# Действия тора и комбинаторика многогранников

В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов *

## Введение

Настоящая работа посвящена развитию взаимосвязей между алгебраической топологией гладких многообразий и комбинаторикой многогранников. Исследования в этом направлении были стимулированы задачами, возникшими впервые в теории торических многообразий. Центральным понятием данной работы является многообразие с действием компактного тора, определяемое комбинаторной структурой простого многогранника.

Под $n$-мерным *выпуклым многогранником* мы понимаем произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое как пересечение конечного числа полупространств. Любой выпуклый многогранник ограничивается конечным числом гиперплоскостей. Выпуклый $n$-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности $n$ граней коразмерности один (гиперграней). Таким образом, гиперплоскости, ограничивающие простой многогранник, находятся в общем положении. Выпуклый многогранник можно также определять как выпуклую оболочку множества точек в $\mathbb{R}^n$. При этом если множество точек находится в общем положении, то получаемый многогранник называется *симплициальным*, так как все его грани будут симплексами. Каждому простому многограннику соответствует *двойственный* симплициальный многогранник, и наоборот (см. определение 1.3). Часто бывает удобно исследовать свойства простого многогранника в терминах двойственного ему симплициального многогранника, а также симплициального разбиения сферы, задаваемого границей этого двойственного многогранника.

Каждому простому многограннику $P^n$ с $m$ гипергранями мы ставим в соответствие гладкое $(m+n)$-мерное многообразие $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора $T^m$ на нем. Многие многообразия, играющие важную роль в различных аспектах топологии, алгебраической и симплектической геометрии, могут быть реализованы в виде многообразия $\mathcal{Z}_P$ или же как фактор-многообразия $\mathcal{Z}_P/T^k$ для некоторой торической подгруппы $T^k \subset T^m$, действующей на $\mathcal{Z}_P$ свободно. При этом оказывается, что ранг торической подгруппы, которая может действовать свободно на многообразии $\mathcal{Z}_P$, не превышает $m-n$. Многообразия, которые получаются при факторизации $\mathcal{Z}_P$ по действию тора максимально возможного ранга, мы называем *квазиторическими*, так как среди них содержится важный класс алгебраических многообразий, известных в алгебраической геометрии как *торические многообразия* (см. [6, 9]). Точнее, указанным выше способом можно получить все неособые проективные торические многообразия; далее под торическими многообразиями мы будем подразумевать именно этот класс. На каждом (квази)торическом многообразии имеется индуцированное действие тора $T^n$, пространством орбит которого является исходный простой многогранник $P^n$. Существуют простые многогранники $P$, над которыми не существует ни одного квазиторического

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01404).

(а значит, и торического) многообразия, т.е. нельзя найти ни одной подгруппы $T^{m-n} \subset T^m$ ранга $m-n$, действующей свободно на соответствующем многообразии $\mathcal{Z}_P$. Если же для многогранника $P^n$ соответствующее многообразие $\mathcal{Z}_P$ допускает свободное действие торической подгруппы ранга $m-n$, то различным таким подгруппам могут соответствовать различные квазиторические многообразия над $P^n$ и некоторые из них оказываются алгебраическими торическими многообразиями. Квазиторические многообразия (под названием “toric manifolds”) впервые появились в работе [7], где были описаны многие важные алгебротопологические свойства этих многообразий.

Наш подход к построению многообразий, определяемых простыми многогранниками, опирается на одну конструкцию из алгебраической геометрии. Эта конструкция была использована в работе [2] для изучения торических многообразий. А именно, комбинаторная структура многогранника $P^n$ определяет некоторое аффинное алгебраическое множество $U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$ (см. определение 2.7) с действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^m$. Множество $U(P^n)$ представляет собой дополнение к некоторому набору аффинных плоскостей в $\mathbb{C}^m$. Торические многообразия появляются, когда мы можем найти подгруппу $D \subset (\mathbb{C}^*)^m$, изоморфную $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$, которая действует на $U(P^n)$ свободно. Ключевым моментом в нашем подходе является тот факт, что *всегда* можно найти подгруппу $R \subset (\mathbb{C}^*)^m$, изоморфную $(\mathbb{R}^*_+)^{m-n}$ и действующую на $U(P^n)$ свободно. В этом случае можно определить соответствующее фактор-многообразие, которое мы и называем многообразием, определяемым простым многогранником $P^n$. Мы фиксируем действие тора $T^m$ на этом многообразии, определяемое стандартным вложением $T^m \subset \mathbb{C}^m$. Другой подход к построению многообразий, определяемых простыми многогранниками, был предложен в работе [7], где эти многообразия вводились как фактор-пространства $\mathcal{Z}_P = T^m \times P^n / \sim$ для некоторого естественного отношения эквивалентности $\sim$ (см. определение 1.6). Мы строим эквивариантное вложение $i_e$ такого многообразия в $U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$ (см. теорему 2.4) и показываем, что для любой подгруппы $R \simeq (\mathbb{R}^*_+)^{m-n}$ описанного выше типа композиция $\mathcal{Z}_P \to U(P^n) \to U(P^n)/R$ вложения и проекции на пространство орбит является гомеоморфизмом. Таким образом, с точки зрения топологии оба подхода дают одно и то же многообразие, которое мы обозначаем $\mathcal{Z}_P$ и называем многообразием, определяемым простым многогранником $P^n$.

Анализ описанных выше конструкций показывает, что они легко обобщаются на случай, когда вместо $m$-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m \simeq (\mathbb{R}^2)^m$ мы имеем дело с пространством $(\mathbb{R}^k)^m$. Для этого мы аналогичным образом из комбинаторной структуры многогранника $P^n$ определяем открытое подмножество $U(P^n) \subset (\mathbb{R}^k)^m$ (получаемое выбрасыванием из $(\mathbb{R}^k)^m$ некоторых плоскостей аналогично тому, как это делается в определении 2.7). На $(\mathbb{R}^k)^m$ имеется диагональное действие мультипликативной группы $(\mathbb{R}^*_+)^m$, получаемое как произведение $m$ стандартных диагональных действий $\mathbb{R}^*_+$ на $\mathbb{R}^k$. Как и ранее, для этого действия можно найти подгруппу $R \subset (\mathbb{R}^*_+)^m$, изоморфную $(\mathbb{R}^*_+)^{m-n}$ и действующую на $U(P^n)$ свободно. Соответствующее фактор-многообразие $U(P^n)/R$ будет иметь размерность $(k-1)m+n$. На этом многообразии будет действовать группа $O(k)^m$ (произведение $m$ копий ортогональной группы). Это действие происходит из стандартного действия $O(k)^m$ на $(\mathbb{R}^k)^m$. В случае $k=2$ обсуждавшееся выше действие тора $T^m$ — это в точности действие подгруппы $SO(2)^m \subset O(2)^m$. В случае $k=1$ мы для каждого простого многогранника $P^n$ получаем $n$-мерное гладкое многообразие $\mathcal{Z}^n$ с действием группы $(\mathbb{Z}/2)^m$, пространством орбит которого является $P^n$. Это многообразие — так называемое универсальное абелево накрытие многогранника $P^n$, рассматриваемого как орбифолд Коксетера с прямыми углами (или, что то же самое, как многообразие с прямыми углами). Аналогом квазиторических многообразий в случае $k=1$ являются так называемые *малые накрытия* — многообразия $M^n$ с действием $(\mathbb{Z}/2)^n$ и пространством орбит $P^n$. Название объясняется тем, что любое накрытие $P^n$ гладким многообразием должно иметь по крайней мере $2^n$ листов. Все эти вопросы, касающиеся случая $k=1$, были наряду с квазиторическими многообразиями подробно рассмотрены в [7]. Особого интереса также заслуживает случай $k = 4$, так как пространство $\mathbb{R}^4$ может быть наделено структурой одномерного кватернионного пространства $\mathbb{H}$. Данная работа посвящена детальному анализу случая $k = 2$, и далее все построения относятся именно к этому случаю.

Одной из основных целей нашей работы является изучение взаимосвязи между комбинаторной структурой простых многогранников и топологией описанных выше многообразий, определяемых этими многогранниками. Важнейшим алгебраическим инвариантом простого (или двойственного ему симплициального) многогранника является специальное градуированное кольцо $k(P)$ (где $k$ — поле), называемое *кольцом граней* (или кольцом Стенли–Райснера). Это кольцо является фактор-кольцом кольца многочленов $k[v_1, \dots, v_m]$ по некоторому идеалу (см. определение 1.1). Тогда можно рассмотреть соответствующие градуированные модули когомологий $\mathrm{Tor}^{-i}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$, где $i > 0$. Эти модули уже изучались ранее, например, ряд результатов относительно соответствующих чисел Бетти $\beta^i(k(P)) = \dim_k \mathrm{Tor}^{-i}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$ приведен в [16]. Мы показываем, что биградуированный $k$-модуль $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$ является биградуированной $k$-алгеброй и соответствующая ей градуированная алгебра изоморфна алгебре когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$. Таким образом, когомологии многообразия $\mathcal{Z}_P$ приобретают каноническую структуру *биградуированной* алгебры. При доказательстве мы используем спектральную последовательность Эйленберга–Мура. Эта спектральная последовательность активно применялась в топологии для вычисления когомологий однородных пространств групп Ли (см., например, [15]). В нашем случае член $E_2$ этой спектральной последовательности есть в точности $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$, и спектральная последовательность вырождается в члене $E_2$. Используя при вычислении члена $E_2$ в качестве резольвенты комплекс Кошуля, мы показываем далее, что эта биградуированная алгебра является алгеброй когомологий некоторого биградуированного комплекса, тесно связанного с комбинаторной структурой $P^n$ (см. теорему 4.6). Таким образом, введенная нами биградуированная алгебра когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$ несет в себе полную информацию о комбинаторике исходного многогранника $P^n$. В частности, оказывается что из биградуированной двойственности Пуанкаре для $\mathcal{Z}_P$ вытекают известные соотношения Дена–Соммервилля для многогранника $P$. Соответствующие биградуированные числа Бетти позволяют вычислить количество граней $P$ определенной размерностей (так называемый *$f$-вектор* многогранника). Интересную интерпретацию в терминах когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$ получает известная верхняя оценка для числа граней простого многогранника. Мы также приводим другие проявления взаимосвязи топологии многообразий и комбинаторики многогранников.

Кроме того, в силу наличия гомотопической эквивалентности $\mathcal{Z}_P \simeq U(P^n)$ наши вычисления когомологий в равной степени относятся и к множеству $U(P^n)$, представляющему собой дополнение к некоторому набору аффинных плоскостей в $\mathbb{C}^m$, определяемых комбинаторной структурой многогранника $P^n$. Заметим, что здесь мы сталкиваемся со специальным случаем широко известной общей задачи о вычислении когомологий дополнений к набору аффинных плоскостей. В [10, ч. III] была доказана теорема, сводящая это вычисление к вычислению когомологий некоторого симплициального комплекса. Фактически наши вычисления показывают, как специфика набора аффинных плоскостей позволяет получить намного более явное описание соответствующих когомологий.

Рассмотренным здесь вопросам был посвящен доклад первого автора на юбилейной конференции “Солитоны, Геометрия и Топология” в честь нашего учителя Сергея Петровича Новикова. Часть результатов этой работы была анонсирована в [4].

## 1. Основные конструкции и определения

### 1.1. Простые многогранники и их кольца граней.

Пусть $P^n$ — простой многогранник и $f_i$ — число граней $P^n$ коразмерности $(i+1)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда целочисленный вектор $(f_0, \dots, f_{n-1})$ называется *$f$-вектором* $P^n$. Для дальнейшего удобно положить также $f_{-1} = 1$. Наряду с $f$-вектором мы также будем рассматривать так называемый *$h$-вектор* $(h_0, \dots, h_n)$, где $h_i$ определяются из условия

$$h_0 t^n + \ldots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \ldots + f_{n-1}. \tag{1}$$

Таким образом, мы имеем

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i} f_{i-1}. \tag{2}$$

Далее мы фиксируем коммутативное кольцо $k$, называемое основным кольцом. С комбинаторной структурой простого многогранника $P^n$ связано определенное градуированное кольцо, называемое кольцом граней (или кольцом Стенли–Райснера). Именно, пусть $P^n$ — простой многогранник, $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ — множество граней коразмерности один, $m = f_0$. Образуем кольцо многочленов $k[v_1, \dots, v_m]$, где $v_i$ рассматриваются как переменные, соответствующие граням $F_i$.

**Определение 1.1.** *Кольцом граней $k(P)$ простого многогранника $P$ называется фактор-кольцо $k[v_1, \dots, v_m]/I$, где*

$$I = (v_{i_1} \ldots v_{i_s} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_s} = \varnothing).$$

Изначально (см., например, [16]) кольцо граней определялось для произвольного конечного симплициального комплекса следующим образом. Пусть $K$ — конечный симплициальный комплекс с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_m\}$. Образуем кольцо многочленов $k[v_1, \dots, v_m]$, где $v_i$ рассматриваются как переменные.

**Определение 1.2.** *Кольцом граней симплициального комплекса $K$ (обозначается $k(K)$) называется фактор-кольцо $k[v_1, \dots, v_m]/I$, где*

$$I = (v_{i_1} \ldots v_{i_s} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ \{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\} \text{ не порождают симплекс } K).$$

Будем считать, что переменные $v_i$ в $k[v_1, \dots, v_m]$ имеют степень два; таким образом $k(P)$ и $k(K)$ становятся градуированными кольцами.

**Определение 1.3.** *Для любого выпуклого многогранника $P^n \subset \mathbb{R}^n$ определим двойственный (или полярный) многогранник $(P^n)^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ как*

$$(P^n)^* = \{x' \in (\mathbb{R}^n)^* \ :\ \langle x', x\rangle \leqslant 1 \ \text{ для всех } \ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Можно доказать (см. [3]), что это множество действительно является выпуклым многогранником. В случае, если $P^n$ — простой многогранник, его двойственный $(P^n)^*$ будет симплициальным, и грани-симплексы $(P^n)^*$ размерности $i$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями $P^n$ коразмерности $i+1$. Граница $(P^n)^*$ задает симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы

$S^{n-1}$, которое мы далее будем обозначать $K_P$. Тогда оба определения 1.1 и 1.2 кольца граней, очевидно, дают одно и то же кольцо: $k(P) = k(K_P)$. Кольца граней простых многогранников обладают весьма специальными алгебраическими свойствами. Для того чтобы описать эти свойства, приведем некоторые определения из коммутативной алгебры.

Пусть теперь $k$ — поле, $R$ — градуированная алгебра над $k$ и $n$ — максимальное число алгебраически независимых элементов $R$ (это число называется *размерностью Крулля* алгебры $R$ и обозначается $\operatorname{Krull} R$). Последовательность $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ однородных элементов $R$ называется *регулярной последовательностью*, если $\lambda_{i+1}$ не является делителем нуля в $R/(\lambda_1, \ldots, \lambda_i)$ для любого $i$ (другим словами, умножение на $\lambda_{i+1}$ является мономорфизмом $R/(\lambda_1, \ldots, \lambda_i)$ в себя). Можно доказать, что $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ тогда и только тогда является регулярной последовательностью, когда $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ алгебраически независимы и $R$ является свободным модулем над $k[\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$. Регулярные последовательности нашли применение в различных аспектах алгебраической топологии (см., например, [12, 15]). Последовательность $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ однородных элементов $R$ называется *однородной системой параметров*, если $\operatorname{Krull}(R/(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = 0$. Алгебра $R$ над полем $k$ называется *алгеброй Коэна–Маколея*, если в $R$ существует регулярная последовательность $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ длины $n = \operatorname{Krull} R$ (которая автоматически является однородной системой параметров). Из сказанного выше следует, что $R$ является алгеброй Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда в $R$ существует последовательность $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ алгебраически независимых элементов такая, что $R$ является свободным конечномерным $k[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$-модулем.

В нашем случае имеет место следующее предложение (см. [16]).

**Предложение 1.4.** *Если $P^n$ является простым многогранником, то кольцо граней $k(P^n)$ является алгеброй Коэна–Маколея.* $\square$

Далее нам понадобятся два последовательных обобщения понятия простого многогранника. Как было отмечено во введении, гиперплоскости, ограничивающие простой многогранник, находятся в общем положении. Вначале мы определим $n$-мерный *неограниченный простой многогранник* как произвольное (не обязательно ограниченное) выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, ограничиваемое набором гиперплоскостей, находящихся в общем положении. Очевидным образом определяются грани неограниченного простого многогранника, которые также будут неограниченными простыми многогранниками. Для неограниченного простого многогранника $P^n$ можно также определить $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс $K_P$, двойственный к его границе (так что симплексы $K_P$ размерности $i$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями $P^n$ коразмерности $i+1$). Однако, этот симплициальный комплекс $K_P$ уже не обязательно задает симплициальное разбиение сферы $S^{n-1}$.

**Пример 1.5.** Рассмотрим неограниченный простой многогранник

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0\},$$

ограничиваемый $n$ координатными гиперплоскостями. Тогда двойственным к нему симплициальным комплексом будет $(n-1)$-мерный симплекс $\Delta^{n-1}$.

Заметим, что, тем не менее, не любой $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс является двойственным к некоторому $n$-мерному неограниченному простому многограннику. Поэтому нам понадобится еще одно обобщение простого многогранника — так называемые *простые полиэдральные комплексы*. Простой $n$-мерный полиэдральный комплекс — это объект, “двойственный к общему

$(n-1)$-мерному симплициальному комплексу". Эта конструкция взята нами из [7]. Пусть $K$ — симплициальный комплекс размерности $n-1$ и $K'$ — его барицентрическое подразделение. Таким образом, вершинами $K'$ являются симплексы $\Delta$ комплекса $K$, а симплексами $K'$ являются наборы $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)$, $\Delta_i \in K$, такие, что $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_k$. Для каждого симплекса $\Delta \in K$ обозначим через $F_\Delta$ подкомплекс в $K'$, состоящий из всех симплексов $K'$ вида $\Delta = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \ldots \subset \Delta_k$. Если $\Delta$ является $(k-1)$-симплексом, то скажем, что $F_\Delta$ — грань коразмерности $k$. Пусть $P_K$ — конус над $K$. Тогда $P_K$ вместе с разбиением на "грани" $\{F_\Delta\}_{\Delta \in K}$ называется *простым полиэдральным комплексом.* Простой многогранник $P^n$ (ограниченный или неограниченный) может быть получен применением этой конструкции к симплициальному комплексу $K^{n-1}$, двойственному к границе $P^n$.

