УДК 515.164.3

А. А. Гайфуллин

Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина

Через $p(|K|)$ обозначен характеристический класс комбинаторного многообразия K, заданный полиномом p от рациональных классов Понтрягина этого многообразия. Доказано, что для любого полинома p существует функция, сопоставляющая каждому комбинаторному многообразию K такой цикл $z_p(K)$ в его симплициальных цепях с рациональными коэффициентами, что: 1) класс гомологий цикла $z_p(K)$ двойствен по Пуанкаре классу когомологий $p(|K|)$; 2) коэффициент при каждом симплексе в цикле $z_p(K)$ определяется только комбинаторным строением линка этого симплекса. Найден явный вид всех таких функций для первого класса Понтрягина. Получены оценки знаменателей коэффициентов этих циклов.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

Широко известной задаче вычисления классов Понтрягина многообразия по его триангуляции посвящены, например, работы [1]–[5]. Задача ставится следующим образом: по триангуляции многообразия построить симплициальный цикл, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре данному классу Понтрягина этого многообразия. Обычно требуется, чтобы полученный цикл удовлетворял некоторому условию локальности, т. е. чтобы коэффициент при каждом симплексе в этом цикле определялся только строением многообразия в некоторой окрестности данного симплекса. Опишем сначала наиболее важные результаты, полученные для этой задачи.

В работах [1], [2] А. М. Габриэловым, И. М. Гельфандом и М. В. Лосиком построена явная формула для вычисления первого рационального класса Понтрягина многообразия по его гладкой триангуляции, удовлетворяющей некоторому специальному условию. В [3] рассматриваются симплициальные многообразия с некоторой дополнительной комбинаторной структурой – *фиксирующим циклом*, который вводится как дискретный аналог гладкой структуры и может быть восстановлен по заданной гладкой структуре. В этой работе построены циклы, классы гомологий которых двойственны по Пуанкаре рациональным классам Понтрягина таких многообразий. Коэффициенты при симплексах в построенных циклах зависят как от комбинаторного строения окрестностей этих симплексов, так и от ограничения фиксирующего цикла на эти окрестности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00659-а) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2185.2003.1).

Другой подход содержится в работе [4], где для циклов, классы гомологий которых двойственны вещественным классам Понтрягина, получены явные формулы, сводящиеся к вычислению спектров операторов Лапласа на псевдомногообразиях с локально плоской метрикой. Коэффициенты при симплексах в построенных циклах зависят только от комбинаторного строения линков данных симплексов. Эти формулы применимы для всех псевдомногообразий, но до сих пор неизвестно, являются ли построенные циклы рациональными.

В настоящей работе *характеристическим локальным циклом* (*х. л. циклом*) коразмерности n называется функция, сопоставляющая каждому комбинаторному многообразию K цикл размерности $\dim K - n$ в его коориентированных симплициальных цепях (определение см. в п. 2.1), у которого коэффициент при каждом симплексе определяется только комбинаторным строением линка этого симплекса. Такой цикл представляется в виде $\sum f(\operatorname{Lk}\Delta)\Delta$, где суммирование ведется по всем $(\dim K-n)$-мерным симплексам Δ многообразия K и f – функция на классах изоморфизма ориентированных кусочно линейных триангуляций $(n-1)$-мерной сферы, не зависящая от данного многообразия K. Функция f, задающая формулу для х. л. цикла, называется *локальной формулой* для этого х. л. цикла. Доказано, что для любого рационального характеристического класса $p \in H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q}) = H^*(\mathrm{BO};\mathbb{Q})$ существует рациональный х. л. цикл, сопоставляющий каждому комбинаторному многообразию K цикл, класс гомологий которого двойствен классу когомологий $p(|K|)$ (рациональные характеристические классы – это в точности полиномы от рациональных классов Понтрягина). Здесь BPL – классифицирующее пространство для стабильных кусочно линейных расслоений. Близкий результат был получен Н. Левиттом и К. Рурком в [5]. По нашей терминологии в работе [5] речь идет о циклах, представимых в виде $\sum h(\operatorname{Lk}\Delta,\dim K)\Delta$, которые не являются х. л. циклами, так как функция h зависит от размерности многообразия K. В [5] также доказано, что для любого характеристического класса $p \in H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Z})$ существует функция, сопоставляющая каждому ориентированному m-мерному комбинаторному многообразию K с упорядоченными вершинами цикл $\sum g(\operatorname{Star}\Delta,\operatorname{ord})\Delta$, класс гомологий которого двойствен классу когомологий $p(|K|)$. Здесь g – функция на классах изоморфизма ориентированных триангуляций m-мерного диска с упорядоченными вершинами, не зависящая от данного многообразия K.

В §2 построен коцепной комплекс $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, элементами которого являются функции на триангуляциях сфер. Доказано, что коциклы этого комплекса – это в точности локальные формулы для х. л. циклов. При этом кограницам комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ соответствуют х. л. циклы, сопоставляющие границы всем комбинаторным многообразиям. Одним из основных результатов настоящей работы является утверждение о том, что когомологии комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ изоморфны рациональным когомологиям классифицирующего пространства BO. Из этого, в частности, следует, что каждый рациональный х. л. цикл задает классы гомологий, двойственные некоторому полиному от рациональных классов Понтрягина многообразий. В п. 2.5 доказано, что для любого класса когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ существует локальная формула f, представляющая класс когомологий ψ, такая, что задача вычисления значения $f(L)$ по заданной триангуляции $L \in \mathcal{T}_n$ алгоритмически разрешима.

В § 3 получена явная формула, описывающая все рациональные х. л. циклы, задающие классы гомологий, двойственные по Пуанкаре первому классу Понтрягина многообразий. Этот результат является новым, так как формулы из работ [1]–[3] применимы не для всех комбинаторных многообразий, а формулы из [4] задают только вещественные х. л. циклы. В данной работе используется следующий подход. Сначала находятся все рациональные х. л. циклы коразмерности 4, а потом используется утверждение, что каждый такой х. л. цикл двойствен по Пуанкаре первому классу Понтрягина, умноженному на некоторое число. При этом важную роль играет использование бизвездных преобразований.

