражение в правой части (3.9) равно главному минору матрицы $-\Lambda_\star$, образованному столбцами и строками с номерами $l_1, \dots, l_{n-k}$. Остается заметить, что в почти комплексном случае две ориентации в (3.8) совпадают, так что знак каждой неподвижной точки равен единице.

Правильный многогранник, двойственный к кубу, называется *крест-многогранником* (трехмерный крест-многогранник есть октаэдр).

Следствие 3.5. *Пусть $X$ – неособое торическое многообразие, для которого соответствующий веер комбинаторно эквивалентен вееру, состоящему из конусов над гранями крест-многогранника. Тогда $X$ является башней Ботта.*

Доказательство. Приведенная подматрица $\Lambda_\star$ многообразия $X$ имеет размер $n \times n$, и все главные миноры матрицы $-\Lambda_\star$ равны единице (это доказывается так же, как в теореме 3.4). В силу леммы 3.3 матрица $-\Lambda_\star$ сопряжена унипотентной верхнетреугольной матрице, так что $\Lambda$ имеет такой же вид, как и характеристическая матрица башни Ботта. В случае торического многообразия столбцы матрицы $\Lambda$ суть примитивные векторы вдоль ребер веера, так что комбинаторный тип веера и матрица $\Lambda$ полностью определяют веер. Следовательно, веер торического многообразия $X$ является веером для некоторой башни Ботта. Так как торические многообразия однозначно восстанавливаются по своим веерам, то $X$ является башней Ботта.

Торические многообразия над кубами удовлетворяют предположению следствия 3.5. Отсюда вытекает, что класс башен Ботта совпадает с классом торических многообразий над кубами и первое включение в (1.1) является равенством. Как и лемма 3.3, следствие 3.5 является частным случаем более общего результата Добринской [7; следствие 7] (этот результат характеризует квазиторические многообразия над произведениями симплексов, которые разлагаются в башни расслоений).

## § 4. Полусвободные действия окружности

Действие группы на топологическом пространстве называется *полусвободным*, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек. В этом параграфе покажем (теорема 4.3), что если тор $\mathbb{T}^n$, действующий на квазиторическом многообразии $M$ над кубом, содержит одномерную подгруппу-окружность, действующую полусвободно и с изолированными неподвижными точками, то $M$ является башней Ботта. Кроме того, покажем, что все такие башни Ботта $\mathbb{S}^1$-эквивариантно гомеоморфны произведению двумерных сфер (с диагональным $\mathbb{S}^1$-действием).

Комплексное $n$-мерное представление окружности $\mathbb{S}^1$ определяется набором весов $k_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. В подходящих координатах элемент $s = e^{2\pi i\varphi} \in \mathbb{S}^1$ действует как

$$s \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{2\pi i k_1 \varphi} z_1, \dots, e^{2\pi i k_n \varphi} z_n). \tag{4.1}$$

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 4.1. *Представление $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{C}^n$ является полусвободным тогда и только тогда, когда $k_j = \pm 1$ при $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Замкнутая одномерная подгруппа $S^1_\nu$ в $\mathbb{T}^n$ определяется целочисленным примитивным вектором $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$:

$$S^1_\nu = \{(e^{2\pi i \nu_1 \varphi}, \dots, e^{2\pi i \nu_n \varphi})\} \subseteq \mathbb{T}^n. \tag{4.2}$$

Будем рассматривать представления тора $\mathbb{T}^n$ и его одномерных подгрупп в касательных пространствах к неподвижным точкам квазиторического многообразия $M$. Представление в касательном пространстве $\tau_p(M)$ в неподвижной точке $p = M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_n}$ разлагается в сумму нетривиальных вещественных двумерных представлений в нормальных подпространствах к $M_{j_k}$ в $M$. Полиориентация снабжает каждое пространство $\nu_{j_k}$ комплексной структурой, тем самым отождествляя его с $\mathbb{C}$ и $\tau_p M$ с $\mathbb{C}^n$. В этих координатах веса представления одномерной подгруппы (4.2) в $\tau_p M$ можно отождествить с коэффициентами $k_i = k_i(\nu, p)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в разложении вектора $\nu$ по векторам $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$:

$$\nu = k_1(\nu, p)\lambda_{j_1} + \dots + k_n(\nu, p)\lambda_{j_n} \tag{4.3}$$

(см., например, [15; лемма 2.3]).

Следствие 4.2. *Одномерная подгруппа $S^1_\nu \subseteq \mathbb{T}^n$ действует на квазиторическом многообразии $M$ полусвободно и с изолированными неподвижными точками тогда и только тогда, когда для каждой вершины $p = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ коэффициенты в разложении* (4.3) *удовлетворяют условию $k_i(\nu, p) = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Теорема 4.3. *Пусть $M$ – квазиторическое многообразие над кубом с приведенной характеристической подматрицей $\Lambda_\star$. Предположим, что $M$ допускает полусвободное действие одномерной подгруппы-окружности с изолированными неподвижными точками. Тогда $M$ эквивалентно башне Ботта.*

Доказательство. Предположим по индукции, что каждое характеристическое подмногообразие является башней Ботта, т.е. каждый собственный главный минор матрицы $-\Lambda_\star$ равен единице. Поэтому выполнены условия леммы 3.3 и матрица $-\Lambda_\star$ имеет один из двух описанных там видов. Мы исключим второй случай, предположив полусвободность действия. Действительно, пусть $\Lambda = (E \mid -B)$, где $B$ – матрица (3.7), и $S^1_\nu \subseteq \mathbb{T}^n$ действует полусвободно с изолированными неподвижными точками. Применив критерий из следствия 4.2

к вершине $p = F_1 \cap \dots \cap F_n$, получаем $\nu_i = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Теперь применим тот же критерий к вершине $p' = F_{n+1} \cap \dots \cap F_{2n}$. Так как подматрица, образованная соответствующими столбцами матрицы $\Lambda$, есть в точности $-B$, то $\det B = \pm 1$. Это означает, что хотя бы одно из чисел $b_i$ равно $\pm 1$, т.е. хотя бы одна строка матрицы $B$ состоит только из двух $\pm 1$ и остальных нулей. Следовательно, если все коэффициенты $k_i(\nu, p')$ в разложении $\nu = k_1(\nu, p')\lambda_{n+1} + \dots + k_n(\nu, p')\lambda_{2n}$ равны $\pm 1$, то хотя бы одна координата $\nu_j$ вектора $\nu$ четна. Получаем противоречие. Теорема доказана.