## 1.2. Топологические пространства, определяемые простыми многогранниками.

Ниже мы, следуя [7], для любого полиэдрального комплекса $P$ (в частности, для любого простого многогранника) построим два топологических пространства $\mathcal{Z}_P$ и $B_TP$.

Рассмотрим $T^m = S^1 \times \ldots \times S^1$ — $m$-мерный тор. Пусть, как и выше, $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ — множество граней $P^n$ коразмерности один (или множество вершин двойственного симплициального комплекса $K^{n-1}$). Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}^m$ и установим взаимно однозначное соответствие между гипергранями $P^n$ и элементами базиса $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в $\mathbb{Z}^m$. Определим канонические координатные подгруппы $T^k_{i_1,\ldots i_k} \subset T^m$ как торы, соответствующие координатным подрешеткам в $\mathbb{Z}^m$ (т.е. подрешеткам, натянутым на векторы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$).

**Определение 1.6.** *Пространство $Z_P$, связанное с простым многогранником $P^n$, определяется как*

$$\mathcal{Z}_P = (T^m \times P^n)/\sim \ \mid (g_1, p) \sim (g_2, q) \Leftrightarrow p = q,\ g_1 g_2^{-1} \in T^k_{i_1,\ldots,i_k},$$

*где $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ — все грани коразмерности один, содержащие точку $p \in P^n$.*

Как следует из определения, $\dim \mathcal{Z}_P = m + n$; кроме того, действие тора $T^m$ на $T^m \times P^n$ очевидно задает действие $T^m$ на $\mathcal{Z}_P$.

Ограничимся пока случаем, когда $P^n$ — простой многогранник. Тогда имеет место

**Предложение 1.7.** *Действие $T^m$ на $\mathcal{Z}_P$ обладает следующими свойствами*

1) *Стационарная подгруппа любой точки $\mathcal{Z}_P$ является координатной подгруппой в $T^m$ размерности не более $n$.*

2) *На пространстве орбит имеется комбинаторная структура простого многогранника $P^n$, для которой точки из внутренности граней коразмерности $k$ соответствуют орбитам, стационарные подгруппы точек которых имеют размерность $k$. В частности, над внутренностью многогранника действие свободно.*

**Доказательство.** Это сразу вытекает из определения $\mathcal{Z}_P$. □

Пусть теперь снова $P^n$ — произвольный простой полиэдральный комплекс. Рассмотрим $ET^m$ — стягиваемое пространство универсального главного $T^m$-расслоения над $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Применяя конструкцию Бореля к $T^m$-пространству $\mathcal{Z}_P$, мы приходим к следующему определению.

**Определение 1.8.** *Определим пространство $B_TP$ как*

$$B_TP = ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_P. \tag{3}$$

Таким образом, $B_T P$ — это пространство расслоения со слоем $\mathcal{Z}_P$, ассоциированного с универсальным расслоением при помощи действия $T^m$ на $\mathcal{Z}_P$. Как следует из определения, гомотопический тип пространства $B_T P$ определяется простым полиэдральным комплексом $P^n$.

## 1.3. Торические и квазиторические многообразия.

Выше мы для любого простого многогранника $P^n$ определили пространство $\mathcal{Z}_P$ (которое, как мы увидим, на самом деле является гладким многообразием) с действием $T^m$ и комбинаторной структурой $P^n$ в пространстве орбит (предложение 1.7). Другой класс многообразий, обладающих такими свойствами, хорошо известен в алгебраической геометрии. Это неособые проективные *торические многообразия* (как указывалось во введении, мы ограничимся рассмотрением лишь такого класса торических многообразий). Ниже мы изложим основные факты о торических многообразиях, которые нам понадобятся в дальнейшем. Подробное изложение можно найти в [6, 9].

**Определение 1.9.** *Торическим многообразием называется нормальное алгебраическое многообразие $M$, содержащее $n$-мерный алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n$ в качестве открытого (по Зарисскому) подмногообразия, для которого стандартное диагональное действие тора на себе продолжается до действия тора на всем многообразии $M$ (таким образом, $(\mathbb{C}^*)^n$ содержится в $M$ в качестве всюду плотной орбиты).*

На неособом проективном торическом многообразии имеется очень обильное линейное расслоение, для которого базис в пространстве глобальных сечений состоит из сечений, соответствующих точкам с целочисленными координатами внутри некоторого простого многогранника с вершинами в точках целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Обратно, задав простой многогранник $P^n$ с вершинами в $\mathbb{Z}^n$, мы можем при помощи известной конструкции (см., например, [9]) построить по нему проективное торическое многообразие $M^{2n}$ вещественной размерности $2n$, которое, однако, не всегда оказывается неособым. А именно можно доказать, что неособые многообразия будут получаться только в том случае, если для любой вершины $P^n$ направляющие ковекторы гиперграней, сходящихся в этой вершине, образуют базис двойственной решетки $(\mathbb{Z}^n)^*$. При этом торическое многообразие не вполне определяется комбинаторным типом многогранника: оно также зависит от целочисленного вложения. Из сказанного вытекает, что для данного комбинаторного типа простого многогранника может существовать любое число различных *неособых* проективных торических многообразий (в том числе, их может не существовать вообще). Соответствующие примеры мы обсудим ниже.

На (неособом проективном) торическом многообразии $M^{2n}$ имеется действие компактного тора $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$. Можно доказать, что все стационарные подгруппы точек для этого действия будут торическими подгруппами $T^k \subset T^m$ и на пространстве орбит имеется комбинаторная структура простого многогранника $P^n$ в смысле п. 2 предложения 1.7 (где $P^n$ — тот же самый многогранник, который соответствовал очень обильному линейному расслоению). Действие $T^n$ на $M^{2n}$ *локально эквивалентно стандартному диагональному действию $T^n$ на $\mathbb{C}^n$* в следующем смысле: для любой точки $x \in M^{2n}$ существует $T^n$-инвариантная окрестность $U \subset M^{2n}$, которая $T^n$-эквивариантно гомеоморфна некоторому ($T^n$-инвариантному) открытому множеству $V \subset \mathbb{C}^n$. Кроме того, имеется явное отображение $M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ (отображение моментов), образом которого является $P^n$, а слоями — соответствующие орбиты. Гладкое многообразие, соответствующее торическому многообразию $M^{2n}$, может быть получено как $T^n \times P^n/\sim$ для некоторого отношения эквивалентности $\sim$ (ср. с определением $\mathcal{Z}_P$). Теперь, забывая про структуру алгебраического комплексного многообразия и действие комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$, мы приходим к следующему определению.

**Определение 1.10.** *Топологическим торическим (или квазиторическим) многообразием над простым многогранником $P^n$ называется вещественное ориентируемое $2n$-мерное многообразие $M^{2n}$ с действием тора $T^n$, локально эквивалентным диагональному действию $T^n$ на $\mathbb{C}^n$, и комбинаторной структурой многогранника $P^n$ в пространстве орбит $M^{2n}/T^n$ (в смысле п. 2 предложения 1.7).*

Квазиторические многообразия впервые были введены в [7] (где они назывались просто "торическими многообразиями"). Из сказанного выше следует, что все (проективные неособые) алгебраические торические многообразия являются квазиторическими. Обратное, вообще говоря, неверно — соответствующие примеры можно найти в [7]. Там же были получены многие важные результаты о квазиторических многообразиях, в частности, описаны кольца когомологий этих многообразий, которые оказались устроенными аналогично кольцам когомологий торических многообразий (см. [6]). Ниже мы приводим основные конструкции и результаты, связанные с квазиторическими многообразиями, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательства можно найти в [7].

Пусть $M^{2n}$ — квазиторическое многообразие над простым многогранником $P^n$ и $\pi : M^{2n} \to P^n$ — проекция на пространство отбит. Пусть $F^{n-1}$ — грань $P^n$ коразмерности один. Тогда для любого $x \in \pi^{-1}(\mathrm{int}F^{n-1})$ стабилизатор $x$ есть подгруппа $G_F \in T^n$ ранга один. Эта подгруппа определяется примитивным вектором $v \in \mathbb{Z}^n$. Таким образом строится функция $\lambda$ на множестве $\mathcal{F}$ граней $P^n$ коразмерности один со значениями в примитивных векторах из $\mathbb{Z}^n$.

**Определение 1.11.** *Функция $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}^n$, определенная выше, называется характеристической функцией квазиторического многообразия $M^{2n}$.*

Характеристическую функцию также можно рассматривать как гомоморфизм $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, где $m = \#\mathcal{F} = f_0$ и $\mathbb{Z}^m$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный элементами $\mathcal{F}$.

Из того что действие тора локально эквивалентно стандартному, вытекает, что характеристическая функция обладает следующим свойством: если $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ — грани коразмерности один, сходящиеся в одной вершине, то $\lambda(F_{i_1}), \dots, \lambda(F_{i_n})$ образуют базис $\mathbb{Z}^n$. Для любой функции $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющей этому условию, существует квазиторическое многообразие $M^{2n}(\lambda)$ над $P^n$ с характеристической функцией $\lambda$, и $M^{2n}$ определяется своей характеристической функцией однозначно с точностью до эквивариантного гомеоморфизма. Заметим, однако, что существуют простые многогранники, для которых не существует ни одной характеристической функции. Примерами таких многогранников являются так называемые циклические многогранники $C_k^n$ для $k \geqslant 2^n$. Над такими многогранниками не существует ни одного квазиторического (а значит, и торического) многообразия.

Квазиторические многообразия $M^{2n}$ над простым многогранником $P^n$ тесно связаны с введенными нами ранее пространствами $\mathcal{Z}_P$ и $B_TP$. Рассматривая $M^{2n}$ как $T^n$-многообразие, мы можем взять конструкцию Бореля $ET^n \times_{T^n} M^{2n}$. Оказывается, что все эти пространства для данного $P^n$ имеют гомотопический тип $B_TP$:

$$B_TP \cong ET^n \times_{T^n} M^{2n}. \tag{4}$$

Что же касается $\mathcal{Z}_P$, то это $T^m$-пространство связано с квазиторическими многообразиями над $P^n$ следующим образом: для любого квазиторического многообразия $M^{2n}$ над $P^n$ проекция $\mathcal{Z}_P \to P^n$ раскладывается в композицию $\mathcal{Z}_P \to M^{2n} \xrightarrow{\pi} P^n$, где $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$ — некоторое главное $T^{m-n}$-расслоение и $M^{2n} \xrightarrow{\pi} P^n$ — проекция на пространство орбит для $M^{2n}$. Таким образом, если над $P^n$ существуют квазиторические многообразия, то в $T^m$ имеется подгруппа, изоморфная $T^{m-n}$, действующая на $\mathcal{Z}_P$ свободно, и каждая такая подгруппа соответствует некоторому квазиторическому многообразию. Как следует из предложения 1.7, подгруппы большего ранга уже не могут свободно действовать на $\mathcal{Z}_P$, поэтому максимальный ранг для свободного действия достигается как раз в случае квазиторических многообразий. Позднее мы обсудим этот вопрос более подробно.

Пусть теперь $P$ — произвольный простой полиэдральный комплекс (например, простой многогранник) с $m$ гранями коразмерности один. Из (3) мы получаем расслоение $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Далее все когомологии рассматриваются с коэффициентами в основном кольце $k$.

**Теорема 1.12.** *Отображение $p^* : H^*(BT^m) \to H^*(B_TP)$ является эпиморфизмом, который при отождествлении $H^*(BT^m) \cong k[v_1, \ldots, v_m]$ переходит в эпиморфизм $k[v_1, \ldots, v_m] \to k(P)$, где $k(P)$ — кольцо граней. В частности, $H^*(B_TP) \cong k(P)$.* $\square$

Пусть теперь $P^n$ — простой многогранник и $M^{2n}$ — квазиторическое многообразие над $P^n$ с характеристической функцией $\lambda$. Если $k$ — поле, то характеристическую функцию можно рассматривать как линейное отображение $k^m \to k^n$. Из (4) мы получаем расслоение $p_0 : B_TP \to BT^n$ со слоем $M^{2n}$.

**Теорема 1.13.** *Отображение $p_0^* : H^*(BT^n) \to H^*(B_TP)$ является мономорфизмом и $p_0^* : H^2(BT^n) \to H^2(B_TP)$ при соответствующих отождествлениях переходит в $\lambda^* : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$. Кроме того, при каноническом отождествлении $H^*(BT^n, k) \cong k[t_1, \ldots, t_n]$ элементы $\lambda_i = p^*(t_i) \in H^*(B_TP, k) \cong k(P)$ образуют регулярную последовательность длины $n$ элементов $k(P)$ степени два.* $\square$

Естественно, во всех предыдущих конструкциях можно заменить квазиторические многообразия на (алгебраические) торические многообразия. При этом каждому торическому многообразию соответствует конкретное вложение многогранника $P^n$ в $\mathbb{R}^n$, при котором все вершины имеют целые координаты. Тогда, как следует из сказанного выше, соответствующая характеристическая функция получается следующим образом: ее значение на гиперграни $F^{n-1} \in \mathcal{F}$ есть соответствующий направляющий ковектор. Все характеристические функции, соответствующие (алгебраическим) торическим многообразиям, могут быть получены таким образом.

# 2. Геометрические и гомотопические свойства пространств $\mathcal{Z}_P$ и $B_TP$

## 2.1. Кубические разбиения простых многогранников.

Пусть вначале $P^n$ — некоторый простой многогранник размерности $n$. Нам понадобится следующая конструкция

**Определение 2.1.** *Кубический комплекс — это совокупность кубов произвольных размерностей, обладающая свойствами:*

1) *вместе с любым кубом его грани всех размерностей принадлежат этой совокупности;*

2) *пересечение любых двух кубов является гранью каждого из них.*

Рассмотрим также стандартный $q$-мерный куб $I^q = \{(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$.

**Теорема 2.2.** *Любой простой многогранник $P^n$ с $r = f_{n-1}$ вершинами и $m = f_0$ гранями коразмерности один имеет естественную структуру кубического комплекса $\mathcal{C}$ с $r$ кубами размерности $n$. Кроме того, существует вложение комплекса $\mathcal{C}$ в $m$-мерный куб $I^m$, при котором кубы из $\mathcal{C}$ отображаются на грани $I^m$.*

**Доказательство.** Зафиксируем по одной точке во внутренности каждой грани $P^n$ (в том числе зафиксируем вершины и точку во внутренности самого многогранника). Таким образом мы получим множество $\mathcal{S}$ из $1 + f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}$ точек. Эти точки мы объявим вершинами кубического комплекса $\mathcal{C}$. Так как многогранник $P^n$ простой, то в каждой его вершине сходится $\binom{n}{k}$ граней размерности $k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Таким образом мы поставим в соответствие каждой вершине $v$ многогранника $P^n$ набор $\mathcal{S}_v$ из $2^n$ точек из нашего множества $\mathcal{S}$ — по одной точке во внутренности каждой из граней, сходящихся в вершине $v$ (в этот набор входят сама вершина $v$ и точка во внутренности многогранника). Скажем тогда, что точки из $\mathcal{S}_v$ являются вершинами куба $I^n_v$, соответствующего вершине $v$. Грани куба $I^n_v$ определяются следующим образом. Рассмотрим две произвольные грани $F^k_1$ и $F^l_2$ многогранника $P^n$ такие, что $v \in F^k_1 \subset F^l_2$, $0 \leqslant k = \dim F^k \leqslant l = \dim F^l \leqslant n$. Тогда имеется $\binom{l-k}{i}$ граней $F^{k+i}$ размерности $k+i$ таких, что $v \in F^k_1 \subset F^{k+i} \subset F^l_2$, $0 \leqslant i \leqslant l-k$. Во внутренностях этих граней лежат $2^{l-k}$ точек из множества $\mathcal{S}_v \subset \mathcal{S}$. Тогда мы скажем, что эти точки порождают $(l-k)$-мерную грань $I^{l-k}_{F_1,F_2}$ куба $I^n_v$. Теперь для завершения построения кубического комплекса $\mathcal{C}$ нам осталось только проверить выполнение второго условия из определения 2.1. Это условие достаточно проверить для двух $n$-мерных кубов $I^n_v$ и $I^n_{v'}$. Для вершин $v$ и $v'$ найдем грань $F^p$ минимальной размерности, содержащую обе эти вершины (такая грань, очевидно, единственна). Тогда, как нетрудно видеть, $I^n_v \cap I^n_{v'} = I^{n-p}_{F^p,P^n}$ — грань каждого из кубов $I^n_v$ и $I^n_{v'}$.

