ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2010, т. 268, с. 1–18

УДК 515.164.32

Пространства конфигураций, бизвездные преобразования и комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина[1]

©2010 г. А. А. Гайфуллин[2]

Поступило в январе 2009 г.

Настоящая работа посвящена задаче нахождения явных комбинаторных формул для классов Понтрягина. Обсуждаются две формулы: классическая формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика, основанная на изучении пространств конфигураций, и полученная автором в 2004 г. локальная комбинаторная формула, основанная на введенном автором понятии универсальной локальной формулы и использовании бизвездных преобразований. Для первой из этих формул дается краткий ее набросок, вторая формула изложена довольно подробно. При этом в одном месте — в построении алгоритма для представления цикла в графе бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер в виде линейной комбинации элементарных циклов — нам удается добиться существенного упрощения формулы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о построении комбинаторных формул для классов Понтрягина триангулированных многообразий восходит к замечательной работе А.М. Габриэлова, И.М. Гельфанда и М.В. Лосика [1], в которой впервые была построена явная комбинаторная формула для первого рационального класса Понтрягина. В дальнейшем различные комбинаторные формулы были получены в работах [2–8]. Отметим также работу Н. Левитта и К. Рурка [9], в которой было доказано существование локальных комбинаторных формул для всех полиномов от рациональных классов Понтрягина (без построения явной формулы). Наиболее простая из известных к настоящему моменту комбинаторных формул для первого рационального класса Понтрягина была получена автором в 2004 г. [3]. Сравнению различных комбинаторных формул для классов Понтрягина посвящен обзор автора [10].

Прежде чем перейти к более подробному обсуждению комбинаторных формул для классов Понтрягина, скажем несколько слов о более простой задаче комбинаторного вычисления классов Штифеля–Уитни. Следующее утверждение было высказано в качестве гипотезы Е. Штифелем [11] и доказано Х. Уитни [12].

Теорема 1.1. *Пусть K — замкнутое n-мерное симплициальное многообразие, K' — его первое барицентрическое подразделение. Обозначим через W_k сумму по модулю 2 всех k-мерных симплексов комплекса K'. Тогда симплициальная цепь W_k является циклом с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$ и представляет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре классу Штифеля–Уитни $w_{n-k}(K)$.*

Х. Уитни так и не опубликовал полного доказательства этой теоремы. Аккуратное ее доказательство было опубликовано С. Гальпериным и Д. Толедо лишь в 1972 г. [13]. Их доказательство (так же как и исходное доказательство Х. Уитни) основано на явном построении

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00541-а и 08-01-91855-КО-а) и гранта Президента РФ (проект МК-4220.2009.1).

[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

касательных векторных полей $F_1, \dots, F_n$ на K таких, что поля $F_1, \dots, F_p$ линейно независимы вне $(n-p)$-мерного остова триангуляции K' и индекс поля F_p по модулю полей $F_1, \dots, F_{p-1}$ в барицентре каждого $(n-p)$-мерного симплекса триангуляции K' равен ± 1. Альтернативное доказательство теоремы 1.1, основанное на совершенно других идеях, было получено Дж. Чигером [14].

В настоящей работе мы рассматриваем две комбинаторные формулы для первого рационального класса Понтрягина: классическую формулу Габриэлова–Гельфанда–Лосика [1] и формулу, полученную автором в [3]. В действительности это единственные известные к настоящему времени формулы для классов Понтрягина, которые могут быть применены для конкретных вычислений. Все известные формулы для старших классов Понтрягина (см. [5–8]) непригодны для реальных вычислений: формула А.М. Габриэлова [5] применима только для очень узкого класса триангуляций многообразий, формула И.М. Гельфанда и Р. Мак-Ферсона [6] не является полностью комбинаторной, так как вычисляет классы Понтрягина многообразия не по заданной триангуляции, а по заданной триангуляции с фиксированным *сглаживанием*, формула автора [8], хотя и является полностью комбинаторной, настолько сложна, что не годится для конкретных вычислений даже в простейших случаях. Несколько особняком стоит аналитический подход Дж. Чигера [7], развивающий результаты Атьи–Патоди–Зингера [15], в результате которого была получена формула, выражающая классы Понтрягина триангулированного многообразия в терминах спектров операторов Лапласа в пространствах L_2-форм на неполных римановых многообразиях с локально плоскими метриками. Эти формулы применимы для любого комбинаторного многообразия. Тем не менее их стоит рассматривать скорее как важные тождества, связывающие объекты, имеющие топологическую и аналитическую природу, чем как формулы для комбинаторного вычисления классов Понтрягина, ввиду того, что для спектров операторов Лапласа также нет явного выражения в комбинаторных терминах.

Опишем вкратце основные идеи, лежащие в основе формул Габриэлова–Гельфанда–Лосика [1] и автора [3]. Для формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика существует два практически эквивалентных подхода: оригинальный подход из [1], основанный на введении на триангулированном многообразии локально плоских связностей, и подход Р. Мак-Ферсона [4], основанный на построении гомологического гауссова отображения для комбинаторного многообразия. Мы опишем здесь идеи, лежащие в основе подхода Р. Мак-Ферсона, так как он более геометричен.

Пусть сначала $M^m \subset \mathbb{R}^N$ — ориентированное гладкое замкнутое многообразие, вложенное каким-либо образом в евклидово пространство большой размерности. Рассмотрим гауссово отображение $g\colon M \to G_m(\mathbb{R}^N)$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ линейное подпространство в $\mathbb{R}^N$, параллельное касательному пространству к M в точке x. Здесь $G_m(\mathbb{R}^N)$ — грассманово многообразие m-мерных подпространств в $\mathbb{R}^N$. Для любого однородного полинома $F \in \mathbb{R}[p_1, p_2, \dots, p_{[m/2]}]$ степени $n = 4k$ существует единственная $O(N)$-инвариантная внешняя n-форма P_F на $G_m(\mathbb{R}^N)$, представляющая в когомологиях де Рама класс $F(p(\gamma)) = F\bigl(p_1(\gamma), p_2(\gamma), \dots, p_{[m/2]}(\gamma)\bigr)$, где γ — тавтологическое векторное расслоение над $G_m(\mathbb{R}^N)$. (Здесь и далее под *однородным* полиномом степени n от классов Понтрягина понимается полином, степени всех мономов которого равны n, если считать степень каждой переменной p_i равной $4i$.) Тогда форма g^*P_F представляет в когомологиях де Рама класс $F(p(M))$.

Очевидно, что для комбинаторных многообразий нет никакой надежды на построение какого-либо естественного *непрерывного* отображения в $G_m(\mathbb{R}^N)$. Действительно, если бы такое отображение существовало, мы могли бы определить *целочисленные* классы Понтрягина комбинаторного многообразия как обратные образы классов Понтрягина тавтологического расслоения γ, что, конечно же, невозможно, так как целочисленные классы Понтрягина неинвариантны относительно кусочно линейных гомеоморфизмов. Тем не менее для комбинаторных многообразий оказывается возможным построение *гомологического* гауссова отображения (вплоть до размерности 4), откуда и получается явная комбинаторная формула. Интересно, что эта формула является существенно нелокальной ввиду того, что гомологическое гауссово отображение определяется нелокально: оно зависит от предварительно выбираемой дополнительной комбинаторной структуры на комбинаторном многообразии. Локальная формула получается путем некоторого специального усреднения по различным выборам этой дополнительной структуры, что приводит к существенному усложнению формулы (см. [2, 4]). Отметим, что формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика неприменима для произвольного комбинаторного многообразия, а применима лишь для более узкого класса так называемых *многообразий Брауэра* (см. определение в разд. 2).

Формула автора [3] основана на других соображениях. Отметим, что в гладком случае форма g^*P_F дает *локальную* формулу для полинома F от классов Понтрягина: эта форма в каждой точке зависит только от метрики многообразия M в окрестности этой точки. Поэтому представляется естественным искать цикл, представляющий класс гомологий, двойственный по Пуанкаре заданному полиному от классов Понтрягина ориентированного комбинаторного многообразия K, в виде *универсальной локальной формулы*

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma\in K,\ \operatorname{codim}\sigma=n} f(\operatorname{link}\sigma)\sigma,$$

где f — выбранная рациональнозначная функция на классах изоморфизма ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер, не зависящая от комбинаторного многообразия K. Подход к построению явной комбинаторной формулы для первого класса Понтрягина, предложенный в [3], основан на том, что при $n=4$ с помощью теории бизвездных преобразований удается явно описать *все* функции f такие, что цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K. При этом любая такая функция дает формулу для первого класса Понтрягина, умноженного на некоторую рациональную константу. Получаемая таким образом явная комбинаторная формула для первого рационального класса Понтрягина изначально является локальной и применима для любого комбинаторного многообразия.