В § 4 изучаются знаменатели, возникающие у коэффициентов х. л. циклов, т. е. у значений соответствующих локальных формул. Найдены оценки на рост знаменателей значений локальных формул в зависимости от количества вершин триангуляции сферы. Доказано, что в знаменателях значений любой локальной формулы для первого класса Понтрягина каждое простое число появляется в сколь угодно больших степенях. В частности, не существует целочисленных х. л. циклов, задающих классы гомологий, двойственные первому классу Понтрягина многообразий, умноженному на какое-нибудь натуральное число.

Доказательство изоморфизма $H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong H^*(\mathrm{BO};\mathbb{Q})$ опирается на результаты § 5, где изучаются разбиения полиэдров на простые клетки (см. п. 5.1). Вводится понятие $\mathcal{D}$-структуры на полиэдре как класса эквивалентности разбиений этого полиэдра на простые клетки по некоторому отношению эквивалентности. Показано, что $\mathcal{D}$-структуры обладают многими свойствами, аналогичными свойствам стабильных расслоений. Построено классифицирующее пространство $\mathcal{Z}$, играющее для $\mathcal{D}$-структур такую же роль, как пространство BO для векторных расслоений. Построено естественное отображение $\mathcal{X}$, сопоставляющее $\mathcal{D}$-структуру каждому блочному расслоению. Доказано, что соответствующее отображение $\mathcal{X}\colon \mathrm{BPL} \to \mathcal{Z}$ индуцирует изоморфизм в рациональных когомологиях, который является ключевым для основного результата.

Во всех определениях, касающихся кусочно линейной топологии, мы следуем работе [6]. Если не оговорено противное, все многообразия, триангуляции, отображения, гомеоморфизмы и бордизмы предполагаются кусочно линейными; все бордизмы предполагаются ориентированными. Симплициальный комплекс называется *m-мерным комбинаторным многообразием*, если линк каждой его вершины изоморфен кусочно линейной триангуляции $(m-1)$-мерной сферы. Любая кусочно линейная триангуляция многообразия является комбинаторным многообразием. В § 2–4 все многообразия предполагаются замкнутыми. Изоморфизм ориентированных симплициальных комплексов, меняющий ориентацию, называется *антиизоморфизмом*. Под изоморфизмом ориентированных симплициальных комплексов понимается изоморфизм, сохраняющий ориентацию. Через $K*L$ будем обозначать соединение (джойн) симплициальных комплексов K и L, через CK – конус над симплициальным комплексом K. *Полным подкомплексом симплициального комплекса K*, натянутым на множество вершин V, называется подкомплекс, состоящий из всех симплексов комплекса K, все вершины которых лежат во множестве V.

§ 2. Локальные формулы

2.1. Основные определения. Пусть $\mathcal{T}_n$ – множество всех классов изоморфизма ориентированных триангуляций $(n-1)$-мерной сферы (считаем, что $\mathcal{T}_0=\{\varnothing\}$, $\mathcal{T}_{-n}=\varnothing, n>0$). Как правило, мы не будем различать триангуляцию и ее класс изоморфизма. Для любой триангуляции $L\in\mathcal{T}_n$ обозначим через $-L$ триангуляцию, полученную из L заменой ориентации. Назовем триангуляцию $L\in\mathcal{T}_n$ *симметричной*, если она изоморфна триангуляции $-L$. Пусть G – абелева группа. Обозначим через $\mathcal{T}^n(G)$ абелеву группу всех функций $f\colon\mathcal{T}_n\to G$, изменяющих знак при замене ориентации триангуляции ($\mathcal{T}^0(G)=G,\ \mathcal{T}^{-n}(G)=0,\ n>0$). Определим дифференциал $\delta\colon\mathcal{T}^n(G)\to\mathcal{T}^{n+1}(G)$ по формуле

$$(\delta f)(L)=\sum f(\operatorname{Lk}v),$$

где суммирование ведется по всем вершинам v триангуляции $L\in\mathcal{T}_{n+1}$ и ориентация $\operatorname{Lk}v$ индуцирована ориентацией L (как ориентация границы звезды вершины v). Легко проверить, что $\delta^2=0$. Таким образом в $\mathcal{T}^*(G)$ вводится структура коцепного комплекса.

Обозначим через $\mathcal{T}_n(\mathbb{Z})$ абелеву группу с множеством образующих $\mathcal{T}_n$ и соотношениями $L+(-L)=0$. Дифференциал $\partial\colon\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{Z})\to\mathcal{T}_n(\mathbb{Z})$ определяется на образующих по формуле

$$\partial L=\sum\operatorname{Lk}v,$$

где суммирование ведется по всем вершинам $v\in L$. Тогда $\mathcal{T}_*(\mathbb{Z})$ – цепной комплекс, причем $\mathcal{T}^n(G)=\operatorname{Hom}(\mathcal{T}_n(\mathbb{Z}),G)$ и $(\delta f)(x)=f(\partial x)$ для любых $f\in\mathcal{T}^n(G)$, $x\in\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{Z})$. Аналогично можно было бы определить цепной комплекс $\mathcal{T}_*(G)$ для произвольной абелевой группы G, но это определение нам не понадобится.