Теперь опишем вложение $\mathcal{C} \hookrightarrow I^m$. Сначала зададим это вложение на вершинах $\mathcal{C}$, т.е. на точках из множества $\mathcal{S}$. Для этого занумеруем грани коразмерности один как $F^{n-1}_1, \ldots, F^{n-1}_m$. Точку из множества $\mathcal{S}$, лежащую во внутренности грани $F^{n-1}_i$, мы отобразим в вершину $(1, \ldots, 0, \ldots, 1)$ куба $I^m$, где $0$ стоит на $i$-м месте. Пусть теперь имеется произвольная точка $p$ из множества $\mathcal{S}$, лежащая во внутренности некоторой грани $F^{n-k}$ коразмерности $k$. Тогда эта грань получается как пересечение $k$ граней коразмерности один: $F^{n-k} = F^{n-1}_{i_1} \cap \ldots \cap F^{n-1}_{i_k}$. Отобразим тогда точку $p \in \mathcal{S}$ в вершину куба $I^m$, имеющую следующие координаты: на местах с номерами $i_1, \ldots, i_k$ стоят нули, а на остальных — единицы. Точку во внутренности самого многогранника $P^n$ мы отобразим в вершину куба $I^m$ с координатами $(1, \ldots, 1)$. Построенное отображение множества $\mathcal{S}$ в куб $I^m$ очевидно продолжается до отображения кубического комплекса $\mathcal{C}$, соответствующего $P^n$, в кубический комплекс, соответствующий кубу $I^m$. Для того чтобы реализовать это отображение геометрически, будем действовать следующим образом. Нам понадобится симплициальное разбиение $\mathcal{K}$ многогранника $P^n$ с множеством вершин $\mathcal{S}$ такое, что для любой вершины $v$ многогранника $P^n$ существует подкомплекс $\mathcal{K}_v \subset \mathcal{K}$ с множеством вершин $\mathcal{S}_v$, задающий триангуляцию куба $I^n_v$. Такое симплициальное разбиение можно построить, например, так: представим многогранник $P^n$ как конус над барицентрическим подразделением симплициального комплекса $K^{n-1}$, двойственного к границе $P^n$; тогда подкомплексы $\mathcal{K}_v$ — это конусы над барицентрическими подразделениями $(n-1)$-симплексов $K^{n-1}$. Теперь мы можем продолжить вложение $\mathcal{S} \hookrightarrow I^m$ линейно на каждом симплексе триангуляции $\mathcal{K}$ до вложения $P^n \hookrightarrow I^m$ (которое таким образом является кусочно линейным отображением). На рисунке изображено это вложение в случае $n = 2$, $m = 3$ (треугольник вкладывается в трехмерный куб).

Пусть $v$ — некоторая вершина многогранника $P^n$. Тогда в $v$ сходятся $n$ граней $F_{i_1}^{n-1}, \dots, F_{i_n}^{n-1}$ коразмерности один. Построенное нами вложение обладает следующим свойством:

$$\text{Куб } I_v^n \subset P^n \text{ отображается на } n\text{-мерную грань куба } I^m\text{, выделяемую } m-n \text{ уравнениями } x_j = 1,\ j \notin \{i_1, \dots, i_n\} \tag{5}$$

Таким образом нами построено вложение $P^n \hookrightarrow I^m$ с требуемыми свойствами. $\square$

**Лемма 2.3.** *Число $c_k$ граней (кубов) размерности $k$ кубического комплекса $\mathcal{C}$, построенного в предыдущей теореме для простого многогранника $P^n$, вычисляется по формуле*

$$c_k = \sum_{i=0}^{n-k} f_{n-i-1} \binom{n-i}{k} = f_{n-1}\binom{n}{k} + f_{n-2}\binom{n-1}{k} + \ldots + f_{k-1};$$

*здесь $(f_0, \dots, f_{n-1})$ — $f$-вектор $P^n$, $f_{-1} = 1$.*

**Доказательство.** Это следует из того, что $k$-мерные грани кубического комплекса $\mathcal{C}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами вложенных граней $F_1^i \subset F_2^{i+k}$ простого многогранника $P^n$ (см. доказательство теоремы 2.2). $\square$

## 2.2. Структура гладкого многообразия на $\mathcal{Z}_P$ и эквивариантное вложение в $\mathbb{C}^m$.

Рассмотрим теперь стандартный полидиск $(D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$:

$$(D^2)^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i| \leqslant 1\}.$$

На $(D^2)^m$ индуцируется из $\mathbb{C}^m$ стандартное диагональное действие тора $T^m$. Пространством орбит этого действия является куб $I^m$. Основным результатом этого пункта является следующая теорема

**Теорема 2.4.** *Пусть $P^n$ — простой многогранник с $m$ гранями коразмерности один. Пространство $\mathcal{Z}_P$ имеет каноническую структуру гладкого многообразия размерности $m+n$, для которой действие $T^m$ является гладким. Кроме того, имеется $T^m$-эквивариантное вложение $i_e : \mathcal{Z}_P \hookrightarrow (D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$.*

**Доказательство.** В силу теоремы 2.2 можно считать, что $P^n$ представлен в виде объединения $n$-мерных кубов $I^n$ в количестве, равном числу вершин $P^n$. Пусть $\rho : \mathcal{Z}_P \to P^n$ — проекция на пространство орбит. Тогда из конструкции $\mathcal{Z}_P$ следует, что для любого куба $I^n$ мы имеем $\rho^{-1}(I^n) = (D^2)^n \times T^{m-n}$, где $(D^2)^n$ — полидиск в $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием тора $T^n$. Отсюда следует, что $\mathcal{Z}_P$ представляется в виде объединения подмножеств вида $(D^2)^n \times T^{m-n}$, которые склеиваются при помощи некоторых отождествлений их границ. Таким образом $\mathcal{Z}_P$ приобретает структуру гладкого многообразия с гладким действием $T^m$.

Теперь будем строить эквивариантное вложение $\mathcal{Z}_P \hookrightarrow (D^2)^m$. Занумеруем, как и выше, грани $P^n$ коразмерности один как $F_1^{n-1}, \dots, F_m^{n-1}$. Из сказанного выше следует, что $\mathcal{Z}_P$ склеивается из блоков $B_v \cong (D^2)^n \times T^{m-n}$, соответствующих вершинам $v$ многогранника $P^n$. Каждый сомножитель вида $D^2$ или $T^1$ в блоке $B_v$ соответствует некоторой грани $P^n$ коразмерности один и таким образом приобретает индекс $i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ (при этом $n$ сомножителей вида $D^2$ получают индексы, соответствующие граням, содержащим вершину $v$, а индексы сомножителей вида $T^1$ соответствуют остальным граням). Рассмотрим полидиск $(D^2)^m$ и занумеруем сомножители $D^2 \subset (D^2)^m$ произвольным образом. Теперь вложим каждый блок $B_v \subset \mathcal{Z}_P$ в $(D^2)^m$ так, что каждый сомножитель $T^1 \subset B_v$ и $D^2 \subset B_v$ вкладывается в $D^2 \subset (D^2)^m$ с тем же индексом. Очевидно, что набор таких вложений $B_v \hookrightarrow (D^2)^m$ определяет эквивариантное вложение $\mathcal{Z}_P \hookrightarrow (D^2)^m$. $\square$

**Лемма 2.5.** *Эквивариантное вложение $i_e : \mathcal{Z}_P \hookrightarrow (D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$, построенное в теореме 2.4 индуцируется из стандартного действия тора на $(D^2)^m$ при помощи вложения $i_P : P^n \hookrightarrow I^m$, построенного в теореме 2.2. Это описывается следующей коммутативной диаграммой:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_e} & (D^2)^m \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
P^n & \xrightarrow{i_P} & I^m.
\end{array}$$

**Доказательство.** Легко видеть, что вложение в $I^m$ грани $I^n$, заданной $m-n$ уравнениями вида $x_j = 1$, индуцирует эквивариантное вложение в $(D^2)^m$ пространства вида $(D^2)^n \times T^{m-n}$. Тогда доказываемое утверждение следует из представления $\mathcal{Z}_P$ в виде объединения блоков $B_v \cong (D^2)^n \times T^{m-n}$ и свойства (5) вложения $i_P : P^n \hookrightarrow I^m$. $\square$

Вложение $i_e : \mathcal{Z}_P \hookrightarrow (D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$, построенное выше, позволяет связать многообразие $\mathcal{Z}_P$ с одной конструкцией, рассматриваемой в теории алгебраических торических многообразий. Ниже мы опишем эту конструкцию, следуя [2].

Пусть $P^n$ — простой многогранник с $m$ гранями коразмерности один. Введем в пространстве $\mathbb{C}^m$ координаты $z_1, \dots, z_m$, которые, как и выше, находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями $P^n$ коразмерности один.

**Определение 2.6.** *Набор граней коразмерности один $\mathcal{P} = \{F_{i_1}, \dots, F_{i_p}\} \subset \mathcal{F}$ называется примитивным, если $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_p} = \varnothing$, но для любого $k$, $0 \leqslant k < p$, каждое $k$-элементное подмножество $\mathcal{P}$ имеет непустое пересечение. В двойственных обозначениях набор вершин $\mathcal{P} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$ симплициального комплекса $K_P$, двойственного к границе $P^n$, называется примитивным, если $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$ не порождает симплекс, но для любого $k$, $0 \leqslant k < p$, каждое $k$-элементное подмножество $\mathcal{P}$ порождает симплекс $K_P$.*

Пусть теперь $\mathcal{P} = \{F_{i_1}, \dots , F_{i_p}\}$ — некоторый примитивный набор граней $P^n$. Обозначим через $\mathbf{A}(\mathcal{P})$ подпространство размерности $(m - p)$ в $\mathbb{C}^m$, определяемое уравнениями

$$z_{i_1} = \dots = z_{i_p} = 0. \tag{6}$$

Так как в каждый примитивный набор входит минимум две грани, коразмерность подпространства $\mathbf{A}(\mathcal{P})$ не меньше двух.

**Определение 2.7.** *Определим замкнутое алгебраическое подмножество $\mathbf{A}(P^n)$ в $\mathbb{C}^m$ как*

$$\mathbf{A}(P^n) = \bigcup_{\mathcal{P}} \mathbf{A}(\mathcal{P}),$$

*где объединение берется по всем примитивным наборам граней $P^n$. Положим*

$$U(P^n) = \mathbb{C}^m \setminus \mathbf{A}(P^n).$$

Заметим, что при определении $U(P^n)$ мы можем удалить из $\mathbb{C}^m$ все плоскости вида (6), соответствующие наборам граней коразмерности один $\{F_{i_1}, \dots , F_{i_p}\}$, имеющим пустое пересечение, а не только плоскости, соответствующие примитивным наборам. Заметим также, что открытое множество $U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$, очевидно, инвариантно относительно действия $(\mathbb{C}^*)^m$ на $\mathbb{C}^m$.

Из свойства (5) вытекает, что образ $\mathcal{Z}_P$ при вложении $i_e : \mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^m$ (см. теорему 2.4) не пересекается с $\mathbf{A}(P^n)$, а значит, $i_e(\mathcal{Z}_P) \subset U(P^n)$.

Рассмотрим теперь мультипликативную группу

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(\lambda_1, \dots , \lambda_m) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i > 0\}.$$

Эта группа действует на $\mathbb{R}^m$ гомотетиями (элемент $(\lambda_1, \dots , \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ переводит $(x_1, \dots , x_m) \in \mathbb{R}^m$ в $(\lambda_1 x_1, \dots , \lambda_m x_m)$). Имеется изоморфизм $\exp : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m_+$ аддитивной и мультипликативной группы, который переводит вектор в порождаемую им гомотетию. Введем базис $e_1, \dots , e_m$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, элементы которого соответствуют гиперграням $P^n$.

Нас будут интересовать подгруппы $R^{m-n}_+ \subset \mathbb{R}^m_+$ ранга $m-n$. Каждая такая подгруппа задается $(m - n)$ линейно независимыми векторами $w_i = w_{1i}e_1 + \dots + w_{mi}e_m \in \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant i \leqslant m - n$, порождающими $(m - n)$ независимых гомотетий. Другими словами, подгруппа $R^{m-n}_+$ порождена $(m - n)$ однопараметрическими подгруппами

$$a_{w_i} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m_+, \quad t \to (t^{w_{1i}}, \dots , t^{w_{mi}}).$$

Введем $m \times (m - n)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1,m-n} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{m1} & \dots & w_{m,m-n} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

соответствующую подгруппе $R^{m-n}_+$. Предметом особого интереса для нас будут являться подгруппы $R^{m-n}_+$, обладающие следующим свойством:

Все максимальные миноры матрицы (7), получаемые удалением строк с номерами, соответствующими гиперграням многогранника, сходящимся в одной вершине, не обращаются в нуль. (8)

Множество таких матриц (и соответствующих подгрупп $R_+^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$) представляет собой открытое всюду плотное подмножество в многообразии Штифеля всех $m \times (m-n)$-матриц полного ранга. Эти матрицы представляют для нас интерес благодаря следующей теореме.

**Теорема 2.8.** *Любая подгруппа $R_+^{m-n} \subset \mathbb{R}_+^m$, обладающая свойством (8), свободно действует на алгебраическом множестве $U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$ (см. определение 2.7). При этом для любой такой подгруппы композиция вложения $i_e$ и проекции на пространство орбит $\mathcal{Z}_P \to U(P^n) \to U(P^n)/R_+^{m-n}$ является гомеоморфизмом.*

**Доказательство.** Точка $\mathbb{C}^m$ может иметь нетривиальный стабилизатор относительно действия подгруппы вида $R_+^{m-n}$ только в том случае, если она имеет хотя бы одну нулевую координату. Однако в силу определения множества $U(P^n)$ если точка из этого множества имеет некоторые нулевые координаты, то эти координаты соответствуют гиперграням $P^n$, имеющим непустое пересечение (т.е. хотя бы одну общую вершину). Пусть $\{i_1, \dots, i_n\}$ — набор индексов гиперграней, сходящихся в некоторой вершине, и возьмем произвольную точку $p \in U(P^n)$, у которой соответствующие координаты могут обращаться в нуль. Тогда эта точка может иметь нетривиальный стабилизатор относительно действия $R_+^{m-n}$, только если какая-то линейная комбинация векторов $w_1, \dots, w_{m-n}$ лежит в координатном подпространстве, натянутом на векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$. Однако этого быть не может, если $R_+^{m-n}$ удовлетворяет свойству (8). Таким образом, группа $R_+^{m-n}$, удовлетворяющая (8), действует на $U(P^n)$ свободно.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Наряду с вложением $i_e : \mathcal{Z}_P \to (D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$ из теоремы 2.4 мы воспользуемся вложениями $i_P : P^n \to I^m \subset \mathbb{R}^m$ из теоремы 2.2. Нам достаточно доказать, что каждая орбита действия группы $R_+^{m-n}$ на $U(P^n)$ пересекает образ $i_e(\mathcal{Z}_P)$ в единственной точке. В силу эквивариантности вложения $i_e$ это эквивалентно тому, что $(m-n)$-мерное подпространство, натянутое на векторы $w_1, \dots, w_{m-n}$, находится в общем положении с каждой из $n$-мерных граней куба $I^m$, на которые отображается многогранник $P^n$ при вложении $i_P$ (см. (5)). Но это есть в точности свойство (8). □

Эта теорема также дает нам еще одно доказательство того, что $\mathcal{Z}_P$ является гладким многообразием. Кроме того, имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.9.** *Существует гладкое эквивариантное подмногообразие $\hat{\mathcal{Z}}_P \subset U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением, для которого композиция отображений $\hat{\mathcal{Z}}_P \to U(P^n) \to U(P^n)/R_+^{m-n}$ является диффеоморфизмом. Каждое такое многообразие канонически гомеоморфно $\mathcal{Z}_P$.*

**Доказательство.** Пусть $R_+^{m-n} \subset \mathbb{R}_+^m$ — произвольная подгруппа, задаваемая набором векторов $w_1, \dots, w_{m-n}$, удовлетворяющих условию (8). Рассмотрим $(m-n)$ малых сдвигов образа $i_e(\mathcal{Z}_P)$ вдоль направлений $w_1, \dots, w_{m-n}$. Как следует из предыдущей теоремы, эти сдвиги задают $(m-n)$ независимых сечений нормального расслоения, которое таким образом является тривиальным. □

**Пример 2.10.** Рассмотрим $P^n = \Delta^n$ (см. $n$-мерный симплекс). В этом случае легко видеть, что $m = n+1$, $U(P^n) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ и в качестве $R_+^{m-n}$ можно взять $\mathbb{R}_+$ с диагональным действием на $\mathbb{C}^{n+1}$. Таким образом, в этом случае $\mathcal{Z}_P = S^{2n+1}$ (это также можно вывести из определения 1.6).

Свойство (8) зависит только от комбинаторной структуры простого многогранника $P^n$. В то же время матрицы (7), удовлетворяющие свойству (8), можно строить исходя из самого многогранника $P^n$, рассматриваемого как подмножество в $\mathbb{R}^n$. Действительно, по определению многогранник $P^n$

задается как множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих $m$ линейным неравенствам $\langle v_i, x\rangle \leqslant a_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, где $v_i \subset (\mathbb{R}^n)^*$ — направляющие (или опорные) (ко)векторы гиперграней, а $a_i \in \mathbb{R}$ — опорные числа. Множество наборов $(\mu_1, \dots, \mu_m)$, для которых $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m = 0$, образует $(m-n)$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Выберем базис $w_i = (w_{1i}, \dots, w_{mi})$, $1 \leqslant i \leqslant m-n$, в этом подпространстве и образуем матрицу (7). Тогда легко видеть, что эта матрица обладает свойством (8). Действительно, рассмотрим минор этой матрицы, получаемый вычеркиваением строк с номерами $i_1, \dots, i_n$, где $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ для некоторой вершины $v \in P^n$. Если этот минор равен нулю, то некоторая нетривиальная линейная комбинация векторов $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ обращается в нуль. Но этого быть не может, так как в силу того, что многогранник $P^n$ простой, набор опорных ковекторов гиперграней, сходящихся в одной вершине, образует базис в $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь вершины многогранника $P^n$ являются точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Такой целочисленный многогранник $P^n$ определяет некоторое проективное торическое многообразие $M^{2n}$ (см. [9]). В качестве направляющих ковекторов гиперграней $P^n$ выберем минимальные целочисленные векторы $v_i$. Тогда торическое многообразие $M^{2n}$ является неособым, если для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ векторы $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ образуют базис в $\mathbb{Z}^n$. В этом случае на множестве $U(P^n)$ свободно действует не только подгруппа $R_+^{m-n} \subset \mathbb{R}_+^m$, определенная при помощи векторов $v_i$ выше, но и аналогично определяемая подгруппа $D \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n} \subset (\mathbb{C}^*)^m$, изоморфная $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$. Торическое многообразие $M^{2n}$ тогда является пространством орбит $U(P^n)/D$ (см. [2]). Таким образом, для любого торического $M^{2n}$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U(P^n) & \xrightarrow{R_+^{m-n}} & \mathcal{Z}_P \\ {\scriptstyle (\mathbb{C}^*)^{m-n}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T^{m-n}} \\ M^{2n} & =\!=\!= & M^{2n}. \end{array}$$

Из результатов, изложенных выше вытекает, что для любой подгруппы $R_+^{m-n}$, удовлетворяющей (8), $U(P^n)$ гомеоморфно $\mathcal{Z}_P \times R_+^{m-n}$. Поэтому результаты о когомологиях $\mathcal{Z}_P$, полученные ниже, в равной степени относятся и к $U(P^n)$.