Настоящая статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит основные определения и обозначения и необходимые в дальнейшем сведения о триангулированных многообразиях. В разд. 3 мы обсуждаем пространства конфигураций, лежащие в основе формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика, и даем очень краткий обзор этой формулы. Разделы 4–6 посвящены формуле автора, полученной в [3]. В разд. 4 мы строим дифференциальную градуированную алгебру $\mathcal{T}_*$ ориентированных комбинаторных сфер, вводим понятие универсальной локальной формулы и формулируем теоремы существования и единственности локальных формул для полиномов от рациональных классов Понтрягина. В разд. 5 приводятся необходимые сведения о бизвездных преобразованиях и строится граф Γ_n, вершинами которого являются классы изоморфизма ориентированных n-мерных комбинаторных сфер, а ребрами — классы эквивалентности бизвездных преобразований. Также в этом разделе мы даем новый, более простой алгоритм для представления цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных циклов (см. предложение 5.2), который существенно упрощает полученную в [3] явную комбинаторную формулу для первого класса Понтрягина. Раздел 6 посвящен непосредственно построению явной формулы для первого класса Понтрягина.

2. ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В этом разделе мы изложим необходимые нам сведения о симплициальных комплексах и триангулированных многообразиях.

Абстрактным симплициальным комплексом на множестве вершин V называется непустое множество K конечных подмножеств множества V такое, что если $\sigma\in K$ и $\tau\subset\sigma$, то $\tau\in K$.

В частности, пустое множество $\varnothing$ всегда принадлежит K. Элементы множества K называются *симплексами* симплициального комплекса K. Размерностью симплекса $\sigma \in K$ называется мощность множества σ, уменьшенная на 1. Мы всегда будем предполагать, что множество V конечно и все его одноэлементные подмножества принадлежат K. *Подкомплексом* комплекса K называется всякое подмножество $L \subset K$, являющееся симплициальным комплексом (возможно, на меньшем множестве вершин). *Полным подкомплексом* комплекса K, натянутым на множество вершин $W \subset V$, называется подкомплекс, состоящий из всех симплексов $\sigma \in K$ таких, что $\sigma \subset W$. *Изоморфизмом* симплициальных комплексов K_1 и K_2 на множествах вершин V_1 и V_2 соответственно называется биекция $f\colon V_1 \to V_2$ такая, что $f(\sigma) \in K_2$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in K_1$. Для обозначения изоморфизма симплициальных комплексов мы используем символ $\cong$. *Джойном* (или *соединением*) симплициальных комплексов K_1 и K_2 на множествах вершин V_1 и V_2 соответственно называется симплициальный комплекс $K_1 * K_2$ на множестве вершин $V_1 \sqcup V_2$, состоящий из всех симплексов $\sigma_1 \cup \sigma_2$ таких, что $\sigma_1 \in K_1$ и $\sigma_2 \in K_2$. *Конусом* над симплициальным комплексом K называется симплициальный комплекс $\operatorname{cone} K = \mathrm{pt} * K$, где pt — одноточечный симплициальный комплекс. *Звездой* симплекса $\sigma \in K$ называется подкомплекс $\operatorname{star}\sigma \subset K$, состоящий из всех симплексов τ таких, что $\sigma \cup \tau \in K$. *Линком* симплекса $\sigma \in K$ называется подкомплекс $\operatorname{link}\sigma \subset K$, состоящий из всех симплексов τ таких, что $\sigma \cup \tau \in K$ и $\sigma \cap \tau = \varnothing$. Очевидно, что $\operatorname{star}\sigma \cong \sigma * \operatorname{link}\sigma$, где симплициальный комплекс, состоящий из симплекса σ и всех его подсимплексов, также обозначен через σ. Множество вершин симплициального комплекса K будет обозначаться через $V(K)$ и будет отождествляться с множеством нульмерных симплексов комплекса K.

Вложим множество $V(K)$ в виде аффинно независимого подмножества в некоторое пространство $\mathbb{R}^N$. Каждому абстрактному симплексу $\sigma \in K$ сопоставим выпуклый симплекс размерности $\dim\sigma$ с вершинами в соответствующих точках пространства $\mathbb{R}^N$. Объединением всех таких симплексов будет полиэдр, который обозначается через $|K|$ и называется *геометрической реализацией* симплициального комплекса K. С точностью до кусочно линейного гомеоморфизма геометрическая реализация не зависит от числа N и выбранного вложения $V(K) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.

Симплициальный комплекс K называется *симплициальным многообразием*, если $|K|$ — топологическое многообразие. (Здесь и далее под многообразием всегда понимается замкнутое многообразие, т.е. компактное многообразие без края.) Симплициальный комплекс называется *n-мерной комбинаторной сферой*, если его геометрическая реализация кусочно линейно гомеоморфна границе $(n+1)$-мерного симплекса. Симплициальный комплекс называется *n-мерным комбинаторным многообразием*, если линк каждой его вершины является $(n-1)$-мерной комбинаторной сферой. Хорошо известно, что линк любого симплекса комбинаторной сферы является комбинаторной сферой (см., например, [16]). Поэтому всякая комбинаторная сфера является комбинаторным многообразием и линки всех симплексов любого комбинаторного многообразия являются комбинаторными сферами. Любое комбинаторное многообразие является симплициальным многообразием. Обратное верно при $n \le 4$ и неверно при $n \ge 5$. Простейшим примером некомбинаторной триангуляции 5-мерной сферы является двойная надстройка над произвольной триангуляцией какой-нибудь трехмерной гомологической сферы.

Уплощением симплициального многообразия K в его симплексе σ коразмерности k называется вложение $\varphi\colon |\operatorname{cone}\operatorname{link}\sigma| \hookrightarrow \mathbb{R}^k$, переводящее вершину конуса в начало координат и (аффинно) линейное на каждом симплексе комплекса $\operatorname{cone}\operatorname{link}\sigma$. Симплициальное многообразие называется *многообразием Брауэра*, если оно допускает уплощение в каждом своем непустом симплексе. Любое многообразие Брауэра является комбинаторным многообразием. Обратное верно при $n \le 3$ и неверно при $n \ge 4$ ввиду того, что для каждого $n \ge 4$ существует $(n-1)$-мерная комбинаторная сфера L такая, что комплекс $\operatorname{cone} L$ не допускает линейного на симплексах вложения в $\mathbb{R}^n$. Однако имеется следующий результат Дж.Г.К. Уайтхеда [17]: для любого комбинаторного многообразия некоторое его многократное барицентрическое подразделение является многообразием Брауэра.

Для простоты изложения мы всегда будем работать с ориентированными комбинаторными многообразиями, однако все результаты без изменений переносятся на случай неориентируемых многообразий, если вместо обычных симплициальных цепей использовать так называемые *коориентированные симплициальные цепи* (см. [1]). В дальнейшем, если не оговорено противное, под изоморфизмом ориентированных комбинаторных многообразий мы всегда будем понимать изоморфизм, сохраняющий ориентацию, и символ $\cong$ всегда будет использоваться для обозначения изоморфности с сохранением ориентации. Для любого ориентированного комбинаторного многообразия K обозначим через $-K$ комбинаторное многообразие K с обращенной ориентацией.

3. ПРОСТРАНСТВА КОНФИГУРАЦИЙ И ФОРМУЛА ГАБРИЭЛОВА–ГЕЛЬФАНДА–ЛОСИКА

В основе формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика лежат так называемые *пространства конфигураций*.

Пусть L — такая $(n-1)$-мерная комбинаторная сфера, что пространство $\Xi(L)$ вложений $\iota\colon |\operatorname{cone} L| \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, линейных на каждом симплексе комплекса $\operatorname{cone} L$ и переводящих вершину конуса в начало координат, непусто. На пространстве $\Xi(L)$ есть естественное действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Пространство орбит $\Sigma(L) = \Xi(L)/\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ называется *пространством конфигураций* комбинаторной сферы L.

Легко доказать, что, если $\dim L = 1$, пространство конфигураций $\Sigma(L)$ стягиваемо. Известно также, что, если $\dim L = 2$, пространство конфигураций $\Sigma(L)$ линейно связно [18] и односвязно [19]. При $\dim L \geq 3$ о пространствах конфигураций практически ничего неизвестно. В частности, неизвестно, всегда ли $\Sigma(L)$ связно, если $\dim L = 3$.

Пространство $\Sigma(L)$ обладает естественной стратификацией по степени вырождения конфигурации:

$$\Sigma_0(L) \subset \Sigma_1(L) \subset \ldots \subset \Sigma(L).$$

Пространство $\Sigma_0(L)$ состоит из орбит вложений $\iota \in \Xi(L)$ таких, что векторы $\iota(v)$, $v \in V(L)$, находятся в общем положении; пространство $\Sigma_1(L)$ — из орбит вложений $\iota \in \Xi(L)$ таких, что среди векторов $\iota(v)$, $v \in V(L)$, есть не более одного набора из n линейно зависимых векторов.