Пусть K – m-мерное комбинаторное многообразие. Обозначим через $\widehat{G}$ ориентирующий пучок многообразия $|K|$ со слоем, изоморфным G. *Коориентацией симплекса* $\Delta^n\in K$ называется ориентация линка симплекса Δ^n. Любой m-мерный симплекс считается положительно коориентированным. Обозначим через $\widehat{C}_*(K;G)$ цепной комплекс коориентированных цепей комплекса K с коэффициентами в G, через $\widehat{\partial}$ – граничный оператор этого комплекса (коэффициент инцидентности двух коориентированных симплексов $\tau^{k-1}\subset\sigma^k$ равен $+1$, если ориентация $\operatorname{Lk}\sigma^k$ индуцирована ориентацией $\operatorname{Lk}\tau^{k-1}$, и -1 в противном случае). Гомологии комплекса $\widehat{C}_*(K;G)$ совпадают с гомологиями $H_*(|K|;\widehat{G})$. Если многообразие K ориентированно, то определено отображение аугментации ε: $\widehat{C}_0(K;G)\to G$.

Каждой функции $f\in\mathcal{T}^n(G)$ сопоставим коориентированную цепь $f_\sharp(K)\in\widehat{C}_{m-n}(K;G)$ по формуле

$$f_\sharp(K)=\sum_{\Delta^{m-n}\in K}f(\operatorname{Lk}\Delta^{m-n})\Delta^{m-n}$$

(слагаемое $f(\operatorname{Lk}\Delta^{m-n})\Delta^{m-n}$ не зависит от выбора коориентации симплекса Δ^{m-n}). Назовем функцию $f\in\mathcal{T}^n(G)$ *локальной формулой*, если для любого комбинаторного многообразия K коориентированная цепь $f_\sharp(K)$ является циклом. Очевидно, что соответствие $f\mapsto f_\sharp$ задает изоморфизм между группой локальных формул и группой х. л. циклов.

Предложение 2.1. 1) *Функция f является локальной формулой тогда и только тогда, когда f является коциклом в коцепном комплексе $\mathcal{T}^*(G)$.*

2) *Если f является кограницей в коцепном комплексе $\mathcal{T}^*(G)$, то для любого комбинаторного многообразия K коориентированная цепь $f_\sharp(K)$ является границей.*

3) *Если K_1 и K_2 – две триангуляции многообразия M^m, $f \in \mathcal{T}^n(G)$ – локальная формула, то циклы $f_\sharp(K_1)$ и $f_\sharp(K_2)$ гомологичны.*

Доказательство. Легко проверить, что для любой функции $f \in \mathcal{T}^n(G)$ выполнено равенство $\widehat{\partial} f_\sharp(K) = (\delta f)_\sharp(K)$. Из него сразу следует утверждение 2) предложения. Кроме того, из него следует, что если f – коцикл, то f – локальная формула.

Предположим, что $\delta f \neq 0$. Тогда существует триангуляция $L \in \mathcal{T}_{n+1}$ такая, что $(\delta f)(L) \neq 0$. Очевидно, что существует комбинаторное многообразие K такое, что $\operatorname{Lk}\Delta \cong L$ для некоторого симплекса $\Delta \in K$. Симплекс Δ входит в цепь $\widehat{\partial} f_\sharp(K) = (\delta f)_\sharp(K)$ с коэффициентом $(\delta f)(L) \neq 0$. Следовательно, $f_\sharp(K)$ не цикл, а значит, f не локальная формула.

Докажем теперь утверждение 3) предложения. Звездным подразделением симплекса $\Delta \in K$ называется операция, состоящая в замене подкомплекса $\Delta * \operatorname{Lk}\Delta \subset K$ на подкомплекс $(C\partial\Delta) * \operatorname{Lk}\Delta$. Любые две триангуляции полиэдра переводятся друг в друга последовательностью из звездных подразделений симплексов и преобразований, обратных к звездным подразделениям симплексов (см. [7]). Не уменьшая общности, можно считать, что K_1 переводится в K_2 одним звездным подразделением симплекса $\Delta \in K_1$. Тогда носитель цикла $f_\sharp(K_2) - f_\sharp(K_1)$ лежит в замкнутой звезде симплекса Δ, которая стягиваема. Если $m > n$, то размерность цикла $f_\sharp(K_2) - f_\sharp(K_1)$ положительна. Поэтому он гомологичен нулю.

Пусть $m = n$. Случай ориентируемого многообразия M^n будет разобран в п. 2.2. Случай неориентируемого многообразия сводится к случаю ориентируемого многообразия с помощью перехода к двулистному ориентирующему накрытию.

Таким образом, каждый класс когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(G))$ определяет для любого многообразия M^m класс гомологий $\psi_\sharp(M^m) \in H_{m-n}(M^m; \widehat{G})$ и, следовательно, по двойственности Пуанкаре, класс когомологий $\psi^\sharp(M^m) \in H^n(M^m; G)$. Если $m = n$ и многообразие M^n ориентированно, то класс ψ определяет элемент группы G по формуле $\psi^\star(M^n) = \langle \psi^\sharp(M^n), [M^n] \rangle$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любого рационального характеристического класса $p \in H^n(\mathrm{BPL}; \mathbb{Q})$ существует единственный класс когомологий $\varphi_p \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ такой, что $\varphi_p^\sharp(M^m) = p(M^m)$ для любого многообразия M^m. Для любого класса когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ существует рациональный характеристический класс p такой, что $\psi = \varphi_p$. Таким образом,*

$$H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong H^*(\mathrm{BPL}; \mathbb{Q}) = H^*(\mathrm{BO}; \mathbb{Q}).$$

Следствие 2.1. *Группа $H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ изоморфна аддитивной группе кольца многочленов $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$, $\deg p_j = 4j$.*

Из теоремы 2.1, в частности, следует, что рациональные х. л. циклы, сопоставляющие границы всем комбинаторным многообразиям, находятся во взаимно однозначном соответствии с кограницами комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

2.2. Инвариантность при бордизмах.