## 2.3. Гомотопические свойства $\mathcal{Z}_P$ и $B_T P$.

Мы начнем с двух простых утверждений.

**Лемма 2.11.** *Пусть $P^n$ представлен в виде произведения двух простых многогранников: $P^n = P_1^{n_1} \times P_2^{n_2}$. Тогда $\mathcal{Z}_P = \mathcal{Z}_{P_1} \times \mathcal{Z}_{P_2}$.*

**Доказательство.** Это следует непосредственно из определения $\mathcal{Z}_P$:

$$\mathcal{Z}_P = (T^m \times P^n)/\sim = ((T^{m_1} \times P^{n_1})/\sim) \times ((T^{m_2} \times P^{n_2})/\sim) = \mathcal{Z}_{P_1} \times \mathcal{Z}_{P_2}. \quad \square$$

Следующее утверждение также легко вытекает из конструкции $\mathcal{Z}_P$

**Лемма 2.12.** *Пусть $P_1^{n_1} \subset P^n$ — грань простого многогранника $P^n$ (тогда $P_1^{n_1}$, очевидно тоже является простым многогранником). Тогда $\mathcal{Z}_{P_1}$ является подмногообразием $\mathcal{Z}_P$.* $\square$

Далее мы для любого полиэдрального комплекса $P^n$ введем в $B_T P$ каноническую структуру клеточного комплекса.

Введем в $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$ стандартную клеточную структуру (т.е. каждое $\mathbb{C}P^\infty$ имеет по одной клетке в каждой четной размерности). При этом для алгебры клеточных коцепей $C^*(BT^m)$ мы имеем $C^*(BT^m) = H^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m]$.

**Теорема 2.13.** *Пусть $P$ — произвольный простой полиэдральный комплекс, имеющий $m$ граней коразмерности один. Пространство $B_TP$ может быть реализовано как клеточный подкомплекс в $BT^m$, представляющий собой объединение клеточных подкомплексов $BT^k_{i_1,\dots,i_k}$ по всем симплексам $\Delta = (i_1, \dots, i_k)$ двойственного симплициального комплекса $K_P$. При этом $C^*(B_TP) = H^*(B_TP) = k(P)$, и вложение $i : B_TP \hookrightarrow BT^m$ индуцирует эпиморфизм $C^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m] \to k(P) = C^*(B_TP)$.*

**Доказательство.** Рассмотрим симплициальный комплекс $K$ с $m$ вершинами, двойственный к границе простого полиэдрального комплекса $P$. В силу определения простых полиэдральных комплексов мы можем считать, что $P$ является конусом над барицентрическим подразделением $K$ с соответствующим разбиением на грани. Мы будем строить вложение $i : B_TP \hookrightarrow BT^m$ при помощи индукции по размерности $K$. Если $\dim K = 0$, то $K$ представляет собой набор из $m$ вершин $v_1, \dots, v_m$ и $P$ — конус над $K$. В этом случае $B_TP$ — букет из $m$ копий $\mathbb{C}P^\infty$ и имеется очевидное вложение $i : B_TP \to BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. В размерности нуль $C^*(B_TP)$ есть просто $k$, а в размерностях $\geqslant 1$ эта алгебра изоморфна $k[v_1] \oplus \dots \oplus k[v_m]$. Таким образом, $C^*(B_TP) = k[v_1, \dots, v_m]/I$, где $I$ — идеал, порожденный всеми мономами степени $\geqslant 2$ без квадратов и $i^*$ — проекция на фактор-кольцо. Итак, в случае $\dim K = 0$ теорема верна.

Пусть теперь $\dim K = k-1$. По предположению индукции теорема верна для $(k-2)$-остова $K' \subset K$ и соответствующего ему простого полиэдрального комплекса $P'$, т.е. $i^*C^*(BT^m) = C^*(B_TP') = k(K') = k[v_1, \dots, v_m]/I'$. Будем добавлять $(k-1)$-симплексы по очереди. Добавление к $K'$ симплекса $\Delta^{k-1}$ с вершинами $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ соответствует присоединению к $B_TP' \subset BT^m$ всех клеток клеточного подкомплекса $BT^k_{i_1,\dots,i_k} = BT^1_{i_1} \times \dots \times BT^1_{i_k} \subset BT^m$. При этом ясно, что $C^*(B_TP' \cup BT^k_{i_1,\dots,i_k}) = k(K' \cup \Delta^{k-1}) = k[v_1, \dots, v_m]/I$, где $I \subset I'$ и $I'/I = (v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_k})$. Кроме того, если $i : B_TP' \cup BT^k_{i_1,\dots,i_k} \hookrightarrow BT^m$ — естественное вложение, то $i^*$ — проекция на фактор-кольцо. $\square$

В частности, мы видим, что в случае $K_P = \Delta^{m-1}$ (тогда $P = \mathbb{R}^m_+$) мы имеем $B_TP = BT^m$.

Далее мы используем клеточную структуру $B_TP$ для описания гомотопических групп пространств $B_TP$ и $\mathcal{Z}_P$. Простой полиэдральный комплекс $P^n$ с $m$ гранями коразмерности один называется *$q$-смежностным*, если $(q-1)$-остов двойственного симплициального комплекса $K_P^{n-1}$ совпадает с $(q-1)$-остовом $(m-1)$-мерного симплекса (это означает, что любые $q$ граней $P^n$ коразмерности один имеют непустое пересечение). Заметим, что любой простой многогранник является 1-смежностным.

**Теорема 2.14.** *Для любого простого полиэдрального комплекса $P^n$ с $m$ гранями коразмерности один имеют место следующие утверждения:*

1) $\pi_1(\mathcal{Z}_P) = \pi_1(B_TP) = 0$;

2) $\pi_2(\mathcal{Z}_P) = 0$, $\pi_2(B_TP) = \mathbb{Z}^m$;

3) $\pi_q(\mathcal{Z}_P) = \pi_q(B_TP)$ *при* $q \geqslant 3$;

4) *если $P^n$ является $q$-смежностным, то $\pi_i(\mathcal{Z}_P) = 0$ при $i < 2q+1$, а $\pi_{2q+1}(\mathcal{Z}_P)$ — свободная абелева группа, образующие которой соответствуют мономам $v_{i_1} \cdots v_{i_{q+1}} \in I$ (см. определение 1.1; в терминах $P$ эти мономы соответствуют примитивным наборам гиперграней длины $q+1$).*

**Доказательство.** Тот факт, что $\pi_1(B_TP) = 0$ и $\pi_2(B_TP) = \mathbb{Z}^m$, следует из клеточной структуры $B_TP$, описанной в предыдущей теореме. Для того чтобы вычислить $\pi_1(\mathcal{Z}_P)$ и $\pi_2(\mathcal{Z}_P)$, рассмотрим следующий фрагмент гомотопической последовательности расслоения $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
0 = \pi_3(BT^m) \arrow[r] & \pi_2(\mathcal{Z}_P) \arrow[r] & \pi_2(B_TP) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, equal] & \pi_2(BT^m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(\mathcal{Z}_P) \arrow[r] & \pi_1(B_TP) = 0 \\
 & & \mathbb{Z}^m \arrow[r] & \mathbb{Z}^m & &
\end{tikzcd}$$

Из теоремы 2.13 следует, что здесь $p_*$ является изоморфизмом, следовательно, $\pi_1(\mathcal{Z}_P) = \pi_2(\mathcal{Z}_P) = 0$. Третье утверждение теоремы следует из рассмотрения фрагмента

$$\pi_{q+1}(BT^m) \to \pi_q(\mathcal{Z}_P) \to \pi_q(B_TP) \to \pi_q(BT^m),$$

в котором $\pi_q(BT^m) = \pi_{q+1}(BT^m) = 0$ при $q \geqslant 3$. Наконец, из клеточной структуры $B_TP$ следует, что если $P^n$ является $q$-смежностным, то клеточный $(2q+1)$-остов $B_TP$ совпадает с $(2q+1)$-остовом $BT^m$. Таким образом, $\pi_k(B_TP) = \pi_k(BT^m)$ при $k < 2q+1$. Теперь последнее утверждение теоремы следует из третьего утверждения и теоремы 2.13. $\square$

Вид гомотопических групп пространств $\mathcal{Z}_P$ и $B_TP$, описанных в предыдущей теореме, позволяет предположить, что $\mathcal{Z}_P$ является первым убивающим пространством для $B_TP$, т.е. $\mathcal{Z}_P = B_TP|_3$. Это действительно так, и, чтобы увидеть это, мы рассмотрим следующую коммутативную диаграмму расслоений, получаемую из (3):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_P \times ET^m \arrow[r] \arrow[d] & ET^m \arrow[d] \\
B_TP \arrow[r, "p"] & BT^m.
\end{tikzcd} \tag{9}$$

Так как $ET^m$ стягиваемо, то $\mathcal{Z}_P \times ET^m$ гомотопически эквивалентно $\mathcal{Z}_P$. С другой стороны, так как $BT^m = K(\mathbb{Z}^m, 2)$ и $\pi_2(B_TP) = \mathbb{Z}^m$, мы получаем, что $\mathcal{Z}_P \times ET^m$ по определению является первым убивающим пространством для $B_TP$. Таким образом, $\mathcal{Z}_P$ имеет гомотопический тип первого убивающего пространства для $B_TP$.

# 3. Спектральная последовательность Эйленберга–Мура

В работе [8] Эйленбергом и Муром была введена спектральная последовательность, которая оказалась весьма полезной в наших исследованиях. В описании этой спектральной последовательности мы следуем [15].

Пусть $\xi_0 = (E_0, p_0, B_0, F)$ — некоторое расслоение Серра над односвязной базой $B_0$ и $f : B \to B_0$ — непрерывное отображение. Тогда мы можем построить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
E \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & E_0 \arrow[d, "p_0"] \\
B \arrow[r, "f"] & B_0,
\end{tikzcd} \tag{10}$$

где $\xi = (E, p, B, F)$ — индуцированное расслоение. При этих условиях имеет место следующая теорема

**Теорема 3.1** (Эйленберг–Мур). *Существует спектральная последовательность коммутативных алгебр $\{E_r, d_r\}$, для которой*

*1) $E_r \Rightarrow H^*(E)$ (спектральная последовательность сходится к когомологиям $E$ в обычном смысле);*

*2) $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B_0)}(H^*(B), H^*(E_0))$.* $\square$

Спектральная последовательность Эйленберга–Мура является спектральной последовательностью второго квадранта, и дифференциал $d_r$ повышает бистепень на $(r, 1-r)$. В специальном случае, когда $B = *$ — точка (тогда $E = F$ — слой $\xi$), мы имеем

**Следствие 3.2.** *Пусть $F \hookrightarrow E \to B$ — некоторое расслоение над односвязным пространством $B$. Тогда существует спектральная последовательность коммутативных алгебр $\{E_r, d_r\}$, для которой*

*1) $E_r \Rightarrow H^*(E)$;*

*2) $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B)}(H^*(E), k)$.* $\square$

В качестве первого применения спектральной последовательности Эйленберга–Мура мы вычислим кольцо когомологий квазиторического многообразия $M^{2n}$ над простым многогранником $P^n$ (как уже говорилось, этот результат был получен в [7] другими методами). Наряду с идеалом $I$, для которого $k(P) = k[v_1, \ldots, v_m]/I$, введем идеал $J \subset k(P)$ как $J = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_i$ — элементы $k(P)$, определенные в теореме 1.13 при помощи характеристической функции $\lambda$ многообразия $M^{2n}$. Как показывет теорема 1.13, $\lambda_i = \lambda_{i1}v_1 + \lambda_{i2}v_2 + \ldots + \lambda_{im}v_m$ — алгебраически независимые элементы степени 2 в $k(P)$ и $k(P)$ — свободный конечномерный модуль над $k[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Прообраз идеала $J$ в $k[v_1, \ldots, v_m]$ является идеалом, порожденным $\lambda_i = \lambda_{i1}v_1 + \ldots + \lambda_{im}v_m$, рассматриваемыми как элементы $k[v_1, \ldots, v_m]$. Этот прообраз мы также будем обозначать $J$.

**Теорема 3.3.** *Для любого квазиторического многообразия $M^{2n}$ имеет место следующий изоморфизм колец:*

$$H^*(M^{2n}) \cong k(P)/J = k[v_1, \ldots, v_m] \,/\, I{+}J.$$

**Доказательство.** Рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения

$$\begin{array}{ccc} M^{2n} & \longrightarrow & B_TP \\ \downarrow & & \downarrow p_0 \\ * & \longrightarrow & BT^n \end{array}$$

Тогда в силу теоремы 1.13 мы имеем мономорфизм

$$\begin{array}{rcl} H^*(BT^n) = k[t_1, \ldots, t_n] & \xrightarrow{p_0^*} & H^*(B_TP) = k(P), \\ t_i & \longrightarrow & \lambda_i, \end{array}$$

т.е. $\operatorname{Im} p_0^* = k[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \subset k(P)$. Член $E_2$ спектральной последовательности Эйленберга–Мура имеет вид

$$E_2^{*,*} = \operatorname{Tor}^{*,*}_{H^*(BT^n)}(H^*(B_TP), k) = \operatorname{Tor}^{*,*}_{k[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]}(k(P), k).$$

Здесь правая часть является биградуированным $k$-модулем (см. [13, 15]). Первая ("внешняя") градуировка происходит из проективной резольвенты $H^*(B_TP)$ как $H^*(BT^n)$-модуля, используемой в определении функтора Tor. Вторая ("внутренняя") градуировка происходит из градуировки самих $H^*(BT^n)$-модулей, входящих в резольвенту; мы предполагаем ее нетривиальной только в четных размерностях ($\deg \lambda_i = 2$). Так как $k(P)$ — свободный модуль над $k[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, то

$$\operatorname{Tor}^{*,*}_{k[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]}(k(P), k) = \operatorname{Tor}^{0,*}_{k[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]}(k(P), k) = k(P) \otimes_{k[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]} k = k(P)/J.$$

Таким образом, $E_2^{0,*} = k(P)/J$ и $E_2^{p,*} = 0$ при $p \neq 0$. Отсюда следует, что $E_2 = E_\infty$ и $H^*(M^{2n}) = k(P)/J$. $\square$

**Следствие 3.4.** $H^*(M^{2n}) = \operatorname{Tor}_{k[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]}(k(P), k)$. $\square$

# 4. Вычисление когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$

При помощи спектральной последовательности Эйленберга–Мура мы получаем описание кольца когомологий $\mathcal{Z}_P$ в терминах кольца граней $k(P)$ и также ряд дополнительных результатов об этих когомологиях в случае, когда над многогранником $P$ имеется хотя бы одно квазиторическое многообразие. В этом разделе мы предполагаем, что $k$ — поле.

## 4.1. Аддитивная структура когомологий $\mathcal{Z}_P$.

Для описания когомологий $\mathcal{Z}_P$ мы, в основном, будем использовать спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Эта спектральная последовательность определяет убывающую фильтрацию в $H^*(\mathcal{Z}_P)$, обозначаемую $\{F^{-p}H^*(\mathcal{Z}_P)\}$, $p \geqslant 0$, обладающую тем свойством, что

$$E_\infty^{-p,n+p} = F^{-p}H^n(\mathcal{Z}_P)/F^{-p+1}H^n(\mathcal{Z}_P).$$

**Предложение 4.1.** $F^0H^*(\mathcal{Z}_P) = H^0(\mathcal{Z}_P) = k$ *(основное поле).*

**Доказательство.** Как следует из [15, Предложение 4.2], для спектральной последовательности Эйленберга–Мура произвольного коммутативного квадрата (10) мы имеем $F^0H^*(E) = \operatorname{Im}\{H^*(B) \otimes H^*(E_0) \to H^*(E)\}$. В нашем случае это дает $F^0H^*(\mathcal{Z}_P) = \operatorname{Im}\{H^*(B_TP) \to H^*(\mathcal{Z}_P)\}$. Теперь наше предложение следует из рассмотрения спектральной последовательности Лере-Серра расслоения $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$ и того факта, что $p^* : H^*(BT^m) \to H^*(B_TP)$ является эпиморфизмом (см. теорему 1.12). $\square$

Для спектральной последовательности Эйленберга–Мура расслоения $p : B_TP \to BT^m$ мы имеем $E_2 = \operatorname{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k(P), k)$. Рассмотрим свободную резольвенту $k(P)$ как $k[v_1, \ldots, v_m]$-модуля:

$$0 \longrightarrow R^{-h} \xrightarrow{d^{-h}} R^{-h+1} \xrightarrow{d^{-h+1}} \ldots \longrightarrow R^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} R^0 \xrightarrow{d^0} k(P) \longrightarrow 0. \tag{11}$$

Для наших целей удобно считать, что $R^i$ занумерованы неположительными числами, т.е. $h > 0$. Минимальное число $h$, для которого существует резольвента (11), называется *гомологической размерностью* $k(P)$, обозначается $\mathrm{hd}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P))$. Из теоремы Гильберта о сизигиях следует, что $\mathrm{hd}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P)) \leqslant m$. Но так как $k(P)$ является кольцом Коэна–Маколея, то известно [14, гл. IV], что

$$\mathrm{hd}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P)) = m - n,$$

где $n$ — размерность Крулля (максимальное число алгебраически независимых элементов) $k(P)$. В нашем случае $n = \dim P$.