Далее мы покажем, что башня Ботта с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками топологически (и даже $\mathbb{S}^1$-эквивариантно) тривиальна, т.е. гомеоморфна произведению двумерных сфер. Пусть $t$ (соответственно $\mathbb{C}$) обозначает стандартное (соответственно тривиальное) комплексное одномерное представление $\mathbb{S}^1$, а $\underline{V}$ обозначает тривиальное расслоение со слоем $V$ над заданной базой. Будем говорить, что действие группы $G$ на башне Ботта $B^{2n}$ *сохраняет структуру башни*, если для каждого этажа $B^{2k} = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$, $k \leqslant n$, одномерное расслоение $\xi_{k-1}$ является $G$-эквивариантным. Каноническое действие тора $\mathbb{T}^n$, очевидно, сохраняет структуру башни.

Теорема 4.4. *Предположим, что башня Ботта $B^{2n}$ допускает полусвободное действие окружности $\mathbb{S}^1$, имеющее изолированные неподвижные точки и сохраняющее структуру башни. Тогда башня Ботта $\mathbb{S}^1$-эквивариантно диффеоморфна произведению $(P(\mathbb{C} \oplus t))^n$.*

Доказательство. Предположим по индукции, что $(n-1)$-й этаж данной башни Ботта есть $(P(\mathbb{C} \oplus t))^{n-1}$ и $B^{2n} = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ для некоторого одномерного $\mathbb{S}^1$-расслоения $\xi$ над $(P(\mathbb{C} \oplus t))^{n-1}$.

Пусть $\gamma$ – каноническое одномерное расслоение над $P(\mathbb{C} \oplus t) \cong \mathbb{C}P^1$. На нем имеется единственная структура эквивариантного $\mathbb{S}^1$-расслоения, для которой

$$\gamma\big|_{(1:0)} = \mathbb{C}, \qquad \gamma\big|_{(0:1)} = t. \tag{4.4}$$

Обозначим через $x \in H^2(P(\mathbb{C} \oplus t))$ первый класс Чженя расслоения $\gamma$. Пусть $x_i \in H^2(P(\mathbb{C} \oplus t)^{n-1})$ обозначает прообраз $x$ при проекции $\pi_i$ на $i$-й сомножитель. Первый класс Чженя расслоения $\xi$ можно записать в виде $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Одномерные $\mathbb{S}^1$-расслоения $\xi$ и $\bigotimes_{i=1}^{n-1} \pi_i^*(\gamma^{a_i})$ имеют одинаковые подлежащие расслоения, поэтому для некоторого целого $k$

$$\xi = t^k \bigotimes_{i=1}^{n-1} \pi_i^*(\gamma^{a_i}) \tag{4.5}$$

как $\mathbb{S}^1$-расслоения [16; следствие 4.2].

Будем представлять неподвижные точки действия на $P(\mathbb{C} \oplus t)^{n-1}$ последовательностями $(p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}})$, где $\varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1$, а $p_i^{\varepsilon_i}$ обозначает $(1:0)$, если $\varepsilon_i = 0$, и $(0:1)$, если $\varepsilon_i = 1$. Тогда из (4.4) и (4.5) получаем

$$\xi\big|_{(p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}})} = t^{k + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i a_i}.$$

Действие $\mathbb{S}^1$ на $B^{2n} = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ полусвободно тогда и только тогда, когда $|k + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i a_i| = 1$ для всех возможных значений $\varepsilon_i$. Полагая $\varepsilon_i = 0$ для всех $i$, получаем $|k| = 1$. Предположим, что $k = 1$ (случай $k = -1$ рассматривается аналогично). Тогда $(a_1, \ldots, a_{n-1}) = (0, \ldots, 0)$ или $(0, \ldots, 0, -2, 0, \ldots, 0)$. В первом случае $\xi = \underline{t}$ и $B^{2n} = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi) \cong P(\mathbb{C} \oplus t)^n$. Во втором случае имеем $\xi = t\pi_i^*(\gamma^{-2})$ для некоторого $i$, так что $B^{2n} = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi)$ индуцировано (как проективизация расслоения) из $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus t\gamma^{-2})$ при помощи проекции $\pi_i$. Так как для любого векторного $\mathbb{S}^1$-расслоения $E$ и одномерного $\mathbb{S}^1$-расслоения $\eta$ проективизации $P(E)$ и $P(E \otimes \eta)$ будут $\mathbb{S}^1$-диффеоморфны, имеем $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus t\gamma^{-2}) \cong P(\gamma \oplus t\gamma^{-1})$. Первый класс Чженя расслоения $\gamma \oplus t\gamma^{-1}$ равен нулю, так что подлежащее расслоение тривиально. Представление $\mathbb{S}^1$ в слое расслоения $\gamma \oplus t\gamma^{-1}$ над каждой неподвижной точкой изоморфно $\mathbb{C} \oplus t$ в силу (4.4). Следовательно, $\gamma \oplus t\gamma^{-1} = \underline{\mathbb{C}} \oplus \underline{t}$ как $\mathbb{S}^1$-расслоения. Отсюда получаем $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus t\gamma^{-2}) \cong P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \underline{t})$, что завершает доказательство.

Замечание. Диффеоморфизм, установленный в теореме 4.4, не является диффеоморфизмом $\mathbb{T}^n$-многообразий.

Далее мы исследуем обобщения теоремы 4.4 на квазиторические многообразия. Хотя результат не переносится на все квазиторические многообразия (см. пример 4.5), он остается верным, если дополнительно потребовать, чтобы многогранник в пространстве орбит был кубом.

Пример 4.5. Пусть $M$ – четырехмерное квазиторическое многообразие над $2k$-угольником с

$$\varLambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из следствия 4.2 вытекает, что одномерная подгруппа, определяемая вектором $\nu = (1, 1)$, действует на $M$ полусвободно. Однако пространство орбит для $M$ не является 2-кубом при $k > 2$, так что $M$ не может быть гомеоморфным произведению сфер (можно показать, что $M$ является связной суммой $k - 1$ экземпляра $S^2 \times S^2$).

Оказывается, что квазиторические многообразия над многоугольниками предоставляют, в сущности, единственный источник контрпримеров (точное утверждение см. ниже в теореме 4.8).