Пусть $\iota \in \Xi(L)$, ρ — симплекс триангуляции L, $\operatorname{codim}\rho = k$. Обозначим через $W_\rho \subset \mathbb{R}^n$ $(n-k)$-мерное линейное подпространство, натянутое на векторы $\iota(v)$, где v — вершины симплекса ρ. Выберем изоморфизм $\alpha\colon \mathbb{R}^n/W_\rho \to \mathbb{R}^k$ и рассмотрим композицию отображений

$$\iota_\rho\colon\ |\operatorname{cone}\operatorname{link}\rho| \subset |\operatorname{cone} L| \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/W_\rho \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^k.$$

Очевидно, что $\iota_\rho \in \Xi(\operatorname{link}\rho)$, причем $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$-орбита вложения ι_ρ не зависит от выбора изоморфизма α. Таким образом, мы получаем корректно определенное отображение $\varphi_{L,\rho}\colon \Sigma(L) \to \Sigma(\operatorname{link}\rho)$. Нам понадобится следующий частный случай этой конструкции: если K — многообразие Брауэра и σ и τ — его симплексы коразмерности 4 и 3 соответственно такие, что $\sigma \subset \tau$, то определено отображение

$$\varphi_{\sigma\tau} = \varphi_{\operatorname{link}\sigma,\tau\setminus\sigma}\colon\ \Sigma(\operatorname{link}\sigma) \to \Sigma(\operatorname{link}\tau).$$

Для того чтобы применить формулу Габриэлова–Гельфанда–Лосика к многообразию Брауэра K, это многообразие должно быть наделено некоторой специальной дополнительной комбинаторной структурой $\mathcal{B}$, называемой *гиперсимплициальной системой*. По заданной гиперсимплициальной системе при помощи простой комбинаторной конструкции строятся классы когомологий пространств конфигураций: для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 4 — нульмерный класс $\theta_\sigma \in H^0(\Sigma_0(\operatorname{link}\sigma);\mathbb{Q})$; для каждого симплекса $\tau \in K$ коразмерности 3 — одномерный класс $\theta_\tau \in H^1(\Sigma_1(\operatorname{link}\tau),\Sigma_0(\operatorname{link}\tau);\mathbb{Q})$. Мы не будем здесь приводить определения гиперсимплициальной системы и конструкции классов когомологий θ_σ и θ_τ.

Процедура вычисления цикла Γ, представляющего класс гомологий, двойственный по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина ориентированного многообразия Брауэра K, выглядит следующим образом.

1. На многообразии K строится гиперсимплициальная система; по ней вычисляются классы когомологий θ_σ и θ_τ.

2. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 4 выбирается конфигурация $y_\sigma \in \Sigma_0(\operatorname{link}\sigma)$; для каждого симплекса $\tau \in K$ коразмерности 3 выбирается конфигурация $y_\tau \in \Sigma_0(\operatorname{link}\tau)$; для каждой пары симплексов $\sigma \subset \tau$ коразмерности 4 и 3 соответственно выбирается кривая $y_{\sigma\tau}\colon [0,1] \to \Sigma_1(\operatorname{link}\tau)$ такая, что $y_{\sigma\tau}(0) = y_\tau$ и $y_{\sigma\tau}(1) = \varphi_{\sigma\tau}(y_\sigma)$.

3. Цикл Γ определяется теперь по формуле

$$\Gamma = \sum_{\sigma\in K,\ \operatorname{codim}\sigma=4}\left(\langle\theta_\sigma, y_\sigma\rangle + \sum_{\tau\supset\sigma,\ \operatorname{codim}\tau=3}\langle\theta_\tau, y_{\sigma\tau}\rangle\right).$$

Эта формула нелокальна: коэффициент при симплексе в полученном цикле зависит не только от комбинаторного строения линка этого симплекса, но и от выбора дополнительных структур: гиперсимплициальной системы и точек и кривых в пространствах конфигураций. Для получения локальной формулы в [2] предложена некоторая процедура усреднения по различным выборам этих дополнительных структур, однако при этом формула становится гораздо сложнее.

4. АЛГЕБРА $\mathcal{T}_*$ И ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $\mathcal{T}_n$ абелеву группу, порожденную элементами $\langle L\rangle$, где L — всевозможные ориентированные $(n-1)$-мерные комбинаторные сферы, и соотношениями $\langle L_1\rangle = \langle L_2\rangle$, если $L_1 \cong L_2$, и $\langle -L\rangle = -\langle L\rangle$. Очевидно, что $\mathcal{T}_1 \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{T}_2$ — прямая сумма счетного количества групп $\mathbb{Z}_2$ и $\mathcal{T}_n$ — прямая сумма счетного количества групп $\mathbb{Z}_2$ и счетного количества групп $\mathbb{Z}$ при $n \geq 3$. Слагаемые $\mathbb{Z}_2$ соответствуют классам изоморфизма комбинаторных сфер, обладающих автоморфизмами, обращающими ориентацию, слагаемые $\mathbb{Z}$ — классам изоморфизма комбинаторных сфер, не обладающих автоморфизмами, обращающими ориентацию (точнее, парам таких классов изоморфизма, отличающихся ориентацией). Полагаем $\mathcal{T}_0 = \mathbb{Z}$.

Определим понижающий градуировку дифференциал $\partial\colon \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_{n-1}$ на образующих по формуле

$$\partial\langle L\rangle = \sum_{v\in V(L)}\langle\operatorname{link} v\rangle,$$

где линки вершин наделяются индуцированной ориентацией. Дифференциал $\partial\colon \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_0$ полагается нулевым. Легко проверить, что $\partial^2 = 0$.

Прямая сумма

$$\mathcal{T}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{T}_n$$

превращается в суперкоммутативную ассоциативную дифференциальную градуированную алгебру (с понижающим ориентацию дифференциалом) при помощи умножения, задаваемого на образующих по формуле

$$\langle L_1\rangle\langle L_2\rangle = \langle L_1 * L_2\rangle.$$

Непосредственно проверяется, что имеет место формула Лейбница

$$\partial(\lambda\mu) = (\partial\lambda)\mu + (-1)^l \lambda\partial\mu,$$

где $\lambda \in \mathcal{T}_l$, $\mu \in \mathcal{T}_m$.

Пусть Λ — коммутативное кольцо с единицей. Положим

$$\mathcal{T}^n(\Lambda) = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_n, \Lambda).$$

Тогда

$$\mathcal{T}^*(\Lambda) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}^n(\Lambda)$$

есть суперкоммутативная ассоциативная дифференциальная градуированная коалгебра с повышающим ориентацию дифференциалом, определяемым по формуле

$$(\delta f)(\langle L\rangle) = (-1)^n \sum_{v \in V(L)} f(\langle \mathrm{link}\, v\rangle),$$

где $f \in \mathcal{T}^n(\Lambda)$.

Пусть $f \in \mathcal{T}^n(\Lambda)$ и K — ориентированное m-мерное комбинаторное многообразие. Определим симплициальную цепь $f_\sharp(K) \in C_{m-n}(K;\Lambda)$ по формуле

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma \in K,\, \dim\sigma = m-n} f(\langle \mathrm{link}\, \sigma\rangle)\sigma. \tag{4.1}$$

Здесь каждый симплекс σ наделяется произвольной ориентацией, после чего ориентация многообразия K автоматически индуцирует ориентацию линка симплекса σ. При этом знак слагаемого $f(\langle \mathrm{link}\, \sigma\rangle)\sigma$ не зависит от выбранной ориентации симплекса σ.

Первый результат о существовании локальных формул для полиномов от рациональных классов Понтрягина был получен в 1975 г. Н. Левиттом и К. Рурком. В наших обозначениях этот результат формулируется в следующем виде.

Теорема 4.1. *Пусть $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ — однородный полином степени $n = 4k$, где $\deg p_i = 4i$. Тогда для каждого $m \ge n$ существует функция $f_m \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ такая, что для любого m-мерного ориентированного комбинаторного многообразия K цепь $f_{m\sharp}(K)$ является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре классу $F(p_1(K), p_2(K), \ldots)$, где $p_i(K)$ — рациональные классы Понтрягина многообразия K.*

Отметим, что в доказательстве Левитта–Рурка функции f_m для различных m (но для одного и того же полинома F), вообще говоря, никак не связаны между собой. В работе [3] автором было доказано, что на самом деле все функции f_m могут быть выбраны одинаковыми. Более того, если какая-нибудь функция $f_m \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ удовлетворяет требованиям теоремы 4.1 для какого-либо одного $m \ge n$, то эта же функция удовлетворяет требованиям теоремы 4.1 и для всех остальных $m \ge n$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 4.2. *Пусть $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ — однородный полином степени $n = 4k$, где $\deg p_i = 4i$. Тогда существует функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ такая, что для любого ориентированного комбинаторного многообразия K такого, что $\dim K \ge n$, цепь $f_\sharp(K)$ является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре классу $F(p_1(K), p_2(K), \ldots)$.*

Это незначительное, на первый взгляд, усиление теоремы Левитта–Рурка является для нас весьма существенным, так как позволяет ввести следующее

Определение 4.3. Функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ называется (*универсальной*) *локальной формулой* для однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ степени n, если для любого ориентированного комбинаторного многообразия K такого, что $\dim K \geq n$, цепь $f_\sharp(K)$ является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре классу $F(p_1(K), p_2(K), \ldots)$.

