ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 438, № 2, с. 176–180

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.4

СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2011 г. А. М. Красносельский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 11.01.2011 г.

Поступило 12.01.2011 г.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В сообщении рассматриваются замкнутые квазилинейные системы управления со скалярной периодической нелинейностью, предлагаются теоремы о существовании последовательностей периодических колебаний, амплитуды которых не ограничены в совокупности.

Для автономных систем предлагаются условия существования последовательностей циклов. Амплитуды циклов из этой последовательности возрастают к бесконечности, периоды сходятся к некоторому фиксированному значению T_0.

Далее, изучаются возмущения исходной автономной системы периодическим входом того же периода T_0. Предлагаются условия, при которых у возмущенного уравнения сохраняется неограниченная последовательность периодических колебаний (теперь вынужденных).

Исследованию циклов в автономных системах (существование, устойчивость, количество циклов, приближенное их построение и др.) разнообразными методами (аналитические методы, методы неподвижной точки, численные методы) посвящено великое множество работ. Проще всего искать циклы в линейных системах: если система линейная, то для существования цикла необходимо и достаточно, чтобы на мнимой оси лежала пара корней некоторого характеристического уравнения. В ситуации общего положения циклы линейных систем имеют круглую форму, не изолированы, их множество в фазовом пространстве целиком заполняет двумерную плоскость.

Если у нелинейного дифференциального уравнения есть в некотором естественном смысле "главная" линейная часть, обладающая собственными свободными колебаниями, то иногда также удается поймать "круглые" циклы. Классическим случаем применимости такой технологии является бифуркация Андронова–Хопфа: система линеаризуется в окрестности положения равновесия (или на бесконечности), по линеаризованной системе удается сделать вывод о существовании "круглых" циклов.

Аналогично, в задачах о вынужденных колебаниях при периодическом воздействии часто определяющую роль играют свойства ее главной линейной части. Если система нерезонансная (период вынуждающей силы не кратен периоду собственных колебаний линейной части), то, как правило, множество амплитуд периодических решений ограничено. Резонансные случаи сложнее и богаче.

Существование последовательностей периодических колебаний с возрастающими к бесконечности амплитудами ранее отмечались лишь в системах с нелинейностями весьма специфического вида. Основное условие формально имело общий вид $\limsup X > \liminf X$, однако это условие выполняется только для нелинейностей, содержащих осциллирующие компоненты с экспоненциально быстро возрастающими длинами промежутков между последовательными нулями, например, $\sin(\ln(1 + |x|)$.

В [1] были рассмотрены автономные уравнения динамики одноконтурных систем управления, содержащие линейное звено и ограниченную функциональную нелинейность с запаздыванием или без такового. Предложены условия существования бесконечных неограниченных семейств циклов. В [2] рассматривались задачи о неограниченных последовательностях вынужденных колебаний в резонансной системе с такими же нелинейностями.

В настоящем сообщении условия существования бесконечных неограниченных семейств циклов и вынужденных колебаний предлагаются для уравнений с обычными периодическими нелинейностями.

Существенную роль в доказательствах играют точные асимптотики проекций периодических нелинейностей, для вычисления этих асимптотик используется техника, близкая к методу стационарной фазы Кельвина (см. [3, §11–14]).

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской Академии наук, Москва

ЦИКЛЫ

Рассмотрим традиционное для теории управления уравнение[1] с единственной скалярной нелинейностью

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(x(t)), \tag{1}$$

L и M – вещественные взаимно простые многочлены степеней $\ell > m$, функция $f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная и равномерно ограниченная на всей оси.

Пусть число 1 – корень многочленов $L(wi)$ и $\mathrm{Im}(L(wi)M(-wi))$ одинаковой нечетной кратности K и пусть $L(ki) \neq 0$ для всех $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$ Положим

$$\Psi(\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^{2\pi} \sin t\, f(\xi \sin t) dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin t\, f_{\mathrm{odd}}(\xi \sin t) dt.$$

Эта функция нечетная, она определяется по нечетной части $f_{\mathrm{odd}} = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ функции $f(x)$. В [1] было доказано следующее утверждение о циклах уравнения 1.

