Представления m-значных групп на триангуляциях многообразий

В. М. Бухштабер, А. А. Гайфуллин

Предлагается подход к характеризации триангуляций многообразий средствами теории m-значных групп.

Для произвольного множества X через $(X)^m$ мы обозначим его m-ю симметрическую степень. Говорят, что на множестве X задана структура *m-значной группы*, если заданы m-значная операция умножения $\mu\colon X\times X\to(X)^m$, $\mu(x,y)=x*y$, единица $e\in X$ и операция взятия обратного элемента $\operatorname{inv}\colon X\to X$, удовлетворяющие естественным обобщениям аксиом ассоциативной группы (см. [1]). Для любых группы G и ее конечной подгруппы H из m элементов на множестве двойных смежных классов $H\setminus G/H$ существует структура *бикосетной* m-значной группы с умножением $(Hh_1H)*(Hh_2H)=[Hh_1hh_2H,\ h\in H]$.

Действием m-значной группы X на множестве S называется отображение $X\times S\to(S)^m$, $(x,s)\mapsto x\circ s$, такое, что для любых $x_1,x_2\in X$, $s\in S$ наборы $(x_1*x_2)\circ s$ и $x_1\circ(x_2\circ s)$ из m^2 элементов совпадают, $e\circ s=[s,\dots,s]$.

Отображение $T\colon S\to(S)^m$ называется *m-значной динамикой* на множестве S. Говорят, что m-значная динамика T интегрируема при помощи m-значной группы X с одной образующей a, если существует действие группы X на множестве S такое, что $Ts=a\circ s$ для любого $s\in S$.

Для любого k структура m-значной группы на множестве X определяет на X структуру km-значной группы kX, называемой *диагональю* исходной группы. Аналогично определяется диагональ m-значной динамики (детали см. в [1]).

Пусть K – симплициальный или симплициально клеточный комплекс (см. [2]), $K(n-2)$ – дополнение к его $(n-2)$-мерному остову. Комплекс K называется *n-мерным псевдомногообразием*, если каждый его симплекс содержится в некотором симплексе размерности n, причем каждый $(n-1)$-мерный симплекс содержится ровно в двух симплексах размерности n, и пространство $K(n-2)$ связно.

Для каждого n-мерного псевдомногообразия K определена $(n+1)$-значная динамика T на множестве S его n-мерных симплексов, которая каждому симплексу σ сопоставляет набор всех n-мерных симплексов, не совпадающих с σ и имеющих с σ общую $(n-1)$-мерную грань. В случае симплициально клеточного комплекса симплекс, имеющий с σ несколько общих $(n-1)$-мерных граней, входит в набор $T\sigma$ с соответствующей кратностью. Обозначим через K' барицентрическое подразделение комплекса K и через S' множество n-мерных симплексов комплекса K'.

Теорема 1. *Для любого псевдомногообразия K динамика $n!\,T$ интегрируема при помощи некоторой бикосетной $(n+1)!$-значной группы $X=H\setminus G/H$ с одной образующей. При этом в качестве группы G может быть выбрана некоторая подгруппа группы перестановок $\Sigma_{S'}$ множества S', а подгруппа H изоморфна группе Σ_{n+1}.*

Доказательство. Дадим явную конструкцию $(n+1)!$-значной группы X. Рассмотрим симплекс Δ^n с множеством вершин $\{0,1,\dots,n\}$ и каноническое симплициальное отображение $\pi\colon K'\to\Delta^n$, переводящее вершину $\alpha\in K'$ в вершину $\pi(\alpha)=i\in\Delta^n$, где i – размерность симплекса $\sigma\in K$, барицентром которого является α. Ясно, что ограничение отображения π на любой n-мерный симплекс из K' является гомеоморфизмом. Скажем, что вершина $\alpha\in K'$ имеет тип i, если $\pi(\alpha)=i$, и $(n-1)$-мерный симплекс $\rho\in K'$ имеет тип i, если i не является вершиной симплекса $\pi(\rho)$.