Предложение 2.2. *Пусть ψ – произвольный элемент группы $H^n(\mathcal{T}^*(G))$. Тогда $\psi^\star(M_1^n) = \psi^\star(M_2^n)$ для любых двух бордантных ориентированных многообразий M_1^n и M_2^n.*

Из этого предложения следует, что корректно определен гомоморфизм $\star\colon H^n(\mathcal{T}^*(G)) \to \mathrm{Hom}(\Omega_n, G)$, сопоставляющий классу когомологий ψ гомоморфизм $\psi^\star$, где Ω_n – группа n-мерных ориентированных кусочно линейных бордизмов точки. Существует канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}(\Omega_n,\mathbb{Q}) \cong H^n(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$. Поэтому гомоморфизм $\star$ задает гомоморфизм $\sharp\colon H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to H^n(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$.

Пусть $f \in \mathcal{T}^n(G)$ – произвольная локальная формула. Докажем, что если L – ориентированное комбинаторное многообразие размерности n, бордантное нулю, то $\varepsilon(f_\sharp(L)) = 0$, где $\varepsilon\colon \widehat{C}_0(L;G) \to G$ – отображение аугментации. Из этого утверждения следует и оставшийся недоказанным случай в предложении 2.1, и предложение 2.2.

Пусть K – ориентированное комбинаторное многообразие с краем такое, что $\partial K = L$. Для любой вершины u комплекса L симплициальный комплекс $\mathrm{Lk}_K\, u$ является триангуляцией n-мерного диска. Коориентация вершины u в комплексе K определяет коориентацию вершины u в комплексе L. Таким образом, определено вложение $i\colon \widehat{C}_0(L;G) \to \widehat{C}_0(K;G)$. При этом $\partial\,\mathrm{Lk}_K\, u = \mathrm{Lk}_L\, u$. Обозначим через $\mathrm{Lk}^*_K\, u$ симплициальный комплекс $\mathrm{Lk}_K\, u \cup_{\mathrm{Lk}_L\, u} C(\mathrm{Lk}_L\, u)$, ориентация которого задается ориентацией комплекса $\mathrm{Lk}_K\, u$. Тогда $\mathrm{Lk}^*_K\, u \in \mathcal{T}_{n+1}$. Аналогично для любого коориентированного ребра e триангуляции L определяется комплекс $\mathrm{Lk}^*_K\, e \in \mathcal{T}_n$.

Определим одномерную цепь $f_\sharp(K) \in \widehat{C}_1(K;G)$ по формуле

$$f_\sharp(K) = \sum_{e\in K\setminus L} f(\mathrm{Lk}_K\, e)e + \sum_{e\in L} f(\mathrm{Lk}^*_K\, e)e.$$

Очевидно, что граница цепи $f_\sharp(K)$ лежит в подкомплексе L. Для любой коориентированной вершины v комплекса L сумма значений локальной формулы f на линках всех вершин комплекса $\mathrm{Lk}^*_K\, v$ равна нулю. Значит,

$$\sum f(\mathrm{Lk}_K\, e) + \sum f(\mathrm{Lk}^*_K\, e) = f(\mathrm{Lk}_L\, v),$$

где первая сумма берется по всем коориентированным ребрам $e \in K\setminus L$, входящим в вершину v, а вторая – по всем коориентированным ребрам $e \in L$, входящим в вершину v (коориентированное ребро e называется *входящим* в коориентированную вершину v, если их коэффициент инцидентности равен $+1$). Следовательно, $\widehat{\partial} f_\sharp(K) = i(f_\sharp(L))$. Значит, $\varepsilon(f_\sharp(L)) = 0$.

Замечание 2.1. На самом деле формула $\widehat{\partial} f_\sharp(K) = i(f_\sharp(\partial K))$ верна для комбинаторного многообразия произвольной размерности $m \geqslant n+1$.

2.3. Эпиморфность отображения $\star$ для рациональных коэффициентов.

Теорема 2.2. *Гомоморфизм* $\star\colon H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \mathrm{Hom}(\Omega_n, \mathbb{Q})$ *является изоморфизмом.*

Следствие 2.2. *Гомоморфизм* $\sharp\colon H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to H^n(\mathrm{BPL}; \mathbb{Q})$ *является изоморфизмом.*

Мономорфность отображения $\star$ будет доказана в п. 5.8.

Для доказательства эпиморфности отображения $\star$ нам понадобятся некоторые определения и результаты, полученные в работе [5]. *Вполне упорядоченным симплициальным комплексом* назовем симплициальный комплекс с заданным линейным порядком на множестве его вершин. *Локально упорядоченным симплициальным комплексом* назовем симплициальный комплекс с заданным частичным порядком на множестве его вершин таким, что звезда каждой его вершины является вполне упорядоченным комплексом. Пусть $\widetilde{\mathrm{BPL}}_m$ – классифицирующее пространство для m-мерных блочных расслоений (определение блочного расслоения см. в п. 5.7, а подробности – в [8]). Тогда классы когомологий $p \in H^n(\widetilde{\mathrm{BPL}}_m; G)$ называются *характеристическими классами* для блочных расслоений. Такой класс когомологий p определяет для каждого m-мерного блочного расслоения ξ над полиэдром P класс когомологий $p(\xi) \in H^n(P; G)$. В частности, для каждого многообразия M^m определен класс когомологий $p(M^m) = p(\tau) \in H^n(M^m; G)$, где τ – касательное блочное расслоение многообразия M^m.

В работе [5] изучались локальные формулы для характеристических классов локально упорядоченных комбинаторных многообразий. Полученный в [5] результат формулируется следующим образом. Пусть $p \in H^n(\widetilde{\mathrm{BPL}}_m; G)$, $n \leqslant m$. Тогда существует функция g, сопоставляющая каждому классу изоморфизма вполне упорядоченных ориентированных триангуляций m-мерного диска элемент группы G, такая, что для произвольного локально упорядоченного ориентированного комбинаторного многообразия K цикл $\sum_{\Delta^{m-n} \in K} g(\mathrm{Star}\,\Delta^{m-n})\Delta^{m-n}$ двойствен по Пуанкаре классу когомологий $p(|K|)$.

