2005 г. июль — август *т. 60, вып. 4(364)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 515.164.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ МНОГООБРАЗИЯ ПО ЕГО ТРИАНГУЛЯЦИИ

А. А. Гайфуллин

Настоящий обзор посвящен известной проблеме: вычислению характеристических классов Штифеля–Уитни и Понтрягина многообразия по его триангуляции. Локальную комбинаторную формулу для классов Штифеля–Уитни построил Х. Уитни еще в 1940 г. В 1975 г. в работе А. М. Габриэлова, И. М. Гельфанда и М. В. Лосика впервые была предъявлена комбинаторная формула для первого рационального класса Понтрягина. С тех пор разными авторами было получено несколько различных формул для вычисления рациональных характеристических классов триангулированных многообразий, но ни одна из них не давала алгоритма для вычисления характеристического цикла только по триангуляции многообразия. В настоящем обзоре описывается построенная недавно автором новая локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина, которая дает такой алгоритм. Этот результат явился следствием решения следующей задачи: построить функцию на множестве классов изоморфизма трехмерных PL-сфер такую, что для любого комбинаторного многообразия цепь, составленная из всех его симплексов коразмерности 4 с коэффициентами, равными значениям данной функции на линках этих симплексов, является циклом.

Библиография: 38 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. В центре внимания данной работы находятся классы Штифеля–Уитни и Понтрягина многообразий. Как известно, определение этих характеристических классов существенно использует гладкую структуру. Тем не менее вскоре после введения классов Штифеля–Уитни была установлена их комбинаторная инвариантность. Комбинаторная инвариантность рациональных классов Понтрягина была доказана в конце 1950-х годов независимо В. А. Рохлиным и А. С. Шварцем [1] и Р. Томом [2]. Однако предложенное ими доказательство неконструктивно, т.е. не позволяет непосредственно вычислять классы Понтрягина по заданной триангуляции многообразия. Поэтому оставалась нерешенной важная задача – получение комбинаторных формул для характеристических классов, т.е. описание способов построения по триангуляции многообразия симплициальных циклов, классы гомологий которых двойственны по Пуанкаре данным характеристическим классам многообразия.

Тесно связанной с предыдущей является задача вычисления чисел Штифеля–Уитни и чисел Понтрягина многообразия по его триангуляции. Здесь сразу необходимо выделить знаменитый L-род Хирцебруха – линейную комбинацию чисел Понтрягина ориентированного $4k$-мерного многообразия, дающую его сигнатуру. Таким образом, L-род допускает комбинаторное описание, так как кольцо когомологий триангулированного многообразия может быть вычислено комбинаторно. Более эффективный способ вычисления сигнатуры триангулированного многообразия был предложен Э. Раницким и Д. Сулливаном [3]. Они построили симметрическую билинейную форму на прямой сумме групп $2k$-мерных и $(2k+1)$-мерных симплициальных цепей $4k$-мерного триангулированного многообразия такую, что сигнатура этой билинейной формы равна сигнатуре многообразия.

Особый интерес представляет задача построения *локальных* формул для характеристических классов. Формула называется локальной, если в построенном по ней цикле коэффициент при каждом симплексе зависит только от строения многообразия в окрестности этого симплекса. Для рациональных классов Понтрягина часто удается получить более сильное условие локальности: коэффициент при симплексе определяется только комбинаторным строением его линка.

Еще в 1940 году Х. Уитни [4] получил явную комбинаторную формулу для классов Штифеля–Уитни. Она оказалась очень простой. Чтобы получить цикл, двойственный по Пуанкаре n-му классу Штифеля–Уитни m-мерного комбинаторного многообразия K, нужно просто взять сумму по модулю 2 всех $(m-n)$-мерных симплексов его первого барицентрического подразделения K' (см. п. 3).

Все известные комбинаторные формулы для рациональных классов Понтрягина гораздо сложнее. До недавнего времени можно было выделить два основных пути построения комбинаторных формул для классов Понтрягина. Первый из них был предложен А. М. Габриэловым, И. М. Гельфандом и М. В. Лосиком [5], [6] и развит Р. Д. Макферсоном [7], А. М. Габриэловым [8] и И. М. Гельфандом и Р. Д. Макферсоном [9]. Различные формулы, полученные в этих работах, используют определения рациональных классов Понтрягина через кривизну связности, через вырождения в системах сечений касательного расслоения и в терминах отображения Гаусса. Подробнее этот подход описан в пп. 4, 6. Второй путь предложил Дж. Чигер [10]

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00659-а) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2185.2003.1).

(см. п. 5). Он основан на конструкции η-инварианта $(4k-1)$-мерного риманова многообразия, предложенной М.Ф. Атьей, В.К. Патоди и И.М. Зингером [11]. Недавно автором [12] был предложен новый подход к построению комбинаторных формул для классов Понтрягина, основанный на использовании техники бизвездных преобразований. Полученная этим методом локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина описана в пп. 7–13.

Обсудим теперь более подробно, что подразумевается под словами *комбинаторная формула*. На самом деле в это словосочетание часто вкладываются два различных смысла. Во-первых, комбинаторная формула сопоставляет каждому комбинаторному многообразию симплициальный цикл, определяемый только комбинаторным строением данного многообразия. Иногда комбинаторная формула может быть применена только для комбинаторных многообразий, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. При этом построенный цикл может быть симплициальным циклом в исходной триангуляции или в некотором ее подразделении. Во-вторых, часто предполагается, что комбинаторная формула должна задавать алгоритм, который вычисляет искомый симплициальный цикл только по заданной триангуляции многообразия. Такие формулы мы будем называть *алгоритмически вычислимыми*.

В настоящее время известны следующие комбинаторные формулы для классов Понтрягина.

1) Модификация Макферсона [7] формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика [6] для первого рационального класса Понтрягина (см. п. 4). Может быть применена для комбинаторных многообразий, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, которые выделяют класс так называемых многообразий Брауэра (определение см. в п. 4). Построенный цикл является симплициальным в исходной триангуляции, и коэффициент при каждом симплексе определяется только комбинаторным строением линка этого симплекса. Формула не является алгоритмически вычислимой, так как вычисление по ней требует операций с некоторыми сложными пространствами конфигураций. В настоящее время не известно никакого алгоритмического описания этих пространств в комбинаторных терминах.

2) Формула Чигера [10] для всех полиномов Хирцебруха от вещественных классов Понтрягина (см. п. 5). Может быть применена для любого псевдомногообразия с пренебрежимой границей (определение см. в п. 5), в частности, для любого комбинаторного многообразия. Построенный цикл является симплициальным в исходной триангуляции, и коэффициент при каждом симплексе определяется только комбинаторным строением линка этого симплекса. Вычисление по этой формуле сводится к вычислению спектра оператора Лапласа на псевдомногообразиях с локально плоской метрикой. Такое вычисление может быть произведено только приближенно, поэтому формула Чигера не является алгоритмически вычислимой и неизвестно, является ли построенный по ней цикл рациональным.

3) Формула Гельфанда–Макферсона [9] для всех рациональных нормальных классов Понтрягина (см. п. 6). Эта формула не является комбинаторной в первом смысле, т.е. получаемый по ней цикл зависит не только от комбинаторного строения заданного триангулированного многообразия. Чтобы эта формула могла быть применена для триангулированого многообразия, это многообразие должно быть снабжено дополнительно гладкой структурой или ее дискретным аналогом – *фиксирующим циклом*. Построенный цикл является симплициальным в первом барицентрическом подразде-

лении исходной триангуляции. Коэффициент при каждом симплексе зависит от комбинаторного строения окрестности этого симплекса и от ограничения гладкой структуры или фиксирующего цикла на эту окрестность. При заданной гладкой структуре или при заданном фиксирующем цикле вычисление искомого цикла производится с помощью чисто комбинаторной процедуры.

4) Формула автора [12] для первого рационального класса Понтрягина. Формула может быть применена для любого комбинаторного многообразия без каких бы то ни было дополнительных структур. Это единственная известная формула, которая является и локальной, и комбинаторной в первом смысле, и алгоритмически вычислимой. Построенный цикл является симплициальным в исходной триангуляции. Коэффициент при каждом симплексе зависит только от комбинаторного строения его линка и может быть вычислен по комбинаторному типу его линка с помощью конечной комбинаторной процедуры.

Основой для сопоставления перечисленных формул является следующее. При построении комбинаторных формул обычно выбирается какое-либо определение характеристических классов гладкого многообразия. При этом сложилось два подхода. Первый, назовем его алгебро-топологическим, использует средства алгебраической топологии, включая гладкость многообразия. Так в оригинальной работе Л. С. Понтрягина [13] характеристический цикл представляет собой цикл особенностей набора из k векторных полей на многообразии. Второй подход – дифференциально-геометрический – использует дифференциально-геометрическую связность на многообразии и ее кривизну (в литературе этот подход часто называют подходом Чженя–Вейля). Дифференциально-геометрическое построение характеристических классов вещественных римановых многообразий было проведено Л. С. Понтрягиным [14], [15], характеристических классов комплексных эрмитовых многообразий – Ш.-Ш. Чженем [16].

Как отметил В. М. Бухштабер, результаты автора [12] реализуют новый, третий подход к построению характеристических классов многообразий. При этом подходе n-мерный характеристический класс m-мерного триангулированного многообразия K задается *универсальной формулой* вида

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma^{m-n}\in K} f(\operatorname{link}\sigma^{m-n})\sigma^{m-n},$$

где f – выбранная функция на классах изоморфизма ориентированных $(n-1)$-мерных PL-сфер. Свойство универсальности заключается в том, что функция f не зависит от комбинаторного многообразия K, а цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K. Более точные определения даны в п. 7. Базисный результат заключается в том, что для любого рационального характеристического класса существует формула указанного вида. Этот результат представляет собой усиление результата Н. Левитта и К. Рурка [17] (см. п. 8). Функция f называется *локальной формулой*, если цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K. При $n = 4$ каждая рациональная локальная формула задает первый класс Понтрягина с точностью до умножения на некоторую рациональную константу. С другой стороны, оказывается, что при $n = 4$ все локальные формулы могут быть явно описаны с использованием техники бизвездных преобразований. Это сделано в пп. 9–11. Таким образом, получается явное описание всех локальных формул для первого рационального класса Понтрягина (теорема 11.1). В п. 12 выделена одна каноническая локальная формула f_0 для первого класса Понтрягина и описана комбинаторная процедура вычисления коэффициента $f_0(L)$ по заданной ориентированной трехмерной PL-сфере L.

Хорошо известно, что существуют комбинаторные многообразия, рациональные классы Понтрягина которых не могут быть реализованы целочисленными коциклами. Однако для k-го класса Понтрягина существует универсальная константа N_k такая, что класс $N_k p_k(K)$ может быть представлен целочисленным коциклом для любого комбинаторного многообразия K. Рассмотрим другую задачу. Предположим, что мы для каждого комбинаторного многообразия K реализовали класс гомологий, двойственный некоторому заданному рациональному классу Понтрягина многообразия K, циклом вида $f_\sharp(K)$, где f – функция, не зависящая от многообразия K. Какие знаменатели возникают у коэффициентов циклов $f_\sharp(K)$, т.е. у значений $f(L)$? Оказывается, что уже для первого класса Понтрягина знаменатели значений $f(L)$ неограниченно возрастают при увеличении числа вершин PL-сферы L. Более того, каждое простое число входит в знаменатели значений $f(L)$ в сколь угодно больших степенях. Более точные оценки на рост знаменателей значений $f(L)$ даны в п. 14.

В п. 15 приведена теорема, утверждающая, что для любого рационального характеристического класса существует локальная формула f такая, что задача вычисления значения $f(L)$ по заданной PL-сфере L алгоритмически разрешима. Полные доказательства результатов пп. 14, 15 даны автором в [12].

Задача нахождения комбинаторных формул, очевидно, имеет смысл только для комбинаторно инвариантных характеристических классов. В частности, задача о нахождении комбинаторных формул для целочисленных классов Понтрягина является некорректной. Однако каждый целочисленный класс Понтрягина становится комбинаторно инвариантным после умножения на некоторую натуральную константу, поэтому соответствующая задача о нахождении комбинаторной формулы может быть поставлена, хотя никаких таких комбинаторных формул до сих пор не найдено.

В этой статье, если не оговорено противное, все многообразия и триангуляции предполагаются кусочно линейными. Под кобордизмом всегда понимается ориентированный кусочно линейный кобордизм. Симплициальный комплекс называется PL-сферой, если некоторое его подразделение изоморфно некоторому подразделению границы симплекса. Симплициальный комплекс называется *m-мерным комбинаторным многообразием*, если линк каждой его вершины является $(m-1)$-мерной PL-сферой. Отметим, что любая кусочно линейная триангуляция кусочно линейного многообразия является комбинаторным многообразием. Все многообразия предполагаются замкнутыми. Под изоморфизмом ориентированных симплициальных комплексов понимается симплициальный изоморфизм, сохраняющий ориентацию. Будем обозначать через CK конус над симплициальным комплексом K, через $K * L$ – соединение (джойн) симплициальных комплексов K и L. Будем обозначать через $\operatorname{link}\sigma$ и $\operatorname{star}\sigma$ соответственно линк и звезду симплекса σ.