Лемма 4.6. *Простой многогранник $P$ размерности $n \geqslant 2$, все двумерные грани которого являются четырехугольниками, комбинаторно эквивалентен кубу.*

Доказательство. Предположим по индукции, что все гиперграни многогранника $P$ являются кубами. Докажем, что тогда и $P$ является кубом. Это утверждение можно найти в [17; упражнение 0.1], но мы приводим его доказательство ради полноты изложения. Будем доказывать двойственное утверждение о симплициальных многогранниках. Симплициальный многогранник, двойственный к $P$, есть крест-многогранник. Будем называть его границу $K$

(которая представляет собой триангуляцию сферы) *крест-комплексом*. Напомним, что *звездой* вершины $v$ симплициального комплекса $K$ называется подкомплекс $\operatorname{st} v$, состоящий из всех симплексов, содержащих $v$, и всех граней таких симплексов. *Линком* вершины $v$ называется подкомплекс $\operatorname{lk} v \subset \operatorname{st} v$, состоящий из всех симплексов в $\operatorname{st} v$, не содержащих $v$. Двойственность между $P$ и $K$ продолжается до двойственности между гипергранями многогранника $P$ (которые являются простыми $(n-1)$-мерными многогранниками) и линками вершин комплекса $K$ (которые являются триангуляциями $(n-2)$-мерных сфер). Утверждение, двойственное к утверждению теоремы, вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.7. *Пусть $K$ – связный симплициальный комплекс размерности $k \geqslant 2$. Если линк каждой вершины в $K$ является крест-комплексом размерности $k-1$, то и $K$ является крест-комплексом.*

Доказательство. Пусть $v$ – вершина комплекса $K$. По предположению $\operatorname{lk} v$ является крест-комплексом размерности $k-1$, так что для каждой вершины $p \in \operatorname{lk} v$ найдется единственная вершина $q \in \operatorname{lk} v$, которая не соединена с $p$ ребром в $\operatorname{lk} v$. При этом $p$ и $q$ могут быть соединены ребром в $K$, так что мы рассмотрим два случая.

*Случай* 1. Предположим, что найдется пара вершин $p, q$ в $\operatorname{lk} v$, которые не соединены ребром в $K$. Пусть $\mathscr{R}$ – множество остальных вершин комплекса $\operatorname{lk} v$. Тогда $\mathscr{R}$ содержит $2(k-1)$ элементов. Линк $\operatorname{lk} p$ тоже является крест-комплексом, так что он имеет $2k$ вершин и содержит $v$ и все элементы из $\mathscr{R}$. Так как $q$ не соединена с $p$ ребром в $K$, вершина $q$ не лежит в $\operatorname{lk} p$. Поэтому найдется другая вершина $p' \in \operatorname{lk} p$, $p' \notin v \cup \mathscr{R}$. Аналогично имеем $q' \in \operatorname{lk} q$, $q' \notin v \cup \mathscr{R}$. Теперь возьмем произвольную вершину $r \in \mathscr{R}$ и рассмотрим $\operatorname{lk} r$. Так как $\operatorname{lk} v$ является $(k-1)$-мерным крест-комплексом, $r$ соединена с $2(k-1)$ вершиной из $\operatorname{lk} v$ ребрами из $\operatorname{lk} v$. Мы также знаем, что $r$ соединена с $v$, $p'$ и $q'$. Но так как $\operatorname{lk} r$ также является $(k-1)$-мерным крест-комплексом, то $r$ может быть соединена ребрами не более чем с $2k$ вершинам. Следовательно, $p' = q'$, что означает, что $K$ является крест-комплексом.

*Случай* 2. Предположим теперь, что любая пара вершин в $\operatorname{lk} v$ соединена ребром в $K$ и получим противоречие. Каждая вершина $u$ в $\operatorname{lk} v$ соединена с $v$ и всеми вершинами в $\operatorname{lk} v$, кроме самой $u$. Вершина $u$ не может быть соединена ребрами ни с какими другими вершинами, кроме перечисленных, так как число вершин в $\operatorname{lk} u$ равно $2k$. Это означает, что любая пара вершин в $K$ соединена ребрами и $K$ имеет в точности $2k+1$ вершину. В каждой вершине сходится $2^k$ симплексов размерности $k$ и каждый $k$-мерный симплекс имеет $k+1$ вершину. Поэтому общее число $k$-симплексов в $K$ равно $2^k(2k+1)/(k+1)$.

Теперь подсчитаем общее число $k$-симплексов в $K$ другим способом. Пусть $\sigma$ – некоторый $k$-симплекс в $K$, не содержащий $v$. Тогда $\sigma$ содержит пару вершин, скажем $p$ и $q$, которые не соединены ребром в $\operatorname{lk} v$ (иначе сам симплекс $\sigma$ будет лежать в $\operatorname{lk} v$, так как $\operatorname{lk} v$ является крест-комплексом). Пусть $L$ – линк вершины $p$ в комплексе $\operatorname{lk} v$. Тогда $L$ является крест-комплексом размерности $k-2$ и он также совпадает с линком вершины $q$ в комплексе $\operatorname{lk} v$. Тогда

$\operatorname{lk} p$ есть соединение (джойн) $L * \{v, q\}$, так как оба эти подкомплекса имеют одинаковые наборы вершин и оба являются крест-комплексами. Аналогично $\operatorname{lk} q = L * \{v, p\}$. Так как $\sigma$ содержит $p$ и $q$, имеем $\sigma = \tau * p * q$ для некоторого $(k-2)$-симплекса $\tau \in L$. Следовательно, $\sigma$ содержит как минимум две грани размерности $k-1$ из $\operatorname{lk} v$, а именно, $\tau * p$ и $\tau * q$. Ни одна из этих граней не может быть гранью другого $k$-симплекса, не содержащего $v$, так как каждый $(k-1)$-симплекс в $K$ является гранью в точности двух $k$-симплексов, а $\tau * p$ также является гранью $\tau * p * v$ и $\tau * q$ также является гранью $\tau * q * v$. Отсюда следует, что число $k$-симплексов, не содержащих $v$, не превосходит половины числа $(k-1)$-симплекса в $\operatorname{lk} v$. Число $k$-симплексов, содержащих $v$, равно числу $(k-1)$-симплексу в $\operatorname{lk} v$. Последнее число есть $2^k$, так что общее число $k$-симплексов в $K$ меньше или равно $2^{k-1} + 2^k$, что меньше $2^k(2k+1)/(k+1)$ при $k \geqslant 2$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Замечание. Другое доказательство леммы 4.6 можно получить путем построения невырожденного симплициального отображения из $K$ на крест-комплекс. Такое отображение будет топологическим (неразветвленным) накрытием сферы сферой, так что оно должно быть изоморфизмом при $k \geqslant 2$. Этот подход был использован в [6].