Нам понадобится особая свободная резольвента (11), называемая *минимальной* резольвентой (см. [1]). Эта резольвента определяется следующим образом. Пусть $A$ — градуированная связная коммутативная алгебра и $N, N'$ — модули над $A$. Положим $I(A) = \sum_{q>0} A_q = \{a \in A | \deg a \neq 0\}$ и $J(N) = I(A) \cdot N$. Отображение $f : N \to N'$ называется минимальным, если $\mathrm{Ker}\, f \subset J(N)$. Резольвента (11) называется *минимальной*, если все $d^i$ минимальны. Один из способов построения минимальной резольвенты заключается в следующем: свободные $A$-модули $R^0, R^{-1}, \dots, R^{-h}$ строятся последовательно и, построив $R^i$ и $d^i$, мы берем в качестве базиса $R^{i+1}$ минимальный набор однородных образующих $\mathrm{Ker}\, d^i$. Для градуированной алгебры $A$ имеется естественный способ выбора минимального набора образующих для $A$-модуля $R$. Этот способ заключается в следующем. Пусть $k_1$ — наименьшая степень, в которой $R$ ненулевой. Выберем в $(R)^{k_1}$ базис векторного пространства, скажем $x_1, \dots, x_p$. Пусть теперь $R_1 = (x_1, \dots, x_p) \subset R$ — подмодуль, порожденный $x_1, \dots, x_p$. Если $R = R_1$, то построение минимального набора образующих $R$ закончено. Иначе рассмотрим первую степень $k_2$, в которой $R \neq R_1$, тогда в этой степени имеется разложение в прямую сумму $R = R_1 \oplus \widehat{R_1}$. Теперь выберем в $\widehat{R_1}$ базис векторного пространства $x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}$ и положим $R_2 = (x_1, \dots, x_{p_2})$. Если $R = R_2$, то минимальный базис построен, иначе будем повторять описанный выше процесс до тех пор, пока не получим минимальный набор образующих для $R$. Минимальный набор образующих $A$-модуля $R$ обладает следующим свойством: ни для одного элемента $x_k$ не существует разложения вида $x_k = \sum a_i x_i$, где $a_i \in A$, $\deg a_i \neq 0$. Минимальная резольвента единственна с точностью до изоморфизма.

Пусть теперь (11) — минимальная резольвента $k(P)$ как $k[v_1, \dots, v_m]$-модуля. В силу минимальности мы имеем в (11): $h = m - n$, а $R^0$ является $k[v_1, \dots, v_m]$-свободным модулем с одной образующей 1 степени 0. Система образующих $R^{-1}$ состоит из элементов $v_{i_1 \dots i_k}$ степени $2k$ таких, что $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ не порождают симплекс в $K$, но если мы заберем любую вершину из набора $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, то оставшийся набор вершин уже будет порождать симплекс в $K$. Это означает, что набор $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ является примитивным в смысле определения 2.6 (здесь, как и раньше, $v_i$ рассматриваются как вершины симплициального комплекса $K^{n-1}$, двойственного к $\partial P$).

Структура $k[v_1, \dots, v_m]$-модуля в $k$ задается при помощи гомоморфизма $k[v_1, \dots, v_m] \to k$, $v_i \to 0$. Если резольвента (11) минимальна, то все дифференциалы $d^i$ в комплексе

$$0 \longrightarrow R^{-(m-n)} \otimes_{k[v_1,\dots,v_m]} k \xrightarrow{d^{-(m-n)}} \dots \longrightarrow R^{-1} \otimes_{k[v_1,\dots,v_m]} k \xrightarrow{d^{-1}} R^0 \otimes_{k[v_1,\dots,v_m]} k \longrightarrow 0 \qquad (12)$$

тривиальны. Модуль $R^i \otimes_{k[v_1,\dots,v_m]} k$ является конечномерным векторным пространством над $k$, размерность которого равна размерности $R^i$ как свободного модуля над $k[v_1, \dots, v_m]$:

$$\dim_k R^i \otimes_{k[v_1,\dots,v_m]} k = \dim_{k[v_1,\dots,v_m]} R^i.$$

Следовательно, в силу тривиальности всех дифференциалов комплекса (12) для минимальной резольвенты (11) выполнено следующее соотношение:

$$\dim_k \operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k) = \sum_{i=0}^{m-n} \dim_{k[v_1,\dots,v_m]} R^{-i}. \tag{13}$$

Теперь все готово для описания аддитивной структуры когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$.

**Теорема 4.2.** *Имеет место следующий изоморфизм градуированных $k$-модулей:*

$$H^*(\mathcal{Z}_P) \cong \operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$$

*(правая часть превращается из биградуированного $k$-модуля в градуированный $k$-модуль взятием полной степени). Точнее, в $H^*(\mathcal{Z})$ имеется фильтрация $\{F^{-p}H^*(\mathcal{Z})\}$, для которой*

$$F^{-p}H^*(\mathcal{Z})/F^{-p+1}H^*(\mathcal{Z}) = \operatorname{Tor}^{-p}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k).$$

**Доказательство.** Вначале мы докажем, что

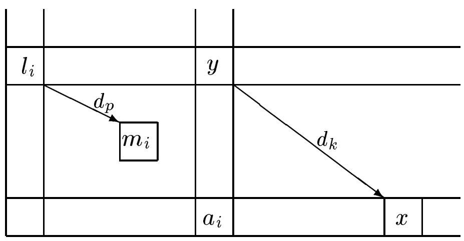
$$\dim_k H^*(\mathcal{Z}) \geqslant \dim_k \operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k). \tag{14}$$

Для этого рассмотрим спектральную последовательность Лере–Серра расслоения $p : B_T P \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Первый столбец члена $E_2$ этой спектральной последовательности соответствует когомологиям слоя $\mathcal{Z}$: $H^*(\mathcal{Z}) = E_2^{0,*}$. Мы поставим в соответствие каждой образующей $k[v_1,\dots,v_m]$-свободного модуля $R^i$ некоторую образующую $H^*(\mathcal{Z})$, причем различным образующим модулей $R^i$ будут соответствовать различные образующие $H^*(\mathcal{Z})$.

В силу теоремы 1.12 и свойств спектральной последовательности Лере–Серра ненулевые элементы могут появиться в члене $E_\infty$ только в нижней строке, и эта нижняя строка представляет собой кольцо $k(P) = H^*(B_T P)$:

$$E_\infty^{*,p} = 0,\ p > 0;\ E_\infty^{*,0} = k(P).$$

Таким образом, все элементы из ядра отображения $d^0 : R^0 = k[v_1, \dots, v_m] = E_2^{*,0} \to E_\infty^{*,0} = k(P)$ из минимальной резольвенты (11) должны убиваться дифференциалами спектральной последовательности. Это ядро у нас обозначалось $I$ (идеал в $k[v_1, \dots, v_m]$). Пусть $(x_1, \dots, x_p)$ — минимальный базис идеала $I$, построенный при помощи описанной выше процедуры. Ниже мы докажем, что элементы $x_i$ могут убиваться только трансгрессией (т.е. дифференциалами, бьющими из первого столбца). Пусть это не так, т.е. пусть $x$ — элемент минимального базиса $I$, который убивается не трансгрессивным дифференциалом: $x = d_k y$ для некоторого $k$, где $y$ лежит не в первом столбце. Тогда $y$ является циклом всех дифференциалов вплоть до $d_{k-1}$. Пусть $y$ происходит из некоторого элемента $\sum_i l_i a_i$ в члене $E_2$, $l_i \in E_2^{0,*}$, $a_i \in E_2^{*,0} = k[v_1, \dots, v_m]$. Предположим сначала, что все элементы $l_i$ трансгрессивны, т.е. являются циклами всех дифференциалов $d_i$ для $i < k$ и $d_k(l_i) = m_i$, $m_i \in E_k^{*,0}$. Так как все $m_i$ убиваются дифференциалами, их прообразы в $E_2$ лежат в $I$. Отсюда получаем $x = d_k y = \sum_i m_i a_i$, $m_i \in I$, что противоречит минимальности базиса $(x_1, \dots, x_p)$. Таким образом, среди $l_i$ имеются не трансгрессивные элементы, т.е. существует $p < k$ и $i$ такие, что $d_p(l_i) = m_i \neq 0$. Тогда этот $m_i$ доживает до $E_p$ и мы, выбрав среди всех таких $p$ минимальное, получаем $d_p(y) = m_i a_i + \ldots \neq 0$ — противоречие. Это означает, что все элементы из минимального набора образующих $I$ убиваются трансгрессией, т.е. им соответствуют некоторые (различные) элементы $l_i^{(1)} \in H^*(\mathcal{Z})$.




Так как $E_2 = H^*(\mathcal{Z}) \otimes k[v_1, \dots, v_m]$, то в член $E_2$ вкладывается в качестве подмодуля свободный $k[v_1, \dots, v_m]$-модуль, порожденный элементами $l_i^{(1)}$. Поэтому мы имеем $R^{-1} \subset E_2$ и отображение $d^{-1} : R^{-1} \to R^0 = k[v_1, \dots, v_m]$ задается дифференциалами спектральной последовательности. Ядро этого отображения, $\operatorname{Ker} d^{-1}$ не может убиваться уже построенными дифференциалами. Используя предыдущее рассуждение, мы получаем, что образующие минимального базиса $\operatorname{Ker} d^{-1} \in R^{-1}$ могут убиваться только элементами из первого столбца, скажем $l_1^{(2)}, \dots, l_q^{(2)}$. Таким образом, свободный $k[v_1, \dots, v_m]$-модуль, порожденный элементами $l_i^{(2)}$, также вкладывается в член $E_2$ как подмодуль, т.е. $R^{-2} \subset E_2$, и т.д. В конце мы получим $\sum_{i=0}^{m-n} \dim_{k[v_1, \dots, v_m]} R^{-i}$ образующих в первом столбце члена $E_2$. Отсюда в силу (13) мы получаем требуемое неравенство (14).

Теперь рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения $p : B_T P \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Для нее мы имеем: $E_2 = \operatorname{Tor}_{k[v_1, \dots, v_m]}(k(P), k)$, $E_r \Rightarrow H^*(\mathcal{Z})$. В силу неравенства (14), мы получаем $E_2 = E_\infty$, что и доказывает нашу теорему. $\square$

Вернемся снова к рассмотрению фильтрации Эйленберга–Мура $\{F^{-p} H^*(\mathcal{Z})\}$ в $H^*(\mathcal{Z})$. Оказывается, что элементы из $F^{-1} H^*(\mathcal{Z})$ имеют очень простую геометрическую реализацию. Именно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.3.** *Циклы из $H_*(\mathcal{Z}_P)$, двойственные к элементам из $\{F^{-1} H^*(\mathcal{Z}_P)\}$, могут быть реализованы вложенными подмногообразиями. Более того, в векторном пространстве таких циклов можно выбрать базис, элементы которого реализуются вложенными сферами нечетной размерности.*

**Доказательство.** Из теоремы 4.2 следует, что

$$F^{-1} H^*(\mathcal{Z}) / F^0 H^*(\mathcal{Z}) = \operatorname{Tor}^{-1}_{k[v_1, \dots, v_m]}(k(P), k).$$

В силу предложения 4.1 $F^0 H^*(\mathcal{Z}) = H^0(\mathcal{Z}) = k$. Выберем, как при доказательстве теоремы 4.2, базис в $\operatorname{Tor}^{-1}_{k[v_1, \dots, v_m]}(k(P), k)$, состоящий из элементов $v_{i_1 \dots i_p}$ степени $2p$ таких, что вершины

$v_{i_1}, \dots, v_{i_p}$ симплициального комплекса $K_P$ образуют примитивный набор. Геометрически это означает, что соответствующий подкомплекс в $K_P$ (т.е. подкомплекс, состоящий из всех симплексов, вершины которых среди $v_{i_1}, \dots, v_{i_p}$) представляет собой симплициальный комплекс, состоящий из всех граней некоторого симплекса, кроме грани максимальной размерности (т.е. является границей симплекса). В терминах простого многогранника $P$ элемент $v_{i_1 \dots i_p}$ соответствует набору $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_p}\}$ граней коразмерности один такому, что $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_p} = \varnothing$, но любое собственное подмножество $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_p}\}$ имеет непустое пересечение. Заметим, что размерность цикла из $H_*(\mathcal{Z})$, соответствующего $v_{i_1 \dots i_p} \in \mathrm{Tor}^{-1}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$ равна $2p-1$. Теперь выберем по одной точке во внутренности каждой грани вида $F_{i_1} \cap \dots \cap \widehat{F_{i_r}} \cap \dots \cap F_{i_p}$ ($F_{i_r}$ пропущено); тогда мы можем вложить симплекс $\Delta^{p-1}$ на этих точках в многогранник $P$ так, что граница $\partial\Delta^{p-1}$ вкладывается в $\partial P$ (ср. с построением кубического комплекса для $P$ в теореме 2.2). Рассмотрим проекцию $\rho : \mathcal{Z} = (T^m \times P^n)/\sim \ \to P^n$ на пространство орбит; легко видеть, что $\rho^{-1}(\Delta^{p-1}) = (T^p \times \Delta^{p-1})/\sim) \times T^{m-p} = S^{2p-1} \times T^{m-p}$. Таким образом мы получаем вложение $S^{2p-1} \hookrightarrow \mathcal{Z}$, которое реализует цикл из $H_*(\mathcal{Z})$, двойственный к $v_{i_1 \dots i_p}$. $\square$

## 4.2. Мультипликативная структура когомологий $\mathcal{Z}_P$.

Здесь мы даем описание кольца $H^*(\mathcal{Z}_P)$.

В предыдущем пункте для вычисления $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$ мы использовали минимальную резольвенту кольца граней $k(P)$, рассматриваемого как модуль над кольцом многочленов $k[v_1, \dots, v_m]$. Ниже мы используем другой подход: рассматриваем так называемую *резольвенту Кошуля* для $k[v_1, \dots, v_m]$-модуля $k$. В результате биградуированный $k$-модуль $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k)$ приобретает структуру биградуированной $k$-алгебры, для которой соответствующая градуированная $k$-алгебра изоморфна $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Это также дает описание алгебры $H^*(\mathcal{Z}_P)$ как алгебры когомологий некоторой дифференциальной (би)градуированной алгебры.

Пусть $\Gamma = k[y_1, \dots, y_n]$, $\deg y_i = 2$, — градуированная алгебра многочленов над $k$, а $\Lambda[u_1, \dots, u_n]$ — внешняя алгебра над $k$ с образующими $u_1, \dots, u_n$. Рассмотрим биградуированную дифференциальную алгебру

$$\mathcal{E} = \Gamma \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n],$$

в которой градуировки и дифференциал определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{bideg}(y_i \otimes 1) &= (0,2), & d(y_i \otimes 1) &= 0; \\ \mathrm{bideg}(1 \otimes u_i) &= (-1,2), & d(1 \otimes u_i) &= y_i \otimes 1. \end{aligned}$$

Дифференциал повышает бистепень на $(1,0)$, поэтому компоненты $\mathcal{E}^{-i,*}$ задают некоторый комплекс, который мы также обозначим $\mathcal{E}$. Этот комплекс представляет собой $\Gamma$-свободную резольвенту модуля $k$ (рассматриваемого как $\Gamma$-модуль), называемую *резольвентой Кошуля* (см. [13]).

**Предложение 4.4.** *Пусть $\Gamma = k[y_1, \dots, y_n]$ и $A$ — произвольный $\Gamma$-модуль, тогда*

$$\mathrm{Tor}_\Gamma(A, k) = H[A \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n], d],$$

*где $d$ определяется как $d(a \otimes u_i) = (y_i \cdot a) \otimes 1$ для любого $a \in A$.*

**Доказательство.** Рассмотрим $\Gamma$-свободную резольвенту Кошуля $\mathcal{E} = \Gamma \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n]$ для модуля $k$. Тогда

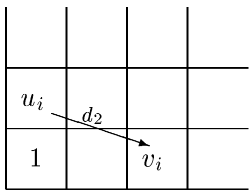
$$\mathrm{Tor}_\Gamma(A, k) = H[A \otimes_\Gamma \Gamma \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n], d] = H[A \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_n], d]. \quad \square$$

Теперь рассмотрим главное $T^m$-расслоение $\mathcal{Z}_P \times ET^m \to B_TP$, индуцированное из универсального расслоения при помощи отображения $p : B_TP \to BT^m$ (см. (9)). Имеет место следующая лемма.

**Лемма 4.5.** *Для члена $E_3^{(s)}$ спектральной последовательности Лере–Серра $\{E_r^{(s)}, d_r\}$ расслоения $\mathcal{Z}_P \times ET^m \to B_TP$ имеет место следующий изоморфизм:*

$$E_3^{(s)} \cong \mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k).$$

**Доказательство.** Рассмотрим член $E_2^{(s)}$ спектральной последовательности Лере–Серра данного расслоения. Мы имеем $H^*(T^m) = \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, $H^*(B_TP) = k(P) = k[v_1, \dots, v_m]/I$. Следовательно,




$$E_2^{(s)} = k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m].$$

Легко видеть, что дифференциал $d_2^{(s)}$ действует следующим образом:

$$d_2^{(s)}(1 \otimes u_i) = v_i \otimes 1, \quad d_2^{(s)}(v_i \otimes 1) = 0.$$

Так как $E_3^{(s)} = H[E_2^{(s)}, d_2^{(s)}]$, то доказываемое утверждение получается, если положить $\Gamma = k[v_1, \dots, v_m]$, $A = k(P)$ в предложении 4.4. $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат о когомологиях $\mathcal{Z}_P$.