Пусть K – m-мерное комбинаторное многообразие. *Коориентацией симплекса* $\sigma^n \in K$ называется ориентация линка симплекса σ^n. Любой m-мерный симплекс считается положительно коориентированным. Пусть G – абелева группа, $\widehat{G}$ – ориентирующий пучок многообразия $|K|$ со слоем, изоморфным G. Обозначим через $\widehat{C}_*(K;G)$ цепной комплекс коориентированных цепей комплекса K с коэффициентами в G, через $\widehat{\partial}$ – граничный оператор этого комплекса (коэффициент инцидентности двух коориентированных симплексов $\tau^{k-1} \subset \sigma^k$ равен $+1$, если ориентация $\operatorname{link} \sigma^k$ индуцирована ориентацией $\operatorname{link} \tau^{k-1}$, и -1 в противном случае). Гомологии комплекса $\widehat{C}_*(K; G)$ совпадают с гомологиями $H_*(|K|; \widehat{G})$. Классы гомологий, двойственные по Пуанкаре рациональным классам Понтрягина многообразия $|K|$, лежат в группе $H_*(|K|; \widehat{\mathbb{Q}})$. Поэтому представляющие их симплициальные циклы должны лежать в группе $\widehat{C}_*(K; \mathbb{Q})$.

2. Формула для эйлеровой характеристики. В этом пункте рассматривается локальная формула для эйлеровой характеристики конечного симплициального комплекса. Этот пример можно рассматривать как иллюстрацию к определению локальной формулы, которое будет дано в п. 7.

Пусть L – конечный симплициальный комплекс. Будем обозначать через $f_k(L)$ число k-мерных симплексов комплекса L. Положим

$$F(L) = 1 - \frac{f_0(L)}{2} + \frac{f_1(L)}{3} - \dots + \frac{(-1)^k f_{k-1}(L)}{k+1} + \dots .$$

Предложение 2.1. *Для любого конечного симплициального комплекса K имеет место формула*

$$\chi(K) = \sum_{v \in K} F(\operatorname{link} v),$$

где сумммирование ведется по всем вершинам v комплекса K.

Доказательство. Каждый k-мерный симплекс σ^k комплекса K имеет ровно $k+1$ вершину. Поэтому число $f_k(K)$ равно в $k+1$ раз меньше, чем число пар (v, σ^k), где v – вершина комплекса K, σ^k – симплекс комплекса K, причем $v \in \sigma^k$. С другой стороны, каждая вершина v содержится ровно в $f_{k-1}(\operatorname{link} v)$ симплексах $\sigma^k \in K$. Поэтому

$$f_k(K) = \frac{1}{k+1} \sum_{v \in K} f_{k-1}(\operatorname{link} v).$$

Значит,

$$\chi(K) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_k(K) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v \in K} \frac{(-1)^k f_{k-1}(\operatorname{link} v)}{k+1} .$$

Если K – комбинаторное многообразие, то характеристический цикл, задающий его гомологический эйлеров класс, может быть вычислен с помощью локальной формулы

$$E(K) = \sum_{v \in K} F(\operatorname{link} v) v.$$

Обратим внимание, что в представлении целочисленного класса Эйлера с помощью локальной формулы у коэффициентов $F(\operatorname{link} v)$ возникают сколь угодно большие знаменатели, которые исчезают при переходе к нелокальной формуле.

3. Формула для классов Штифеля–Уитни. Пусть K – комбинаторное многообразие размерности m. Его класс Штифеля–Уитни w_n лежит в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, если n четно, и с коэффициентами в $\widehat{\mathbb{Z}}$, если n нечетно, где $\widehat{\mathbb{Z}}$ – ориентирующий пучок многообразия $|K|$ со слоем $\mathbb{Z}$. Обозначим через W_n класс гомологий, двойственный классу w_n. Тогда $W_n \in H_{m-n}(|K|;\mathbb{Z}_2)$, если n четно, и $W_n \in H_{m-n}(|K|;\mathbb{Z})$, если n нечетно. Обозначим через K' первое барицентрическое подразделение симплициального комплекса K. Если n четно, обозначим через C_n сумму по модулю 2 всех $(m-n)$-мерных симплексов комплекса K'. Пусть теперь n нечетно. Пусть $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_{m-n}$ – различные непустые симплексы комплекса K. Обозначим через $\tau(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{m-n})$ симплекс комплекса K' с вершинами в барицентрах $b(\sigma_i)$ симплексов σ_i. Ориентация симплекса $\tau(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{m-n})$ задается последовательностью вершин $b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_{m-n})$. Определим целочисленную $(m-n)$-мерную цепь C_n по формуле

$$C_n = \sum_{\sigma_0\subset\sigma_1\subset\dots\subset\sigma_{m-n}} (-1)^{\dim\sigma_0+\dim\sigma_1+\dots+\dim\sigma_{m-n}}\tau(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{m-n}).$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Цепь C_n является циклом (по модулю 2, если n четно, и целочисленным, если n нечетно), представляющим класс гомологий W_n, двойственный по Пуанкаре n-му классу Штифеля–Уитни многообразия K.*

Эта теорема была сформулирована в качестве гипотезы Э. Штифелем [18] и впервые доказана Х. Уитни [4], однако полное доказательство не было опубликовано. Для гладких многообразий полное доказательство было впервые опубликовано С. Гальпериным и Д. Толедо [19]. Их доказательство основано на явном построении непрерывных касательных векторных полей $F_1,\dots,F_m$ на $|K|$, гладких на каждом симплексе, таких, что $F_1,\dots,F_p$ линейно независимы на каждом p-мерном симплексе $\sigma\in K$ и индекс поля $F_{p+1} \pmod{F_1,\dots,F_p}$ в барицентре симплекса σ равен ±1. На самом деле это доказательство работает для произвольного комбинаторного многообразия. Набросок альтернативного доказательства теоремы 3.1, использующего совсем другую технику, был опубликован Дж. Чигером [20].

4. Формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика. Первая явная формула для первого рационального класса Понтрягина триангулированного многообразия была получена А. М. Габриэловым, И. М. Гельфандом и М. В. Лосиком [5]. Опишем здесь некоторые идеи, лежащие в основе этой формулы. Пусть M – гладкое многообразие размерности m, K – его гладкая триангуляция. Пусть ∇ – гладкая связность в касательном расслоении многообразия M. Если задана локальная тривиализация касательного расслоения, то связность ∇ задается 1-формой ω со значениями в $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$. Пусть $\Omega = d\omega - \omega\wedge\omega$ – форма кривизны. Тогда

$$P^0(\nabla) = \operatorname{tr}(\Omega\wedge\Omega) = \operatorname{tr}(d\omega\wedge d\omega - 2\omega\wedge\omega\wedge d\omega)$$

– корректно определенная 4-форма на многообразии M. Хорошо известно, что значение первого класса Понтрягина многообразия M на кусочно гладком 4-мерном цикле Z выражается следующей формулой.

$$\langle p_1(M), Z\rangle = -\frac{1}{8\pi^2}\int_Z P^0(\nabla).$$

Пусть $\tau \in K$ – коориентированный симплекс размерности $m-1$. Обозначим через $\sigma_0(\tau)$ и $\sigma_1(\tau)$ два содержащих его m-мерных симплекса. Пусть $\rho \in K$ – коориентированный симплекс размерности $m-2$. Обозначим через $\sigma_1(\rho), \dots, \sigma_{k(\rho)}(\rho)$ содержащие его m-мерные симплексы, занумерованные в направлении положительного обхода линка симплекса ρ.

Предложение 4.1. *Пусть на каждом m-мерном симплексе $\sigma \in K$ задана гладкая связность ∇_σ в касательном расслоении многообразия K. Пусть Z – кусочно гладкий 4-мерный цикл, трансверсальный к триангуляции K. Тогда*

$$\begin{aligned}\langle p_1(M), Z\rangle = -\frac{1}{8\pi^2}\Biggl(&\sum_{\dim\sigma=m}\int_{Z\cap|\sigma|} P^0(\nabla_\sigma)\\ &+\sum_{\dim\tau=m-1}\int_{Z\cap|\tau|} P^1(\nabla_{\sigma_0(\tau)},\nabla_{\sigma_1(\tau)})\\ &+\sum_{\dim\rho=m-2}\sum_{j=2}^{k(\rho)-1}\int_{Z\cap|\rho|} P^2(\nabla_{\sigma_1(\rho)},\nabla_{\sigma_j(\rho)},\nabla_{\sigma_{j+1}(\rho)})\Biggr),\end{aligned} \qquad (*)$$

где

$$P^1(\nabla_0,\nabla_1) = \operatorname{tr}\biggl((\omega_1-\omega_0)\wedge d(\omega_1+\omega_0) + \frac{2}{3}\omega_0\wedge\omega_0\wedge\omega_0 - \frac{2}{3}\omega_1\wedge\omega_1\wedge\omega_1\biggr),$$
$$P^2(\nabla_0,\nabla_1,\nabla_2) = -\operatorname{tr}\bigl(\omega_0\wedge\omega_1+\omega_1\wedge\omega_2+\omega_2\wedge\omega_0\bigr).$$

Здесь ω_i – 1-формы со значениями в $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$, соответствующие связностям ∇_i при некотором выборе локальной тривиализации.

Набор форм $P^0(\nabla)$, $P^1(\nabla_0,\nabla_1)$, $P^2(\nabla_0,\nabla_1,\nabla_2)$ называется *разностным коциклом*, так как

$$dP^1(\nabla_0,\nabla_1) = P^0(\nabla_1) - P^0(\nabla_0),$$
$$-dP^2(\nabla_0,\nabla_1,\nabla_2) = P^1(\nabla_0,\nabla_1)+P^1(\nabla_1,\nabla_2)+P^1(\nabla_2,\nabla_0).$$

Выберем в качестве ∇_σ связности нулевой кривизны такие, что, во-первых, для любого симплекса $\tau\subset\sigma$ касательное расслоение $T|\tau|$ симплекса τ инвариантно относительно ∇_σ, а во-вторых, для любых m-мерных симплексов σ_1 и σ_2 ограничения связностей ∇_{σ_1} и ∇_{σ_2} на $T|\sigma_1\cap\sigma_2|$ совпадают. Тогда первые два слагаемые в правой части формулы $(*)$ будут равны нулю. Таким образом, вычисление интеграла по 4-мерному циклу Z сводится к вычислению интегралов от некоторых 2-форм по 2-мерным цепям $Z\cap|\rho|$. Следующие шаги – свести вычисление этих интегралов сначала к вычислению интегралов от некоторых 1-форм по пересечениям цикла Z с симплексами коразмерности 3, а потом – к нахождению индекса пересечения цикла Z с некоторым $(m-4)$-мерным циклом, который и будет искомым циклом, класс гомологий которого двойствен классу $p_1(M)$. Однако эти шаги выполняются намного сложнее и требуют изучения топологии пространств конфигураций $\Sigma(\sigma)$. Мы здесь не будем приводить полного построения формулы работы [5], однако дадим определения пространств $\Sigma(\sigma)$ и укажем, какие именно их свойства используются при построении формулы.

Определение 4.1. *Сглаживанием* комбинаторного многообразия K в симплексе σ называется гомеоморфизм из $|C\operatorname{link}\sigma|$ на окрестность начала координат в $\mathbb{R}^{\operatorname{codim}\sigma}$, который переводит вершину конуса в начало координат и линеен на каждом симплексе. Комбинаторное многообразие K называется *многообразием Брауэра*, если для любого непустого симплекса $\sigma\in K$ существует сглаживание многообразия K в симплексе σ.

Не любое комбинаторное многообразие является многообразием Брауэра [21], но для любого компактного комбинаторного многообразия некоторое его барицентрическое подразделение является многообразием Брауэра [22]. Не любое многообразие Брауэра является сглаживаемым: чтобы комбинаторное многообразие было сглаживаемым, необходимо, чтобы его сглаживания в симплексах можно было выбрать согласованным образом.

Пусть K – многообразие Брауэра, $\sigma\in K$ – симплекс коразмерности k. Пространство сглаживаний многообразия K в симплексе σ является топологическим пространством с действием группы $GL(k,\mathbb{R})$. Пространство орбит этого действия обозначается через $\Sigma(\sigma)$ и называется *пространством конфигураций*. Несложно доказать, что $\Sigma(\sigma)$ стягиваемо, если $\operatorname{codim}\sigma=2$. Известно также, что $\Sigma(\sigma)$ связно [23] и односвязно [24], если $\operatorname{codim}\sigma=3$. Формула работы [5] может быть применена только для таких триангуляций K, что выполнено так называемое условие (A): пространство $\Sigma(\sigma)$ связно для любого $\sigma\in K$ такого, что $\operatorname{codim}\sigma=4$. Неизвестно, для каких классов триангуляций это условие выполнено.