Теорема 4.2, таким образом, утверждает существование локальных формул для всех однородных полиномов от рациональных классов Понтрягина. Можно рассмотреть в некотором смысле обратный вопрос. Пусть функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ такова, что цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого ориентированного комбинаторного многообразия K такого, что $\dim K \geq n$. Что можно сказать о классах гомологий, представляемых циклами $f_\sharp(K)$? Ответ на этот вопрос был получен автором в [3] и имеет следующий вид.

Теорема 4.4. *Следующие три условия на функцию $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ эквивалентны*:

(1) *цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого ориентированного комбинаторного многообразия K такого, что $\dim K \geq n$*;

(2) *f является локальной формулой для некоторого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина*;

(3) *f — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, т.е. $\delta f = 0$.*

Кроме того, когомологичные коциклы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ являются локальными формулами для одного и того же полинома от рациональных классов Понтрягина.

Следствие 4.5. *Отображение, сопоставляющее каждому коциклу f комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ полином F, для которого f является локальной формулой, индуцирует аддитивный гомоморфизм*

$$\varphi\colon\ H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots].$$

Опишем теперь гомологии дифференциальной градуированной алгебры $\mathcal{T}_* \otimes \mathbb{Q}$ и когомологии коалгебры $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Обозначим через Ω_*^{SO} кольцо ориентированных кобордизмов. Хорошо известно, что кольцо $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}$ изоморфно кольцу полиномов, имеющему по одной образующей в каждой положительной размерности, кратной 4.

Построим гомоморфизм $\alpha\colon \Omega_*^{\mathrm{SO}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$ следующим образом. Пусть M^n — ориентированное гладкое многообразие. Выберем произвольную гладкую триангуляцию K многообразия M^n и положим

$$\alpha([M^n]) = \left[\sum_{v \in V(K)} \langle \operatorname{link} v\rangle\right],$$

где квадратные скобки в левой части обозначают класс кобордизмов, а в правой — класс гомологий. Непосредственно проверяется, что сумма, стоящая в квадратных скобках в правой части формулы, является циклом комплекса $\mathcal{T}_*$ и ее класс гомологий не зависит от выбора триангуляции K и не меняется при замене многообразия M^n на кобордантное (подробности см. в [8]). Таким образом, α — корректно определенный гомоморфизм. Несложно проверить, что гомоморфизм $\alpha \otimes \mathbb{Q}$ сопряжен гомоморфизму φ относительно канонического невырожденного спаривания

$$\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] \otimes (\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q},$$

задаваемого числами Понтрягина. В [8] автором доказана следующая

Теорема 4.6. *Ядро и коядро гомоморфизма α являются группами кручения. Гомоморфизмы*

$$\alpha \otimes \mathbb{Q}\colon\ \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q} \to H_*(\mathcal{T}_*) \otimes \mathbb{Q}, \qquad \varphi\colon\ H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$$

являются изоморфизмами.

Непосредственным следствием теоремы 4.6 является следующая теорема единственности для локальных формул, полученная в [3].

Теорема 4.7. *Локальная формула для однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ единственна с точностью до кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.*

Применим полученные теоремы к локальным формулам для первого рационального класса Понтрягина. Из теорем 4.2, 4.4 и 4.7 следует, что функция $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, являющаяся решением уравнения $\delta f = 0$, единственна с точностью до прибавления кограницы и умножения на рациональную константу. При этом всякая такая функция является локальной формулой для первого рационального класса Понтрягина, умноженного на некоторую константу. В дальнейшем план наших действий состоит в том, чтобы, используя технику бизвездных преобразований, описать явно все решения $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ уравнения $\delta f = 0$.

5. БИЗВЕЗДНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ГРАФЫ Γ_n

Пусть K — n-мерное комбинаторное многообразие с множеством вершин V. Предположим, что комплекс K содержит полный подкомплекс вида $\sigma^k * \partial\tau^{n-k}$, где σ^k — симплекс комплекса K, τ^{n-k} — “пустой симплекс” комплекса K, т.е. $(n-k+1)$-элементное подмножество множества V, не принадлежащее K, но такое, что все его собственные подмножества принадлежат K. Заменим в симплициальном комплексе K полный подкомплекс $\sigma^k * \partial\tau^{n-k}$ на полный подкомплекс $\partial\sigma^k * \tau^{n-k}$ и обозначим полученный симплициальный комплекс через K_1. Непосредственно проверяется, что K_1 — комбинаторное многообразие, кусочно линейно гомеоморфное комбинаторному многообразию K. Произведенная операция называется *бизвездным преобразованием* и обозначается через $\beta = \beta_{K,\sigma^k}$, а полученное в результате комбинаторное многообразие K_1 — через $\beta(K)$. В описанной выше конструкции можно брать $k = 0$ или $k = n$, принимая соглашения $\partial\mathrm{pt} = \varnothing$ и $\sigma * \varnothing = \sigma$. Таким образом, частными случаями бизвездных преобразований являются звездные подразделения n-мерных симплексов и операции, обратные звездным подразделениям n-мерных симплексов. Бизвездное преобразование $\beta_{K_1,\tau^{n-k}}$ мы будем называть бизвездным преобразованием, *обратным* преобразованию β, и обозначать через β^{-1}. Все виды бизвездных преобразований для многообразий размерности 2 и 3 изображены на рис. 1 и 2. Преобразование, изображенное на рис. 2 справа, переводит два тетраэдра, имеющих общую двумерную грань, в три тетраэдра с общим ребром.

Пусть K_1 и K_2 — ориентированные комбинаторные многообразия одной размерности, симплексы $\sigma_1 \in K_1$ и $\sigma_2 \in K_2$ таковы, что существуют бизвездные преобразования β_{K_1,σ_1} и β_{K_2,σ_2}. Бизвездные преобразования β_{K_1,σ_1} и β_{K_2,σ_2} называются *эквивалентными*, если существует

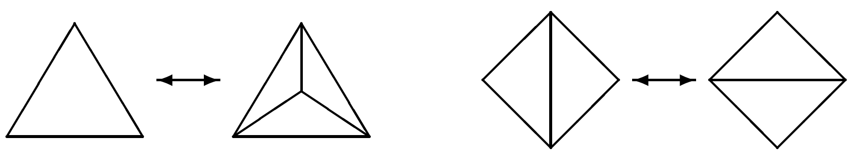

Рис. 1. Бизвездные преобразования для многообразий размерности 2

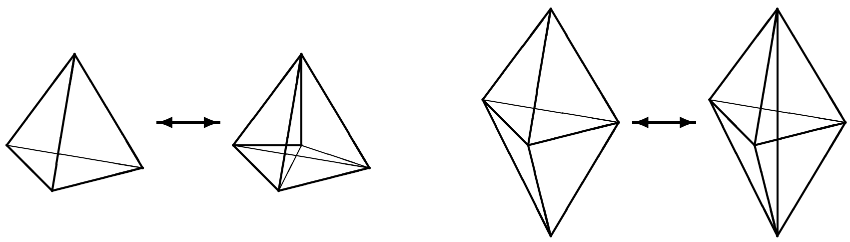

Рис. 2. Бизвездные преобразования для многообразий размерности 3

изоморфизм $f\colon K_1 \to K_2$ такой, что $f(\sigma_1) = \sigma_2$. Бизвездное преобразование β называется *несущественным*, если β эквивалентно β^{-1}. Все остальные бизвездные преобразования называются *существенными*.

Если $k \neq 0, n$, то множества вершин комбинаторных многообразий K и K_1 совпадают; если $k = 0$ или $k = n$, то одно из множеств $V(K)$ и $V(K_1)$ содержит на одну вершину больше, чем другое. В первом случае положим $V(\beta) = V(K) = V(K_1)$; во втором обозначим через $V(\beta)$ большее из множеств $V(K)$ и $V(K_1)$. Введем также обозначение $U(\beta) = V(\partial\sigma^k * \partial\tau^{n-k}) \subset V(\beta)$. Множество $U(\beta)$ состоит из тех вершин, которые не появляются и не исчезают при бизвездном преобразовании β, но линки которых изменяются при этом бизвездном преобразовании. Для каждой вершины $v \in U(\beta)$ бизвездное преобразование β индуцирует бизвездное преобразование $\beta_v = \beta_{\mathrm{link}_K v,\, \sigma^k \setminus \{v\}}$, переводящее комбинаторную сферу $\mathrm{link}_K v$ в комбинаторную сферу $\mathrm{link}_{K_1} v$.