Для случая $G = \mathbb{Q}$ в [5] доказано, что если обозначить через $h(J)$ среднее арифметическое значений функции g на всевозможных упорядочениях триангуляции m-мерного диска J, то для произвольного (неупорядоченного) ориентированного комбинаторного многообразия K цикл $\sum_{\Delta^{m-n} \in K} h(\mathrm{Star}\,\Delta^{m-n})\Delta^{m-n}$ будет двойствен по Пуанкаре классу когомологий $p(|K|)$.

Доказательство эпиморфности гомоморфизма $\star$. Для любого n определен изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\Omega_n, \mathbb{Q}) \cong H^n(\widetilde{\mathrm{BPL}}_n; \mathbb{Q}).$$

Пусть $p \in \mathrm{Hom}(\Omega_n, \mathbb{Q})$. Соответствующий характеристический класс блочных расслоений будем также обозначать через p.

Пусть $m = n$. Определим функцию $f_1\colon \mathcal{T}_n \to \mathbb{Q}$ по формуле $f_1(L) = h(CL)$. Тогда

$$\sum_{v \in K} f_1(\mathrm{Lk}\,v) = p(|K|)$$

для любого n-мерного ориентированного комбинаторного многообразия K. Функция f_1, в принципе, может не принадлежать группе $\mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$, так как, возможно, $f_1(-L) \neq -f_1(L)$ для некоторой $L \in \mathcal{T}_n$. Определим функцию $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ по формуле

$$f(L) = \frac{f_1(L) - f_1(-L)}{2}.$$

Тогда $\sum_{v\in K} f(\mathrm{Lk}\, v) = p(|K|)$ для любого n-мерного ориентированного комбинаторного многообразия K. Очевидно, что $p(S^n) = 0$. Поэтому $\sum_{v\in K} f(\mathrm{Lk}\, v) = 0$ для любой триангуляции $K \in \mathcal{T}_{n+1}$. Следовательно, $\delta f = 0$ и, значит, f – локальная формула. Пусть ψ – класс когомологий, представляемый локальной формулой f. Тогда $\psi^\star(|K|) = p(|K|)$ для любого ориентированного комбинаторного многообразия K. Значит, $\star(\psi) = p$.

В работе [5] все результаты доказаны с помощью явно построенной реализации пространства $\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{PL}}_n$ в виде клеточного комплекса. Дадим более элементарное доказательство эпиморфности отображения $\star$, не использующее результатов [5] и, следовательно, свойств пространства $\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{PL}}_n$.

Будем называть n-мерное ориентированное комбинаторное многообразие K *сбалансированным*, если для любой триангуляции $L \in \mathcal{T}_n$ количество вершин комплекса K, линки которых изоморфны L, равно количеству вершин комплекса K, линки которых антиизоморфны L, т. е. если $2\sum_{v\in K} \mathrm{Lk}\, v = 0$ в группе $\mathcal{T}_n(\mathbb{Z})$. Например, несвязная сумма двух одинаковых комбинаторных многообразий, взятых с противоположными ориентациями, всегда является сбалансированной.

Предложение 2.3. *Если ориентированное комбинаторное многообразие K сбалансированно, то несвязная сумма нескольких экземпляров многообразия K бордантна нулю.*

Это предложение является очевидным следствием теоремы 2.2. Однако его можно доказать непосредственно, не используя результатов [5]. Это будет сделано в п. 5.10. Докажем, что из предложения 2.3 следует эпиморфность отображения $\star$.

Необходимо доказать, что для любой функции $p \in \mathrm{Hom}(\Omega_n, \mathbb{Q})$ существует локальная формула $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ такая, что

$$\sum_{v\in K} f(\mathrm{Lk}\, v) = p(|K|)$$

для любого n-мерного ориентированного комбинаторного многообразия K.

Пусть $\{L_i\}$ – набор несимметричных триангуляций из $\mathcal{T}_n$ такой, что из каждой пары несимметричных триангуляций, получающихся друг из друга заменой ориентации, в набор $\{L_i\}$ входит ровно одна. Тогда условие $\sum_{v\in K} f(\mathrm{Lk}\, v) = p(|K|)$ дает линейное уравнение E_K на величины $f(L_i)$. Достаточно доказать, что система, состоящая из всех уравнений E_K, совместна. Предположим, что она не совместна. Тогда существуют конечный набор ориентированных комбинаторных многообразий K_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, и набор целых чисел k_j такие, что $\sum_{j=1}^{q} k_j E_{K_j}$ – противоречивое линейное уравнение, т. е. уравнение вида $0 = B$, где B – ненулевая константа. Изменив, если нужно, ориентации некоторых многообразий K_j, можно считать, что все числа k_j положительны.

Рассмотрим многообразие
$$K = \bigsqcup_{j=1}^{q} K_j^{\sqcup k_j},$$
где $K_j^{\sqcup k_j}$ – несвязная сумма k_j экземпляров многообразия K_j. Тогда уравнение $\sum_{j=1}^{q} k_j E_{K_j}$ совпадает с уравнением E_K. Значит, уравнение E_K противоречиво. Следовательно, комбинаторное многообразие K является сбалансированным и $p(|K|) \neq 0$. Противоречие с предложением 2.3.

2.4. Классы когомологий $\psi^\sharp(M^m)$ для многообразий произвольной размерности. Из предложения 2.2 следует, что для любого класса когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ существует рациональный характеристический класс $p = \sharp(\psi)$ такой, что $\psi^\sharp(M^n) = p(M^n)$ для любого n-мерного многообразия M^n. Выясним, что представляют собой классы когомологий $\psi^\sharp(M^m)$ для многообразий размерности $m > n$.