Пусть q – количество вершин комплекса $\operatorname{link}\sigma$. Тогда каждому сглаживанию $\psi\colon|C\operatorname{link}\sigma|\to\mathbb{R}^k$ соответствует набор из q ненулевых векторов в $\mathbb{R}^k$. Пространство $\Sigma(\sigma)$ имеет естественную стратификацию: оно представляется в виде объединения непересекающихся стратов $\Sigma_c(\sigma)$, $c=0,1,2,\dots$, где $\Sigma_0(\sigma)$ состоит из классов эквивалентности сглаживаний, для которых соответствующая конфигурация из q векторов в $\mathbb{R}^k$ находится в общем положении, т.е. не содержит k линейно зависимых векторов, а $\Sigma_c(\sigma)$, $c>0$, состоит из классов эквивалентности сглаживаний, для которых соответствующая конфигурация векторов имеет c-кратное вырождение.

Формула, полученная в [5], может быть применена к любому многообразию Брауэра, удовлетворяющему условию (A). Для вычисления по этой формуле необходимо на многообразии K выбрать следующие дополнительные структуры: для каждого симплекса τ коразмерности 4 – точку $y_\tau\in\Sigma_0(\tau)$, для каждого симплекса σ коразмерности 3 – точку $y_\sigma\in\Sigma_0(\sigma)$, для каждой пары симплексов $\tau\subset\sigma$, $\operatorname{codim}\tau=4$, $\operatorname{codim}\sigma=3$, – кривую $z_{\sigma,\tau}(t)$ в $\Sigma_0(\sigma)\cup\Sigma_1(\sigma)$ такую, что $z_{\sigma,\tau}(0)=y_\sigma$, $z_{\sigma,\tau}(1)$ – образ точки y_τ при естественном отображении $\Sigma(\tau)\to\Sigma(\sigma)$. Кроме того, нужно выбрать некоторую дополнительную комбинаторную структуру, называемую *гиперсимплициальной системой*. После того как все эти структуры выбраны, непосредственным комбинаторным вычислением получается рациональный симплициальный цикл, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре первому классу Понтрягина многообразия K. Заметим, что стратификации пространств $\Sigma(\rho)$ устроены достаточно сложно и не существует никакого комбинаторного способа выбора точек y_σ, y_τ и кривых $z_{\sigma,\tau}$. Поэтому формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика не является алгоритмически вычислимой. Единственный случай, когда дополнительные структуры могут быть выбраны некоторым комбинаторным способом, – случай, когда задано глобальное сглаживание многообразия K.

В [8] А. М. Габриэловым получено обобщение формулы работы [5] для старших классов Понтрягина. При этом для вычисления k-го класса Понтрягина требуется, чтобы многообразие K удовлетворяло условию (A_{4k}), обобщающему условие (A):

$$\widetilde{H}_q(\Sigma_\sigma;\mathbb{Q})=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant q\leqslant 4k-\operatorname{codim}\sigma$$

для любого симплекса $\sigma\in K$. Это условие является очень ограничительным, и не известно никакого способа проверять, выполняется ли оно для данного многообразия Брауэра. Тем более не существует никакого комбинаторного способа производить вычисления по полученной формуле. Отличие подхода А. М. Габриэлова состоит в том, что вместо определения классов Понтрягина через кривизну связности он использует определение классов Понтрягина через вырождения в системах сечений касательного расслоения (см. [13], [25]).

Формула, полученная в работе [5], не является локальной. В [6] описана процедура усреднения по выбору дополнительных структур, которая позволяет для любого многообразия Брауэра, удовлетворяющего условию (A), строить рациональный симплициальный цикл, класс гомологий которого двойствен классу $p_1(|K|)$, так, что коэффициент при каждом симплексе в построенном цикле определяется только комбинаторным строением его линка. Однако для вычислений по этой формуле нам надо еще больше знать о пространствах $\Sigma(\rho)$: теперь нам нужно не только уметь выбирать какие-нибудь точки y_σ, y_τ и кривые $z_{\sigma,\tau}$, но и описывать все такие наборы точек и кривых, удовлетворяющие некоторым специальным условиям.

В работе [7] Р. Д. Макферсон построил модификацию формулы работы [6], позволяющую отказаться от условия (A). Таким образом, полученная формула может быть применена к произвольному многообразию Брауэра и коэффициент при каждом симплексе в полученном цикле будет зависеть только от комбинаторного строения линка этого симплекса. Однако эта формула по-прежнему содержит шаг, который связан с описанием стратификации пространств $\Sigma(\rho)$ и не может быть выполнен комбинаторно. В [7] предложено новое доказательство того, что построенная формула определяет цикл, класс гомологий которого двойствен первому классу Понтрягина. Идея доказательства заключается в том, чтобы построить гомологический аналог отображения Гаусса. Если M^m – гладкое многообразие, то для любого вложения $M^m\hookrightarrow\mathbb{R}^{n-1}$ определено отображение Гаусса $g\colon M^m\to G_{n-1,m}$, где $G_{n-1,m}$ – многообразие Грассмана m-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{n-1}$. Взяв композицию отображения g с естественным вложением $G_{n-1,m}\hookrightarrow G_{n,m+1}$, получим отображение $g_1\colon M^m\to G_{n,m+1}$. При этом $g^*\gamma^m_{n-1}\cong TM^m$ и $g_1^*\gamma_n^{m+1}\cong TM^m\oplus\varepsilon^1$, где TM^m – касательное расслоение многообразия M^m, γ^m_n – тавтологическое расслоение над $G_{n,m}$, ε^1 – тривиальное одномерное расслоение. Пусть теперь K – многообразие Брауэра размерности m с n вершинами. Тогда определено стандартное вложение $|K|\hookrightarrow\Delta^{n-1}\subset\mathbb{R}^{n-1}$. Р. Макферсон явно строит *гомологическое 4-отображение Гаусса*, т.е. цепное отображение $f\colon C_i(K^*;\mathbb{Q})\to C_i(G_{n,m+1};\mathbb{Q})$, $i\leqslant 4$, такое, что $f^*p_1(\gamma_n^{m+1})=p_1(|K|)$. Здесь K^* – клеточное разбиение многообразия $|K|$, двойственное триангуляции K.

5. Формула Чигера. Подход Дж. Чигера [10] основан на построении теории Ходжа для псевдомногообразий с локально-плоской метрикой, удовлетворяющих некоторым локальным топологическим условиям. Симплициальный комплекс размерности

m называется *псевдомногообразием*, если каждый его симплекс содержится в некотором m-мерном симплексе и при этом каждый $(m-1)$-мерный симплекс содержится ровно в двух m-мерных симплексах. Пусть K – компактное псевдомногообразие размерности m, Σ^{m-2} – его $(m-2)$-мерный остов. Введем на $|K|$ метрику такую, что ее ограничение на каждый симплекс совпадает с евклидовой метрикой на правильном симплексе с ребром 1. Тогда $|K|\setminus|\Sigma^{m-2}|$ – некомпактное гладкое риманово многообразие. Обозначим через $H^*_{(2)}(|K|\setminus|\Sigma^{m-2}|;\mathbb{R})$ пространства L_2-когомологий этого многообразия. По определению положим $H^*_{(2)}(K;\mathbb{R}) = H^*_{(2)}(|K|\setminus|\Sigma^{m-2}|;\mathbb{R})$. Несложно проверить, что так определенные L_2-когомологии псевдомногообразия K не изменяются при переходе к подразделениям и, следовательно, являются кусочно линейно инвариантными.

Определение 5.1. Псевдомногообразие K называется *псевдомногообразием с пренебрежимой границей*, если $H^k_{(2)}(\operatorname{link}\sigma;\mathbb{R})=0$ для любого непустого симплекса $\sigma\in K$ такого, что $\dim\operatorname{link}\sigma=2k$.

Это условие нужно для того, чтобы замыкания операторов d и d^* в пространствах L_2-форм на многообразии $|K|\setminus|\Sigma^{m-2}|$ были сопряжены. В частности, любое комбинаторное многообразие является псевдомногообразием с пренебрежимой границей. Пространства L_2-когомологий компактных псевдомногообразий с пренебрежимой границей всегда конечномерны.

Для псевдомногообразия L размерности $4k-1$ с пренебрежимой границей Дж. Чигер определяет аналог функционала Атьи–Патоди–Зингера $\eta(L)$. Пусть φ_j – козамкнутые собственные $(2k-1)$-формы оператора Лапласа на дополнении к $(4k-3)$-мерному остову псевдомногообразия L, μ_j – соответствующие собственные значения. Формы φ_j могут быть нормированы условием $d\varphi_j = \pm\frac{\sqrt{\mu_j}}{2k-1} *\varphi_j$. Рассмотрим функцию

$$\eta(s)=\int_{|L|}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_j \mu_j^{-(s+\frac{1}{2})}\varphi_j\wedge d\varphi_j, \qquad \operatorname{Re}s<-\frac{1}{2}.$$

Эта функция продолжается до мероморфной на всей комплексной плоскости функции, не имеющей полюса в точке 0. Тогда $\eta(L)=\eta(0)$. Заметим, что значение $\eta(L)$ вещественно и зависит только от комбинаторного типа псевдомногообразия L.

Теорема 5.1 (Дж. Чигер [10]). *Пусть K – ориентируемое псевдомногообразие размерности m с пренебрежимой границей. Тогда цепь*

$$c_{m-4k}(K)=\sum_{\sigma^{m-4k}\in K}\eta(\operatorname{link}\sigma^{m-4k})\sigma^{m-4k}$$

является циклом. Класс гомологий цикла $c_{m-4k}(K)$ не изменяется при переходе к подразделениям псевдомногообразия K и, следовательно, является кусочно линейным инвариантом. Если K – комбинаторное многообразие, то класс гомологий цикла $c_{m-4k}(K)$ двойствен по Пуанкаре $4k$-мерному L-классу Хирцебруха многообразия $|K|$.

Классы Понтрягина могут быть представлены как полиномы от L-классов Хирцебруха, т.е. L-классы Хирцебруха являются альтернативной системой порождающих в кольце Понтрягина $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$. Теорема 5.1 может рассматриваться как определение гомологических L-классов для псевдомногообразий с пренебрежимой границей. Формула Чигера является комбинаторной в том смысле, что цикл $c_{m-4k}(K)$ определяется только комбинаторным строением псевдомногообразия K. Однако не известно никакого комбинаторного способа вычисления значения $\eta(L)$ по заданному псевдомногообразию L. Кроме того, неизвестно, являются ли значения $\eta(L)$ рациональными. Таким образом, теорема 5.1 задает только вещественные циклы.

6. Формула Гельфанда–Макферсона. В [9] И.М. Гельфанд и Р.Д. Макферсон получили комбинаторные формулы для всех рациональных нормальных классов Понтрягина. Нормальные классы Понтрягина многообразия M – это классы $\tilde{p}_k(M) \in H^{4k}(M;\mathbb{Q})$ такие, что $(1+p_1(M)+p_2(M)+\cdots) \smile (1+\tilde{p}_1(M)+\tilde{p}_2(M)+\cdots) = 1$. Подход [9] является дискретизацией следующего подхода к определению классов Понтрягина. Пусть M – нечетномерное гладкое многообразие размерности m, E – тотальное пространство расслоения $\eta = TM \oplus \varepsilon^1$, где ε^1 – тривиальное одномерное расслоение над M. Обозначим через $\pi\colon \mathscr{Y} \to M$ грассманизацию расслоения η со слоем $G_{m+1,m-1}$, через ξ – тавтологическое 2-мерное расслоение над $\mathscr{Y}$.

Предложение 6.1. *Нормальные классы Понтрягина многообразия M удовлетворяют равенству*

$$\tilde{p}_k(M) \frown [M] = (-1)^k \pi_*(e(\xi)^{m-1+2k} \frown [\mathscr{Y}]),$$

где $e(\xi)$ – класс Эйлера расслоения ξ с коэффициентами в его ориентирующем пучке.

Общий подход к построению характеристических классов, основанный на прямом образе эйлерова класса грассманизации исходного расслоения, был дан В.М. Бухштабером в [26] (детальное изложение см. в [27]).

Дискретный аналог описанной конструкции опирается на использование *ориентированных матроидов* (введение в теорию ориентированных матроидов см. в [28], [29]). Пусть K – нечетномерное ориентированное симплициальное многообразие, m – его размерность. Использование ориентированных матроидов позволяет построить симплициальный комплекс Y – комбинаторный аналог пространства $\mathscr{Y}$. Аналогом отображения π будет симплициальное отображение $\widehat{\pi} : Y \to K'$, где K' – барицентрическое подразделение комплекса K. Над Y будет существовать каноническое топологическое S^1-расслоение, причем рациональный симплициальный коцикл Ω, представляющий класс Эйлера этого S^1-расслоения, может быть вычислен комбинаторно. При этом комплекс Y и коцикл Ω вычисляются по триангуляции K *локально*: строение прообраза $\widehat{\pi}^{-1}(|L|)$ и ограничение $\Omega|_{\widehat{\pi}^{-1}(|L|)}$ зависят только от комбинаторного строения многообразия K внутри окрестности подкомплекса $L \subset K$.