Предложение 1. *Пусть*

$$\Psi^+ = \limsup_{\xi \to \infty} \Psi(\xi) > 0 > \liminf_{\xi \to \infty} \Psi(\xi) = \Psi^-. \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) *имеет бесконечную последовательность x_n периодических решений, амплитуды $\|x_n\|_C$ этих решений стремятся к бесконечности, периоды этих решений стремятся к $T_0 = 2\pi$.*

Для естественных f функция Ψ стремится на бесконечности к конечному пределу, часто – к нулю. К нулю стремятся Ψ, построенные по четным функциям, по функциям с подлинейной первообразной (таковы, например, все периодические и почти-периодические функции, функции, стремящиеся к нулю на бесконечности), по функциям $\sin x^3$ и $\sin x^{1/3}$. К ненулевому пределу стремится Ψ, построенная по нелинейности f с насыщением: если $f(x) \to \pm F$ при $x \to \pm\infty$, то $\Psi^+ = = \Psi^- = 4F$. К случаю $\Psi^+ > \Psi^-$ приводит функция $f_0(x) = \sin(\mathrm{sign}(x)\ln(1 + |x|))$, также необходимое условие $\Psi^+ > \Psi^-$ предложения 1 выполнено для функций $f(x)$ вида $f_0(x)$ + "функция с насыщением" + "четная функция" + "маленькая функция" + + $a\sin x + b\sin x^3$ и т.д.

Промежутки между последующими нулями f_0 экспоненциально быстро возрастают, это свойство обеспечивает выполнение основного условия $\Psi^+ > \Psi^-$. Для периодических функций f, рассматриваемых ниже, $\Psi^+ = \Psi^- = 0$.

Пусть непрерывная функция f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ периодична с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ и имеет нулевое среднее:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s \sin(s\omega x + \psi_s),$$
$$\mu_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) dx = 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *справедливо неравенство $\ell \geq m + 2$, где $\ell = = \deg L$ и $m = \deg M$*;

2) *число* 1 *– корень многочленов $L(wi)$ и $\mathrm{Im}(L(wi)M(-wi))$ одной и той же нечетной кратности K*;

3) *соотношения $L(ki) \neq 0$ верны для всех $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$*;

4) *коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют условию*

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\mu_s| \sqrt{s} < \infty;$$

5) *функция f не является четной.*

Тогда у уравнения (1) *есть бесконечная последовательность периодических решений x_n периодов $T_n \to T_0 = 2\pi$ с амплитудами $\|x_n\|_C \to \infty$.*

ЗАМЕЧАНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ К ТЕОРЕМЕ 1

1. Вместо периодической функции f можно рассмотреть почти-периодическую сумму двух или более периодических функций с разными периодами или даже функции, представимые в виде интегралов Фурье. Можно также рассмотреть добавочные слагаемые, убывающие на бесконечности к нулю, если скорость убывания достаточно быстрая: как $\mathrm{const} \cdot x^{-1-\sigma}$, $\sigma > 0$, быстроосциллирующие слагаемые типа $\sin x^3$.

2. Периодические решения x_n из теоремы 1 имеют вид[2]

$$x_n(t) = \xi_n \sin\frac{2\pi t}{T_n} + h_n(t), \tag{4}$$

[1] Уравнение (1) эквивалентно системе $\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b}f(\langle \mathbf{z}, \mathbf{c}\rangle)$ в $\mathbb{R}^\ell$, где $(\ell \times \ell)$-матрица A и векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не зависят от t. Предлагаемые результаты интересны уже в случае обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка $L\left(\frac{d}{dt}\right)x = f(x)$.

[2] Каждое решение x автономного уравнения порождает одномерный континуум решений $x(t + \varphi)$, определяющих один цикл в фазовом пространстве, ровно одно из них имеет вид (4).

где h_n – это T_n-периодические функции, $\xi_n \to \infty$, $\|h_n\|_C \to 0$. Величины ξ_n близки к достаточно большим нулям T-периодической функции

$$g(\xi) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s \frac{\cos\psi_s \sin\left(\omega s\xi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{s}};$$

если ξ_* – правильный[3] нуль функции g, то для всех достаточно больших натуральных n существует периодическое решение вида (4) и $\xi_n - \xi_* - nT \to 0$ при $n \to \infty$. Справедливо почти обратное утверждение: найдется такая окрестность Ω точки 1, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R(\varepsilon)$, что любое периодическое решение $x(t)$ периода $\tau = \frac{2\pi}{w}$ $(w \in \Omega)$, удовлетворяющее $\|x\|_C \geq R(\varepsilon)$, имеет вид $x(t) = \xi\sin(wt) + h(t)$, $h(t + \tau) \equiv h(t)$, где $\|h\|_C$, $|g(\xi)| \leq \varepsilon$.

Функция g не равна нулю тождественно ($\mu_s\cos\psi_s \neq 0$ по крайней мере для одного $s = 1, 2, \ldots$), если и только если выполнено условие 5 теоремы 1. Функция g играет важную роль в доказательствах; она определяет главную часть функции Ψ: на бесконечности

$$\Psi(\xi) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\omega\sqrt{\xi}} g(\xi) + o(\xi^{-1/2}).$$

Было бы интересно дополнить утверждение теоремы 1 условиями единственности решений $\xi\sin(wt) + h(t)$, где $|\xi - \xi_* - nT|$, $|w - 1| < \varepsilon$ при больших n.