Предложение 2.4. *Имеем $\psi^\sharp(M^m) = p(M^m) = \sharp(\psi)(M^m)$ для любого многообразия M^m, $m \geqslant n$.*

Согласно следствию 2.2 гомоморфизм $\sharp$ является изоморфизмом. Поэтому из следствия 2.2 и предложения 2.4 сразу следует теорема 2.1.

Пусть P – компактный полиэдр, Q – его замкнутое кусочно линейное подмножество. Будем говорить, что P является *m-мерным многообразием с особенностями во множестве Q*, если $P \setminus Q$ – необязательно компактное многообразие размерности m. Будем говорить, что такое многообразие с особенностями ориентируемо, если многообразие $P \setminus Q$ ориентируемо. Для многообразия с особенностями определен изоморфизм двойственности Лефшеца $H_{m-n}(P,Q;\widehat{G}) \cong H^n(P \setminus Q;G)$ при $n < m$.

Пусть K – произвольная триангуляция многообразия с особенностями P. Пусть $L \subset K$ – подкомплекс, состоящий из всех симплексов, лежащих целиком в Q. Если $f \in \mathcal{T}^n(G)$ – локальная формула и $n < m$, то можно определить цепь $f_\sharp(K,L) \in \widehat{C}_{m-n}(K,L;G)$, взяв каждый $(m-n)$-мерный симплекс $\Delta^{m-n} \in K \setminus L$ с коэффициентом $f(\operatorname{Lk} \Delta^{m-n})$. Аналогично предложению 2.1 легко доказывается, что цепь $f_\sharp(K,L)$ является относительным циклом, класс относительных гомологий которого в группе $H_{m-n}(P,Q;\widehat{G})$ зависит только от класса когомологий локальной формулы f и не зависит от выбора триангуляции K. Таким образом, для любого класса когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(G))$, $n < m$, определены классы $\psi_\sharp(P,Q) \in H_{m-n}(P,Q;\widehat{G})$ и $\psi^\sharp(P,Q) \in H^n(P \setminus Q;G)$. Очевидно, что для любого замкнутого подмножества $S \subset P \setminus Q$ класс когомологий $\psi^\sharp(P,Q)\big|_S$ зависит только от строения окрестности подмножества S. В частности, верно следующее предложение.

Предложение 2.5. *Пусть P – ориентируемое m-мерное многообразие с особенностями во множестве Q, N^k – ориентируемое многообразие, i: $N^k \hookrightarrow P \setminus Q$ – вложение такое, что $i(N^k)$ – подмногообразие с тривиальным нормальным расслоением, $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(G))$, $n \leqslant k < m$. Тогда класс когомологий $\psi_m^\sharp(N^k) = i^*(\psi^\sharp(P,Q))$ зависит только от многообразия N^k и числа m, но не зависит от пары (P,Q) и вложения i.*

Предложение 2.6. *Для любого ориентируемого многообразия N^k, $k \geqslant n$, и любого $m > k$ верно равенство $\psi^\sharp_m(N^k) = \psi^\sharp(N^k)$.*

Доказательство. Соединение (джойн) $N^k * \Delta^{m-k-1}$ является m-мерным многообразием с особенностями в подмножестве $N^k \sqcup \Delta^{m-k-1}$. Каждая точка пространства $N^k * \Delta^{m-k-1}$ имеет вид

$$t_0 x + \sum_{j=1}^{m-k} t_j y_j,$$

где $x \in N^k$, $y_1, \dots, y_{m-k}$ – вершины симплекса Δ^{m-k-1}, $t_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \dots \dots, m-k$, $\sum_{j=0}^{m-k} t_j = 1$.

Рассмотрим вложение $i\colon N^k \hookrightarrow N^k * \Delta^{m-k-1}$, заданное формулой

$$i(x) = \frac{1}{m-k+1}\biggl(x + \sum_{j=1}^{m-k} y_j\biggr).$$

Тогда $i(N^k)$ – подмногообразие с тривиальным нормальным расслоением. Пусть K – произвольная триангуляция многообразия N^k. Тогда $K * \Delta^{m-k-1}$ – триангуляция многообразия с особенностями $N^k * \Delta^{m-k-1}$. При этом подмногообразие $i(N^k)$ трансверсально к симплексам триангуляции $K * \Delta^{m-k-1}$. Для любого симплекса $\tau \in K$ имеем $|\tau * \Delta^{m-k-1}| \cap i(N^k) = i(|\tau|)$. Кроме того, линк симплекса τ в комплексе K изоморфен линку симплекса $\tau * \Delta^{m-k-1}$ в комплексе $K * \Delta^{m-k-1}$. Поэтому для любой локальной формулы f пересечение цикла $f_\sharp(K * \Delta^{m-k-1}, K \sqcup \Delta^{m-k-1})$ с циклом $i_*([N^k])$ совпадает с циклом $i_*(f_\sharp(K))$. Следовательно,

$$\psi^\sharp_m(N^k) = i^*\bigl(\psi^\sharp(N^k * \Delta^{m-k-1}, N^k \sqcup \Delta^{m-k-1})\bigr) = \psi^\sharp(N^k).$$

Доказательство предложения 2.4. Возьмем теперь $G = \mathbb{Q}$, $k = n$. Пусть M^m – ориентированное многообразие, $m > n$. Из предложений 2.5 и 2.6 следует, что $\psi^\sharp(M^m)\big|_{N^n} = p(N^n)$ для любого n-мерного подмногообразия $N^n \subset M^m$ с тривиальным нормальным расслоением. Из результатов Рохлина, Шварца и Тома следует, что при $m > 2n+1$ это равенство однозначно характеризует класс когомологий $p(M^m)$. Таким образом, $\psi^\sharp(M^m) = p(M^m)$ для ориентируемых многообразий M^m таких, что $m > 2n+1$.