**Теорема 4.6.** *Имеет место изоморфизм градуированных алгебр:*

$$\begin{gathered} H^*(\mathcal{Z}_P) = H[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d], \\ \operatorname{bideg} v_i = (0, 2), \quad \operatorname{bideg} u_i = (-1, 2), \\ d(1 \otimes u_i) = v_i \otimes 1, \quad d(v_i \otimes 1) = 0. \end{gathered}$$

*Таким образом, спектральная последовательность Лере–Серра $T^m$-расслоения $\mathcal{Z}_P \times ET^m \to B_TP$ вырождается в члене $E_3$.*

**Доказательство.** Рассмотрим расслоение $p : B_TP \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. В силу теоремы 2.13 мы имеем для алгебр коцепей: $C^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m]$ и $C^*(B_TP) = k(P)$, причем действие $C^*(BT^m)$ на $C^*(B_TP)$ задается эпиморфизмом на фактор-кольцо. В [15, Предложение 3.4] было доказано, что имеет место изоморфизм алгебр

$$\theta^* : \mathrm{Tor}_{C^*(BT^m)}(C^*(B_TP), k) \to H^*(\mathcal{Z}_P).$$

Но из сказанного выше и предложения 4.4 вытекает, что

$$\mathrm{Tor}_{C^*(BT^m)}(C^*(B_TP), k) \cong H[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d] \quad \square.$$

## 4.3. Дополнительные свойства когомологий $\mathcal{Z}_P$, связанные с действием торов.

Вначале мы рассмотрим случай, когда над многогранником $P^n$ имеются квазиторические многообразия. Наличие квазиторического многообразия позволяет свести вычисление когомологий $\mathcal{Z}_P$ к вычислению когомологий алгебры, меньшей чем алгебра из теоремы 4.6.

Как уже обсуждалось выше, для любого квазиторического многообразия $M^{2n}$ над $P^n$ имеется главное $T^{m-n}$-расслоение $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$. Это расслоение индуцируется из универсального $T^{m-n}$-расслоения при помощи некоторого отображения $f : M^{2n} \to BT^{m-n}$.

**Теорема 4.7.** *Пусть $M^{2n}$ — произвольное квазиторическое многообразие над простым многогранником $P^n$. Тогда спектральные последовательности Эйленберга–Мура для следующих коммутативных квадратов*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P \times ET^m & \longrightarrow & ET^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_T P & \xrightarrow{p} & BT^m \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \longrightarrow & ET^{m-n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^{2n} & \xrightarrow{f} & BT^{m-n} \end{array}$$

*изоморфны.*

**Доказательство.** Пусть $\{E_r, d_r\}$ — спектральная последовательность Эйленберга–Мура первого коммутативного квадрата, а $\{\bar{E}_r, \bar{d}_r\}$ — второго коммутативного квадрата. Тогда, как следует из результатов [15, 8], естественные вложения $BT^{m-n} \to BT^m$, $ET^{m-n} \to ET^m$, $M^{2n} \to B_T P$ и $\mathcal{Z}_P \to \mathcal{Z}_P \times ET^m$ индуцируют гомоморфизм спектральных последовательностей $g : \{E_r, d_r\} \to \{\bar{E}_r, \bar{d}_r\}$. Вначале докажем, что $g_2 : E_2 \to \bar{E}_2$ — изоморфизм.

Отображение $f^* : H^*(BT^{m-n}) \to H^*(M^{2n})$ описывается следующим образом. Представим кольцо $H^*(BT^{m-n}) = k[w_1, \ldots, w_{m-n}]$ в виде $k[v_1, \ldots, v_m]/J$ (что соответствует вложению $BT^{m-n} \hookrightarrow BT^m$), где $J$ — описанный выше идеал, $J = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В силу теоремы 3.3 $H^*(M^{2n}) = k[v_1, \ldots, v_m] / I{+}J$. Тогда $f^* : H^*(BT^{m-n}) = k[v_1, \ldots, v_m]/J \to k[v_1, \ldots, v_m] / I{+}J = H^*(M^{2n})$ — естественный эпиморфизм на фактор-кольцо.

Таким образом, мы имеем $E_2 = \mathrm{Tor}_{k[v_1, \ldots, v_m]}(k(P), k)$ и $\bar{E}_2 = \mathrm{Tor}_{k[w_1, \ldots, w_{m-n}]}(k(P)/J, k)$.

Чтобы двигаться дальше, нам понадобится следующий результат.

**Предложение 4.8.** *Пусть $\Lambda$ — алгебра и $\Gamma$ — подалгебра, и положим $\Omega = \Lambda//\Gamma$. Предположим, что $\Lambda$ является свободным $\Gamma$-модулем и $A$ — правый $\Omega$-модуль, а $C$ — левый $\Lambda$-модуль. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$, для которой*

$$E_r \Rightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(A, C), \quad E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}^p_\Omega(A, \mathrm{Tor}^q_\Gamma(C, k)).$$

**Доказательство.** См. [5, с.349]. $\square$

Следующее предложение является модификацией одного из утверждений [15].

**Предложение 4.9.** *Пусть $f : k[v_1, \ldots, v_m] \to A$ — эпиморфизм градуированных алгебр,* $\deg v_i = 2$, *и $J \subset A$ — идеал, порожденный регулярной последовательностью длины $n$ элементов $A$ степени два. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Tor}_{k[v_1, \ldots, v_m]}(A, k) \cong \mathrm{Tor}_{k[w_1, \ldots, w_{m-n}]}(A/J, k).$$

**Доказательство.** Пусть $J = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\deg \lambda_i = 2$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — регулярная последовательность. Выберем в качестве прообразов элементов $\lambda_i$ некоторые элементы $\hat{\lambda}_i \in k[v_1, \ldots, v_m]$ степени 2, т.е. $\hat{\lambda}_i = \lambda_{i1} v_1 + \ldots + \lambda_{im} v_m$, $\mathrm{rk}(\lambda_{ij}) = n$. Рассмотрим элементы $w_1, \ldots, w_{m-n}$ степени два такие, что

$$k[v_1, \ldots, v_m] = k[\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n, w_1, \ldots, w_{m-n}],$$

и положим $\Gamma = k[\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n]$. Тогда $k[v_1, \ldots, v_m]$ — свободный модуль над $\Gamma$, следовательно, по предложению 4.8 мы получаем спектральную последовательность

$$E_r \Rightarrow \mathrm{Tor}_{k[v_1, \ldots, v_m]}(A, k), \quad E_2 = \mathrm{Tor}_\Omega(\mathrm{Tor}_\Gamma(A, k), k),$$

где $\Omega = k[v_1, \dots, v_m]//\Gamma = k[w_1, \dots, w_{m-n}]$.

Так как $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — регулярная последовательность, то $A$ — свободный модуль над $\Gamma$. Поэтому

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tor}_\Gamma(A,k) & = & A \otimes_\Gamma k = A/J \quad \text{и} \quad \mathrm{Tor}_\Gamma^q(A,k) = 0 \quad \text{при} \quad q \neq 0, \\ & \Rightarrow & E_2^{p,q} = 0 \quad \text{при} \quad q \neq 0, \\ & \Rightarrow & \mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(A,k) = \mathrm{Tor}_{k[w_1,\dots,w_{m-n}]}(A/J,k). \quad \Box \end{array}$$

Положив $A = k(P)$ в предложении 4.9, мы получаем, что $g_2 : E_2 \to \bar{E}_2$ является изоморфизмом. Кроме того, из вида членов $E_2$ обеих спектральных последовательностей и предыдущих обсуждений ясно, что каждая из спектральных последовательностей содержит лишь конечное число ненулевых компонент в каждом члене. Для таких спектральных последовательностей гомоморфизм $g$, являющийся изоморфизмом в члене $E_2$, является изоморфизмом (см. [13, XI, теорема 1.1]). Это завершает доказательство теоремы 4.7. $\Box$

**Следствие 4.10.** *$H^*(\mathcal{Z}_P) = \mathrm{Tor}_{k[w_1,\dots,w_{m-n}]}(H^*(M^{2n}),k)$ для любого торического многообразия $M^{2n}$ над простым многогранником $P^n$.*

**Доказательство.** В силу теоремы 4.6 $H^*(\mathcal{Z}_P) = \mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$. Таким образом, доказываемое утверждение сводится к изоморфности членов $E_2$ спектральных последовательностей из теоремы 4.7. $\Box$

Теперь обратимся снова к главному $T^{m-n}$-расслоению $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$ над некоторым торическим многообразием $M^{2n}$. Для этого расслоения имеет место лемма, аналогичная лемме 4.5 (и доказываемая так же).

**Лемма 4.11.** *Для спектральной последовательности Лере–Серра расслоения $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$ имеет место следующий изоморфизм:*

$$E_3^{(s)} \cong \mathrm{Tor}_{k[w_1,\dots,w_{m-n}]}(H^*(M^{2n}),k) = \mathrm{Tor}_{k[w_1,\dots,w_{m-n}]}(k(P)/J\,,k),$$

*где $E_3^{(s)}$ — член $E_3$ спектральной последовательности Лере–Серра, а структура $k[w_1,\dots,w_{m-n}]$-модуля в $H^*(M^{2n})$ задается при помощи отображения*

$$k[w_1,\dots,w_{m-n}] = k[v_1,\dots,v_m]/J \to k[v_1,\dots,v_m]/I{+}J = H^*(M^{2n}). \quad \Box$$

**Теорема 4.12.** *Пусть $M^{2n}$ — некоторое торическое многообразие над $P^n$. Спектральная последовательность Лере–Серра главного $T^{m-n}$-расслоения $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$ вырождается в члене $E_3$, т.е. $E_3 = E_\infty$. При этом имеет место изоморфизм алгебр*

$$\begin{gathered} H^*(\mathcal{Z}_P) = H[(k(P)/J) \otimes \Lambda[u_1,\dots,u_{m-n}], d], \\ \operatorname{bideg} a = (0, \deg a), \quad \operatorname{bideg} u_i = (-1, 2); \\ d(1 \otimes u_i) = w_i \otimes 1, \quad d(a \otimes 1) = 0, \end{gathered}$$

*где $a \in k(P)/J = k[w_1,\dots,w_{m-n}]/I$, $\Lambda[u_1,\dots,u_{m-n}]$ — внешняя алгебра.*

**Доказательство.** Алгебра когомологий $H[(k(P)/J) \otimes \Lambda[u_1,\dots,u_{m-n}], d]$ представляет собой член $E_3$ спектральной последовательности Лере–Серра расслоения $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$. В то же время в силу предложения 4.4 эта алгебра когомологий изоморфна $\mathrm{Tor}_{k[w_1,\dots,w_{m-n}]}(H^*(M^{2n}),k)$. Из следствия 4.10 мы получаем что это в свою очередь изоморфно $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Так как спектральная последовательность Лере–Серра сходится к $H^*(\mathcal{Z}_P)$, то мы получаем, что она вырождается в члене $E_3$. $\Box$

Алгебра $(k(P)/J)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_{m-n}]$ из теоремы 4.12 существенно меньше, чем алгебра $k(P)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ из общей теоремы 4.6, что позволяет сделать вычисление когомологий $\mathcal{Z}_P$ более эффективным.

Далее мы перейдем к изучению свободных действий произвольных торов на многообразии $\mathcal{Z}_P$.
Если над простым многогранником $P^n$ имеется торическое многообразие $M^{2n}$, то это соответствует тому, что в торе $T^m$, действующем на многообразии $\mathcal{Z}_P$ с пространством орбит $P^n$, имеется подгруппа $H$, изоморфная $T^{m-n}$, действующая свободно. В общем случае такой подгруппы может не существовать, однако могут существовать подгруппы размерности, меньшей $m-n$, также действующие свободно. Тогда соответствующие фактор-пространства $\mathcal{Z}_P/H$ будут гладкими многообразиями. Пусть, например, тор $H\simeq T^k$ свободно действует на $\mathcal{Z}_P$. Тогда вложение $H\subset T^m$ задается целочисленной $(m\times k)$-матрицей $S=(s_{ij})$, причем векторы $s_j=(s_{1j},\dots,s_{mj})$, $j=\overline{1,k}$, порождают $\mathbb{Z}$-модуль, являющийся прямым слагаемым в $\mathbb{Z}^m$. Выберем базис $t_i=(t_{i1},\dots,t_{im})$, $i=\overline{1,m-k}$, в ядре двойственного отображения $s^*:(\mathbb{Z}^m)^*\to(\mathbb{Z}^k)^*$. Тогда когомологии многообразия $\mathcal{Y}_{(k)}=\mathcal{Z}_P/H$ описываются следующей теоремой, обобщающей одновременно следствие 3.4 и теорему 4.2.

**Теорема 4.13.** *Имеет место изоморфизм алгебр*

$$H^*(\mathcal{Y}_{(k)})\simeq \operatorname{Tor}_{k[t_1,\dots,t_{m-k}]}(k(P),k),$$

*где действие $k[t_1,\dots,t_{m-k}]$ на $k(P)=k[v_1,\dots,v_m]/I$ задается при помощи гомоморфизма*

$$\begin{array}{rcl} k[t_1,\dots,t_{m-k}] & \to & k[v_1,\dots,v_m],\\ t_i & \to & t_{i1}v_1+\ldots+t_{im}v_m. \end{array} \tag{15}$$

**Доказательство.** Вложению тора $H\simeq T^k\to T^m$ соответствует отображение классифицирующих пространств $h:BT^k\to BT^m$. Рассмотрим расслоение, индуцированное при помощи этого отображения из расслоения $p:B_TP\to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_P$. Из определения индуцированного расслоения и конструкции пространства $B_TP$ (см. разд. 1) легко выводится, что пространство этого индуцированного расслоения гомотопически эквивалентно $\mathcal{Y}_{(k)}$ (точнее, оно гомеоморфно $\mathcal{Y}_{(k)}\times ET^k$). Таким образом, мы имеем коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{(k)} & \longrightarrow & B_TP\\ \downarrow & & \downarrow\\ BT^k & \longrightarrow & BT^m. \end{array}$$

Спектральная последовательность Эйленберга–Мура этого коммутативного квадрата сходится к когомологиям $\mathcal{Y}$ и имеет следующий член $E_2$:

$$E_2=\operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k[w_1,\dots,w_k]),$$

причем действие $k[v_1,\dots,v_m]$ на $k[w_1,\dots,w_k]$ задается при помощи гомоморфизма $s^*$, т.е. $v_i\to s_{i1}w_1+\ldots+s_{ik}w_k$. При помощи утверждения [15, предложение 3.4] аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 4.6, мы доказываем, что спектральная последовательность вырождается в члене $E_2$ и имеется изоморфизм алгебр

$$H^*(\mathcal{Y}_{(k)})=\operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k[w_1,\dots,w_k]). \tag{16}$$

Теперь положим в предложении 4.8 $\Lambda = k[v_1, \dots, v_m]$, $\Gamma = k[t_1, \dots, t_{m-k}]$, $A = k[w_1, \dots, w_k]$, $C = k(P)$. При этом $\Lambda$ является свободным $\Gamma$-модулем, $\Omega = \Lambda//\Gamma = k[w_1, \dots, w_k]$ и существует спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$, сходящаяся к $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k[w_1, \dots, w_k])$, для которой член $E_2$ имеет вид

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}^p_{k[w_1,\dots,w_k]}(A, \mathrm{Tor}^q_{k[t_1,\dots,t_{m-k}]}(k(P), k)).$$

Но так как $A$ есть свободный $k[w_1, \dots, w_k]$-модуль с одной образующей 1, то мы имеем

$$E_2^{p,q} = 0 \text{ при } p \neq 0, \quad E_2^{0,q} = \mathrm{Tor}^q_{k[t_1,\dots,t_{m-k}]}(k(P), k).$$

Поэтому спектральная последовательность вырождается в члене $E_2$ и мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P), k[w_1, \dots, w_k]) \simeq \mathrm{Tor}_{k[t_1,\dots,t_{m-k}]}(k(P), k),$$

который вместе с изоморфизмом (16) доказывает теорему. $\square$

Ниже мы рассмотрим вопрос о характеризации подгрупп $H \subset T^m$, которые свободно действуют на многообразии $\mathcal{Z}_P$.

Рассмотрим снова целочисленную $(m \times k)$-матрицу $S$, задающую вложение подгруппы $H \simeq T^k \to T^m$. Для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ многогранника $P^n$ выделим в матрице $S$ подматрицу $S_{i_1,\dots,i_n}$ размера $(m-n) \times k$, получаемую вычеркиванием строк с номерами $i_1, \dots, i_n$. Таким образом мы построим $r = f_{n-1}$ матриц размера $(m-n) \times k$. Тогда имеет место следующий критерий свободности действия $H$ на $\mathcal{Z}_P$.

**Лемма 4.14.** *Действие на многообразии $\mathcal{Z}_P$ подгруппы $H \subset T^m$, задаваемой целочисленной $(m \times k)$-матрицей $S$, является свободным тогда и только тогда, когда для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ многогранника $P^n$ подматрица $S_{i_1,\dots,i_n}$ задает вложение $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{Z}^{m-n}$ на прямое слагаемое.*

**Доказательство.** Из определения 1.6 вытекает, что максимальные стабилизаторы для действия $T^m$ на $\mathcal{Z}_P$ имеют орбиты, соответствующие вершинам $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ многогранника $P^n$. Эти стабилизаторы представляют собой координатные подгруппы $T^n_{i_1,\dots,i_n} \subset T^m$. Подгруппа $H$ действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно тогда и только тогда, когда она пересекается с каждым стабилизатором $T^n_{i_1,\dots,i_n}$ лишь по единице. Это означает, что $m \times (k+n)$-матрица, получаемая из матрицы $S$ приписыванием $n$ столбцов вида $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$, где 1 стоит на месте $i_j$, $j = \overline{1,n}$, задает вложение $\mathbb{Z}^{k+n} \subset \mathbb{Z}^m$ на прямое слагаемое (эта матрица соответствует подгруппе $H \times T^n_{i_1,\dots,i_n} \subset T^m$). Это эквивалентно условию, сформулированному в лемме. $\square$

В частности, для подгрупп максимально возможного для свободного действия ранга $m-n$, мы получаем

**Следствие 4.15.** *Действие на многообразии $\mathcal{Z}_P$ подгруппы $H \subset T^m$ ранга $m-n$, задаваемой целочисленной $m \times (m-n)$-матрицей $S$, является свободным тогда и только тогда, когда для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ многогранника $P^n$ минор матрицы $S$, получаемый вычеркиванием строк с номерами $i_1, \dots, i_n$, равен $\pm 1$.*

Это следствие является "целочисленным аналогом" теоремы 2.8, дающей критерий свободности действия подгруппы $R^{m-n}_+ \subset \mathbb{R}^m_+$ на множестве $U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$. Однако в отличие от теоремы 2.8 подгруппа $H \simeq T^{m-n}$, удовлетворяющая условию следствия 4.15, существует не всегда.