Теорема 4.8. *Пусть квазиторическое многообразие $M$ допускает полусвободное действие одномерной подгруппы-окружности с изолированными неподвижными точками и любая двумерная грань пространства орбит $P$ является четырехугольником. Тогда $M$ является многообразием, $\mathbb{S}^1$-эквивариантно гомеоморфным произведению двумерных сфер.*

Доказательство. В силу леммы 4.6 пространство орбит является кубом. По теореме 4.3 многообразие $M$ эквивалентно башне Ботта. Наконец, по теореме 4.4 оно $\mathbb{S}^1$-гомеоморфно произведению сфер.

Мы также можем вывести основной результат Ильинского [6].

Следствие 4.9. *Неособое компактное торическое многообразие $X$, для которого имеется одномерная подгруппа тора, действующая полусвободно и с изолированными неподвижными точками, диффеоморфно произведению двумерных сфер.*

Доказательство. По теореме 4.4 достаточно показать, что $X$ является башней Ботта. Для этого покажем, что веер, соответствующий торическому многообразию $X$, комбинаторно эквивалентен вееру над гранями крест-многогранника, и затем применим следствие 3.5. Данная окружность, полусвободно действующая на $X$, также действует полусвободно и с изолированными неподвижными точками на каждом характеристическом подмногообразии $X_j$ в $X$. Используя индукцию по размерности и лемму 4.7, мы сведем утверждение к двумерному случаю. Таким образом, остается доказать, что многоугольник-пространство орбит неособого компактного комплексного двумерного торического многообразия с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками является четырехугольником. (Заметим, что неособые компактные комплексные двумерные торические многообразия всегда проективны, так что можно работать с многогранниками вместо вееров.) Нижеследующий анализ случаев соответствует (с небольшими изменениями) рассуждению из [6; § 3].

Пусть $\Sigma$ – веер, соответствующий неособому компактному комплексному двумерному торическому многообразию. Одномерные конусы из $\Sigma$ соответствуют гиперграням (ребрам) многоугольника $P^2$. Нужно показать, что имеется всего четыре одномерных конуса. Значения характеристической функции на гипергранях в $P^2$ задаются примитивными векторами, порождающими соответствующие одномерные конусы веера $\Sigma$. Пусть $\nu$ – вектор, порождающий полусвободно действующую окружность. Выбираем начальную вершину $p$ в $P^2$ таким образом, что вектор $\nu$ попадает в двумерный конус веера $\Sigma$, соответствующий вершине $p$. Затем занумеруем примитивные векторы $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, так, что вектор $\nu$ попадает в конус, порожденный векторами $\lambda_1$ и $\lambda_2$, а любые два последовательных вектора порождают двумерный конус (см. рис. 1). Тем

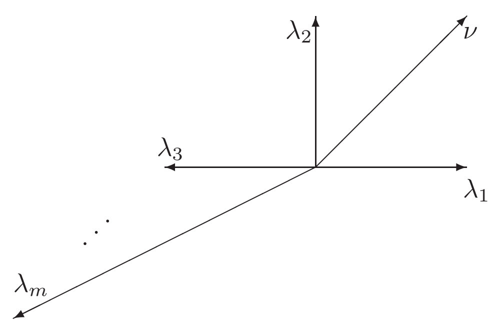


Рис. 1

самым получим характеристическую матрицу $\Lambda$ размера $2 \times m$ в приведенной форме. Имеем $\lambda_1 = (1, 0)$, $\lambda_2 = (0, 1)$. Применяя критерий из следствия 4.2 к первому конусу $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ (т.е. к начальной вершине многоугольника), получаем $\nu = (1, 1)$.

Теперь рассмотрим второй конус. Из условия неособости вытекает, что $\det(\lambda_2, \lambda_3) = 1$, откуда $\lambda_3 = (-1, *)$. Записав $\nu = k_1\lambda_2 + k_2\lambda_3$ и применив следствие 4.2 ко второму конусу $\langle \lambda_2, \lambda_3 \rangle$, получим

$$(1, 1) = \pm(0, 1) \pm (-1, *).$$

Следовательно, $\lambda_3 = (-1, 0)$ или $\lambda_3 = (-1, -2)$. Аналогично, рассматривая последний конус $\langle \lambda_m, \lambda_1 \rangle$, получим $\lambda_m = (*, -1)$ и затем, применив следствие 4.2, получим $\lambda_m = (0, -1)$ или $\lambda_m = (-2, -1)$. Случай $\lambda_3 = (-1, -2)$ и $\lambda_m = (-2, -1)$ невозможен, так как при этом второй и последний конус перекрываются.

Предположим, что $\lambda_3 = (-1, 0)$. Тогда аналогичный анализ третьего конуса $\langle \lambda_3, \lambda_4 \rangle$ показывает, что $\lambda_4 = (0, -1)$ или $\lambda_4 = (-2, -1)$. Следовательно, $\lambda_4 = \lambda_m$ (иначе конусы перекрываются).

Аналогично, если $\lambda_m = (0,-1)$, то получаем $\lambda_{m-1} = (-1,0)$ или $\lambda_{m-1} = (-1,-2)$. Следовательно, $\lambda_{m-1} = \lambda_3$.

В каждом случае получаем, что $m = 4$ и $P^2$ является четырехугольником. Тем самым доказательство завершено.

Заметим, что доказательство предыдущей теоремы оставляет три возможности для векторов $\lambda_3$ и $\lambda_4$ двумерного веера: $(-1,0)$ и $(0,-1)$; $(-1,0)$ и $(-2,-1)$; $(-1,-2)$ и $(0,-1)$, причем последние две пары переводятся друг в друга автоморфизмом тора $T^2$, меняющим ориентацию. Соответствующие приведенные подматрицы характеристической матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первая из этих подматриц соответствует многообразию $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, а вторая – нетривиальной башне Ботта (поверхности Хирцебруха) с $a_{12} = -2$.

Мы закончим этот параграф явным описанием матриц (2.2), соответствующих рассматриваемому нами специальному классу башен Ботта любой размерности.