Теорема 6.1 (И.М. Гельфанд, Р.Д. Макферсон [9]). *Пусть $\varphi \in C_{3m-2}(Y;\mathbb{Z})$ – симплициальный цикл такой, что $\widehat{\pi}_*(\Omega^{m-1} \frown \varphi) = [K']$. Определим симплициальный цикл $\zeta_k \in C_{m-4k}(K';\mathbb{Q})$ по формуле*

$$\zeta_k = (-1)^k \widehat{\pi}_*\left(\left(\frac{1}{2}\Omega\right)^{m-1+2k} \frown \varphi\right).$$

Тогда цикл ζ_k представляет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре классу $\tilde{p}_k(|K|)$.

Полученная формула легко обощается на случай четномерного многообразия, а также на случай неориентированного многообразия.

Цикл φ, удовлетворяющий условиям теоремы 6.1, называется *фиксирующим циклом* и является аналогом фундаментального цикла многообразия $\mathscr{Y}$. Фиксирующий цикл не может быть выбран канонически, потому что в отличие от $\mathscr{Y}$ пространство Y уже не будет многообразием. И. М. Гельфанд и Р. Д. Макферсон рассматривают цикл φ как структуру на многообразии K, являющуюся комбинаторным аналогом гладкой структуры. Цикл φ может быть (локально) восстановлен по заданному глобальному сглаживанию многообразия $|K|$, однако не известно никакого способа построения фиксирующего цикла для произвольного комбинаторного многообразия K. Таким образом, формула Гельфанда–Макферсона может быть применена только для симплициального многообразия с заданным фиксирующим циклом или сглаживанием, что является ее недостатком по сравнению с формулами работ [7] и [10]. С другой стороны, ее преимущество заключается в том, что если задан фиксирующий цикл или сглаживание, то цикл ζ_k вычисляется с помощью конечной комбинаторной процедуры. При этом цикл ζ_k определяется по триангуляции K и фиксирующему циклу (сглаживанию) локально: коэффициент при каждом симплексе комплекса K' в цикле ζ_k зависит только от комбинаторного строения многообразия K' в окрестности этого симплекса и от ограничения фиксирующего цикла (сглаживания) на прообраз этой окрестности.

7. Локальные формулы. В оставшейся части работы будет описана локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина, полученная автором в [12]. Это первая формула, позволяющая для произвольного комбинаторного многообразия без каких бы то ни было дополнительных структур чисто комбинаторным путем вычислять цикл, класс гомологий которого двойствен первому классу Понтрягина этого многообразия. Полученный цикл будет симплициальным циклом в исходной триангуляции многообразия, а не в каком-либо ее подразделении. При этом коэффициент при каждом симплексе будет определяться только комбинаторным строением линка этого симплекса. Таким образом, полученный цикл будет иметь вид

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma^{m-4}\in K} f(\operatorname{link}\sigma^{m-4})\sigma^{m-4},$$

где $m = \dim K$, f – функция на классах изоморфизма ориентированных 3-мерных PL-сфер. При $m > 4$ симплексы $\sigma^{m-4} \in K$ не имеют выделенной ориентации, поэтому написанная сумма имеет смысл, только если значение $f(L)$ меняет знак при замене ориентации PL-сферы L. В п. 2 была построена функция F, задающая локальную формулу для класса Эйлера ориентированного многообразия. При этом значение $F(L)$ не зависит от ориентации PL-сферы L. Это различие соответствует тому, что класс Эйлера ориентированного многообразия изменяет знак при замене ориентации многообразия, в то время как классы Понтрягина не зависят от ориентации многообразия. Получение формулы для первого класса Понтрягина распадается на две части: во-первых, используя технику бизвездных преобразований, удается описать все функции f такие, что для любого комбинаторного многообразия цепь $f_\sharp(K)$ является циклом (см. пп. 9–11, 13), во-вторых, оказывается, что любая такая функция f задает цикл, класс гомологий которого двойствен первому классу Понтрягина, умноженному на некоторую константу (п. 8, теорема 8.3).

Дадим теперь точные определения. Пусть $\mathcal{T}_n$ – множество всех классов изоморфизма ориентированных $(n-1)$-мерных PL-сфер (считаем, что $\mathcal{T}_0 = \{\varnothing\}$, $\mathcal{T}_{-n} = \varnothing$, $n > 0$). Как правило, мы не будем различать PL-сферу и ее класс изоморфизма. Для любой PL-сферы $L \in \mathcal{T}_n$ обозначим через $-L$ PL-сферу, полученную из L заменой ориентации. Назовем PL-сферу $L \in \mathcal{T}_n$ *симметричной*, если она изоморфна PL-сфере $-L$. Пусть G – абелева группа. Обозначим через $\mathcal{T}^n(G)$ абелеву группу всех функций $f\colon \mathcal{T}_n \to G$, изменяющих знак при замене ориентации PL-сферы ($\mathcal{T}^0(G) = G$, $\mathcal{T}^{-n}(G) = 0, n > 0$).

Пусть K – m-мерное комбинаторное многообразие. Каждой функции $f \in \mathcal{T}^n(G)$ сопоставим коориентированную цепь $f_\sharp(K) \in \widehat{C}_{m-n}(K;G)$ по формуле

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma^{m-n}\in K} f(\operatorname{link}\sigma^{m-n})\sigma^{m-n}$$

(слагаемое $f(\operatorname{link}\sigma^{m-n})\sigma^{m-n}$ не зависит от выбора коориентации симплекса σ^{m-n}).

Определение 7.1. *Назовем функцию $f \in \mathcal{T}^n(G)$ локальной формулой, если для любого комбинаторного многообразия K коориентированная цепь $f_\sharp(K)$ является циклом.*

Определим дифференциал $\delta\colon \mathcal{T}^n(G) \to \mathcal{T}^{n+1}(G)$ по формуле

$$(\delta f)(L) = \sum f(\operatorname{link} v),$$

где суммирование ведется по всем вершинам v PL-сферы $L \in \mathcal{T}_{n+1}$ и ориентация $\operatorname{link} v$ индуцирована ориентацией L (как ориентация границы звезды вершины v). Легко проверить, что $\delta^2 = 0$. Таким образом, в $\mathcal{T}^*(G)$ вводится структура коцепного комплекса.

Следующие два предложения доказываются непосредственно.

Предложение 7.1. *Функция f является локальной формулой тогда и только тогда, когда f является коциклом в коцепном комплексе $\mathcal{T}^*(G)$. Если f является кограницей в коцепном комплексе $\mathcal{T}^*(G)$, то для любого комбинаторного многообразия K коориентированная цепь $f_\sharp(K)$ является границей.*

Предложение 7.2. *Пусть $f \in \mathcal{T}^n(G)$ – локальная формула, K – комбинаторное многообразие с краем. Тогда $\widehat{\partial} f_\sharp(K) = i(f_\sharp(\partial K))$, где $i\colon \widehat{C}_*(\partial K;G) \to \widehat{C}_*(K;G)$ – естественное вложение, $f_\sharp(K)$ – цепь, в которую каждый $(\dim K - n)$-мерный симплекс $\sigma \in K$ входит с коэффициентом $f(\operatorname{link}\sigma)$, если σ не содержится в ∂K, и с коэффициентом $f(\operatorname{link}\sigma \cup_{\partial \operatorname{link}\sigma} C\partial \operatorname{link}\sigma)$, если σ содержится в ∂K.*

Следствие 7.1. *Если K_1 и K_2 – две триангуляции многообразия M^m, $f \in \mathcal{T}^n(G)$ – локальная формула, то циклы $f_\sharp(K_1)$ и $f_\sharp(K_2)$ гомологичны.*

Таким образом, каждый класс когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(G))$ определяет для любого многообразия M^m класс гомологий $\psi_\sharp(M^m) \in H_{m-n}(M^m;\widehat{G})$ и, следовательно, по двойственности Пуанкаре, класс когомологий $\psi^\sharp(M^m) \in H^n(M^m;G)$. Если $m = n$ и многообразие M^n ориентированно, то класс ψ определяет элемент группы G по формуле $\psi^\star(M^n) = \langle \psi^\sharp(M^n), [M^n]\rangle$. В п. 8 нам потребуется следующее следствие предложения 7.2.

Следствие 7.2. *Пусть* $\psi \in H^n(\mathscr{T}^*(G))$. *Тогда* $\psi^\star(M_1^n) = \psi^\star(M_2^n)$ *для любых двух кобордантных ориентированных многообразий* M_1^n *и* M_2^n.

8. Когомологии комплекса $\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})$. Характеристическими классами будем называть элементы группы когомологий $H^*(\mathrm{BPL}; G)$, где BPL – классифицирующее пространство стабильных кусочно линейных расслоений. Если $p \in H^*(\mathrm{BPL}; G)$, то соответствующий характеристический класс многообразия M^m будем обозначать через $p(M^m)$. В случае $G = \mathbb{Q}$ имеем $H^*(\mathrm{BPL}; \mathbb{Q}) = H^*(\mathrm{BO}; \mathbb{Q})$ и характеристические классы – это в точности полиномы от классов Понтрягина.

Определение 8.1. Локальная формула $f \in \mathscr{T}^*(G)$ называется *локальной формулой для характеристического класса* $p \in H^*(\mathrm{BPL}; G)$, если для любого комбинаторного многообразия K цикл $f_\sharp(K)$ представляет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре классу когомологий $p(|K|)$.

Теорема 8.1. *Каждая рациональная локальная формула является локальной формулой для некоторого рационального характеристического класса.*

Доказательство. Из следствия 7.2 вытекает, что корректно определен гомоморфизм $\star\colon H^n(\mathscr{T}^*(G)) \to \mathrm{Hom}(\Omega_n, G)$, сопоставляющий классу когомологий ψ гомоморфизм $\psi^\star$, где Ω_* – кольцо ориентированных кусочно линейных кобордизмов. Существует канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}(\Omega_n, \mathbb{Q}) \cong H^n(\mathrm{BPL}; \mathbb{Q})$. Поэтому гомоморфизм $\star$ задает гомоморфизм $\sharp\colon H^n(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) \to H^n(\mathrm{BPL}; \mathbb{Q})$. Таким образом, для любой локальной формулы $f \in \mathscr{T}^n(\mathbb{Q})$ определен рациональный характеристический класс $p = \sharp(\psi)$, где ψ – класс когомологий, представленный коциклом f. Однако мы еще не доказали, что f – локальная формула для характеристического класса p. Действительно, из определения гомоморфизма $\sharp$ следует лишь, что $\psi^\sharp(M^n) = p(M^n)$ для любого n-мерного многообразия M^n. Поэтому чтобы доказать, что f – локальная формула для характеристического класса p, нам остается доказать следующее предложение.

Предложение 8.1. *Имеем* $\psi^\sharp(M^m) = p(M^m) = \sharp(\psi)(M^m)$ *для любого многообразия* M^m, $m \geqslant n$.

Схема доказательства. Можно показать, что $\psi^\sharp(M^m)\big|_{N^n} = \psi^\sharp(N^n)$ для любого подмногообразия $N^n \subset M^m$ с тривиальным нормальным расслоением. Если $m > 2n+1$ и многообразие M^m ориентируемо, то предложение следует из результата Р. Тома [30] о том, что для любого класса гомологий $z \in H_n(M^m; \mathbb{Z})$ существует ненулевое целое число q такое, что класс гомологий qz реализуется подмногообразием с тривиальным нормальным расслоением. Если $n < m \leqslant 2n+1$, нужно заменить многообразие M^m на $M^m \times S^n$, если многообразие M^m неориентируемо – перейти к двулистному ориентирующему накрытию.

Первый результат о существовании локальных формул для характеристических классов был получен Н. Левиттом и К. Рурком в [17].

Теорема 8.2 (Н. Левитт, К. Рурк [17]). *Пусть* $p \in H^n(\mathrm{BPL}; \mathbb{Q})$ *– рациональный характеристический класс,* $m \geqslant n$ *– целое число. Тогда существует функция* $f \in \mathscr{T}^n(\mathbb{Q})$ *такая, что для любого ориентированного* m*-мерного комбинаторного многообразия* K *класс гомологий, представляемый циклом* $f_\sharp(K)$*, двойствен по Пуанкаре классу когомологий* $p(|K|)$.

Замечание 8.1. В случае гладкого многообразия с гладкой триангуляцией аналогичный результат был получен П. Л. Кингом [31] (для $m = n$ и вещественных коэффициентов).