Пусть теперь $n < m \leqslant 2n+1$ и многообразие M^m ориентируемо. Пусть $i\colon M^m \hookrightarrow M^m \times S^{n+1}$ – стандартное вложение. Тогда из предложений 2.5 и 2.6 следует, что

$$i^*\bigl(\psi^\sharp(M^m \times S^{n+1})\bigr) = \psi^\sharp(M^m).$$

Имеем $i^*(p(M^m \times S^{n+1})) = p(M^m)$ и $\psi^\sharp(M^m \times S^{n+1}) = p(M^m \times S^{n+1})$, так как $\dim(M^m \times S^{n+1}) > 2n+1$. Следовательно, $\psi^\sharp(M^m) = p(M^m)$.

Пусть M^m неориентируемо, $\widetilde{M}^m$ – его ориентируемое двулистное накрытие, $\pi\colon \widetilde{M}^m \to M^m$ – проекция. Равенство $\psi^\sharp(M^m) = p(M^m)$ следует в этом случае из того, что $\pi^*(\psi^\sharp(M^m)) = \psi^\sharp(\widetilde{M}^m)$, $\pi^*(p(M^m)) = p(\widetilde{M}^m)$ и π^* – мономорфизм.

2.5. Существование алгоритмов для вычисления локальных формул.

Теорема 2.3. *Пусть $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ – произвольный класс когомологий. Тогда существует локальная формула f, представляющая класс когомологий ψ, такая, что задача вычисления значения $f(L)$ по заданной триангуляции $L \in \mathcal{T}_n$ алгоритмически разрешима.*

Замечание 2.2. С. П. Новиков доказал, что проверка того, является ли симплициальный комплекс L триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы, – алгоритмически неразрешимая задача при $n \geqslant 6$. Изложение доказательства можно найти в [9]. Точная формулировка теоремы 2.3 выглядит следующим образом: существует алгоритм, который получает на входе ориентированный симплициальный комплекс L, выдает на выходе значение $f(L)$, если $L \in \mathcal{T}_n$, и работает бесконечно долго, если $L \notin \mathcal{T}_n$.

Замечание 2.3. Очевидно, что при $n \geqslant 4$ существует когранница $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$, которая не является вычислимой. Поэтому не все рациональные локальные формулы являются вычислимыми.

Будем рассматривать бесконечные векторы $b = (b_i)_{i=1}^{\infty}$, $b_i \in \mathbb{Q}$, и бесконечные матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. Матрицу A будем называть *финитной по строкам*, если в каждой ее строке содержится лишь конечное число отличных от нуля элементов. Корректно определено произведение финитной по строкам матрицы на вектор. Произведение двух матриц, финитных по строкам, снова является матрицей, финитной по строкам. Бесконечный вектор b назовем *вычислимым*, если существует алгоритм, вычисляющий число b_i по числу i. Финитную по строкам матрицу A назовем *вычислимой*, если, во-первых, существует алгоритм, вычисляющий значение a_{ij} по числам i и j, а во-вторых, существует алгоритм, вычисляющий по натуральному числу i число $j_0(i)$ такое, что $a_{ij} = 0$ для любого $j > j_0(i)$. В дальнейшем все матрицы предполагаются финитными по строкам. Обозначим через $r_i(A)$ ранг матрицы, состоящей из i первых строк матрицы A. Если матрица A вычислима, то вектор $r(A)$ тоже вычислим.

Предложение 2.7. *Пусть A – вычислимая матрица, b – вычислимый вектор. Предположим, что линейная система $Ax = b$ имеет единственное решение x^0. Тогда вектор x^0 вычислим.*

Доказательство. Дополним систему уравнений $Ax = b$ уравнением $x_k = x_k^0 + 1$. Полученная система уравнений не имеет решений. Значит, некоторая ее конечная подсистема не имеет решений. Следовательно, значение x_k^0 однозначно определяется из некоторой конечной подсистемы системы $Ax^0 = b$.

Предложение 2.8. *Пусть A и B – вычислимые матрицы такие, что $AB = 0$. Пусть b – вычислимый вектор. Предположим, что система $Ax = b$ имеет решение, а любое решение однородной системы $Ax = 0$ имеет вид $x = Bz$. Тогда система $Ax = b$ имеет вычислимое решение.*

Доказательство. Очевидно, что для любого $i > 1$ либо $r_i(B) = r_{i-1}(B)$, либо $r_i(B) = r_{i-1}(B) + 1$. Пусть $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$ – набор, состоящий из всех чисел i таких, что $r_i(B) = r_{i-1}(B)+1$ ($l_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $r_1(B) = 1$).

Этот набор может быть как конечным, так и бесконечным. В любом случае вектор $l = (l_i)$ вычислим. Для любого бесконечного вектора v обозначим через $\widehat{v}$ вектор, состоящий из координат вектора v с номерами $l_1, l_2, l_3, \ldots$. Обозначим через $\widehat{B}$ матрицу, состоящую из строк матрицы B с номерами $l_1, l_2, l_3, \ldots$. Очевидно, что для любого вектора u система $\widehat{B}z = \widehat{u}$ имеет решение (так как любая ее конечная подсистема имеет решение). Каждая строка матрицы B является конечной линейной комбинацией строк матрицы $\widehat{B}$. Поэтому если $\widehat{B}z = 0$, то $Bz = 0$.

Дополним систему $Ax = b$ уравнениями $x_{l_1} = 0,\ x_{l_2} = 0,\ \ldots$, расположив их через одно с уравнениями системы $Ax = b$. Пусть $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ – полученная система. Матрица $\widetilde{A}$ и вектор $\widetilde{b}$ вычислимы. Поэтому для доказательства предложения достаточно показать, что система $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ имеет только одно решение.

Пусть y – произвольное решение системы $Ax = b$. Обозначим через z^0 решение системы $\widehat{B}z = -\widehat{y}$. Тогда вектор $x^0 = y + Bz^0$ является решением системы $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$.