Теорема 4.10. *Башня Ботта $B^{2n}$ допускает полусвободно действующую одномерную подгруппу-окружность с изолированными неподвижными точками тогда и только тогда, когда матрица* (2.2) *удовлетворяет тождеству*

$$\frac{1}{2}\,(E-A) = C_1C_2\cdots C_n,$$

*где $C_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ есть либо единичная матрица, либо унипотентная верхнетреугольная матрица с единственным ненулевым элементом $c_{i_k k} = 1$ над диагональю, который стоит в $k$-м столбце.*

Доказательство. Сначала предположим, что $B^{2n}$ допускает полусвободно действующую подгруппу-окружность с изолированными неподвижными точками. Имеем два набора мультипликативных образующих кольца $H^*(B^{2n})$: набор $\{u_1,\dots,u_n\}$ из леммы 2.1, удовлетворяющий соотношениям (2.1), и набор $\{x_1,\dots,x_n\}$, удовлетворяющий соотношениям $x_i^2 = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Поднаборы этих элементов с $i \leqslant k$ можно рассматривать как соответствующие наборы образующих для $k$-го этажа $B^{2k}$. Как вытекает из доказательства теоремы 4.4, имеем $c_1(\xi_{k-1}) = -2c_{i_k k}x_{i_k}$ для некоторого $i_k < k$, где $c_{i_k k} = 1$ или $c_{i_k k} = 0$. Из соотношения $u_k^2 + 2c_{i_k k}x_{i_k}u_k = 0$ получаем $x_k = u_k + c_{i_k k}x_{i_k}$. Другими словами, матрица $C_k$ перехода от базиса $x_1,\dots,x_{k-1},u_k,\dots,u_n$ в $H^2(B^{2n})$ к базису $x_1,\dots,x_k,u_{k+1},\dots,u_n$ может иметь лишь один ненулевой элемент вне диагонали, и это $c_{i_k k}$. Тогда матрица перехода от $u_1,\dots,u_n$ к $x_1,\dots,x_n$ есть произведение $D = C_1C_2\cdots C_n$ (заметим, что $C_1$ есть единичная матрица, так как $x_1 = u_1$). Тогда $D = (d_{jk})$ есть унипотентная верхнетреугольная матрица, состоящая из единиц и нулей, $x_k = \sum_{j=1}^n d_{jk}u_j$ и

$$0 = x_k^2 = \Bigl(u_k + \sum_{j=1}^{k-1} d_{jk}u_j\Bigr)^2 = u_k^2 + 2\sum_{j=1}^{k-1} d_{jk}u_ju_k + \cdots, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

С другой стороны, $0 = u_k^2 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk}u_ju_k$ в силу (2.1). Сравнивая коэффициенты при $u_ju_k$ для $1 \leqslant j \leqslant k-1$ в последних двух равенствах и замечая, что эти элементы линейно независимы в $H^4(B^{2k})$, получаем равенства $2d_{jk} = -a_{jk}$, $1 \leqslant j < k \leqslant n$. Так как $D$ и $-A$ являются унипотентными верхнетреугольными матрицами, получаем $2D = E - A$.

Теперь предположим, что матрица $A$ удовлетворяет соотношению

$$E - A = 2C_1C_2 \cdots C_n.$$

Тогда для соответствующей башни Ботта имеем $\xi_{k-1} = \pi_{i_k}^*(\gamma^{-2c_{i_k k}})$. Следовательно, можно выбрать подгруппу-окружность так, что расслоение $\xi_{k-1}$ примет вид $t\pi_{i_k}^*(\gamma^{-2c_{i_k k}})$ (как $\mathbb{S}^1$-расслоение), $1 < k \leqslant n$. Тогда, как показывает рассуждение из доказательства теоремы 4.4, эта подгруппа-окружность действует полусвободно и с изолированными неподвижными точками.

Пример 4.11. Как вытекает из теоремы 4.10, если башня Ботта допускает полусвободно действующую подгруппу-окружность с изолированными неподвижными точками, то матрица (2.2) может иметь только элементы 0 и $-2$ вне диагонали. Однако теорема 4.10 налагает более сильные условия на эту матрицу. Например, при $n = 3$ башня Ботта, соответствующая матрице

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

не лежит в рассматриваемом классе, так как $(E - A)/2$ не разлагается в произведение $C_1C_2C_3$. При этом любая другая матрица, имеющая 0 и $-2$ вне диагонали, подходит. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то имеем

$$\frac{1}{2}(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что не любая башня Ботта, гомеоморфная произведению сфер, допускает полусвободно действующую подгруппу-окружность с изолированными неподвижными точками (последнее условие сильнее даже при $n = 2$). В следующем параграфе рассмотрим класс башен Ботта, гомеоморфных произведению сфер.

## § 5. Топологическая классификация и когомологии

Следующее утверждение показывает, что башни Ботта, диффеоморфные произведению сфер, можно определить по их кольцам когомологий. Это дает частичный ответ на вопрос 2.3, сформулированный в § 2.

Теорема 5.1. *Башня Ботта $B^{2n}$ диффеоморфна произведению $(\mathbb{C}P^1)^n$ тогда и только тогда, когда имеет место изоморфизм градуированных колец $H^*(B^{2n}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n)$.*

Доказательство. Из леммы 2.1 получаем

$$H^*(B^{2n}) = H^*\big(B^{2n-2}\big)[u_n]/\big(u_n^2 - c_1(\xi_{n-1})u_n\big).$$

Таким образом, можно представить каждый элемент из $H^2(B^{2n})$ в виде $x+bu_n$, где $x \in H^2(B^{2n-2})$ и $b \in \mathbb{Z}$. Так как

$$(x+bu_n)^2 = x^2 + 2bxu_n + b^2u_n^2 = x^2 + b(2x + bc_1(\xi_{n-1}))u_n,$$

то квадрат элемента $x+bu_n$ с $b \neq 0$ равен нулю тогда и только тогда, когда $x^2 = 0$ и $2x + bc_1(\xi_{n-1}) = 0$. Следовательно, элементы вида $x+bu_n$ с $b \neq 0$, квадраты которых равны нулю, порождают свободную подгруппу ранга один в $H^2(B^{2n})$.

Предположим, что $H^*(B^{2n}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n)$. Тогда в $H^2(B^{2n})$ существует базис $\{x_1,\dots,x_n\}$, для которого $x_i^2 = 0$ при всех $i$. Сказанное в предыдущем абзаце позволяет предположить, что элементы $x_1,\dots,x_{n-1}$ лежат в $H^2(B^{2n-2})$, а $x_n$ не лежит в $H^2(B^{2n-2})$. Тогда можно считать, что $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_ix_i + u_n$, где $b_i \in \mathbb{Z}$. Произведение вида $\prod_{i\in I} x_i$, где $I$ – подмножество индексов $\{1,\dots,n\}$, лежит в $H^*(B^{2n-2})$ тогда и только тогда, когда $n \notin I$. Отсюда вытекает, что кольцо $H^*(B^{2n-2})$ порождается элементами $x_1,\dots,x_{n-1}$ и изоморфно кольцу когомологий $(\mathbb{C}P^1)^{n-1}$. Следовательно, можно предположить по индукции, что $B^{2n-2} \cong (\mathbb{C}P^1)^{n-1}$.