В [12] автором доказана следующая теорема.

Теорема 8.3. *Пусть p – произвольный рациональный характеристический класс. Тогда локальная формула для характеристического класса p существует и единственна с точностью до прибавления произвольной кограницы комплекса $\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})$. Таким образом, гомоморфизм*

$$\sharp\colon H^*(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) \to H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots], \qquad \deg p_i = 4i,$$

является изоморфизмом.

Часть теоремы 8.3, говорящая о существовании локальной формулы для произвольного рационального характеристического класса, является усилением теоремы 8.2 и сразу следует из теорем 8.2 и 8.1.

Н. Левиттом и К. Рурком были также получены результаты о возможности локального вычисления характеристических классов с произвольными коэффициентами для комбинаторных многообразий с заданным *локальным упорядочением вершин*, т.е. частичным упорядочением вершин, ограничение которого на множество вершин звезды каждого симплекса является полным упорядочением. Пусть $\mathscr{D}_m$ – множество ориентированных PL-триангуляций m-мерного диска с полным упорядочением вершин с точностью до изоморфизма, сохраняющего упорядочение вершин.

Теорема 8.4 (Н. Левитт, К. Рурк [17]). *Пусть $p \in H^n(\mathrm{BPL};G)$ – характеристический класс, $m \geqslant n$ – целое число. Тогда существует функция $g\colon \mathscr{D}_m \to G$ такая, что для любого ориентированного m-мерного комбинаторного многообразия K с локальным упорядочением вершин класс гомологий, представляемый циклом*

$$\sum_{\sigma^{m-n}\in K} g(\operatorname{star}\sigma^{m-n})\sigma^{m-n},$$

двойствен по Пуанкаре классу когомологий $p(|K|)$.

Замечание 8.2. Заметим, что в теореме 8.4 имеются в виду *кусочно линейные* характеристические классы. В случае $G = \mathbb{Z}$ целочисленные классы Понтрягина не являются кусочно линейными характеристическими классами, но некоторые их кратные являются.

9. Бизвездные преобразования. Пусть K – комбинаторное многообразие. Предположим, что симплициальный комплекс K содержит симплекс σ_1 такой, что $\operatorname{link}\sigma_1 = \partial\sigma_2$ – граница симплекса и симплекс σ_2 не принадлежит комплексу K. Тогда $\sigma_1 * \partial\sigma_2$ – полный подкомплекс комплекса K. *Бизвездным преобразованием* β, ассоциированным с симплексом $\sigma_1 \in K$, называется преобразование, переводящее комплекс K в симплициальный комплекс

$$\beta(K) = (K \setminus (\sigma_1 * \partial\sigma_2)) \cup (\partial\sigma_1 * \sigma_2).$$

При этом если $\dim \sigma = 0$, считаем, что $\partial\sigma = \varnothing$; для любого симплекса σ считаем, что $\sigma * \varnothing = \sigma$. Таким образом, частными случаями бизвездных преобразований являются звездные подразделения симплексов максимальной размерности и обратные к ним преобразования. В результате любого бизвездного преобразования получается комбинаторное многообразие, PL-гомеоморфное исходному. На рис. 1 и 2 изображены все виды бизвездных преобразований для случаев $\dim K = 2$ и $\dim K = 3$.

По теореме Пахнера (см. [32], а также [33]), если K_1 и K_2 – две кусочно линейные триангуляции одного многообразия, то K_1 переводится в K_2 конечной последовательностью бизвездных преобразований (здесь мы рассматриваем триангуляции как чисто комбинаторные объекты, т.е. мы не различаем изоморфные триангуляции). В частности, любые две m-мерные PL-сферы переводятся друг в друга конечной последовательностью бизвездных преобразований.

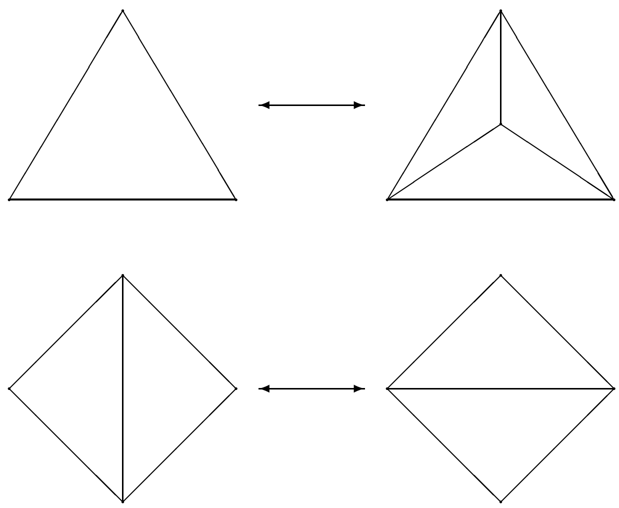

Рис. 1. Бизвездные преобразования для $\dim K = 2$

10. Графы Γ_n. Для каждого натурального n определим граф Γ_n. Множество вершин этого графа – множество $\mathcal{T}_{n+1}$ ориентированных n-мерных PL-сфер. Пусть $L_1, L_2 \in \mathcal{T}_{n+1}$. Будем говорить, что два бизвездные преобразования β_1 и β_2, переводящие L_1 в L_2, ассоциированные с симплексами σ_1 и σ_2 соответственно, *эквивалентны*, если существует автоморфизм PL-сферы L_1, переводящий симплекс σ_1 в симплекс σ_2. Ребра, соединяющие две различные вершины L_1 и L_2 графа Γ_n, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности бизвездных преобразований, переводящих L_1 в L_2. Опишем теперь ребра графа Γ_n, оба конца которых совпадают с вершиной L. Будем называть бизвездное преобразование β, переводящее PL-сферу L в себя, *несущественным*, если оно эквивалентно обратному бизвездному преобразованию β^{-1}. Классам эквивалентности несущественных бизвездных преобразований не будет соответствовать никакое ребро графа Γ_n. Остальные классы эквивалентности бизвездных преобразований, переводящих L в себя, разбиваются на

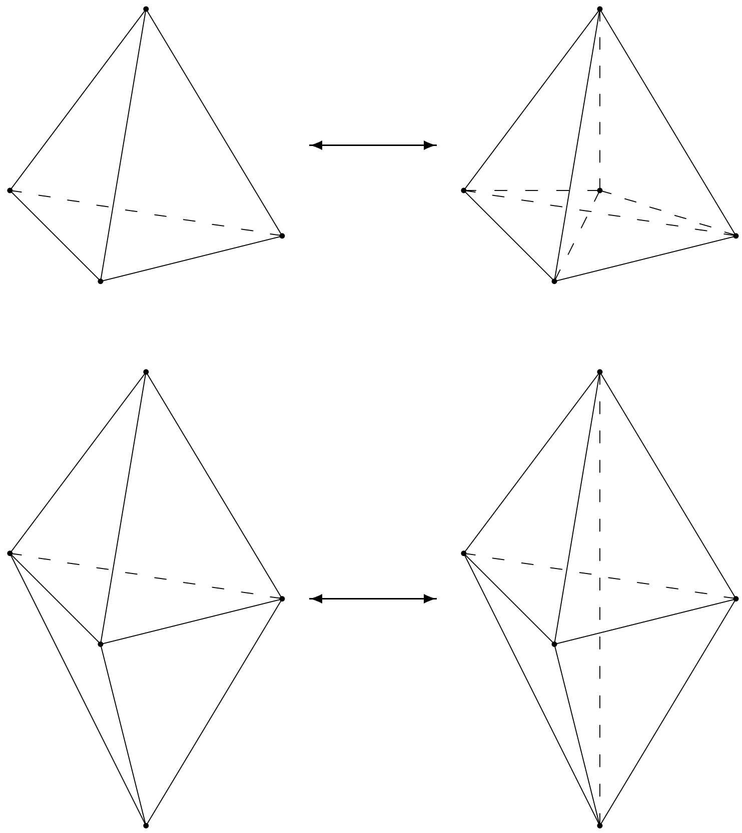

Рис. 2. Бизвездные преобразования для $\dim K = 3$

пары взаимно обратных. Ребра графа Γ_n, соединяющие вершину L с собой, находятся во взаимно однозначном соответствии с такими парами классов эквивалентности. Из теоремы Пахнера следует, что граф Γ_n связен. Обозначим через e_β ребро, соответствующее бизвездному преобразованию β. Обозначениям e_β и $e_{\beta^{-1}}$ будет соответствовать одно и то же ребро, но с разными ориентациями.

Пусть $C_*(\Gamma_n;\mathbb{Z})$ – клеточный цепной комплекс графа Γ_n. Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на графе Γ_n изменением ориентаций PL-сфер и на группе $\mathbb{Q}$ изменением знака. Следовательно, можно определить эквивариантные коцепи $C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(C_*(\Gamma_n;\mathbb{Z}),\mathbb{Q})$ и эквивариантные когомологии $H^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ (считаем, что на группе $\mathbb{Z}$ группа $\mathbb{Z}_2$ действует тривиально). Обозначим через d дифференциал комплекса $C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ и через $B^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}) \subset C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ подгруппу эквивариантных кограниц. Из того, что граф Γ_n связен, следует, что $H^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}) = 0$. Поэтому гомоморфизм

$$d\colon C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}) \to C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$$

является мономорфизмом.

Очевидно, что $C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathbb{Q}) = \mathscr{T}^n(\mathbb{Q})$. Поэтому определен дифференциал

$$\delta\colon C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathbb{Q}) \to C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}).$$

Пусть $L_1, L_2 \in \mathscr{T}_{n+1}$, β – бизвездное преобразование, переводящее L_1 в L_2. Можно считать, что L_1 и L_2 – симплициальные комплексы с одним и тем же множеством вершин V (если $\dim\sigma_1 > 0$ и $\dim\sigma_2 > 0$, то это действительно так, иначе введем для одного из комплексов L_1 и L_2 фиктивную вершину v_0, которая не будет симплексом этого комплекса). Для любой вершины $v \in V$ бизвездное преобразование β либо не изменяет комплекс $\operatorname{link} v$, либо индуцирует бизвездное преобразование β_v, переводящее комплекс $\operatorname{link}_{L_1} v$ в комплекс $\operatorname{link}_{L_2} v$. Обозначим через $W \subset V$ подмножество, состоящее из всех вершин v таких, что бизвездное преобразование β_v не является несущественным (считаем, что $v_0 \notin W$). Определим дифференциал $\delta\colon C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathbb{Q}) \to C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ по формуле

$$(\delta h)(e_\beta) = \sum_{v\in W} h(e_{\beta_v}).$$

Легко проверить, что $\delta^2 = 0$ и $\delta d = d\delta$.

11. Локальные формулы для первого класса Понтрягина. Этот пункт посвящен явному описанию всех локальных формул для первого класса Понтрягина. По теореме 8.1 каждая локальная формула $f \in \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ является локальной формулой для первого класса Понтрягина, умноженного на некоторое рациональное число. Таким образом, прежде всего нужно научиться находить все функции $f\colon \mathscr{T}_4 \to \mathbb{Q}$, являющиеся локальными формулами. Любую функцию $f \in \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ можно рассматривать как $\mathbb{Z}_2$-эквивариантную нульмерную клеточную коцепь на графе Γ_3.

Предложение 11.1. *Функция $f \in \mathscr{T}^4(\mathbb{Q}) = C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3;\mathbb{Q})$ является локальной формулой тогда и только тогда, когда существует коцепь $h \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$ такая, что $df = \delta h$.*

Доказательство. Пусть существует коцепь $h \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$ такая, что $df = \delta h$. Тогда $d\delta f = \delta df = \delta^2 h = 0$. Следовательно, $\delta f = 0$, так как $d\colon C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_4;\mathbb{Q}) \to C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_4;\mathbb{Q})$ – мономорфизм. Значит, f – локальная формула.

Пусть теперь известно, что f – локальная формула.

Пусть $L_1, L_2 \in \mathscr{T}_n$, β – бизвездное преобразование, переводящее PL-сферу L_1 в PL-сферу L_2. Определим множества V и W так же, как в п. 10. Пусть β заменяет полный подкомплекс $\sigma_1 * \partial\sigma_2$ симплициального комплекса L_1 на полный подкомплекс $\partial\sigma_1 * \sigma_2$ симплициального комплекса L_2. Рассмотрим конус CL_1 с вершиной u_1 и конус CL_2 с вершиной u_2. Тогда $L_\beta = CL_1 \cup CL_2 \cup (\sigma_1 * \sigma_2)$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $V \cup \{u_1, u_2\}$. Очевидно, что L_β является n-мерной PL-сферой. Ориентируем L_β так, чтобы индуцированная ориентация комплекса $\operatorname{link} u_2 = L_2$ совпадала с заданной. Тогда $L_\beta \in \mathscr{T}_{n+1}$.