3. Простейший пример: уравнение $x''' + x'' + x' + x = \sin x$ в силу теоремы 1 имеет последовательность периодических решений x_n периодов $T_n \to 2\pi$ с амплитудами $\|x_n\|_C \to \infty$. В этом примере $g(\xi) = \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)$, соответственно решения имеют вид (4), причем $\xi_n + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \to 0$.

4. Условие 2 означает, что

$$\lim_{w \to 1} |w - 1|^{-K} |\mathrm{Re}(L(wi)M(-wi))| < \infty,$$

т.е. либо число 1 является корнем многочлена $\mathrm{Re}(L(wi)M(-wi))$ конечной кратности $K^* \geq K$, либо $\mathrm{Re}(L(wi)M(-wi)) \equiv 0$. Предположение $K^* \geq K$ может быть ослаблено, достаточно неравенства $4K^* \geq 3K$.

[3] Будем говорить, что точка τ_* является правильным нулем некоторой функции $z(\tau)$, если нуль τ_* изолированный и функция z меняет знак в точке τ_*.

5. Утверждение теоремы 1 верно для уравнений с периодическими f, имеющими ненулевое среднее μ_0. Замена переменных $x = \mu_0 \frac{M(0)}{L(0)} + y$ переводит (1) в уравнение такого же вида, многочлены L и M сохраняются. Изменяется только нелинейность, новая нелинейность $f_1(y) = f\left(\mu_0 \frac{M(0)}{L(0)} + y\right) - \mu_0$ также T-периодична по y, у нее нулевое среднее:

$$\int_0^T f_1(y)dy = 0.$$

Таким образом, справедлив аналог теоремы 1 для случая $\mu_0 \neq 0$. Нужно лишь заменить условие 5 предположением о том, что функция $f\left(\mu_0 \frac{M(0)}{L(0)} + y\right)$ не является четной.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим систему

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)(f(x(t)) + a(t)), \tag{5}$$

где обозначения L, M и f сохраняют свое значение, $L(i) = 0$ и $L(ki) \neq 0$ для всех $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$ Предположения о кратностях корня 1 многочленов $L(wi)$ и $\mathrm{Im}(L(wi)M(-wi))$ при изучении неограниченных последовательностей периодических решений уравнения (5) не используются. Пусть a – это непрерывная (для простоты) и периодическая функция. Если ее период близок к 2π, но не равен 2π, то вынуждающая сила $a(t)$ не попадает в резонанс с линейной частью и множество периодических решений непусто и равномерно ограничено. Пусть система (5) резонансная, т.е. функция a имеет период 2π. Положим

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} a(t)e^{it}dt\right|.$$

Рассмотрим уравнение (5) с непериодической ограниченной функцией, удовлетворяющей условию $\Psi^+ > \Psi^-$, по смыслу близкому к условию (2) из утверждения 1. Пусть $a(t) = \alpha\sin(t + \psi) + a_0(t)$, $\alpha > 0$, причем функция a_0 не содержит первых гармоник. В [2] получено следующее утверждение о существовании последовательностей 2π-периодических решений уравнения (5).

Предложение 2. *Пусть хотя бы одно из чисел* $\pm\pi\alpha$ *принадлежит интервалу* (Ψ^-, Ψ^+). *Тогда у уравнения* (5) *есть бесконечная последовательность* 2π-*периодических решений* x_n *с амплитудами* $\|x_n\|_C \to \infty$.

Если выполняются условия $\alpha = 0$ и $\Psi^+ > \Psi^-$, то достаточные условия неограниченности множества периодических решений уравнений (5) не известны.

Перейдем к уравнениям (5) с периодическими нелинейностями f.

Если $\alpha \neq 0$, то в силу классических теорем (А.С. Лазер и Д.Е. Лич [4], С. Фучик, И. Нечас, М. Кучера [5], Дж.М. Алонсо и Р. Ортега [6] и др.) множество 2π-периодических решений уравнения (5) ограничено во всех разумных функциональных пространствах. Если $\alpha = 0$, то уравнение (5) может иметь неограниченное множество 2π-периодических решений.