Записав $c_1(\xi_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_ix_i$, получим, что

$$0 = x_n^2 = \left(u_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_ix_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i + 2b_i)x_iu_n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_ix_i\right)^2.$$

Это может иметь место, только если отличны от нуля не более одного $a_i$, так как элементы $x_ix_j$ $(i<j)$ и $x_iu_n$ образуют базис в $H^4(B^{2n})$. Следовательно, расслоение $\xi_{n-1}$ индуцируется из расслоения $\gamma^{-2b_i}$ над $\mathbb{C}P^1$ при помощи некоторой проекции $B^{2n-2} = (\mathbb{C}P^1)^{n-1} \to \mathbb{C}P^1$. Так как $P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma^{-2b_i})$ является топологически тривиальным расслоением (см. пример 2.2), то расслоение с тотальным пространством $B^{2n} = P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n-1})$ также тривиально.

Мы также можем эффективно описать класс матриц (2.2), соответствующих тем башням Ботта, которые диффеоморфны произведению двумерных сфер.

Теорема 5.2. *Башня Ботта $B^{2n}$ диффеоморфна $(\mathbb{C}P^1)^n$ тогда и только тогда, когда ее матрица* (2.2) *удовлетворяет тождеству*

$$\frac{1}{2}\,(E - A) = C_1C_2\cdots C_n,$$

*где каждая из $C_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, является унипотентной верхнетреугольной матрицей, которая может иметь не более одного ненулевого элемента над диагональю, причем в $k$-м столбце.*

Доказательство. Рассуждение аналогично использованному при доказательстве теоремы 4.10. Единственное отличие в том, что теперь число $c_{i_k k}$ в формуле $c_1(\xi_{k-1}) = -2c_{i_k k}x_{i_k}$ является произвольным целым.

В оставшейся части этого параграфа обобщим результат теоремы 5.1 на произвольные квазиторические многообразия, но лишь в топологической категории (см. теорему 5.7).

Начнем с анализа алгебраической структуры когомологий квазиторического многообразия над кубом. Хотя соответствующий анализ возможно провести и над $\mathbb{Z}$, для дальнейших рассуждений удобно привести коэффициенты по модулю два. Пусть $S$ – градуированная алгебра над $\mathbb{Z}/2$, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$ степени один. Мы будем называть $S$ *квадратичной алгеброй Ботта* (или просто *КБ-алгеброй*) ранга $n$, если выполнены следующие два условия:

(C1) $x_k^2 = \sum_{i<k} a_{ik}x_ix_k$, где $a_{ik} \in \mathbb{Z}/2$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ (в частности, $x_1^2 = 0$);

(C2) $\prod_{i=1}^n x_i \neq 0$.

Если $B^{2n}$ – башня Ботта, то из соотношений (2.1) вытекает, что когомологии $H^*(B^{2n};\mathbb{Z}/2)$ являются КБ-алгеброй с удвоенной градуировкой, что оправдывает введенную выше терминологию. Все нижеследующие рассуждения остаются верными для более широкого класса алгебр, у которых свойство (C1) ослабляется следующим образом:

(P1′) $x_k^2 = \sum_{i<j\leqslant k} a_{ijk}x_ix_j$, где $a_{ijk} \in \mathbb{Z}/2$ при $1 \leqslant k \leqslant n$.

Используя условие (C1), можно представить каждый элемент из $S$ в виде линейной комбинации мономов без квадратов. Обозначим такие мономы $x_{i_1} \cdots x_{i_s}$ через $x_I$, где $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$.

Лемма 5.3. *Набор элементов $\{x_I\}$, соответствующих всевозможным подмножествам $I \in \{1, \ldots, n\}$, образуют аддитивный базис в $S$. В частности, $\dim S_q = \binom{n}{q}$, где $S_q$ обозначает градуированную компоненту степени $q$.*

Доказательство. Из условия (C1) вытекает, что множество $\{x_I\}$ аддитивно порождает $S$. Упорядочим мономы $x_I$, используя обратный лексикографический порядок на подмножествах индексов $\{1, \ldots, n\}$. А именно, для $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$ с $i_1 < \cdots < i_s$ и $J = \{j_1, \ldots, j_s\}$ с $j_1 < \cdots < j_s$ положим $x_I < x_J$, если $i_k < j_k$, и $i_q = j_q$ при $k+1 \leqslant q \leqslant s$.

Предположим, что имеется некоторое нетривиальное линейное соотношение между мономами $x_I$, и пусть $x_J$ – максимальный моном, встречающийся в этом соотношении. Тогда, использовав это соотношение, можно заменить сомножитель $x_J$ в произведении $\prod_{i=1}^n x_i$, а затем использовать условие (C1) каждый раз, когда появляется $x_k^2$. В результате получим нуль, что противоречит условию (C2). Итак, нетривиальных линейных соотношений на мономы $x_I$ нет.

Лемма 5.4. *Пусть задан градуированный эпиморфизм $f$ из $S$ в градуированную алгебру $S'$ над $\mathbb{Z}/2$, для которой $S'_{n-1} \neq 0$. Тогда размерность ядра $f\colon S_1 \to S'_1$ не превосходит единицу. Более того, если размерность этого ядра есть в точности один, то $S'$ является КБ-алгеброй ранга $n-1$.*

Доказательство. Обозначим $f(x_i)$ через $\bar{x}_i$. Тогда соотношения (C1) имеют место для $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Предположим, что размерность ядра есть как минимум два. Тогда найдутся такие $p > q \geqslant 1$, что

$$\bar{x}_p = \sum_{i<p} b_i \bar{x}_i, \qquad \bar{x}_q = \sum_{j<q} c_j \bar{x}_j, \tag{5.1}$$

где $b_i, c_j \in \mathbb{Z}/2$. Из леммы 5.3 вытекает, что $S_{n-1}$ порождается элементами $x_I$ с $|I| = n-1$. Покажем, что $\bar{x}_I = 0$ для всех таких $I$, что противоречит предположению $S'_{n-1} \neq 0$.

Пусть сначала $q \geqslant 2$. Так как $|I| = n-1$, то множество $I$ содержит $p$ или $q$. Заменим сомножители $\bar{x}_p$ и $\bar{x}_q$ в $\bar{x}_I$, используя соотношения (5.1), и затем будем последовательно применять условие (C1) каждый раз, когда появляется квадрат $\bar{x}_k^2$. В результате получим нуль.