В 1987 г. У. Пахнером [20] (см. также [21]) была доказана следующая

Теорема 5.1. *Пусть K_1 и K_2 — кусочно линейно гомеоморфные комбинаторные многообразия. Тогда комбинаторное многообразие K_1 может быть переведено в комбинаторное многообразие K_2 при помощи конечной последовательности бизвездных преобразований и изоморфизмов.*

В частности, любые две комбинаторные сферы одной размерности связаны последовательностью из бизвездных преобразований и изоморфизмов. Поэтому для того, чтобы описать функции $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ такие, что $\delta f = 0$, достаточно указать, как значение $f(\langle L \rangle)$ изменяется при бизвездных преобразованиях трехмерной ориентированной комбинаторной сферы L. Нам будут нужны некоторые дополнительные конструкции.

Для каждого n построим бесконечный граф Γ_n следующим образом. Вершинами графа Γ_n будут классы изоморфизма ориентированных n-мерных комбинаторных сфер. Класс изоморфизма комбинаторной сферы L и соответствующая вершина графа Γ_n будут обозначаться через $\{L\}$. Подчеркнем, что $\{L\}$ и $\{-L\}$ — это, вообще говоря, разные вершины (за исключением случая, когда комбинаторная сфера L обладает обращающим ориентацию автоморфизмом). Ребра графа Γ_n соответствуют классам эквивалентности существенных бизвездных преобразований n-мерных комбинаторных сфер; при этом классам эквивалентности бизвездных преобразований β и β^{-1} соответствует одно и то же ребро с противоположными ориентациями. (Граф Γ_n может содержать кратные ребра и петли.) Ориентированное ребро, соответствующее классу эквивалентности бизвездного преобразования β, мы будем обозначать через $\{\beta\}$. Таким образом, $\{\beta^{-1}\} = -\{\beta\}$.

Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на графе Γ_n, обращая ориентации всех комбинаторных сфер. Обозначим через $\mathcal{Q}$ группу $\mathbb{Q}$, рассматриваемую как $\mathbb{Z}_2$-модуль такой, что образующая группы $\mathbb{Z}_2$ действует умножением на -1. Обозначим через $C^i_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n; \mathcal{Q})$ и $H^i_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n; \mathcal{Q})$, $i = 0, 1$, группы i-мерных эквивариантных клеточных коцепей и i-мерных эквивариантных гомологий графа Γ_n соответственно относительно указанных действий группы $\mathbb{Z}_2$. Дифференциал коцепного комплекса $C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n; \mathcal{Q})$ мы будем обозначать через d. Из теоремы Пахнера сразу следует, что граф Γ_n связен. Поэтому $H^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n; \mathcal{Q}) = 0$. Очевидно, что группа $C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n; \mathcal{Q})$ канонически изоморфна группе $\mathcal{T}^{n+1}(\mathbb{Q})$. Таким образом, определен дифференциал

$$\delta\colon\ C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n; \mathcal{Q}) \to C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n+1}; \mathcal{Q}).$$

Определим дифференциал

$$\delta\colon\ C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n; \mathcal{Q}) \to C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n+1}; \mathcal{Q})$$

по формуле

$$(\delta h)(\{\beta\}) = (-1)^n \sum_{v \in U(\beta)} h(\{\beta_v\}).$$

Легко проверить, что $d\delta = \delta d$. Таким образом, мономорфизм d можно рассматривать как цепное отображение коцепного комплекса $(C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_*;\mathcal{Q}),\delta)$ в коцепной комплекс $(C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_*;\mathcal{Q}),\delta)$. Оказывается, что это цепное отображение цепно гомотопно нулю. Цепная гомотопия строится следующим образом. Пусть β — бизвездное преобразование, переводящее ориентированную $(n-1)$-мерную комбинаторную сферу L_1 в комбинаторную сферу L_2 и заменяющее полный подкомплекс $\sigma * \partial\tau \subset L_1$ на полный подкомплекс $\partial\sigma * \tau \subset L_2$. Рассмотрим (абстрактный) симплициальный комплекс L_β на множестве вершин $V(\beta)\sqcup\{u_1,u_2\}$, состоящий из всех симплексов $\rho \in L_1 \cup L_2$, всех симплексов $\rho\cup\{u_1\}$ таких, что $\rho\in L_1$, всех симплексов $\rho\cup\{u_2\}$ таких, что $\rho\in L_2$, и симплекса $\sigma\cup\tau$. Непосредственно проверяется, что комплекс L_β является n-мерной комбинаторной сферой. Ориентируем его так, чтобы линк вершины u_2 был изоморфен L_2 с сохранением ориентации. Тогда линк вершины u_1 будет изоморфен L_1 с обращением ориентации. Определим отображение

$$s\colon\ C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathcal{Q}) \to C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathcal{Q})$$

по формуле

$$s(f)(\{\beta\}) = (-1)^{n-1} f(\{L_\beta\}).$$

Легко проверить, что $d = \delta s - s\delta$.

Теперь рассмотрим более детально случаи $n=1$ и $n=2$. Граф Γ_1 изоморфен графу такому, что его вершинами являются все натуральные числа, не меньшие 3, и для любого $k\geq 3$ вершины k и $k+1$ соединены ровно одним ребром. Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на нем тривиально. Значит, $C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_1;\mathcal{Q}) = C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_1;\mathcal{Q}) = 0$.

Выделим в графе Γ_2 циклы двух типов, которые мы будем называть *элементарными циклами*. Первый тип элементарных циклов соответствует “коммутации” двух бизвездных преобразований. Пусть L — ориентированная двумерная комбинаторная сфера, σ_1 и σ_2 — два ее симплекса такие, что, во-первых, в L нет двумерного симплекса, содержащего и σ_1 и σ_2, во-вторых, $\operatorname{link}\sigma_i = \partial\tau_i$ для некоторых “пустых” симплексов τ_i, $i=1,2$, и, в-третьих, существуют бизвездные преобразования $\beta_1 = \beta_{L,\sigma_1}$, $\beta_2 = \beta_{L_2,\sigma_2}$, $\beta_3 = \beta_{L_3,\tau_1}$ и $\beta_4 = \beta_{L_4,\tau_2}$, где $L_2 = \beta_1(L)$, $L_3 = \beta_2(L_2)$ и $L_4 = \beta_3(L_3)$. В этом случае всегда $\beta_4(L_4)\cong L$. Получаем цикл из ребер $\{\beta_i\}$, $i=1,2,3,4$, в графе Γ_2. Обозначим этот цикл через $\gamma(L,\sigma_1,\sigma_2)$. Различные виды таких циклов изображены на рис. 3, *а–и*. Ко второму типу элементарных циклов отнесем все циклы в графе Γ_2, изображенные на рис. 4, *а–в*. При этом и для первого, и для второго типа элементарных циклов все несущественные бизвездные преобразования просто пропускаются.

В дальнейшем под циклом в графе мы всегда понимаем клеточную 1-цепь, являющуюся циклом, а не замкнутую последовательность ребер.

Предложение 5.2. *Любой цикл в графе Γ_2 представляется в виде целочисленной линейной комбинации элементарных циклов.*

Схема доказательства. Нам будет удобно ввести следующее вспомогательное определение. Пусть L — двумерная комбинаторная сфера с k вершинами. Будем говорить, что *сложность* $a(L)$ триангуляции L равна k, если L содержит хотя бы одну вершину степени 3, равна $k+\frac13$, если L не содержит вершин степени 3, но содержит хотя бы одну вершину степени 4, и равна $k+\frac23$, если L не содержит вершин степени 3 и 4. В последнем случае из формулы Эйлера следует, что L содержит хотя бы 12 вершин степени 5. Таким образом, сложность вершины принимает значения в множестве $\frac13\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Пусть β — бизвездное преобразование, переводящее двумерную комбинаторную сферу L_1 в двумерную комбинаторную сферу L_2. Положим $a(\beta) = \max(a(L_1),a(L_2))$, если $a(L_1)\neq a(L_2)$, и $a(\beta) = a(L_1)+\frac16$, если $a(L_1)=a(L_2)$. Тогда *сложность* $a(\beta)$ бизвездного преобразования β принимает значения в множестве $\frac16\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Обозначим через Γ_2^a, $a\in\frac16\mathbb{Z}_{\geq 0}$, подграф графа Γ_2, состоящий из всех вершин и ребер, сложность которых не превосходит a.