В силу альтернативы Фредгольма и условия $\alpha = 0$ линейное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)a(t) \tag{6}$$

имеет единственное 2π-периодическое решение $b \in C^1$, удовлетворяющее условию

$$\int_0^{2\pi} b(t)e^{it}dt = 0. \tag{7}$$

Основной результат формулируется в терминах построенных по функции b функций $\beta(\varphi) = b'\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + b'\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$ и

$$q(\xi, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s \frac{\sin\left(\omega s\xi - \frac{\pi}{4} + \psi_s + \omega s b\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)}{\sqrt{s}},$$

величины μ_s и ψ_s взяты из ряда Фурье (3). Обе функции β и q периодические. Функция β содержит лишь четные гармоники, начиная со второй, ее период равен π, функция q периодична по ξ с периодом T и по φ с периодом 2π.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнено условие* 4 *теоремы* 1 *и пусть найдется такой правильный нуль* φ_* *функции* β, *что для некоторого правильного нуля* ξ_* *функции* $q(\xi, \varphi_*) - q(\xi, \pi + \varphi_*)$ *справедливо соотношение* $q(\xi_*, \varphi_*) \neq 0$.

Тогда у уравнения (5) *есть бесконечная последовательность* 2π*-периодических решений* x_n *с амплитудами* $\|x_n\|_C \to \infty$.

Замечание 1 к теореме 1 сохраняет силу для теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМЕ 2

1. Решения уравнения (5), существование которых утверждается теоремой 2, имеют при всех достаточно больших n вид

$$x_n(t) = \xi_n \sin(t + \varphi_n) + b(t) + h_n(t),$$

причем $\xi_n - nT - \xi_* \to 0$, $\varphi_n \to \varphi_*$, $\|h_n\|_C \to 0$.

2. Пусть все корни функции β правильные (поэтому на периоде их будет конечное число). Тогда в силу теоремы Штурма–Гурвица[4] таких нулей на $[0, 2\pi)$ у нее будет как минимум четыре: нулевые гармоники пропадут из-за дифференцирования, первых (как и других нечетных) гармоник нет в силу специфики вида функции β.

3. Если выполнено условие $\alpha = 0$, то можно сделать замену переменных и рассмотреть эквивалентное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(x(t) + b(t)), \tag{8}$$

при этом b удовлетворяет условию (7). Утверждение теоремы 2 сохраняет силу для уравнения (8) вне зависимости от условия (7).

Рассмотрим простейший пример уравнения (8): $x'' + x = f(x + b(t))$, где $f(x) = \sin x$, $b(t) = \lambda(\sin 2t + \sin 3t)$, $\lambda > 0$. В этом случае функция $\beta(\varphi) = 4\lambda\cos 2\varphi$ имеет на $[0, 2\pi)$ четыре правильных нуля $\varphi_*^k = \frac{\pi(2k+1)}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Если $\lambda \neq \pi r\sqrt{2}$ при натуральном r, то при каждом k функция $q(\xi, \varphi_*^k) - q(\xi, \pi + \varphi_*^k) = \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4} + b\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_*^k\right)\right) - \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4} + b\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi_*^k\right)\right)$ имеет на периоде два правильных нуля ξ_*^d, $d = 1, 2$ $\left(\text{при разных } k \text{ либо } \xi_*^d = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \lambda, \text{ либо } \xi_*^d = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \lambda\right)$. Поскольку $\lambda \neq \pi r\sqrt{2}$, то $q(\xi_*^d, \varphi_*^k) \neq 0$ при всех $k = 0, 1, 2, 3$ и $d = 1, 2$, теорема 2 применима к любой паре корней φ_*^k, ξ_*^d из восьми.

Для этого уравнения при каждом $\lambda \in (0, \pi\sqrt{2})$ найдутся восемь последовательностей возрастающих вынужденных колебаний. Чем меньше λ, тем больше “стартовая амплитуда” колебаний из этих последовательности и тем ближе эти вынужденные колебания к циклам, существующим в силу теоремы 1 у предельного (при $\lambda = 0$) автономного уравнения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10–01–93112–НЦНИЛ_ а).

[4] Количество перемен знака функции не меньше порядка ее младшей гармоники, см. [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский А.М.* // АиТ. 1999. № 8. С. 74–84.
2. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* // Math. and Comp. Modelling. 2000. V. 32. P. 1445–1455.
3. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
4. *Lazer A.C., Leach D.E.* // Ann. Mat. Pura et Appl. 1969. V. 82. P. 49–68.
5. *Fučik S., Nečas J., Kučera M.* // J. Different. Equants. 1975. V. 17. P. 375–394.
6. *Alonso J.M., Ortega R.* // Nonlinearity. 1996. V. 9. P. 1099–1111.
7. *Арнольд В.И.* Задачи Арнольда. Задача 1996-5. М.: Фазис, 2000. С. 419–421.