Рассмотрим коцепь $h \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$ такую, что $h(e_\beta) = f(L_\beta)$ для любого ребра e_β графа Γ_2. Докажем, что $\delta h = df$. Пусть e_β – произвольное ребро графа Γ_3, где β – бизвездное преобразование, переводящее трехмерную PL-сферу L_1 в PL-сферу L_2. Очевидно, что линки всех вершин $v \in V\setminus W$ в комплексе L_β симметричны. Линк вершины $v \in W$ в комплексе L_β изоморфен комплексу $-L_{\beta_v}$. Линки вершин u_1 и u_2 изоморфны соответственно комплексам $-L_1$ и L_2. Из того, что f – локальная формула, следует, что

$$0 = (\delta f)(L_\beta) = -\sum_{v\in W} f(L_{\beta_v}) + f(L_2) - f(L_1)$$
$$= -\sum_{v\in W} h(e_{\beta_v}) + f(\partial e_\beta) = -(\delta h)(e_\beta) + (df)(e_\beta).$$

Предложение 11.1 доказано.

Опишем теперь подгруппу $A \subset C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$, состоящую из всех коцепей h таких, что $\delta h \in B^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3;\mathbb{Q})$, т.е. $\delta h = df$ для некоторой коцепи $f \in C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3;\mathbb{Q})$. Из того, что дифференциалы d и δ коммутируют, следует, что $\delta\colon C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q}) \to C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3;\mathbb{Q})$ – цепное отображение. Значит, корректно определен индуцированный гомоморфизм $\delta^*\colon H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q}) \to H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3;\mathbb{Q})$. Обозначим через $\widetilde{A}$ ядро этого гомоморфизма. Пусть $h \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$. Очевидно, что $h \in A$ тогда и только тогда, когда $[h] \in \widetilde{A}$.

Очевидно, что $H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\Gamma_2;\mathbb{Z}),\mathbb{Q})$. Поэтому для описания подгруппы $\widetilde{A}$ нам нужно выбрать систему образующих в группе $H_1(\Gamma_2;\mathbb{Z})$. Рассмотрим циклы в графе Γ_2, изображенные на рис. 3–8. Эти рисунки нужно понимать следующим образом: рассматривается произвольная двумерная PL-сфера, содержащая подкомплекс, изображенный на рисунке, и с ней производятся бизвездные преобразования, изображенные на рисунке. При этом предполагается, что ориентация этой двумерной PL-сферы задается обходом по часовой стрелке вершин треугольников, изображенных на рисунке. Если на рисунке некоторый угол выделен дугой, то предполагается, что к данной вершине внутри данного угла примыкает ровно столько треугольников, сколько написано. Таким образом, получаем 6 бесконечных серий циклов в графе Γ_2. Заметим, что циклы, изображенные на рис. 3–5, соответствуют коммутированию двух бизвездных преобразований.

Предложение 11.2. *Классы гомологий, задаваемые циклами, изображенными на рис.* 3–8, *порождают группу* $H_1(\Gamma_2;\mathbb{Z})$.

В этой статье мы опускаем доказательство предложения 11.2. Оно опирается на два утверждения, доказанные в [34] (см. также [29]):

1) каждая триангуляция двумерной сферы может быть реализована в виде границы выпуклого симплициального многогранника;

2) два комбинаторно эквивалентных трехмерных выпуклых симплициальных многогранника могут быть продеформированы друг в друга в классе выпуклых симплициальных многогранников с тем же комбинаторным типом.

Обозначим через S множество циклов, изображенных на рис. 3–8. Определим функцию $c\colon S \to \mathbb{Q}$, сопоставив каждому циклу число, написанное на соответствующем рисунке, где

$$\rho(p,q) = \frac{q-p}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)}\,,$$
$$\eta(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}\,.$$

Замечание 11.1. Похожие числовые выражения возникали в статье [35] при решении совсем другой задачи, а именно при нахождении формулы для класса Чженя–Эйлера S^1-расслоения через особенности ограничений морсовской функции на тотальном пространстве на слои этого расслоения.

Предложение 11.3. *Функция c продолжается до корректно определенного класса когомологий $c \in H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\Gamma_2; \mathbb{Z}), \mathbb{Q})$. При этом $\widetilde{A}$ – одномерное векторное пространство, натянутое на класс когомологий c.*

План доказательства этого предложения будет дан в п. 13.

Из предложения 11.1 следует, что корректно определен гомоморфизм $d^{-1}\delta \colon A \to C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3; \mathbb{Q}) = \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$, образом которого является подгруппа, состоящая из всех локальных формул.

Теорема 11.1. *Отображение $d^{-1}\delta$ осуществляет биекцию между множеством всех $\mathbb{Z}_2$-эквивариантных коциклов, представляющих класс когомологий c, и множеством всех локальных формул для первого класса Понтрягина.*

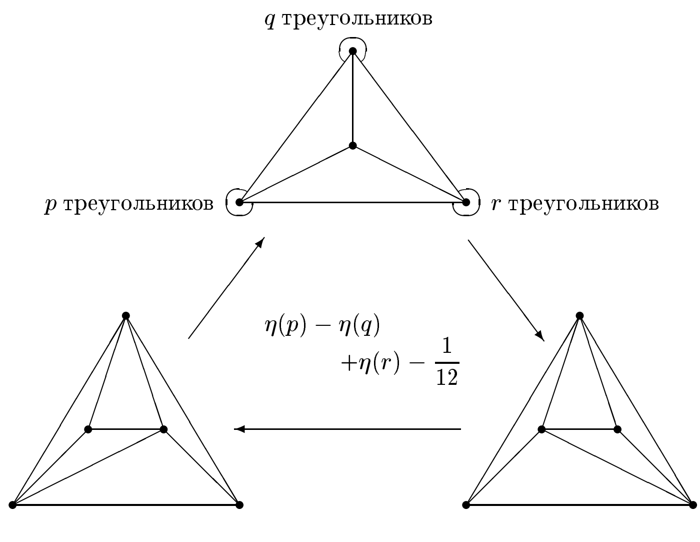

Рис. 6.

Доказательство. Рассмотрим эпиморфизм $j \colon \widetilde{A} \to H^4(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$, индуцированный гомоморфизмом $d^{-1}\delta$. Имеем $\dim \widetilde{A} = 1$ по предложению 11.3 и $\dim H^4(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) = 1$ по теореме 8.3. Значит, эпиморфизм j является изоморфизмом и существует рациональное число $\lambda \neq 0$ такое, что $j(\lambda c) = \varphi$, где $\varphi \in H^4(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$ – класс когомологий, представляемый локальными формулами для первого класса Понтрягина.

Докажем, что $d^{-1}\delta$ – мономорфизм. Имеем $\ker(d^{-1}\delta) \subset B^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathbb{Q})$, так как j – мономорфизм. При этом $(d^{-1}\delta)\big|_{B^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})} = \delta d^{-1}$. Очевидно, что $\mathscr{T}^2(\mathbb{Q}) = 0$. Кроме того по теореме 8.3 $H^3(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) = 0$. Следовательно, $\delta \colon \mathscr{T}^3(\mathbb{Q}) \to \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ – мономорфизм. Значит, $\delta d^{-1} \colon B^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathbb{Q}) \to \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ – мономорфизм.

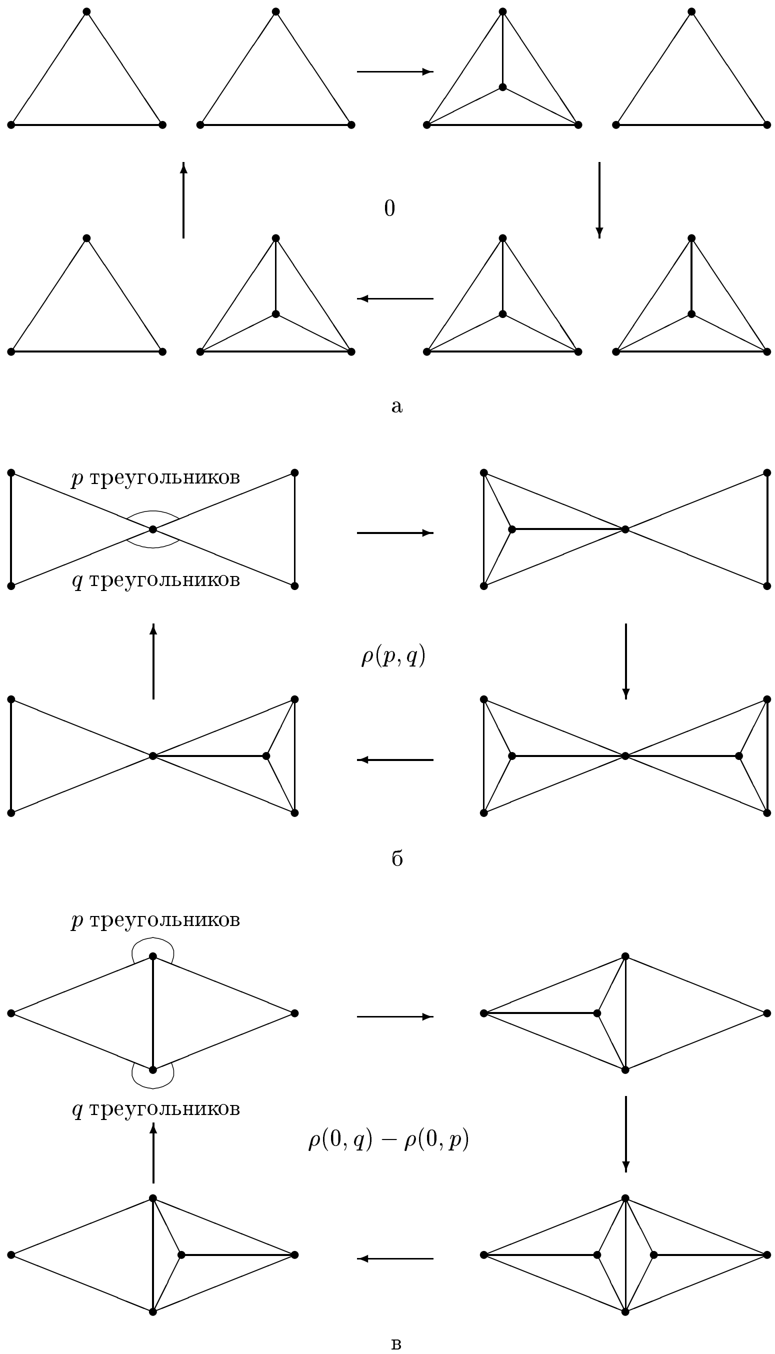
0
а
p треугольников
q треугольников
ρ(p, q)
б
p треугольников
q треугольников
ρ(0, q) − ρ(0, p)
в

Рис. 3.

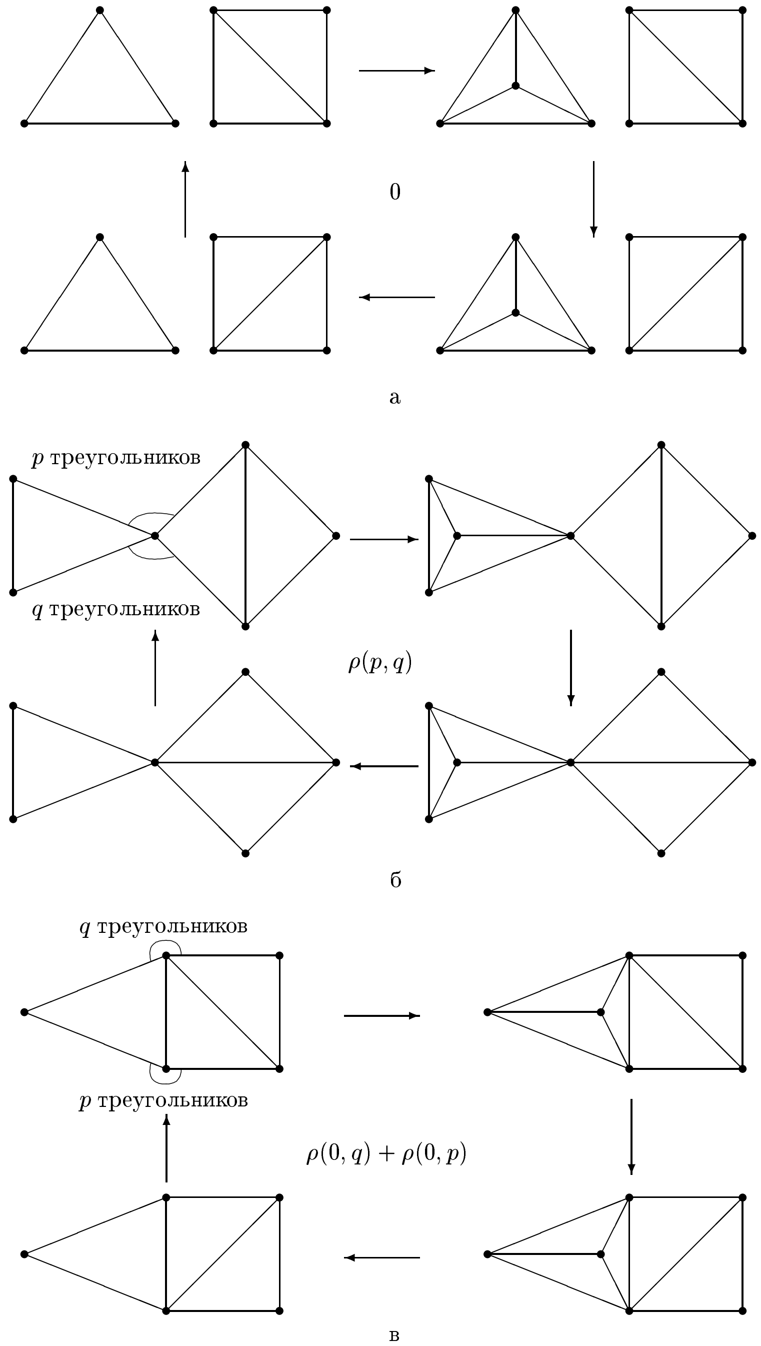
0
а
p треугольников
q треугольников
$\rho(p,q)$
б
q треугольников
p треугольников
$\rho(0,q)+\rho(0,p)$
в

Рис. 4.