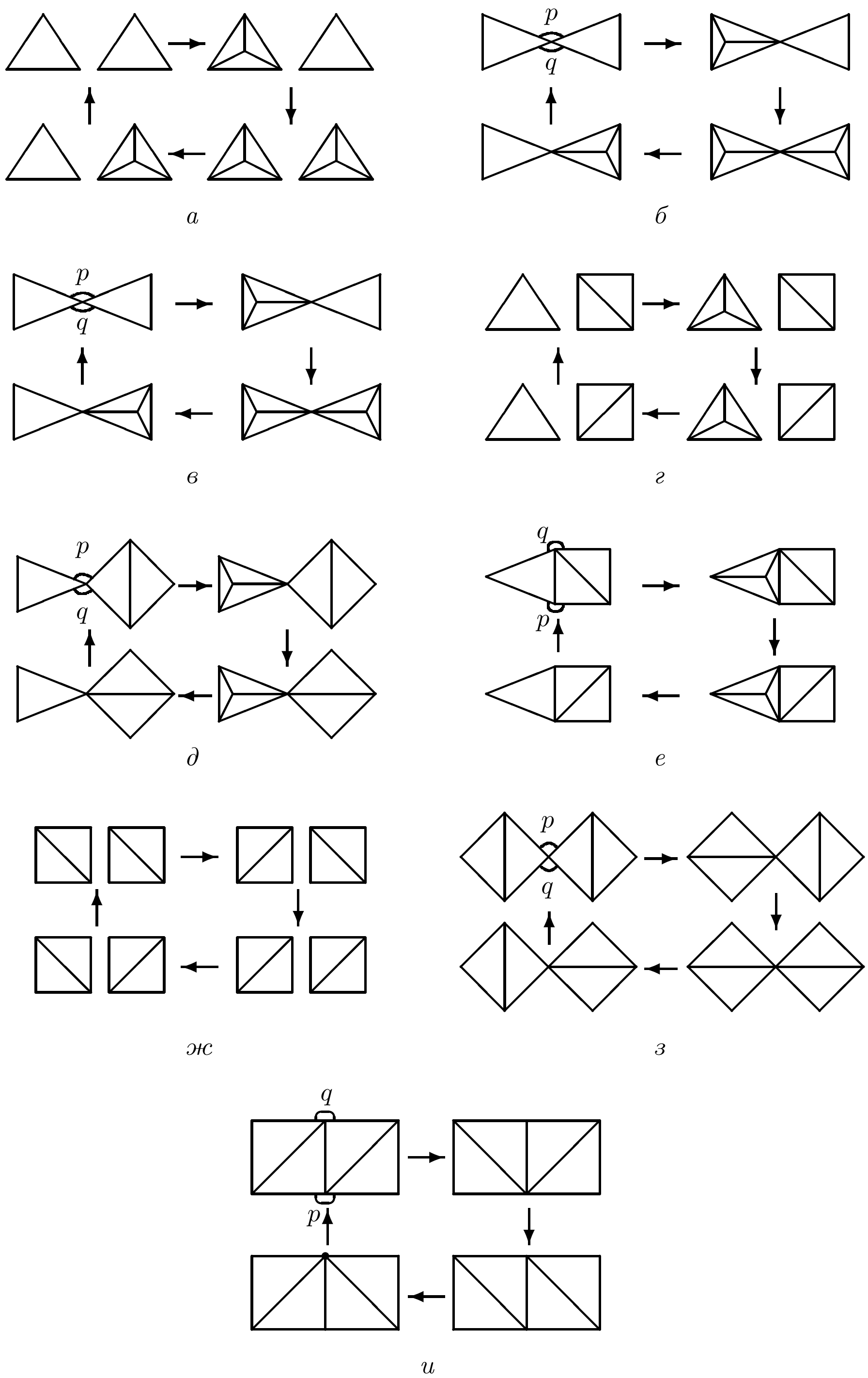

Рис. 3. Элементарные циклы первого типа

Очевидно, что для доказательства предложения нам достаточно доказать, что любой относительный клеточный цикл пары $\left(\Gamma_2^a, \Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}\right)$ представляется в виде суммы линейной комбинации элементарных циклов и некоторой клеточной цепи графа $\Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$. Это утверждение надо доказывать отдельно в каждом из случаев $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{b}{6}$, $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ниже мы подробно разберем случаи $b = 1$ и $b = 4$. Случай $b = 0$ совсем тривиален; случай $b = 2$ практически аналогичен случаю $b = 4$; случаи $b = 3, 5$ аналогичны случаю $b = 1$: детали доказательства в разных случаях немного отличаются, но принципиальных отличий нет.

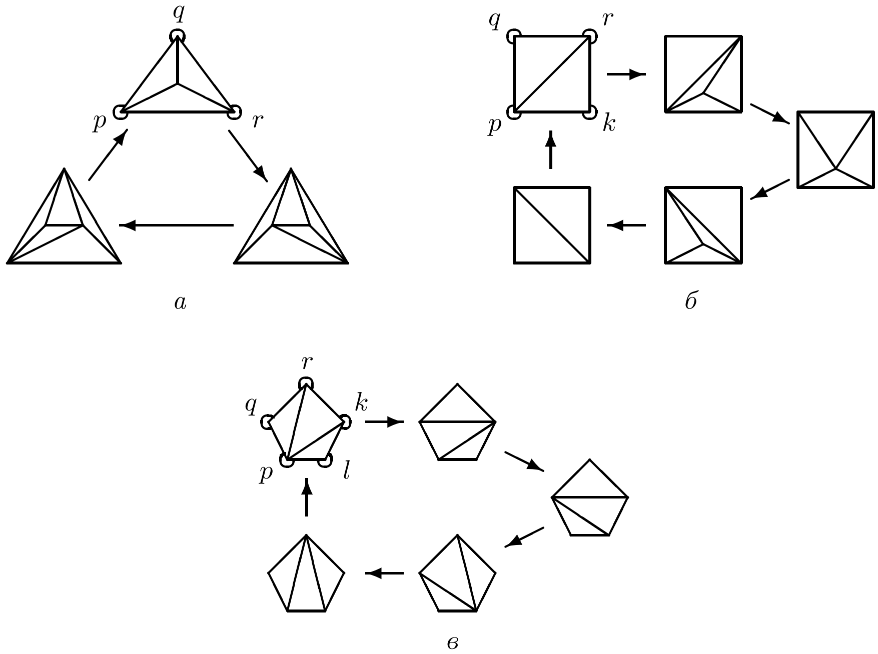

Рис. 4. Элементарные циклы второго типа

Случай $a = k + \frac{1}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что множества вершин графов $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$ и Γ_2^k совпадают. Поэтому группа относительных циклов пары $\left(\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}, \Gamma_2^k\right)$ порождена ребрами $\{\beta\}$ такими, что β — существенное бизвездное преобразование, переводящее L_1 в L_2, где каждая из комбинаторных сфер L_1 и L_2 имеет по k вершин и содержит вершину степени 3. Пусть $\beta = \beta_{L_1,\sigma}$. Тогда $\dim \sigma = 1$. Рассмотрим два подслучая.

1. Имеется вершина $v \in V(L_1) = V(L_2)$ такая, что степень вершины v в каждой из триангуляций L_1 и L_2 равна 3. Тогда $v \notin U(\beta)$ и, следовательно, корректно определен цикл $\gamma(L_1, \sigma, v)$. При этом цепь $\{\beta\} - \gamma(L_1, \sigma, v)$ имеет носитель в графе Γ_2^k.

2. Не существует вершины $v \in V(L_1) = V(L_2)$ такой, что степень вершины v в каждой из триангуляций L_1 и L_2 равна 3. Тогда существуют две вершины $v_1, v_2 \in U(\beta)$ такие, что степени вершины v_1 в триангуляциях L_1 и L_2 равны 3 и 4 соответственно, а вершины v_2 — наоборот, 4 и 3 соответственно. Тогда бизвездное преобразование β устроено так же, как бизвездное преобразование, изображенное на рис. 4, *а* внизу (или обратное ему). Соответственно, прибавляя к $\{\beta\}$ или отнимая от $\{\beta\}$ цикл, изображенный на этом рисунке, мы получим цепь с носителем в Γ_2^k.