Пусть теперь $q = 1$, т.е. $\bar{x}_1 = 0$. Тогда достаточно показать, что $\bar{x}_I = 0$ для $I = \{2, 3, \dots, n\}$. Заменим сомножитель $\bar{x}_p$ в $\bar{x}_I$, используя (5.1), и затем будем последовательно применять условие (C1) каждый раз, когда появляется $\bar{x}_k^2$ с $k \geqslant 2$. Тогда в окончательном выражении каждое слагаемое будет содержать $\bar{x}_1$, т.е. будет равно нулю.

Теперь докажем второе утверждение леммы. По предположению элементы $\bar{x}_i$ удовлетворяют одному нетривиальному линейному соотношению. Пусть $\bar{x}_j$ – максимальный элемент, встречающийся в этом соотношении. Можно исключить $\bar{x}_j$ из $S'$, используя это линейное соотношение и условие (C1). Тогда (C1) будет иметь место для элементов $\bar{x}_i$ с $i \neq j$. Следовательно, $S'_{n-1}$ порождается элементом $\prod_{i\neq j} \bar{x}_i$. Этот элемент не равен нулю, так как $S'_{n-1} \neq 0$. Это доказывает, что $S'$ является КБ-алгеброй ранга $n-1$.

Теорема 5.5. *Пусть $M$ – квазиторическое многообразие над многогранником $P$. Тогда $H^{2*}(M;\mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга $n$ тогда и только тогда, когда $P$ есть $n$-мерный куб.*

Доказательство. Пусть $P$ есть $n$-куб. Так как каждый главный минор матрицы $\Lambda_\star$ равен единице по модулю два, мы получаем, что матрица $\Lambda_\star$ сопряжена унипотентной верхнетреугольной матрице, аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 3.3. (Матрица (3.7), в которой $b_i$ не обращаются в нуль по модулю два для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, не может получиться, так как ее определитель равен нулю по модулю два.) Тогда из (3.4) вытекает, что $H^{2*}(M;\mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга $n$.

Теперь предположим, что $H^{2*}(M;\mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй. Пусть $b_r(M)$ обозначает $r$-е число Бетти многообразия $M$ и $f_s(P)$ – число граней коразмерности $s+1$ многогранника $P$. Тогда

$$b_2(M) = f_0(P) - n, \qquad b_4(M) = f_1(P) - (n-1)f_0(P) + \binom{n}{n-2}$$

(см. [8; теорема 3.1]) и из леммы 5.3 мы получаем, что

$$f_0(P) = 2n, \qquad f_1(P) = 2n(n-1). \tag{5.2}$$

Для каждого характеристического подмногообразия $M_i$ отображение ограничения $H^*(M;\mathbb{Z}/2) \to H^*(M_i;\mathbb{Z}/2)$ сюръективно [18; лемма 2.3]. Тогда из лемм 5.3 и 5.4 вытекает, что $b_2(M_i) \geqslant b_2(M) - 1 = n-1$. Следовательно,

$$f_0(F_i) = (n-1) + b_2(M_i) \geqslant 2(n-1), \tag{5.3}$$

где $F_i$ обозначает гипергрань, соответствующую $M_i$, и

$$f_1(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} f_0(F_i) \geqslant 2n(n-1).$$

Сравнивая это с (5.2), получаем, что неравенство (5.3) обращается в равенство для любого $i$, т.е. $b_2(M_i) = n-1$. Это означает, что ядро отображения $H^2(M;\mathbb{Z}/2) \to H^2(M_i;\mathbb{Z}/2)$ одномерно и $H^{2*}(M_i;\mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга $n-1$ по лемме 5.4. Поэтому можно провести индуктивное рассуждение по размерности $n$.

При $n=2$ из соотношений (5.2) вытекает, что $P$ является комбинаторным квадратом. Пусть теорема верна для случая размерности $n-1$, где $n \geqslant 3$. Так как $H^{2*}(M_i)$ является КБ-алгеброй ранга $n-1$, то каждая гипергрань в $P$ является $(n-1)$-мерным кубом; в частности, любая двумерная грань является квадратом. Тогда $P$ является $n$-мерным кубом по лемме 4.6.

Лемма 5.6. *Пусть $M$ – квазиторическое многообразие над $n$-кубом. Если имеет место изоморфизм колец $H^*(M;\mathbb{Q}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n;\mathbb{Q})$, то $M$ эквивалентно башне Ботта.*

Доказательство. Согласно предположению найдутся элементы $y_1,\dots,y_n$ в $H^2(M;\mathbb{Q})$, порождающие кольцо $H^*(M;\mathbb{Q})$ и удовлетворяющие соотношениям $y_i^2 = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $M_i \subset M$ – характеристическое подмногообразие. Обозначим ограничение элемента $y_k$ на $H^2(M_i;\mathbb{Q})$ через $\bar{y}_k$. Тогда элементы $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$ порождают кольцо $H^*(M_i;\mathbb{Q})$, так как отображение $H^*(M;\mathbb{Q}) \to H^*(M_i;\mathbb{Q})$ сюръективно. Так как $b_2(M_i) = n-1$, то между элементами $\bar{y}_k$ имеется нетривиальное линейное соотношение. Используя это соотношение, можно исключить один из элементов, скажем $\bar{y}_n$. В результате получим сюръективное отображение $\mathbb{Q}[\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_{n-1}]/(\bar{y}_1^2,\dots,\bar{y}_{n-1}^2) \to H^*(M_i;\mathbb{Q})$. Так как размерности градуированных компонент степени $2q$ в обоих кольцах равны $\binom{n-1}{q}$, сюръективное отображение является изоморфизмом. Поэтому $H^*(M_i;\mathbb{Q}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^{n-1};\mathbb{Q})$. Следовательно, можно применить индуктивное рассуждение и предположить, что каждое $M_i$ является башней Ботта.

