Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий

А. А. Гайфуллин

Хорошо известна задача Н. Стинрода о реализации классов гомологий образами фундаментальных классов многообразий. В настоящей заметке мы даем явную комбинаторную конструкцию, которая по циклу строит кусочно линейное многообразие, реализующее с некоторой кратностью целочисленный класс гомологий этого цикла. Конструкция основана на процедуре локального разрешения особенностей цикла. Подход к проблеме Н. Стинрода, основанный на разрешении особенностей псевдомногообразий, был впервые предложен Д. Сулливаном [1]. Построенные им препятствия к разрешению особенностей псевдомногообразия являются элементами конечного порядка, поэтому из результатов [1] легко следует, что разрешение особенностей "с некоторой кратностью" возможно всегда. Наша задача заключается в том, чтобы дать явную конструкцию такого разрешения особенностей.

Нам будет удобно работать с псевдомногообразиями, разбитыми на *простые клетки*. Простая клетка – это замкнутый диск, граница которого наделена разбиением на грани, двойственным кусочно линейной триангуляции сферы. Строгие определения простой клетки и разбиения на простые клетки можно найти в [2]. Примерами разбиений на простые клетки служат симплициальные и кубические разбиения, а также клеточное разбиение, двойственное кусочно линейной триангуляции многообразия. Все многообразия и псевдомногообразия предполагаются замкнутыми.

Пусть Z – ориентированное n-мерное псевдомногообразие, разбитое на простые клетки. *Задача разрешения особенностей* псевдомногообразия Z: построить ориентированное кусочно линейное многообразие M и отображение $g\colon M \to Z$ такие, что над дополнением к $(n-2)$-мерному остову разбиения Z отображение g является конечнолистным накрытием.

Центральная конструкция. Пусть каждой $(n-1)$-мерной клетке разбиения Z сопоставлена метка из некоторого конечного множества. Множество меток $(n-1)$-мерных клеток, содержащих клетку F, мы будем называть *меткой* клетки F и обозначать через $c(F)$. Разметку мы будем называть *хорошей*, если $|c(F)| = n - \dim F$ для любой клетки F, причем для каждой n-мерной клетки $G \supset F$ метки всех $(n-1)$-мерных клеток H таких, что $F \subset H \subset G$, попарно различны.

Лемма. *Для каждого псевдомногообразия Z, разбитого на простые клетки, имеются псевдомногообразие $\overline{Z}$ с разбиением на простые клетки, допускающим хорошую разметку, и отображение $\overline{Z} \to Z$, являющееся накрытием на дополнении к остову коразмерности 2 и отображающее каждую клетку разбиения $\overline{Z}$ изоморфно на некоторую клетку разбиения Z.*

Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что на разбиении Z задана хорошая разметка. Пусть F – клетка разбиения Z, $\dim F = k < n$. Обозначим через L_F множество n-мерных клеток, содержащих F. Из наличия хорошей разметки следует, что клетки $G \in L_F$ могут быть раскрашены в два цвета правильным образом, т. е. так, что никакие две клетки одного цвета не имеют общей гиперграни. При этом количество клеток первого цвета равно количеству клеток второго цвета. Обозначим через P_F множество инволюций на множестве L_F, изменяющих цвета всех клеток на противоположные. Обозначим через P декартово произведение множеств P_F по всем клеткам F разбиения Z.

Обозначим через U множество наборов $(F_0, F_1, \dots, F_n)$, где $F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n$ – клетки разбиения Z и $\dim F_i = n - i$. Положим $V = U \times P \times \mathbb{Z}_2^n$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-01032 и гранта НШ-4182.2006.1.