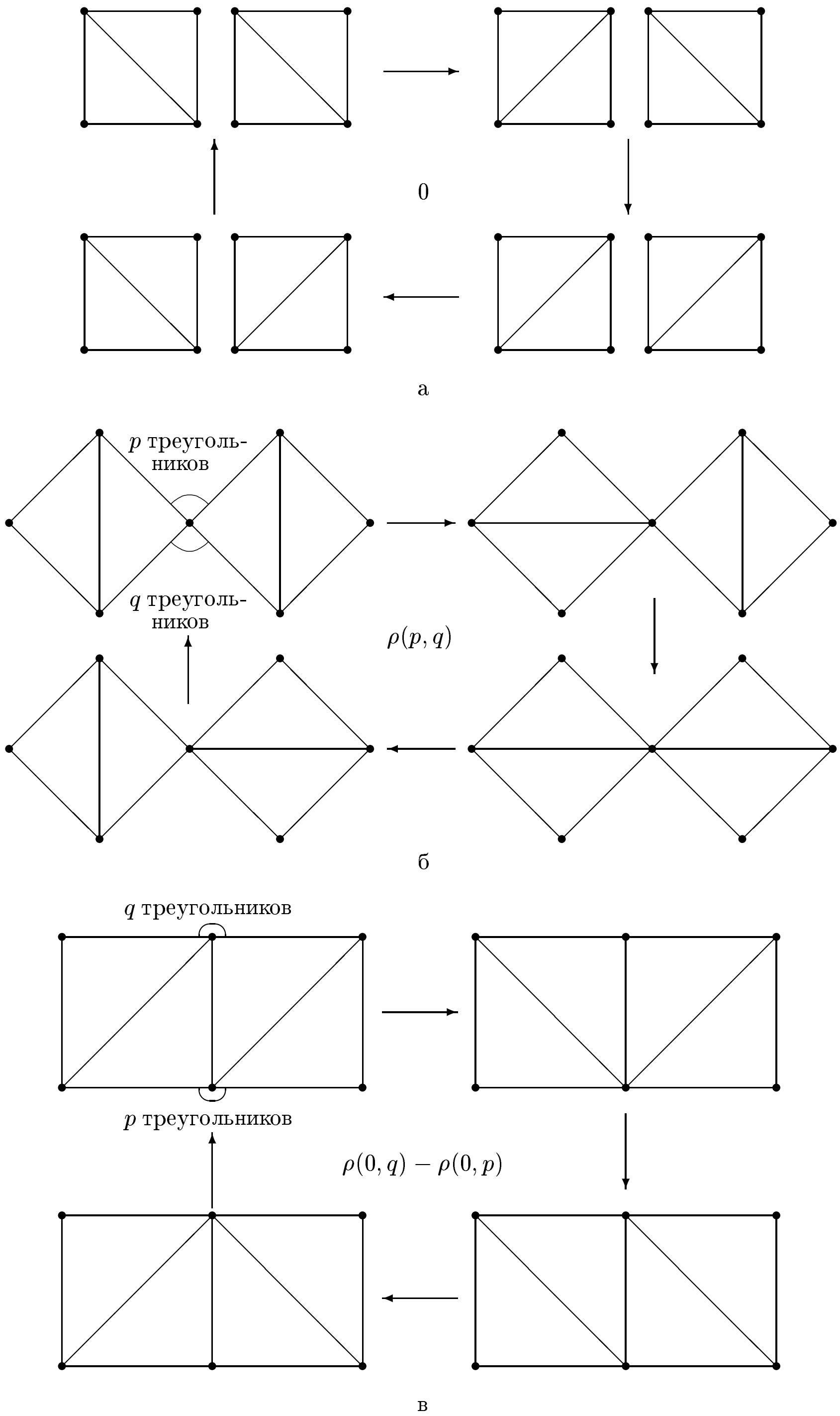
0
а
p треуголь-
ников
q треуголь-
ников
$\rho(p,q)$
б
q треугольников
p треугольников
$\rho(0,q)-\rho(0,p)$
в

Рис. 5.

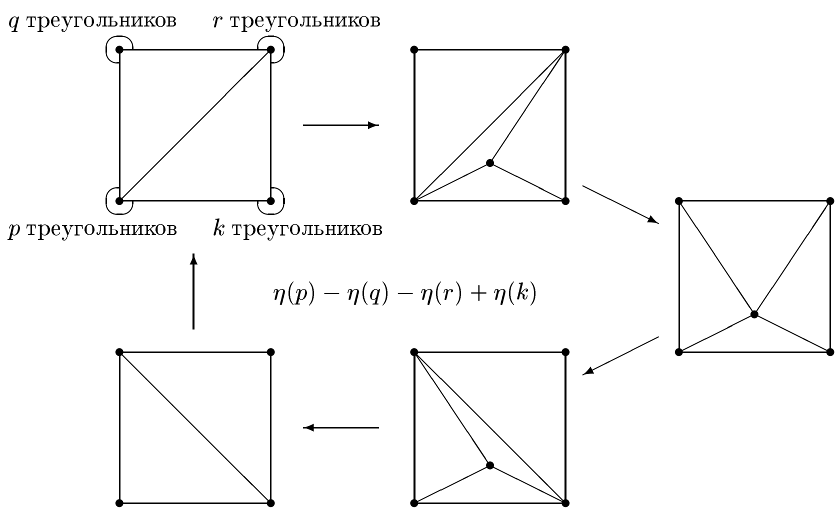

Рис. 7.

Итак, $d^{-1}\delta$ – мономорфизм. Значит, гомоморфизм $d^{-1}\delta$ осуществляет биекцию между множеством всех $\mathbb{Z}_2$-эквивариантных коциклов, представляющих класс когомологий λc, и множеством всех локальных формул для первого класса Понтрягина. Осталось доказать, что $\lambda = 1$. Для этого достаточно рассмотреть какое-нибудь ориентированное четырехмерное комбинаторное многообразие K с известным первым числом Понтрягина и вычислить $\psi^\star(|K|)$, где $\psi = j(c)$. Выбирая в качестве K триангуляцию $\mathbb{C}P^2$ с 9 вершинами, построенную в [36] (см. также [37]), с помощью непосредственного вычисления можно проверить, что $\lambda = 1$.

Замечание 11.2. На самом деле при доказательстве этой теоремы используется только та часть теоремы 8.3, которая говорит об эпиморфности отображения $\sharp\colon H^*(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) \to H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$ (равенство $H^3(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) = 0$ легко проверяется непосредственно).

12. Выбор канонической формулы. Теорема 11.1 дает описание всех рациональных локальных формул для первого класса Понтрягина. Полезно теперь дать описание какой-нибудь одной канонической локальной формулы f_0 для первого класса Понтрягина, т.е. найти канонический коцикл $\widehat{c}_0 \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$, представляющий класс когомологий c. Задача о выборе канонического 1-мерного коцикла, представляющего заданный класс когомологий, возникала (совсем в другой ситуации) при построении формулы работы [9]. Здесь мы пользуемся методом, аналогичным примененному в этой работе.

Обозначим через $\mathscr{T}_3^{(l)}$ множество классов изоморфизма ориентированных 2-мерных PL-сфер, которые могут быть получены из границы тетраэдра с помощью не более чем l бизвездных преобразований. Обозначим через $\Gamma_2^{(l)}$ полный подграф графа Γ_2, натянутый на множество вершин $\mathscr{T}_3^{(l)}$. Тогда $\Gamma_2^{(l)}$ – конечный связный граф, допускающий явное комбинаторное построение. Будем последовательно строить коциклы

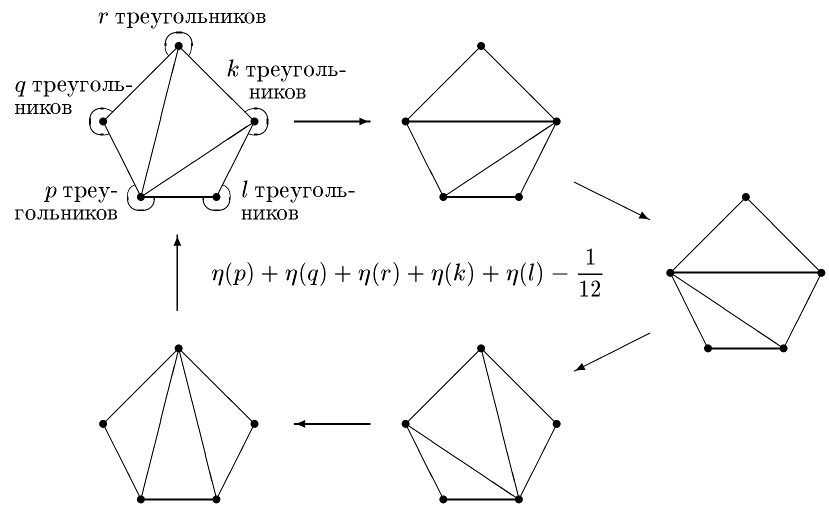

Рис. 8.

$\widehat{c}_0^{(l)} \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2^{(l)};\mathbb{Q})$, представляющие классы когомологий $c\big|_{\Gamma_2^{(l)}}$, такие, что ограничение коцикла $\widehat{c}_0^{(l)}$ на граф $\Gamma_2^{(l-1)}$ совпадает с коциклом $\widehat{c}_0^{(l-1)}$. Пусть коцикл $\widehat{c}_0^{(l-1)}$ уже построен. Из всех коциклов $b \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2^{(l)};\mathbb{Q})$ таких, что $[b] = c\big|_{\Gamma_2^{(l)}}$ и $b\big|_{\Gamma_2^{(l-1)}} = \widehat{c}_0^{(l-1)}$, в качестве $\widehat{c}_0^{(l)}$ выберем тот, для которого сумма квадратов его значений на всех ребрах графа $\Gamma_2^{(l)}$ достигает наименьшего значения. Задача о выборе такого коцикла является задачей о минимизации квадратичного функционала на плоскости в конечномерном векторном пространстве. Поэтому искомый коцикл существует, единственен, рационален и его вычисление сводится к решению системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами. Обозначим через $\widehat{c}_0$ коцикл на графе Γ_2, ограничения которого на графы $\Gamma_2^{(l)}$ совпадают с коциклами $\widehat{c}_0^{(l)}$. Тогда $f_0 = d^{-1}\delta\,\widehat{c}_0$ –каноническая локальная фоормула для первого класса Понтрягина.

Опишем, как производить конкретные вычисления с помощью этой формулы, т.е. как по заданной PL-сфере $L \in \mathscr{T}_4$ вычислить значение $f_0(L)$. Для этого нужно произвести следующую последовательность действий.

1) Выберем последовательность бизвездных преобразований $\beta_1,\dots,\beta_l$, переводящих границу 4-мерного симплекса в PL-сферу L. Обозначим через L_j PL-сферу, полученную из $\partial\Delta^4$ применением бизвездных преобразований $\beta_1,\dots,\beta_{j-1}$, и через W_j – множество вершин $v \in L_j$ таких, что бизвездное преобразование β_j индуцирует в линке вершины v бизвездное преобразование β_{jv}, не являющееся несущественным. Заметим, что все ребра $e_{\beta_{jv}}$ лежат в графе $\Gamma_2^{(l)}$.

2) Последовательно вычислим графы $\Gamma_2^{(j)}$ и коциклы $\widehat{c}_0^{(j)}$, $j=1,\dots,l$.