Легко видеть, что условие из следствия 4.15 эквивалентно тому, что отображение $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, задаваемое факторизацией по образу вложения $s : \mathbb{Z}^{m-n} \to \mathbb{Z}^m$, является характеристической функцией в смысле определения 1.11. Таким образом, мы получили другую интерпретацию того факта, что квазиторические многообразия над $P^n$ существует тогда и только тогда, когда существуют подгруппы $H \simeq T^{m-n}$, действующие на $\mathcal{Z}_P$ свободно.

Из леммы 4.14 также следует, что на многообразии $\mathcal{Z}_P$ всегда свободно действует одномерная подгруппа $H \simeq T^1$, соответствующая диагональному вложению $T^1 \subset T^m$. Действительно, в этом случае матрица $S$ представляет собой столбец длины $m$ из единиц и условие леммы 4.14 очевидно выполнено. Для когомологий соответствующего многообразия $\mathcal{Y}_{(1)} = \mathcal{Z}_P/H$ в силу теоремы 4.13 мы имеем

$$H^*(\mathcal{Y}_{(1)}) \simeq \mathrm{Tor}_{k[t_1,\dots,t_{m-1}]}(k(P), k), \tag{17}$$

где действие $k[t_1,\dots,t_{m-1}]$ на $k(P) = k[v_1,\dots,v_m]/I$ задается при помощи гомоморфизма

$$\begin{array}{rcl} k[t_1,\dots,t_{m-1}] & \to & k[v_1,\dots,v_m], \\ t_i & \to & v_i - v_m. \end{array}$$

Главное $T^1$-расслоение $\mathcal{Z}_P \to \mathcal{Y}_{(1)}$ индуцировано из универсального $T^1$-расслоения при помощи некоторого отображения $c : \mathcal{Y}_{(1)} \to BT^1 = \mathbb{C}P^\infty$. Так как $H^*(\mathbb{C}P^\infty) = k[v]$, $v \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$, мы можем рассмотреть элемент $c^*(v) \in H^2(\mathcal{Y}_{(1)})$. Тогда имеет место следующее утверждение.

**Лемма 4.16.** *Многогранник $P^n$ является $q$-смежностным тогда и только тогда, когда $(c^*(v))^q \neq 0$.*

**Доказательство.** При отображении $c^*$ кольцо $k[v]$ когомологий $\mathbb{C}P^\infty$ отображается на подкольцо $k(P) \otimes_{k[t_1,\dots,t_{m-1}]} k = \mathrm{Tor}^0_{k[t_1,\dots,t_{m-1}]}(k(P), k)$ кольца когомологий $\mathcal{Y}_{(1)}$ (см. (17)). Это подкольцо изоморфно фактор-кольцу $k(P)/\{v_1 = \ldots = v_m\}$. Теперь утверждение леммы вытекает из того факта, что многогранник $P^n$ является $q$-смежностным тогда и только тогда, когда идеал $I$ из определения кольца $k(P)$ не содержит мономов степени меньше $q+1$. $\square$

Вернемся снова к рассмотрению общего случая, когда на многообразии $\mathcal{Z}_P$ свободно действует группа $H \simeq T^k$. Тогда имеем

$$B_T P = \mathcal{Z}_P \times_{T^m} ET^m = \left((\mathcal{Z}_P/T^k) \times_{T^{m-k}} ET^{m-k}\right) \times ET^k = (\mathcal{Y}_{(k)} \times_{T^{m-k}} ET^{m-k}) \times ET^k.$$

Таким образом, имеем главное $T^{m-k}$-расслоение $\mathcal{Y}_{(k)} \times ET^m \to B_T P$.

**Теорема 4.17.** *Спектральная последовательность Лере–Серра расслоения $\mathcal{Y}_{(k)} \times ET^m \to B_T P$ со слоем $T^{m-k}$ вырождается в члене $E_3$, т.е. $E_3 = E_\infty$. При этом*

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathcal{Y}_{(k)}) & = & H[k(P) \otimes \Lambda[u_1,\dots,u_{m-k}], d], \\ d(1 \otimes u_i) & = & (t_{i1}v_1 + \ldots + t_{im}v_m) \otimes 1,\ d(a \otimes 1) = 0,\ \mathrm{bideg}\, a = (0, \deg a),\ \mathrm{bideg}\, u_i = (-1, 2), \end{array}$$

*где $a \in k(P) = k[v_1,\dots,v_n]/I$, $\Lambda[u_1,\dots,u_{m-k}]$ — внешняя алгебра.*

**Доказательство.** По аналогии с леммой 4.5 легко установить, что член $E_3$ спектральной последовательности имеет вид

$$E_3 = H[k(P) \otimes \Lambda[u_1,\dots,u_{m-k}], d] = \mathrm{Tor}_{k[t_1,\dots,t_{m-k}]}(k(P), k).$$

В силу теоремы 4.13 это есть не что иное как, $H^*(\mathcal{Y}_{(k)})$. $\square$

Теорема 4.6 и следствие 3.4 получаются из этой теоремы соответственно при $k = 0$ и $k = m - n$.

## 4.4. Явные вычисления когомологий многообразий $\mathcal{Z}_P$ для некоторых многогранников.

1. Наш первый пример показывает, как методы, изложенные выше, работают в простом случае, когда $P$ является произведением симплексов. Рассмотрим следующий простой многогранник: $P^n = \Delta^{i_1} \times \Delta^{i_2} \times \ldots \times \Delta^{i_k}$, где $\Delta^i$ — $i$-мерный симплекс, $\sum_k i_k = n$. Тогда $P$ имеет $n+k$ граней коразмерности один, т.е. $m = n+k$. В силу леммы 2.11 мы имеем тогда $\mathcal{Z}_P = \mathcal{Z}_{\Delta^{i_1}} \times \ldots \times \mathcal{Z}_{\Delta^{i_k}}$.

Для $P_i = \Delta^i$ минимальная резольвента (11) кольца $k(P_i)$ имеет следующий вид:

$$0 \longrightarrow R^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} R^0 \xrightarrow{d^0} k(P_i) \longrightarrow 0,$$

где $R^0$, $R^{-1}$ — свободные одномерные $k[v_1, \ldots, v_{i+1}]$-модули и $d^{-1}$ — умножение на $v_1 \cdot \ldots \cdot v_{i+1}$. Отсюда имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Tor}_{k[v_1,\ldots,v_{i+1}]}(k(P_i), k) = \Lambda[a], \quad \operatorname{bideg} a = (-1, 2i+2),$$

где $\Lambda[a]$ — внешняя алгебра над $k$. Из теоремы 4.6 получаем

$$H^*(\mathcal{Z}_{\Delta^i}) = \Lambda[a], \quad \deg a = 2i+1,$$

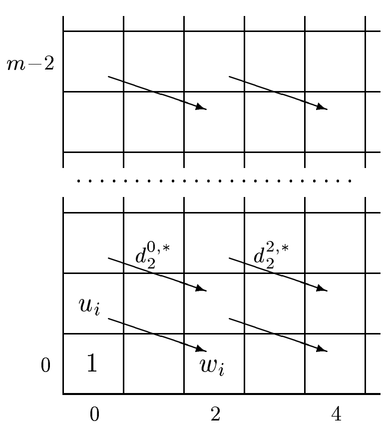
Таким образом, для $\mathcal{Z}_P = \mathcal{Z}_{\Delta^{i_1}} \times \ldots \times \mathcal{Z}_{\Delta^{i_k}}$ мы имеем

$$H^*(\mathcal{Z}_P) = \Lambda[a_1, \ldots, a_k], \quad \deg a_l = 2i_l + 1.$$

В действительности, как показывает пример 2.10, в нашем случае $\mathcal{Z}_P = S^{2i_1+1} \times \ldots \times S^{2i_k+1}$. Однако наши вычисления когомологий явно не используют геометрических конструкций из разд. 2.

2. В нашем следующем примере мы разберем случай, когда $P^n$ является выпуклым $m$-угольником, т.е. $n = 2$. Соответствующее многообразие $\mathcal{Z}_P$ имеет тогда размерность $m+2$. Сначала мы вычислим числа Бетти этих многообразий.

Рассмотрим член $E_2$ спектральной последовательности Лере–Серра расслоения $p : \mathcal{Z} \to M^4$ со слоем $T^{m-2}$ для некоторого торического многообразия $M^4$ над $P^2$ (легко видеть, что над любым многоугольником существует хотя бы одно торическое многообразие). Из теоремы 3.3 мы получаем, что $H^2(M^4)$ имеет ранг $m-2$ с базисом $w_1, \ldots, w_{m-2}$, и кольцо $H^*(M^4)$ мультипликативно порождено этими элементами. В то же время $H^*(T^{m-2})$ — внешняя алгебра с образующими $u_1, \ldots, u_{m-2}$ и $d_2(u_i) = w_i$ (точнее, $d_2(u_i \otimes 1) = 1 \otimes w_i$). Кроме того, отображение $p^* : \tilde{H}^*(M^4) \to \tilde{H}^*(\mathcal{Z})$ является нулевым гомоморфизмом. Это следует из того факта, что отображение $f^* : H^*(BT^{m-2}) \to H^*(M^4)$ эпиморфно (см. доказательство теоремы 4.7), и коммутативности диаграммы




$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_P \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & ET^{m-2} \arrow[d, "p_0"] \\ M^4 \arrow[r, "f"] & BT^{m-2}. \end{tikzcd}$$

Из всех этих замечаний и теоремы 4.12 (в силу которой $E_3 = E_\infty$) вытекает, что все дифференциалы $d_2^{0,*}$ являются мономорфизмами, а все дифференциалы $d_2^{2,*}$ являются эпиморфизмами.

Теперь из теоремы 4.12 путем простого подсчета мы выводим следующие формулы для чисел Бетти $b^i(\mathcal{Z})$:

$$
\begin{aligned}
&b^0(\mathcal{Z}) = b^{m+2}(\mathcal{Z}) = 1,\\
&b^1(\mathcal{Z}) = b^2(\mathcal{Z}) = b^m(\mathcal{Z}) = b^{m+1}(\mathcal{Z}) = 0,\\
&b^k(\mathcal{Z}) = (m-2)\tbinom{m-2}{k-2} - \tbinom{m-2}{k-1} - \tbinom{m-2}{k-3} = \tbinom{m-2}{k-3}\tfrac{m(m-k)}{k-1}, \quad 3 \leqslant k \leqslant m-1.
\end{aligned} \tag{18}
$$

В малых размерностях формулы (18) дают нам следующее:

$$
\begin{aligned}
m = 3: &\quad b^0(\mathcal{Z}^5) = b^5(\mathcal{Z}^5) = 1 \quad \text{и 0 для остальных},\\
m = 4: &\quad b^0(\mathcal{Z}^6) = b^6(\mathcal{Z}^6) = 1, \quad b^3(\mathcal{Z}^6) = 2 \quad \text{и 0 для остальных}.
\end{aligned}
$$

Эти два случая покрываются предыдущим примером, так как для $m = 3$ мы имеем $P^2 = \Delta^2$, а для $m = 4$ мы имеем $P^2 = \Delta^1 \times \Delta^1$. Как было указано, в этих случаях $\mathcal{Z}^5 = S^5$, $\mathcal{Z}^6 = S^3 \times S^3$. Далее,

$$
\begin{aligned}
m = 5: &\quad b^0(\mathcal{Z}^7) = b^7(\mathcal{Z}^7) = 1,\ b^3(\mathcal{Z}^7) = b^4(\mathcal{Z}^7) = 5, \text{ и 0 для остальных},\\
m = 6: &\quad b^0(\mathcal{Z}^8) = b^8(\mathcal{Z}^8) = 1,\ b^3(\mathcal{Z}^8) = b^5(\mathcal{Z}^8) = 9,\ b^4(\mathcal{Z}^8) = 16, \text{ и 0 для остальных},
\end{aligned}
$$

и т.д.

Что же касается мультипликативной структуры когомологий, то в силу теоремы 4.6 мы имеем изоморфизм алгебр

$$
H^*(\mathcal{Z}_P^{m+2}) \cong \mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P^2), k) = H[k(P^2) \otimes \Lambda[u_1,\dots,u_m], d]. \tag{19}
$$

Если $m = 3$, то $k(P) = k[v_1, v_2, v_3]/v_1v_2v_3$, если же $m > 3$, то мы имеем $k(P) = k[v_1,\dots,v_m]/I$, где $I$ порожден мономами вида $v_iv_j$, $i \neq j \pm 1$ (здесь и далее мы полагаем $v_{m+i} = v_i$ и $v_{i-m} = v_i$). Мы вычислим явно умножение в когомологиях в случае $m = 5$. Как легко видеть, в этом случае пять образующих $H^3(\mathcal{Z}_P)$ представляются коциклами $v_i \otimes u_{i+2}$, $i = \overline{1,5}$, алгебры $k(P^2) \otimes \Lambda[u_1,\dots,u_m]$; пять образующих $H^4(\mathcal{Z}_P)$ представляются коциклами $v_j \otimes u_{j+2}u_{j+3}$, $j = \overline{1,5}$. Произведение коциклов $v_i \otimes u_{i+2}$ и $v_j \otimes u_{j+2}u_{j+3}$ представляет нетривиальный класс когомологий $H^7(\mathcal{Z}_P)$ тогда и только тогда, когда в множестве $\{i, i+2, j, j+2, j+3\}$ никакие два индекса не совпадают. Таким образом, для каждого класса когомологий $[v_i \otimes u_{i+2}]$ существует единственный класс когомологий $[v_j \otimes u_{j+2}u_{j+3}]$ (двойственный по Пуанкаре), произведение с которым нетривиально. В этом случае это произведение задает фундаментальный класс когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$ (одним из его представителей, например, является коцикл $v_1v_2 \otimes u_3u_4u_5$). В следующем разделе мы сформулируем аналогичное утверждение в общем случае. В нашем случае все остальные произведения в алгебре когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P^7)$ тривиальны.

# 5. Когомологии $\mathcal{Z}_P$ и комбинаторика простых многогранников

Теорема 4.6 позволяет ввести в когомологии многообразия $\mathcal{Z}_P$ структуру биградуированной алгебры. Легко видеть, что двойственность Пуанкаре в когомологиях $\mathcal{Z}_P$ сохраняет эту биградуированную структуру. Именно имеет место следующее комбинаторное описание двойственности Пуанкаре.

**Лемма 5.1.** *В терминах биградуированной алгебры $[k(P) \otimes \Lambda[u_1,\dots,u_m], d]$ из теоремы 4.6 мы имеем следующие утверждения*

*1) Фундаментальный когомологический класс многообразия $\mathcal{Z}_P$ представляется любым коциклом вида $v_{i_1}\dots v_{i_n}\otimes u_{j_1}\dots u_{j_{m-n}}$, $j_1<\dots<j_{m-n}$, где $(i_1,\dots,i_n)$ — набор индексов гиперграней, сходящихся в некоторой вершине $v\in P^n$ и $\{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_{m-n}\}=\{1,\dots,m\}$.*

*2) Два коцикла $v_{i_1}\dots v_{i_p}\otimes u_{j_1}\dots u_{j_r}$ и $v_{k_1}\dots v_{k_s}\otimes u_{l_1}\dots u_{l_t}$ представляют двойственные по Пуанкаре классы когомологий в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ тогда и только тогда, когда $p+s=n$, $r+t=m-n$, $(i_1,\dots,i_p,k_1,\dots,k_s)$ представляет собой набор индексов гиперграней, сходящихся в некоторой вершине $v\in P^n$ и $\{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_r,k_1,\dots,k_s,l_1,\dots,l_t\}=\{1,\dots,m\}$.*

**Доказательство.** Утверждение п. 1 вытекает из того факта, что описанный там класс когомологий является образующей группы $\mathrm{Tor}^{-(m-n),2m}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$, которая изоморфна $H^{m+n}(\mathcal{Z}_P^{m+n})$ (см. теорему 4.6). Утверждение п. 2 следует из того, что два класса когомологий двойственны по Пуанкаре тогда и только тогда, когда их произведение есть фундаментальный класс когомологий. $\square$

Здесь уместно ввести следующие обозначения. Положим $\mathcal{T}^i=\mathrm{Tor}^{-i}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$, $\mathcal{T}^{i,2j}=\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$ и введем *биградуированные числа Бетти* многообразия $\mathcal{Z}_P$ как

$$b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P)=\dim_k \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k). \tag{20}$$

Тогда из теоремы 4.2 вытекает, что $b^k(\mathcal{Z}_P)=\sum_{2j-i=k}b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P)$. Вторая часть леммы 5.1 утверждает, что $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P)=b^{-(m-n-i),2(m-j)}(\mathcal{Z}_P)$ для любых $i,j$. Это можно записать в виде следующего соотношения на ряды Пуанкаре $F(\mathcal{T}^i,t)=\sum_{r=0}^m b^{-i,2r}t^{2r}$ модулей $\mathcal{T}^i$:

$$F(\mathcal{T}^i,t)=t^{2m}F\left(\mathcal{T}^{m-n-i},\tfrac{1}{t}\right). \tag{21}$$

Это соотношение хорошо известно в коммутативной алгебре для так называемых колец Горенштейна (см. [16]). Кольца граней симплициальных комплексов $K^{n-1}$, задающих триангуляции сферы $S^{n-1}$, являются кольцами Горенштейна. В частности, кольцами Горенштейна являются все кольца $k(P^n)$ для простых многогранников $P^n$.