Случай $a = k + \frac{2}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Группа относительных циклов пары $\left(\Gamma_2^{k+\frac{2}{3}}, \Gamma_2^{k+\frac{1}{2}}\right)$ порождена разностями $\{\beta_1\} - \{\beta_2\}$, где β_1 и β_2 — бизвездные преобразования, переводящие L в L_1 и L_2 соответственно, где L — ориентированная комбинаторная сфера с k вершинами, не содержащая вершин степени 3 и 4, L_1 и L_2 — ориентированные комбинаторные сферы с k вершинами, каждая из которых содержит вершину степени 4. При этом каждое из бизвездных преобразований β_i имеет вид β_{L,σ_i}, где σ_i — ребро, выходящее из вершины степени 5. В триангуляции L всегда есть не менее 12 вершин степени 5. Поэтому в триангуляции L есть достаточно много (не менее 36) ребер σ таких, что $\beta_{L,\sigma}$ — бизвездное преобразование сложности $k + \frac{2}{3}$. При помощи небольшого перебора легко показать, что для того, чтобы породить группу относительных циклов пары $\left(\Gamma_2^{k+\frac{2}{3}}, \Gamma_2^{k+\frac{1}{2}}\right)$, достаточно использовать только те разности $\{\beta_1\} - \{\beta_2\}$, для которых корректно определен цикл $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$. Тогда носитель цепи $\{\beta_1\} - \{\beta_2\} - \gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ содержится в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{2}}$. $\square$

Замечание 5.3. Заметим, что приведенное доказательство предложения 5.2 на самом деле дает нам явный алгоритм для нахождения представления данного цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных циклов. Этот алгоритм будет нужен нам для получения явной локальной формулы для первого класса Понтрягина. В принципе несложно доказать, что элементарные циклы второго типа на самом деле не нужны, так как они представляются в виде линейной комбинации элементарных циклов первого типа. Тем не менее нам удобно использовать циклы обоих типов из-за того, что алгоритм для нахождения разложения заданного цикла только по циклам первого типа более сложен. Предложение 5.2 было первоначально доказано автором в [3] другим методом с использованием реализаций двумерных комбинаторных сфер в виде границ выпуклых симплициальных многогранников в $\mathbb{R}^3$ и теоремы Штейница о том, что любые две такие реализации могут быть продеформированы одна в другую в классе выпуклых симплициальных многогранников. Из этого доказательства также можно извлечь явный алгоритм для разложения заданного цикла, однако он гораздо сложнее, чем алгоритм, описанный выше.

Замечание 5.4. Приклеив к графу Γ_2 двумерные клетки вдоль всех элементарных циклов, мы получим двумерный комплекс X. Предложение 5.2 утверждает, что $H_1(X;\mathbb{Z})=0$. На самом деле несложно убедиться, что из приведенного доказательства следует односвязность комплекса X.

6. ЯВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРВОГО КЛАССА ПОНТРЯГИНА

Как было отмечено в конце разд. 4, элементы группы

$$B=\ker\bigl[\delta\colon \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})\to\mathcal{T}^5(\mathbb{Q})\bigr]=\ker\bigl[\delta\colon C^0(\Gamma_3;\mathcal{Q})\to C^0(\Gamma_4;\mathcal{Q})\bigr]$$

— это в точности локальные формулы для первого рационального класса Понтрягина, умноженного на какое-либо рациональное число. Поэтому наша задача состоит в явном описании группы B. Из равенства $d=\delta s-s\delta$ следует, что $d|_B=\delta s|_B$ и $d|_{C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})}=-s\delta|_{C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})}$. Но d — мономорфизм. Значит, гомоморфизм $s|_B$ является мономорфизмом и отображает группу $\delta(C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q}))$ изоморфно на группу $d(C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q}))$. При этом образ $s(B)$ содержится в подгруппе $A\subset C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})$, состоящей из всех коциклов, классы когомологий которых принадлежат группе

$$N=\ker\bigl[\delta^*\colon H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})\to H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3;\mathcal{Q})\bigr],$$

где δ^* — отображение групп когомологий, индуцированное отображением δ коцепных комплексов.

Группа N была вычислена автором в [3]. Она одномерна (как $\mathbb{Q}$-модуль) и порождается классом когомологий c, значения которого на элементарных циклах приведены в таблице. В правом столбце этой таблицы выписаны значения класса c на циклах, изображенных на рисунках, номера которых выписаны в левом столбце. Эти значения зависят от количеств треугольников, примыкающих к изображенным на рисунках вершинам внутри углов, помеченных дугами на рисунках. Эти количества обозначены теми буквами, которые написаны на рисунках рядом с соответствующими дугами. Через ρ и ω обозначены функции

$$\rho(p,q)=\frac{q-p}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)},\qquad \omega(p)=\frac{1}{(p+2)(p+3)}.$$

Из предложения 5.2, конечно же, следует, что класс c полностью определяется своими значениями на элементарных циклах.

Значения класса когомологий c на элементарных циклах

3, *а*, *г*, *ж*	0
3, *б*, *д*, *з*	$\rho(p,q)$
3, *в*, *и*	$\rho(0,q)-\rho(0,p)$
3, *е*	$\rho(0,q)+\rho(0,p)$
4, *а*	$\omega(p)-\omega(q)+\omega(r)-\frac{1}{12}$
4, *б*	$\omega(p)-\omega(q)-\omega(r)+\omega(k)$
4, *в*	$\omega(p)+\omega(q)+\omega(r)+\omega(k)+\omega(l)-\frac{1}{12}$

Замечание 6.1. Интересно, что функция, очень похожая на функцию ρ, встречалась у М.Э. Казаряна [22] в выражении для класса Эйлера S^1-расслоения в терминах особенностей ограничения морсовской функции на тотальном пространстве на слои этого расслоения.

Из одномерности $\mathbb{Q}$-модуля N следует, что $\mathbb{Q}$-модуль $d(C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q}))$ имеет коразмерность 1 в $\mathbb{Q}$-модуле A. С другой стороны, из теоремы 4.6 следует, что $\mathbb{Q}$-модуль $\delta(C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q}))$ имеет коразмерность 1 в $\mathbb{Q}$-модуле B. Следовательно, мономорфизм $s|_B\colon B\to A$ является изоморфизмом. При этом $(s|_B)^{-1}=d^{-1}\delta|_A$. Таким образом, для каждого коцикла $h\in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})$, представляющего класс когомологий c, функция $f=d^{-1}\delta(h)\in\mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ является локальной формулой для класса λp_1, где λ — некоторая рациональная константа. Чтобы вычислить константу λ, надо вычислить сумму $\sum_{v\in V(K)}f(\langle\operatorname{link}v\rangle)$ для некоторого ориентированного четырехмерного комбинаторного многообразия K с ненулевым первым числом Понтрягина и сравнить эту сумму с первым числом Понтрягина многообразия K. Прямое вычисление для 9-вершинной триангуляции $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, построенной В. Кюхнелем и Т. Банхофом [23], дает $\lambda=1$. Таким образом, локальные формулы для первого класса Понтрягина находятся во взаимно однозначном соответствии с коциклами h, представляющими класс когомологий c, и это соответствие устанавливается взаимно обратными отображениями $s|_B$ и $d^{-1}\delta|_A$.

Для того чтобы описать явно какую-нибудь одну локальную формулу f для первого рационального класса Понтрягина, нужно выбрать какой-нибудь коцикл h, представляющий класс когомологий c. Это можно сделать, например, следующим образом. Укажем явно для каждой вершины $\{L\}$ графа Γ_2 цепь $\xi_{\{L\}}\in C_1(\Gamma_2;\mathbb{Z})$ такую, что $\partial\xi_{\{L\}}=\{L\}-\{\partial\Delta^3\}$. Положим $\xi_{\{\partial\Delta^3\}}=0$. Цепь $\xi_{\{L\}}$ будет вычисляться через такие же цепи для вершин меньшей сложности при помощи следующей рекуррентной формулы. Пусть $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r$ — все бизвездные преобразования, понижающие сложность комбинаторной сферы L (легко доказать, что такие бизвездные преобразования всегда есть); $L_1,L_2,\dots,L_r$ — ориентированные комбинаторные двумерные сферы, получающиеся в результате этих преобразований. Положим

$$\xi_{\{L\}}=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\bigl(\xi_{\{L_j\}}-\{\beta_j\}\bigr).$$

Коцикл h определяется теперь по формуле

$$h(\{\beta\})=\bigl\langle c,\{\beta\}+\xi_{\{L_1\}}-\xi_{\{L_2\}}\bigr\rangle,$$

где β — бизвездное преобразование, переводящее комбинаторную сферу L_1 в комбинаторную сферу L_2.

Процедура вычисления значения $f\bigl(\langle L\rangle\bigr)$ выглядит следующим образом.

1. Находим последовательность бизвездных преобразований

$$\partial\Delta^4 = L_1 \overset{\beta_1}{\rightsquigarrow} L_2 \overset{\beta_2}{\rightsquigarrow} \dots \overset{\beta_{k-1}}{\rightsquigarrow} L_k \overset{\beta_k}{\rightsquigarrow} L_{k+1} \cong L, \tag{6.1}$$

переводящую границу 4-мерного симплекса в трехмерную комбинаторную сферу L.