3) Вычислим значение $f_0(L)$ по формуле

$$f_0(L) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{v\in W_j}\widehat{c}_0^{(l)}(e_{\beta_{jv}}).$$

13. План доказательства предложения 11.3. Пусть c' – произвольный элемент группы $\widetilde{A}$. Докажем сначала, что существует $\lambda \in \mathbb{Q}$ такое, что $c'([\alpha]) = \lambda c([\alpha])$ для любого $\alpha \in S$.

Пусть α – цикл, изображенный на рис. 3а, L – исходная двумерная PL-сфера (PL-сфера, изображенная в левом верхнем углу рис. 3а), σ_1 и σ_2 – треугольники PL-сферы L, изображенные на рисунке. Рассмотрим трехмерную PL-сферу K, содержащую вершину u, звезда которой является полным подкомплексом комплекса K, а линк изоморфен PL-сфере L. Обозначим через $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ тетраэдры PL-сферы K, натянутые на вершину u и треугольники σ_1 и σ_2 соответственно. Цикл α получался при коммутировании бизвездных преобразований, ассоциированных с треугольниками σ_1 и σ_2. Прокоммутируем теперь бизвездные преобразования, ассоциированные с тетраэдрами $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$. Получим цикл $\gamma \in C_1(\Gamma_3;\mathbb{Z})$. Цикл γ индуцирует для каждой вершины $v \in K$ цикл γ_v в графе Γ_2, состоящий из ребер, соответствующих индуцированным бизвездным преобразованиям линка вершины v. Тогда

$$\sum_v c'([\gamma_v]) = \delta^*(c')([\gamma]) = 0,$$

так как $c' \in \widetilde{A} = \ker \delta^*$. Для всех вершин v комплекса K, кроме вершины u, циклы γ_v гомологичны нулю. Цикл γ_u совпадает с циклом α. Значит, $c'([\alpha]) = 0$.

Пусть теперь α_1 и α_2 – два цикла, изображенные на рис. 3б с одинаковыми парами чисел (p,q). Аналогично предыдущему случаю, можно найти цикл $\gamma \in C_1(\Gamma_3;\mathbb{Z})$, начинающийся с некоторой трехмерной PL-сферы K такой, что $\gamma_u = \alpha_1$, $\gamma_v = -\alpha_2$ для некоторых вершин u, v комплекса K и $\gamma_w = 0$ для всех остальных вершин w комплекса K. Значит, $c'([\alpha_1]) = c'([\alpha_2])$. Таким образом, значение функции c' на цикле, изображенном на рис. 3б, зависит только от пары чисел (p,q). Обозначим это значение через $\rho'(p,q)$. Аналогичными рассуждениями устанавливается, что функцию $\rho'(p,q)$ можно доопределить до функции $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Q}$ такой, что $\rho'(p,q) = -\rho'(q,p)$ и $c'([\alpha]) = \rho'(0,q) - \rho'(0,p)$ для любого цикла α, изображенного на рис. 3в. Такое доопределение можно произвести многими способами. Чтобы фиксировать один способ, предположим, что $\rho'(0,1) = \frac{7}{2}\rho'(1,2)$ (такой способ выбран потому, что $\rho(0,1) = \frac{7}{2}\rho(1,2)$).

Рассмотрим ориентированную триангуляцию L двумерной сферы, содержащую вершину x, к которой примыкает $p+q+r+3$ треугольника. Выберем среди треугольников, примыкающих к вершине x, три треугольника σ_0, σ_1 и σ_2 таких, что при обходе вокруг вершины x по часовой стрелке мы пройдем последовательно через треугольник σ_0, через r других треугольников, через треугольник σ_1, через p других треугольников, через треугольник σ_2 и через q оставшихся треугольников. Обозначим L_j комплекс, получаемый из L при бизвездном преобразовании, ассоциированном с треугольником σ_j. Обозначим через α_j цикл, полученный при коммутировании бизвездных преобразований, ассоциированных с треугольниками σ_{j+1} и σ_{j+2} комплекса L; обозначим через α_j' цикл, полученный при коммутировании бизвездных преобразований, ассоциированных с треугольниками σ_{j+1} и σ_{j+2} комплекса L_j, где суммы индексов берутся по модулю 3. Легко проверить, что

$$\alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2' = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\rho'(p,q+r+2)+\rho'(q,r+p+2)+\rho'(r,p+q+2)\\&\quad=\rho'(p,q+r+1)+\rho'(q,r+p+1)+\rho'(r,p+q+1).\end{aligned}$$

Из этого равенства несложно вывести, что существует константа $\lambda \in \mathbb{Q}$ такая, что $\rho'(p,q) = \lambda\rho(p,q)$ для любых p и q. Следовательно, $c'([\alpha]) = \lambda c([\alpha])$ для всех циклов α, изображенных на рис. 3. Аналогично доказывается, что это равенство верно для любого $\alpha \in S$.

Из доказанного утверждения непосредственно следует, что $\dim \widetilde{A} \leqslant 1$. Из существования эпиморфизма $\sharp\colon H^*(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) \to H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$ следует, что $\dim H^4(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) \geqslant 1$. С другой стороны, гомоморфизм $d^{-1}\delta\colon A \to \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ индуцирует эпиморфизм $j\colon \widetilde{A} \to H^4(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$. Значит, $\dim \widetilde{A} = \dim H^4(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q})) = 1$. Следовательно, класс когомологий c корректно определен и порождает одномерное векторное пространство $\widetilde{A}$.

14. Знаменатели значений локальных формул. Пусть $f\colon \mathscr{T}_n \to \mathbb{Q}$ – локальная формула. Выясним, как растут знаменатели значений $f(L)$ с ростом числа вершин триангуляции L. Обозначим через $\mathscr{T}_{n,l}$ множество всех ориентированных $(n-1)$-мерных PL-сфер, имеющих не более l вершин. Обозначим через $\mathrm{den}_l(f)$ наименьшее общее кратное знаменателей всех значений $f(L)$, где $L \in \mathscr{T}_{n,l}$. Следующие две теоремы дают оценки на рост $\mathrm{den}_l(f)$ как функции от l.

Теорема 14.1. *Пусть $\psi \in H^n(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$ – произвольный класс когомологий. Тогда существуют локальная формула f, представляющая класс ψ, и натуральная константа b такие, что число $\mathrm{den}_l(f)$ делит $b(l+1)!$ для любого l.*

Теорема 14.2. *Пусть $f \in \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ – произвольная локальная формула для первого класса Понтрягина. Тогда число $\mathrm{den}_l(f)$ делится на наименьшее общее кратное чисел $1,\dots,l-3$ для любого четного $l \geqslant 10$.*

Теорема 14.1 выводится из результатов [17] и теоремы 8.1. Теорема 14.2 легко доказывается с помощью явного описания всех локальных формул для первого класса Понтрягина, полученного в п. 11. Из теоремы 14.2 легко выводится следующее утверждение.

Следствие 14.1. *Имеет место равенство $H^4(\mathscr{T}^*(G)) = 0$ для любой собственной подгруппы $G \subset \mathbb{Q}$.*

15. Существование алгоритмов для вычисления локальных формул.

Теорема 15.1. *Пусть $\psi \in H^n(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$ – произвольный класс когомологий. Тогда существует локальная формула f, представляющая класс когомологий ψ, такая, что задача вычисления значения $f(L)$ по заданной триангуляции $L \in \mathscr{T}_n$ алгоритмически разрешима.*

Замечание 15.1. С. П. Новиков (см. [38; с. 166–167]) доказал, что проверка того, является ли симплициальный комплекс L триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы, – алгоритмически неразрешимая задача при $n \geqslant 6$. Точная формулировка теоремы 15.1 выглядит следующим образом: существует алгоритм, который получает на входе ориентированный симплициальный комплекс L, выдает на выходе значение $f(L)$, если $L \in \mathscr{T}_n$, и работает бесконечно долго, если $L \notin \mathscr{T}_n$.

Замечание 15.2. Очевидно, что при $n \geqslant 4$ существует кограница $f \in \mathscr{T}^n(\mathbb{Q})$, которая не является вычислимой. Поэтому не все рациональные локальные формулы являются вычислимыми.

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановки задач и постоянное внимание к настоящей работе, а также Л. А. Алания, И. А. Дынникову, М. Э. Казаряну и А. С. Мищенко за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. А. Рохлин, А. С. Шварц. О комбинаторной инвариантности классов Понтрягина // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. №3. С. 490–493.
[2] R. Thom. Les classes charactéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées // Symposium Internacional de Topología Algebraica. Mexico City: La Universidad Nacional Autónoma de Mexico y la UNESCO, 1958. P. 54–67.
[3] A. Ranicki, D. Sullivan. A semi-local combinatorial formula for the signature of a $4k$-manifold // J. Differential Geom. 1976. V. 11. №1. P. 23–29.
[4] H. Whitney. On the theory of sphere-bundles // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1940. V. 26. №2. P. 148–153.
[5] А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд, М. В. Лосик. Комбинаторное вычисление характеристических классов. I, II // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. №2. С. 12–28; №3. С. 5–26.
[6] А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд, М. В. Лосик. Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10. №1. С. 14–17.
[7] R. MacPherson. The combinatorial formula of Gabrielov, Gel'fand and Losik for the first Pontrjagin class // Lecture Notes in Math. 1978. V. 677. P. 105–124.
[8] А. М. Габриэлов. Комбинаторные формулы для классов Понтрягина и GL-инвариантные цепи // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №2. С. 1–7.
[9] I. M. Gelfand, R. D. MacPherson. A combinatorial formula for the Pontrjagin classes // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1992. V. 26. №2. P. 304–309.
[10] J. Cheeger. Spectral geometry of singular Riemannian spaces // J. Differential Geom. 1983. V. 18. №4. P. 575–657.
[11] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5. №2. P. 229–234.
[12] А. А. Гайфуллин. Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. №5. С. 13–66.
[13] Л. С. Понтрягин. Векторные поля на многообразиях // Матем. сб. 1949. Т. 24. №2. С. 129–162.
[14] Л. С. Понтрягин. Некоторые топологические инварианты римановых многообразий // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. №3. С. 95–98.
[15] Л. С. Понтрягин. Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. V. 13. №2. P. 125–162.
[16] S. S. Chern. Characteristic classes of Hermitian manifolds // Ann. of Math. (2). 1946. V. 47. №1. P. 85–121.
[17] N. Levitt, C. Rourke. The existence of combinatorial formulae for characteristic classes // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 239. P. 391–397.
[18] E. Stiefel. Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten // Comment. Math. Helv. 1936. V. 8. P. 305–353.
[19] S. Halperin, D. Toledo. Stiefel–Whitney homology classes // Ann. of Math. (2). 1972. V. 96. №3. P. 511–525.
[20] J. Cheeger. A combinatorial formula for Stiefel–Whitney classes // Topology of Manifolds (Proc. Univ. of Georgia, Athens, Ga., 1969). Chicago: Markham, 1970. P. 470–471.

[21] S. S. Cairns. Triangulated manifolds which are not Brouwer manifolds // Ann. of Math. (2). 1940. V. 41. №4. P. 792–795.
[22] J. H. C. Whitehead. Note on manifolds // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1941. V. 12. №45. P. 26–29.
[23] S. S. Cairns. Isotropic deformations of geodesic complexes on the 2-sphere and on the plane // Ann. of Math. (2). 1944. V. 45. №2. P. 207–217.
[24] C.-W. Ho. On certain homotopy properties of some spaces of linear and piecewise linear homeomorphisms. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 181. P. 213–233; 235–243.
[25] В. А. Рохлин. Внутреннее определение характеристических циклов Понтрягина // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. №3. С. 449–452.
[26] В. М. Бухштабер. Топологические приложения теории двузначных формальных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №1. С. 130–184.
[27] В. М. Бухштабер. Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1978. Т. 10. С. 5–178.
[28] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler. Oriented Matroids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (Encyclopedia Math. Appl. V. 46.)
[29] G. Ziegler. Lectures on Polytopes. New York: Springer-Verlag, 1995. (Grad. Texts in Math. V. 152.)
[30] Р. Том. Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий // Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958. С. 291–348.
[31] P. L. King. On local combinatorial Pontrjagin numbers. I // Topology. 1977. V. 16. №1. P. 99–105.
[32] U. Pachner. P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings // European J. Combin. 1991. V. 12. №2. P. 129–145.
[33] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
[34] E. Steinitz, H. Rademacher. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie. Berlin: Springer-Verlag, 1934. Reprint: Springer-Verlag, 1976.
[35] M. È. Kazarian. The Chern–Euler number of circle bundle via singularity theory // Math. Scand. 1998. V. 82. №2. P. 207–236.
[36] W. Kühnel, T. F. Banchoff. The 9-vertex complex projective plane // Math. Intelligencer. 1983. V. 5. №3. P. 11–22.
[37] W. Kühnel, G. Lassmann. The unique 3-neighborly 4-manifold with few vertices // J. Combin. Theory Ser. A. 1983. V. 35. №2. P. 173–184.
[38] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко. О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы // УМН. 1974. Т. 29. №5. С. 71–168.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
06.06.2005