Простое комбинаторное рассуждение (см. [16, гл. II, §1]) показывает, что для любого $(n-1)$-мерного симплициального комплекса $K$ ряд Пуанкаре $F(k(K),t)$ имеет вид

$$F(k(K),t)=1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f_i t^{2(i+1)}}{(1-t^2)^{i+1}},$$

где $(f_0,\dots,f_{n-1})$ — $f$-вектор $K$. То же самое можно записать в терминах $h$-вектора $(h_0,\dots,h_n)$:

$$F(k(K),t)=\frac{h_0+h_1t^2+\ldots+h_nt^{2n}}{(1-t^2)^n}. \tag{22}$$

С другой стороны, ряд Пуанкаре $k[v_1,\dots,v_m]$-модуля $k(P)$ (или $k(K)$) можно вычислять при помощи произвольной свободной резольвенты $k(P)$. А именно имеет место следующая общая теорема (см., например, [16]).

**Теорема 5.2.** *Пусть $M$ — конечно порожденный градуированный $k[v_1,\dots,v_m]$-модуль,* $\deg v_i=2$, *и задана конечная свободная резольвента $M$:*

$$0\longrightarrow R^{-h}\stackrel{d^{-h}}{\longrightarrow}R^{-h+1}\stackrel{d^{-h+1}}{\longrightarrow}\cdots\longrightarrow R^{-1}\stackrel{d^{-1}}{\longrightarrow}R^0\stackrel{d^0}{\longrightarrow}M\longrightarrow 0.$$

*Пусть образующие свободных $k[v_1,\dots,v_m]$-модулей $R^{-i}$ имеют размерности $d_{1i},\dots,d_{q_i i}$, где $q_i = \dim_{k[v_1,\dots,v_m]} R^{-i}$. Тогда ряд Пуанкаре модуля $M$ вычисляется по формуле:*

$$F(M,t) = \frac{\sum_{i=0}^{-h}(-1)^i(t^{d_{1i}}+\ldots+t^{d_{q_i i}})}{(1-t^2)^m}. \quad \square$$

Применим эту теорему к минимальной резольвенте (11) кольца $k(P) = k[v_1,\dots,v_m]/I$. Тогда, ввиду тривиальности дифференциалов комплекса (12), мы получаем следующую формулу

$$F(k(P),t) = (1-t^2)^{-m}\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i F(\mathcal{T}^i,t). \tag{23}$$

Отсюда и из соотношения (21) получаем:

$$F(k(P),t) = (1-t^2)^{-m}\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i t^{2m}F(\mathcal{T}^{m-n-i},\tfrac{1}{t}) =$$
$$= (1-(\tfrac{1}{t})^2)^{-m}\cdot(-1)^m\sum_{j=0}^{m-n}(-1)^{m-n-j}F(\mathcal{T}^j,\tfrac{1}{t}) = (-1)^n F(k(P),\tfrac{1}{t}).$$

Подставляя вместо $F(k(P),t)$ и $F(k(P),\frac{1}{t})$ выражения из правой части формулы (22), мы получаем

$$h_i = h_{n-i}. \tag{24}$$

Это так называемые соотношения Дена–Соммервилля, хорошо известные в теории простых многогранников.

Таким образом, мы видим, что из двойственности Пуанкаре для многообразия $\mathcal{Z}_P$ вытекает известная алгебраическая двойственность (21) и комбинаторные соотношения Дена–Соммервилля (24). Кроме того, из соотношений (22) и (23) получаем

$$\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i F(\mathcal{T}^i,t) = (1-t^2)^{m-n}h(t^2), \tag{25}$$

где $h(t) = \sum_{i=0}^n h_i t^i$.

Наряду с коцепным комплексом $[k(P)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m],d]$ из теоремы 4.6 мы введем некоторый его подкомплекс $\mathcal{A}$, который определяется следующим образом. Комплекс $\mathcal{A}$ порождается как $k$-модуль элементами $k(P)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ вида $v_{i_1}\dots v_{i_p}\otimes u_{j_1}\dots u_{j_q}$ и $1\otimes u_{j_1}\dots u_{j_k}$, где $\{v_{i_1},\dots,v_{i_p}\}$ *порождают* симплекс $K_P$ и $\{i_1,\dots,i_p\}\cap\{j_1,\dots,j_q\}=\varnothing$. Легко видеть, что $d(\mathcal{A})\subset\mathcal{A}$ и поэтому $\mathcal{A}$ является коцепным подкомплексом. Кроме того, $\mathcal{A}$ наследует из $k(P)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ структуру биградуированного модуля, так что дифференциал $d$ повышает бистепень на $(1,0)$.

**Лемма 5.3.** *Когомологии коцепных комплексов $[k(P)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m],d]$ и $[\mathcal{A},d]$ совпадают. Таким образом, имеет место изоморфизм $k$-модулей*

$$H[\mathcal{A},d]\cong \mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k).$$

**Доказательство.** Достаточно доказать, что любой коцикл $\omega = v_{i_1}^{\alpha_1} \dots v_{i_p}^{\alpha_p} \otimes u_{j_1} \dots u_{j_q}$ из $k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, не лежащий в $\mathcal{A}$, является кограницей. Для этого заметим, что если найдется $i_k \in \{i_1, \dots, i_p\} \cap \{j_1, \dots, j_q\}$, то $d\omega$ содержит слагаемое $v_{i_1}^{\alpha_1} \dots v_{i_k}^{\alpha_k+1} \dots v_{i_p}^{\alpha_p} \otimes u_{j_1} \dots \widehat{u}_{i_k} \dots u_{j_q}$, т.е. $d\omega \neq 0$ — противоречие. Значит, $\{i_1, \dots, i_p\} \cap \{j_1, \dots, j_q\} = \varnothing$. Если же в записи $\omega$ имеется хотя бы одно $\alpha_k > 1$, то в силу того, что $d\omega = 0$, мы получаем $\omega = \pm d\left(v_{i_1}^{\alpha_1} \dots v_{i_k}^{\alpha_k-1} \dots v_{i_p}^{\alpha_p} \otimes u_{i_k} u_{j_1} \dots u_{j_q}\right)$. Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что все ненулевые элементы кольца $k(P)$ вида $v_{i_1} \dots v_{i_p}$ соответствуют симплексам $K_P$. $\square$

Далее, введем подмодули $\mathcal{A}^{*,2r} \subset \mathcal{A}$, $r = 0, \dots, m$, порожденные элементами $v_{i_1} \dots v_{i_p} \otimes u_{j_1} \dots u_{j_q} \in \mathcal{A}$, где $p + q = r$. Таким образом, $\mathcal{A}^{*,2r}$ — подмодуль в $\mathcal{A}$, состоящий из элементов внутренней степени $2r$ (т.е. для любого $\omega \in \mathcal{A}^{*,2r}$ имеем $\operatorname{bideg} \omega = (*, 2r)$; внутренняя степень соответствует второй градуировке). Ясно, что $\sum_{r=0}^{2m} \mathcal{A}^{*,2r} = \mathcal{A}$. Так как дифференциал $d$ сохраняет внутреннюю градуировку, все $\mathcal{A}^{*,2r}$ являются подкомплексами в $\mathcal{A}$. Группы когомологий этих комплексов суть $\mathcal{T}^{i,2r}$, а их размерности — биградуированные числа Бетти $b^{-i,2r}(\mathcal{Z}_P)$. Рассмотрим теперь эйлеровы характеристики этих подкомплексов

$$\chi_r := \chi(\mathcal{A}^{*,2r}) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \dim_k \mathcal{A}^{-q,2r} = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q b^{-q,2r}(\mathcal{Z}_P)$$

и определим

$$\chi(t) = \sum_{r=0}^{m} \chi_r t^{2r}. \tag{26}$$

Тогда из леммы 5.3 мы получаем

$$\begin{aligned}\chi(t) = \textstyle\sum_{r=0}^m \sum_{q=0}^m (-1)^q \dim_k \mathcal{A}^{-q,2r} t^{2r} = \sum_{q=0}^m (-1)^q \sum_{r=0}^m \dim_k H^{-q}[\mathcal{A}^{*,2r}] t^{2r} = \\ = \textstyle\sum_{q=0}^m (-1)^q \sum_{r=0}^m \dim_k \mathcal{T}^{q,2r} t^{2r} = \sum_{q=0}^m (-1)^q F(\mathcal{T}^q, t),\end{aligned}$$

где $\mathcal{T}^{q,2r} = H^{-q,2r}[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d] = \operatorname{Tor}_{k[v_1, \dots, v_m]}^{-q,2r}(k(P), k)$. Отсюда и из соотношения (25) получаем

$$\chi(t) = (1 - t^2)^{m-n} h(t^2). \tag{27}$$

Это соотношение также легко вывести непосредственно из определения $\chi_r$. Действительно, нетрудно видеть, что

$$\dim_k \mathcal{A}^{-q,2r} = f_{r-q-1} \binom{m-r+q}{q}, \quad \chi_r = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{r-j} f_{j-1} \binom{m-j}{r-j}, \tag{28}$$

(мы полагаем $\binom{j}{k} = 0$ при $k < 0$). Тогда

$$\begin{aligned}\chi(t) = \textstyle\sum_{r=0}^m \chi_r t^{2r} = \sum_{r=0}^m \sum_{j=0}^m t^{2j} t^{2(r-j)} (-1)^{r-j} f_{j-1} \binom{m-j}{r-j} = \sum_{j=0}^m f_{j-1} t^{2j} (1-t^2)^{m-j} = \\ = \textstyle(1-t^2)^m \sum_{j=0}^n f_{j-1} (t^{-2} - 1)^{-j}.\end{aligned} \tag{29}$$

Далее, из соотношения (1) вытекает, что

$$t^n h(t^{-1}) = (t-1)^n \sum_{i=0}^{n} f_{i-1} (t-1)^{-i}.$$

Подставляя сюда $t^{-2}$ вместо $t$, с учетом (29) получаем

$$\frac{\chi(t)}{(1-t^2)^m} = \frac{t^{-2n}h(t^2)}{(t^{-2}-1)^n} = \frac{h(t^2)}{(1-t^2)^n},$$

что эквивалентно (27).

Соотношение (27) позволяет выразить $h$-вектор простого многогранника $P^n$ в терминах биградуированных чисел Бетти $b^{-q,2r}(\mathcal{Z}_P)$ многообразия $\mathcal{Z}_P$.

**Лемма 5.4.** *Ряд Пуанкаре $F(\mathcal{A}^{*,*},\tau,t) = \sum_{r,q}\dim_k \mathcal{A}^{-q,2r}\tau^{-q}t^{2r}$ биградуированного модуля $\mathcal{A}^{*,*}$ имеет вид*

$$F(\mathcal{A}^{*,*},\tau,t) = \sum_j f_{j-1}\left(1+\frac{t^2}{\tau}\right)^{m-j} t^{2j}.$$

**Доказательство.** Из формулы (28) получаем

$$\textstyle\sum_{r,q}\dim_k \mathcal{A}^{-q,2r}\tau^{-q}t^{2r} = \sum_{r,q} f_{r-q-1}\binom{m-r+q}{q}\tau^{-q}t^{2r} = \sum_{r,j} f_{j-1}\binom{m-j}{r-j}\tau^{-(r-j)}t^{2r} =$$

$$\textstyle = \sum_j f_{j-1}\left(1+\frac{t^2}{\tau}\right)^{m-j} t^{2j}. \quad \square$$

Для вычисления биградуированных чисел Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P)$ наряду с теоремой 4.6 и результатами п. 4.3 можно также использовать следующий результат, сводящий их вычисление к вычислению когомологий подкомплексов симплициального комплекса $K^{n-1}$, двойственного к $\partial P^n$.

**Теорема 5.5** (Хохстер, см. [16, 11]). *Пусть $K$ — симплициальный комплекс с множеством вершин $V = \{v_1,\dots,v_m\}$, $k(K)$ — кольцо граней и $\mathcal{T}^i = \mathrm{Tor}^{-i}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(K),k)$. Тогда*

$$F(\mathcal{T}^i,t) = \sum_{W\subseteq V}(\dim_k \tilde{H}_{|W|-i-1}(K_W))t^{2|W|},$$

*где $K_W$ — подкомплекс $K$, состоящий из всех симплексов, вершины которых лежат в $W$.* $\square$

Тем не менее, простые примеры показывают, что вычисления, основанные на этой теореме, становятся очень сложными даже для небольших комплексов $K$. Можно также показать, что обсуждавшийся выше результат из [10], примененный к $U(P^n)$ (см. пункт 2.2) дает то же самое описание $H^*(U(P^n))$, что и теорема Хохстера для $H^*(\mathcal{Z}_P)$ (что естественно согласуется с нашими результатами из пункта 2.2).

**Лемма 5.6.** *Для любого простого многогранника $P$*

$$\mathrm{Tor}^{-q,2r}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k) = 0 \qquad \text{при} \;\; 0 < r \leqslant q.$$

**Доказательство.** Это можно вывести либо прямо из конструкции минимальной резольвенты (11), либо из теоремы 5.5. $\square$

**Теорема 5.7.** *1) $H^1(\mathcal{Z}) = H^2(\mathcal{Z}) = 0$.*

*2) Ранг третьей группы когомологий $\mathcal{Z}$ (т.е. третье число Бетти, $b^3(\mathcal{Z})$) равен числу пар вершин симплициального комплекса $K^{n-1}$, не соединенных ребрами. Таким образом, если $f_0 = m$ — число вершин $K$ и $f_1$ — число ребер, то*

$$b^3(\mathcal{Z}_P) = \frac{m(m-1)}{2} - f_1.$$

**Доказательство.** Из теоремы 4.2 и леммы 5.6 следует, что

$$H^3(\mathcal{Z}) = \mathrm{Tor}^{-1,4}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k) = \mathcal{T}^{1,4}.$$

Далее из теоремы 5.5 мы получаем, что

$$b^{-1,4}(\mathcal{Z}_P) = \dim_k \mathcal{T}^{1,4} = \sum_{W\subseteq V, |W|=2} \dim_k \tilde{H}_0(K_W).$$

Теперь наша теорема следует из того факта, что $\dim_k \tilde{H}_0(K_W) = 0$, если $K_W$ является ребром $K$, и $\dim_k \tilde{H}_0(K_W) = 1$, если $K_W$ представляет собой пару точек. $\square$

**Замечание.** Из теорем 4.2, 5.5 и леммы 5.6 также следует, что

$$b^4(\mathcal{Z}) = \dim_k \mathcal{T}^{2,6} = \sum_{W\subseteq V, |W|=3} \dim_k \tilde{H}_0(K_W).$$

Наряду с соотношениями Дена–Соммервилля (24) ряд других комбинаторных свойств простых многогранников получают красивую интерпретацию в терминах многообразий $\mathcal{Z}_P$. В частности, соотношение (27) позволяет записать известные неравенства МакМюллена, верхнюю и нижнюю оценки для числа граней простого многогранника (см. [3]) в терминах когомологий многообразия $\mathcal{Z}_P$. Мы остановимся здесь лишь на двух примерах.

Первое нетривиальное неравенство МакМюллена для простого многогранника $P^n$ имеет следующий вид: $h_1 \leqslant h_2$ при $n \geqslant 3$. В терминах $f$-вектора это записывается так: $f_1 \geqslant mn - \binom{n+1}{2}$. В силу теоремы 5.7 мы имеем $b^3(\mathcal{Z}_P) = \binom{m}{2} - f_1$. Отсюда получаем следующую оценку сверху:

$$b^3(\mathcal{Z}_P) \leqslant \binom{m-n}{2} \quad \text{при } n \geqslant 3. \tag{30}$$

Верхняя оценка для числа граней простого многогранника в терминах $h$-вектора выглядит следующим образом:

$$h_i \leqslant \binom{m-n+i-1}{i}. \tag{31}$$

Используя разложение

$$\left(\frac{1}{1-t^2}\right)^{m-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m-n+i-1}{i} t^{2i},$$

из соотношения (27) и неравенства (31) получаем

$$\chi(t) \leqslant 1. \tag{32}$$

Было бы интересно получить чисто топологическое доказательство неравенств (30) и (32).

# Литература


[1] *J.F. Adams,* On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Annals of Mathematics, **72** (1960), 1, 20-104.

[2] *V.V. Batyrev*, Quantum Cohomology Rings of Toric Manifolds, Astérisque **218** (1993), 9–34.

[3] *А. Бренстед,* Введение в теорию выпуклых многогранников, "Мир", Москва, 1988.

[4] *В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов,* Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками, Успехи Матем. Наук **53**:3 (1998), 195–196.

[5] *H. Cartan, S. Eilenberg,* Homological algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1956.

[6] *В.И. Данилов*, Геометрия торических многообразий, Успехи Матем. Наук **33**:2 (1978), 85–134.

[7] *M. Davis, T. Januszkiewicz,* Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions, Duke Mathematical Journal **62**, No.2 (1991), 417-451.

[8] *S. Eilenberg, J.C. Moore,* Homology and fibrations. I, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 199-236.

[9] *W. Fulton*, Introduction to Toric Varieties, Princeton Univ. Press, 1993.
Готовится русский перевод.

[10] *М. Горески, Р. МакФерсон*, Стратифицированная теория Морса, "Мир", Москва, 1991.

[11] *M. Hochster,* Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference) (B.R.McDonald and R.Morris, ed.), Dekker, New York, 1977, pp.171-223.

[12] *P.S. Landweber,* Homological properties of comodules over $MU_*(MU)$ and $BP_*(BP)$, American Journal of Mathematics, **98** (1976), 591-610.

[13] *С. Маклейн,* Гомология, "Мир", Москва, 1966.

[14] *J.-P. Serre,* Algèbre locale-multiplicitiés, Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag Berlin, 1965.

[15] *L. Smith,* Homological Algebra and the Eilenberg–Moore Spectral Sequence, Transactions of American Math. Soc. **129** (1967), 58-93.

[16] *R. Stanley,* Combinatorics and Commutative Algebra, Progress in Mathematics **41**, Birkhauser, Boston, 1983.



Механико-математический факультет, Московский Государственный Университет; 119899, Москва.

*Электронный адрес*: `buchstab@mech.math.msu.su` `tpanov@mech.math.msu.su`