2. Положим

$$\eta = \sum_{j=1}^{k} \sum_{v \in U(\beta_j)} \{(\beta_j)_v\} \in C_1(\Gamma_2; \mathbb{Z}).$$

3. Вычислим рекуррентно цепи $\xi_{\{\operatorname{link} v\}}$ для всех $v \in V(L)$. Тогда $\zeta = \eta - \sum_{v \in V(L)} \xi_{\{\operatorname{link} v\}}$ — цикл.

4. Представим цикл ζ в виде линейной комбинации $\sum_{i=1}^{l} n_i\gamma_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, γ_i — элементарные циклы (см. доказательство предложения 5.2).

5. Тогда

$$f(\langle L\rangle) = \sum_{i=1}^{l} n_i \langle c, \gamma_i\rangle,$$

где значения $\langle c, \gamma_i\rangle$ берутся из таблицы.

Теперь цикл $f_\sharp(K)$, представляющий класс гомологий, двойственный первому рациональному классу Понтрягина ориентированного комбинаторного многообразия K, вычисляется при помощи универсальной локальной формулы (4.1).

В указанном алгоритме наибольшую сложность представляют шаги 1 и 3. Из теоремы Пахнера следует, что цепочка (6.1) существует для любой трехмерной комбинаторной сферы L. Она всегда может быть найдена, если совершать с триангуляцией L всевозможные бизвездные преобразования. Однако такой алгоритм, конечно же, очень сложен. Основываясь на некоторых эмпирических правилах поиска упрощающих бизвездных преобразований, А. Бьорнер и Ф. Лутц создали компьютерную программу BISTELLAR (см. [24]), которая позволяет, в частности, достаточно эффективно находить цепочки вида (6.1) для комбинаторных сфер со сравнительно небольшим количеством вершин. Тем не менее неизвестно никаких теоретических оценок на число бизвездных преобразований в цепочке (6.1) для данной комбинаторной сферы L.

Сложность шага 3 состоит в том, что описанный рекуррентный процесс может сильно ветвиться. Если сложность шага 1 носит, по-видимому, принципиальный характер, то сложность шага 3 связана с тем, что мы хотим получить ответ в виде универсальной локальной формулы (4.1). В этом месте алгоритм может быть существенно упрощен, если отказаться от требования локальности. Опишем такую упрощенную процедуру вычисления симплициального цикла Z, представляющего класс гомологий, двойственный по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина ориентированного m-мерного комбинаторного многообразия K.

1. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 3 или 4 найдем последовательность бизвездных преобразований

$$\partial\Delta^{\operatorname{codim}\sigma - 1} = L_1^{(\sigma)} \overset{\beta_1^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} L_2^{(\sigma)} \overset{\beta_2^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} \dots \overset{\beta_{k(\sigma)}^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} L_{k(\sigma)+1}^{(\sigma)} \cong \operatorname{link}\sigma. \tag{6.2}$$

2. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 4 выберем какую-нибудь ориентацию; снабдим все симплексы $\tau \in K$ коразмерности 3, содержащие σ, такими ориентациями, чтобы коэффициент инцидентности симплексов σ и τ был равен $+1$, и наделим все комбинаторные сферы $L_j^{(\sigma)}$ и $L_j^{(\tau)}$ ориентациями, согласованными с выбранными ориентациями симплексов σ

и τ (один и тот же симплекс τ может иметь разные ориентации для разных симплексов $\sigma \subset \tau$). Положим

$$\zeta_\sigma = \sum_{j=1}^{k(\sigma)} \sum_{v \in U(\beta_j^{(\sigma)})} \{(\beta_j^{(\sigma)})_v\} - \sum_{\substack{\tau \in K,\, \tau \supset \sigma \\ \operatorname{codim} \tau = 3}} \sum_{j=1}^{k(\tau)} \{\beta_j^{(\tau)}\}.$$

Тогда ζ_σ — цикл.

3. Представив цикл ζ_σ в виде суммы элементарных циклов, вычислим значение $r_\sigma = \langle c, \zeta_\sigma \rangle$. Тогда искомый цикл задается по формуле

$$Z = \sum_{\sigma \in K,\, \operatorname{codim} \sigma = 4} r_\sigma \sigma.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что бизвездные преобразования играют в формуле, описанной в разд. 4–6, примерно такую же роль, как пространства конфигураций в формуле Габриэлова–Гельфанда–Лосика. В действительности трехмерная комбинаторная сфера — это слишком абстрактный объект, с которым практически невозможно работать, если не связать его с каким-либо более простым объектом. В формуле Габриэлова–Гельфанда–Лосика в качестве такой связи выступает линейное на симплексах вложение конуса над трехмерной комбинаторной сферой в четырехмерное евклидово пространство, в формуле автора — последовательность бизвездных преобразований, переводящих трехмерную комбинаторную сферу в границу четырехмерного симплекса. Преимущество последовательности бизвездных преобразований заключается, конечно же, в том, что она существует для любой комбинаторной сферы. В действительности и бизвездные преобразования, и пространства конфигураций устроены сравнительно просто для комбинаторных сфер размерности ≤ 2 и гораздо сложнее для трехмерных сфер. Однако для вычисления первого класса Понтрягина нужно работать как раз с трехмерными комбинаторными сферами. Именно с этим связана сложность обеих обсуждаемых в настоящей работе комбинаторных формул.

В заключение я хотел бы поблагодарить В.М. Бухштабера, поставившего мне несколько лет назад задачу о комбинаторных формулах для классов Понтрягина, за постоянное внимание к моей работе и Г.И. Шарыгина за многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габриэлов А.М., Гельфанд И.М., Лосик М.В.* Комбинаторное вычисление характеристических классов // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, №2. С. 12–28; №3. С. 5–26.
2. *Габриэлов А.М., Гельфанд И.М., Лосик М.В.* Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, №1. С. 14–17.
3. *Гайфуллин А.А.* Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, №5. С. 13–66.
4. *MacPherson R.* The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class // Sèminaire Bourbaki 1976/77. Berlin: Springer, 1978. Exp. 497. P. 105–124. (Lect. Notes Math.; V. 677).
5. *Габриэлов А.М.* Комбинаторные формулы для классов Понтрягина и GL-инвариантные цепи // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, №2. С. 1–7.
6. *Gelfand I.M., MacPherson R.D.* A combinatorial formula for the Pontrjagin classes // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 26, N 2. P. 304–309.
7. *Cheeger J.* Spectral geometry of singular Riemannian spaces // J. Diff. Geom. 1983. V. 18, N 4. P. 575–657.
8. *Гайфуллин А.А.* Построение комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин // Изв. РАН. Сер. мат. 2008. Т. 72, №5. С. 3–62.
9. *Levitt N., Rourke C.* The existence of combinatorial formulae for characteristic classes // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 239. P. 391–397.

10. *Гайфуллин А.А.* Вычисление характеристических классов многообразия по его триангуляции // УМН. 2005. Т. 60, №4. С. 37–66.
11. *Stiefel E.* Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten // Comment. Math. Helv. 1936. V. 8. P. 305–353.
12. *Whitney H.* On the theory of sphere bundles // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1940. V. 26. P. 148–153.
13. *Halperin S., Toledo D.* Stiefel–Whitney homology classes // Ann. Math. Ser. 2. 1972. V. 96. P. 511–525.
14. *Cheeger J.* A combinatorial formula for Stiefel–Whitney classes // Topology of manifolds: Proc. Univ. Georgia, 1969. Chicago: Markham Publ., 1970. P. 470–471.
15. *Atiyah M.F., Patodi V.K., Singer I.M.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5, N 2. P. 229–234.
16. *Рурк К., Сандерсон Б.* Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974.
17. *Whitehead J.H.C.* Note on manifolds // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1941. V. 12. P. 26–29.
18. *Cairns S.S.* Isotopic deformations of geodesic complexes on the 2-sphere and on the plane // Ann. Math. Ser. 2. 1944. V. 45, N 2. P. 207–217.
19. *Ho C.-W.* On certain homotopy properties of some spaces of linear and piecewise linear homeomorphisms. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 181. P. 213–233, 235–243.
20. *Pachner U.* Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1987. Bd. 57. S. 69–86.
21. *Pachner U.* P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings // Eur. J. Combin. 1991. V. 12, N 2. P. 129–145.
22. *Kazarian M.È.* The Chern–Euler number of circle bundle via singularity theory // Math. scand. 1998. V. 82. P. 207–236.
23. *Kühnel W., Banchoff T.F.* The 9-vertex complex projective plane // Math. Intell. 1983. V. 5, N 3. P. 11–22.
24. *Björner A., Lutz F.H.* Simplicial manifolds, bistellar flips and a 16-vertex triangulation of the Poincaré homology 3-sphere // Exp. Math. 2000. V. 9, N 2. P. 275–289.