Пусть $\Lambda_\star$ – приведенная подматрица, соответствующая $M$. Тогда из леммы 3.3 вытекает, что матрица $-\Lambda_\star$ сопряжена унипотентной верхнетреугольной матрице или матрице (3.7) с ненулевыми элементами $b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Достаточно исключить второй случай. Предположим, что $-\Lambda_\star$ есть матрица (3.7). Тогда $\det(-\Lambda_\star) = -1$, т.е.

$$\prod_{i=1}^{n} b_i = (-1)^n 2. \tag{5.4}$$

Используя (3.4), получаем

$$H^*(M)=\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]\big/\big(x_1(x_1+b_1x_2),x_2(x_2+b_2x_3),\dots,x_n(b_nx_1+x_n)\big),$$

где $x_i=v_{i+n}$ для $1\leqslant i\leqslant n$. По предположению найдется ненулевой элемент $x\in H^2(M,\mathbb{Q})$, квадрат которого равен нулю. Запишем $x=\sum_{i=1}^n a_ix_i$ для некоторых $a_i\in\mathbb{Q}$. Тогда

$$\begin{aligned}0=\Big(\sum_{i=1}^n a_ix_i\Big)^2&=\sum_{i=1}^n a_i^2x_i^2+2\sum_{i<j}a_ia_jx_ix_j\\&=-a_1^2b_1x_1x_2-a_2^2b_2x_2x_3-\dots-a_n^2b_nx_nx_1+2\sum_{i<j}a_ia_jx_ix_j.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$a_1^2b_1=2a_1a_2,\quad a_2^2b_2=2a_2a_3,\quad\dots,\quad a_n^2b_n=2a_na_1. \tag{5.5}$$

Предположим, что $a_i\ne0$ для всех $i$. Перемножая все равенства из предыдущей формулы, получим $\prod_{i=1}^n b_i=2^n$, что противоречит (5.4). Следовательно, $a_i=0$ для некоторого $i$, но тогда из (5.5) вытекает, что $a_i=0$ для всех $i$. Это противоречит предположению, что $x=\sum_{i=1}^n a_ix_i\ne0$. Следовательно, матрица (3.7) не может быть приведенной характеристической матрицей, а $M$ эквивалентно башне Ботта.

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.7. *Квазиторическое многообразие $M$ гомеоморфно произведению $(\mathbb{C}P^1)^n$ тогда и только тогда, когда имеет место изоморфизм градуированных колец $H^*(M)\cong H^*((\mathbb{C}P^1)^n)$.*

Доказательство. Так как $H^*((\mathbb{C}P^1)^n;\mathbb{Z}/2)$ является КБ-алгеброй ранга $n$, многогранник в пространстве орбит многообразия $M$ является $n$-мерным кубом по теореме 5.5. Тогда $M$ является башней Ботта по лемме 5.6. Наконец, $M$ гомеоморфно $(\mathbb{C}P^1)^n$ по теореме 5.1.

Сформулируем следующий вопрос, являющийся аналогом вопроса 2.3 для квазиторических многообразий.

Вопрос 5.8. Верно ли, что изоморфизм градуированных колец $H^*(M_1)\cong H^*(M_2)$ всегда влечет гомеоморфизм квазиторических многообразий $M_1$ и $M_2$?

В заключение авторы выражают благодарность Н. Э. Добринской и Донг Иоп Са (Dong Youp Suh) за неформальные обсуждения квазиторических многообразий над кубами и произведениями симплексов и приносят извинения за неполные ссылки на результаты [7] в первом препринте этой статьи (см. www.arxiv.org). Мы также благодарим Такахико Иосиду (Takahiko Yoshida), который отметил трудности, возникающие при работе с квазиторическими многообразиями в гладкой категории. Второй автор выражает благодарность Найджелу Рэю (Nigel Ray) за введение в тематику исследований, связанных с башнями Ботта, и замечательные обсуждения этого предмета. Наконец, второй автор благодарит Д. А. Тимашёва, привлекшего наше внимание к работе Ильинского [6], что послужило для нас стимулом к рассмотрению ряда смежных задач, связанных с полупростыми действиями окружности.

## Список литературы

[1] R. Bott, H. Samelson, "Applications of the theory of Morse to symmetric spaces", *Amer. J. Math.*, **80**:4 (1958), 964–1029.

[2] M. Grossberg, Y. Karshon, "Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations", *Duke Math. J.*, **76**:1 (1994), 23–58.

[3] Yu. Civan, N. Ray, "Homotopy decompositions and $K$-theory of Bott towers", *$K$-Theory*, **34**:1 (2005), 1–33.

[4] A. Hattori, "Symplectic manifolds with semi-free Hamiltonian $S^1$-action", *Tokyo J. Math.*, **15**:2 (1992), 281–296.

[5] S. Tolman, J. Weitsman, "On semifree symplectic circle actions with isolated fixed points", *Topology*, **39**:2 (2000), 299–309.

[6] Д. Г. Ильинский, "О почти свободном действии одномерного тора на торическом многообразии", *Матем. сб.*, **197**:5 (2006), 51–74; англ. пер.: D. G. Il'inskii, "Almost free action of the one-dimensional torus on a toric variety", *Sb. Math.*, **197**:5 (2006), 681–703.

[7] Н. Э. Добринская, "Задача классификации квазиторических многообразий над заданным полиэдром", *Функц. анализ и его прил.*, **35**:2 (2001), 3–11; англ. пер.: N. E. Dobrinskaya, "Classification problem for quasitoric manifolds over a given simple polytope", *Funct. Anal. Appl.*, **35**:2 (2001), 83–89.

[8] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, "Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions", *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.

[9] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.

[10] S. Choi, M. Masuda, D. Y. Suh, *Quasitoric manifolds over a product of simplices*, `arXiv: abs/0803.2749`.

[11] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, "Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds", *Moscow Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.

[12] V. M. Buchstaber, N. Ray, "Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes", *Internat. Math. Res. Notices*, 2001, № 4, 193–219.

[13] M. Masuda, "Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index", *Tohoku Math. J.* (2), **51**:2 (1999), 237–265.

[14] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Univ. Lecture Ser., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[15] Т. Е. Панов, "Роды Хирцебруха многообразий с действием тора", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 123–138; англ. пер.: T. E. Panov, "Hirzebruch genera of manifolds with torus action", *Izv. Math.*, **65**:3 (2001), 543–556.

[16] A. Hattori, T. Yoshida, "Lifting compact group actions in fiber bundles", *Japan. J. Math.* (*N.S.*), **2**:1 (1976), 13–25.

[17] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1995.

[18] M. Masuda, T. Panov, "On the cohomology of torus manifolds", *Osaka J. Math.*, **43**:3 (2006), 711–746.

**М. Масуда (M. Masuda)**
Department of Mathematics,
Osaka University, Japan
*E-mail*: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp

Поступила в редакцию
20.11.2007 и 04.03.2008

**Т. Е. Панов (T. E. Panov)**
Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова;
Институт теоретической и экспериментальной физики,
г. Москва
*E-mail*: tpanov@mech.math.msu.su