Определим инволюции $\Phi_j^\varepsilon\colon V\to V$, $\varepsilon=0,1$, $j=1,\dots,n$, по формулам

$$\Phi_j^0\bigl(F_0,F_1,\dots,F_n,(\Lambda_F),h\bigr)=\bigl(F_0,F_1,\dots,F_{j-1},F_j^*,F_{j+1},\dots,F_n,(\Lambda_F),h\bigr),$$
$$\Phi_j^1\bigl(F_0,F_1,\dots,F_n,(\Lambda_F),h\bigr)=\bigl(\widetilde F_0,\widetilde F_1,\dots,\widetilde F_n,(\widetilde\Lambda_F),h+e_j\bigr),$$

где $\Lambda_F\in P_F$, $h\in\mathbb Z_2^n$, $(e_1,\dots,e_n)$ – базис группы $\mathbb Z_2^n$ и

1) F_j^* – единственная отличная от F_j клетка такая, что $F_{j-1}\subset F_j^*\subset F_{j+1}$;

2) $\widetilde F_i=F_i$ при $i\geqslant j$; $\widetilde F_0=\Lambda_{F_j}(F_0)$; если $0<i<j$, то $\widetilde F_i$ – единственная клетка такая, что $\widetilde F_j\subset\widetilde F_i\subset\widetilde F_0$ и $c(\widetilde F_i)=c(F_i)$;

3) если $c(F)\not\supset c(F_j)$, то $\widetilde\Lambda_F=\Lambda_F$;

4) если $c(F)\supset c(F_j)$ и $G\in L_F$, то $\widetilde\Lambda_F(G)=(\Lambda_{H_2}\circ\Lambda_F\circ\Lambda_{H_1})(G)$, где H_1 – единственная клетка такая, что $F\subset H_1\subset G$ и $c(H_1)=c(F_j)$, и H_2 – единственная клетка такая, что $F\subset H_2\subset\Lambda_F(\Lambda_{H_1}(G))$ и $c(H_2)=c(F_j)$.

Положим $M=[0,1]^n\times V/{\sim}$, где $\sim$ – отношение эквивалентности, порожденное отождествлениями $\bigl(t_1,\dots,t_n,\Phi_j^\varepsilon(v)\bigr)\sim(t_1,\dots,t_n,v)$, если $t_j=\varepsilon$, $\varepsilon=0,1$, $j=1,\dots,n$. Непосредственно проверяется, что $\Phi_j^0\Phi_k^1=\Phi_k^1\Phi_j^0$ при $j\ne k$ и $\Phi_j^1\Phi_k^1=\Phi_k^1\Phi_j^1$. Из этого следует, что M – ориентированное кусочно линейное многообразие. Искомое отображение $g\colon M\to Z$ определяется по формуле

$$g\bigl(t_1,\dots,t_n,F_0,\dots,F_n,(\Lambda_F),h\bigr)=\biggl(\prod_{i=1}^n(1-t_i)\biggr)b(F_0)+\sum_{j=1}^n\biggl(t_j\prod_{i=j+1}^n(1-t_i)\biggr)b(F_j),$$

где $b(F)$ – барицентр клетки F.

Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Центральная конструкция дает отображение $g\colon M\to Z$, решающее задачу разрешения особенностей псевдомногообразия Z. Пусть X – топологическое пространство и $f\colon Z\to X$ – сингулярный цикл. Тогда сквозное отображение $f\circ g\colon M\to X$ реализует класс гомологий, кратный классу гомологий цикла f.*

В качестве приложения теоремы 1 дадим решение следующей задачи: по заданному набору ориентированных симплициальных сфер $Y_1,\dots,Y_k$ построить ориентированное симплициальное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором $Y_1,\dots,Y_k$. Для существования такого многообразия необходимо, чтобы вершины триангуляций $Y_1,\dots,Y_k$ могли быть разбиты на пары такие, что линки вершин в каждой паре изоморфны с обращением ориентации (*условие сбалансированности*).

Теорема 2. *Пусть $Y_1,\dots,Y_k$ – сбалансированный набор ориентированных симплициальных сфер. Имеется явная конструкция, дающая симплициальное многообразие, набор линков вершин которого с точностью до изоморфизма имеет вид*

$$\underbrace{Y_1,\dots,Y_1}_{r},\dots,\underbrace{Y_k,\dots,Y_k}_{r},K_1,\dots,K_l,-K_1,\dots,-K_l,$$

где $-K_i$ есть симплициальная сфера K_i с обращенной ориентацией.

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановки задач и внимание к работе.

Список литературы

[**1**] D. Sullivan, Lecture Notes in Math., **209**, 1971, 196–206. [**2**] А. А. Гайфуллин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 13–66.

А. А. Гайфуллин (A. A. Gaifullin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gaifull@mccme.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
08.10.2007