Для каждого целого числа i, $0\leqslant i\leqslant n$, и любого n-мерного симплекса τ из K' обозначим через $\Phi_i(\tau)$ (единственный) n-мерный симплекс комплекса K', имеющий с τ общую $(n-1)$-мерную грань типа i. Таким образом, мы получаем корректно определенные перестановки $\Phi_i \in \Sigma_{S'}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Возьмем в качестве G подгруппу группы $\Sigma_{S'}$, порожденную этими перестановками, и в качестве H – подгруппу, порожденную перестановками $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$.

Лемма 1. *Перестановки Φ_i удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$\Phi_i^2 = 1; \qquad \Phi_i\Phi_j = \Phi_j\Phi_i, \quad |i-j| > 1; \qquad \Phi_i\Phi_{i+1}\Phi_i = \Phi_{i+1}\Phi_i\Phi_{i+1}, \quad i < n-1.$$

Группа H изоморфна Σ_{n+1}.

Рассмотрим бикосетную $(n+1)$!-значную группу $X = H\backslash G/H$ с одной образующей $a = H\Phi_n H$. Группа G действует на множестве S' так, что $S'/H = S$. Следовательно, имеет место действие $(n+1)$!-значной группы X на множестве S. Несложно проверить, что это действие интегрирует $(n+1)$!-значную динамику $n!\,T$.

Если $K = \partial\Delta^{n+1}$, то $(n+1)$!-значная группа X является диагональю некоторой двухэлементной $(n+1)$-значной группы, которая в [1] обозначается через $X(\mathbb{Z}_2, 1, n)$. Следовательно, в этом случае динамика T интегрируема.

В общем случае предъявленная $(n+1)$!-значная группа X не является диагональю какой-либо $(n+1)$-значной группы. Вопрос о характеризации n-мерных псевдомногообразий с динамикой T, интегрируемой при помощи $(n+1)$-значной группы, остается открытым.

Будем говорить, что n-мерная триангуляция K является *симметричной*, если группа $\operatorname{Aut} K$ ее симплициальных автоморфизмов действует транзитивно на множестве n-мерных симплексов ее барицентрического подразделения K'. Симплициальное отображение $\widehat{K} \to K$ назовем *почти накрытием*, если индуцированное отображение $\widehat{K}(n-2) \to K(n-2)$ является накрытием.

Теорема 2. *Имеет место явная конструкция, сопоставляющая каждому n-мерному псевдомногообразию K минимальное симметричное псевдомногообразие $\widehat{K}$ и почти накрытие $\widehat{K} \to K$ такие, что если $\widetilde{K} \to K$ – почти накрытие и $\widetilde{K}$ – симметричное псевдомногообразие, то соответствующее $\widetilde{K}$ накрытие $\widetilde{K}(n-2) \to K(n-2)$ пропускается через $\widehat{K}(n-2)$. Группа G из теоремы 1 изоморфна группе $\operatorname{Aut}\widehat{K}$.*

Динамика T на множестве n-мерных симплексов n-мерного псевдомногообразия может быть реализована в виде канонической $(n+1)$-значной динамики на множестве вершин соответствующего однородного графа степени $n+1$. Оказывается, что описанные выше методы применимы в более общем случае.

Теорема 3. *Пусть T – каноническая $(n+1)$-значная динамика на множестве вершин произвольного однородного графа степени $n+1$. Пусть G_n – группа с образующими $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ и соотношениями из леммы 1, H_n – ее подгруппа, порожденная образующими $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$. Тогда динамика $n!\,T$ интегрируема при помощи $(n+1)$-значной группы $X_n = H_n \setminus G_n/H_n$.*

Список литературы

[**1**] V. M. Buchstaber, “n-valued groups: theory and applications”, *Moscow Math. J.*, **6**:2 (2006).

[**2**] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Тр. МИАН*, **247** (2004), 41–58.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
02.05.2006

А. А. Гайфуллин (A. A. Gaĭfullin)
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gaifull@mccme.ru