Пусть x^* – решение однородной системы $\widetilde{A}x = 0$. Тогда $x^* = Bz^*$ для некоторого вектора z^*. При этом $\widehat{B}z^* = 0$, так как $0 = x^*_{l_1} = x^*_{l_2} = \ldots$. Значит, $x^* = 0$. Следовательно, решение системы $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ единственно.

Доказательство теоремы 2.3. Для любого m множество $\mathcal{T}_m$ является перечислимым. Это следует, например, из того, что каждая триангуляция сферы получается из границы симплекса с помощью конечного числа бизвездных преобразований (см. п. 3.1). Значит, существует алгоритм, выписывающий бесконечную последовательность несимметричных триангуляций из $\mathcal{T}_m$, в которой из каждой пары антиизоморфных несимметричных триангуляций встречается только одна и только один раз.

Обозначим через $(K_1, K_2, \ldots)$, $(L_1, L_2, \ldots)$ и $(J_1, J_2, \ldots)$ такие последовательности для $m = n+1, n$ и $n-1$ соответственно. Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ – ориентированные комбинаторные многообразия, образующие базис в векторном пространстве $\Omega_n \otimes \mathbb{Q}$. Положим $Q_j = K_{j-k}$ при $j > k$. Будем отождествлять произвольную функцию $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ с бесконечным вектором $v_f = (f(L_1), f(L_2), \ldots)^{\mathrm{T}}$, произвольную функцию $g \in \mathcal{T}^{n-1}(\mathbb{Q})$ – с бесконечным вектором $v_g = (g(J_1), g(J_2), \ldots)^{\mathrm{T}}$. Тогда оператор $\delta\colon \mathcal{T}^{n-1}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ будет задаваться финитной по строкам матрицей, которую мы обозначим через B. Каждой функции $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ можно сопоставить вектор $w_f = (\varepsilon(f_\sharp(Q_1)), \varepsilon(f_\sharp(Q_2)), \ldots)^{\mathrm{T}}$. Матрицу линейного оператора, переводящего v_f в w_f для любой функции $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$, обозначим через A. Очевидно, что матрицы A и B вычислимы и $AB = 0$.

Пусть $p = \star(\psi)$. По теореме 2.2 условие, что функция f является локальной формулой и представляет класс когомологий ψ, равносильно системе уравнений $Av_f = b$, где $b_j = p(|Q_j|)$. Вектор b имеет не более r отличных от нуля компонент, поэтому он вычислим. Система уравнений $Ax = b$ удовлетворяет всем условиям предложения 2.8, так как ее решение определено однозначно с точностью до прибавления кограницы, т. е. вектора вида Bv_g. Следовательно, эта система имеет вычислимое решение x^0. Искомая локальная формула задается равенствами $f(L_i) = x^0_i$.

Замечание 2.4. Несложно заметить, что в приведенном доказательстве на самом деле указан конкретный алгоритм, вычисляющий значение $f(L)$ по триангуляции L.

§ 3. Явный вид локальной формулы для первого класса Понтрягина

Явная локальная формула для первого класса Понтрягина приведена в п. 3.3. В п. 3.1 описан ряд конструкций, входящих в эту формулу: построены последовательность графов Γ_n и голоморфизм $s\colon \mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) \to C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$, где $C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$ – группа одномерных эквивариантных коцепей графа Γ_2. В п. 3.2 найдены образующие группы $H_1(\Gamma_2;\mathbb{Z})$. План доказательства основной теоремы приведен в п. 3.3. Основные технические части доказательства вынесены в пп. 3.4 и 3.5.

3.1. Бизвездные преобразования. Пусть K – комбинаторное многообразие. Предположим, что симплициальный комплекс K содержит симплекс Δ_1 такой, что $\operatorname{Lk}\Delta_1 = \partial\Delta_2$ – граница симплекса (конечно, симплекс Δ_2 не принадлежит комплексу K). Тогда $\Delta_1 * \partial\Delta_2$ – полный подкомплекс комплекса K. *Бизвездным преобразованием* β, ассоциированным с симплексом $\Delta_1 \in K$, называется преобразование, переводящее комплекс K в симплициальный комплекс

$$\beta(K) = (K \setminus (\Delta_1 * \partial\Delta_2)) \cup (\partial\Delta_1 * \Delta_2).$$

При этом, если $\dim\Delta = 0$, считаем, что $\partial\Delta = \varnothing$; для любого симплекса Δ считаем, что $\Delta * \varnothing = \Delta$. Таким образом, частными случаями бизвездных преобразований являются звездные подразделения симплексов максимальной размерности и обратные к ним преобразования. В результате любого бизвездного преобразования получается комбинаторное многообразие, гомеоморфное исходному. По теореме Пахнера (см. [10], а также [11]) если K_1 и K_2 – две триангуляции одного многообразия, то K_1 переводится в K_2 конечной последовательностью бизвездных преобразований (здесь мы рассматриваем триангуляции как чисто комбинаторные объекты, т. е. мы не различаем изоморфные триангуляции). В частности, любые две (кусочно линейные) триангуляции m-мерной сферы переводятся друг в друга конечной последовательностью бизвездных преобразований.

Для каждого натурального n определим граф Γ_n. Множество вершин этого графа – множество $\mathcal{T}_{n+1}$ ориентированных триангуляций n-мерной сферы. Пусть $L_1, L_2 \in \mathcal{T}_{n+1}$. Два бизвездных преобразования β_1 и β_2, переводящие L_1 в L_2, ассоциированные с симплексами Δ_1 и Δ_2, эквивалентны, если существует автоморфизм триангуляции L_1, переводящий симплекс Δ_1 в симплекс Δ_2. Ребра, соединяющие две различные вершины L_1 и L_2 графа Γ_n, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности бизвездных преобразований, переводящих L_1 в L_2. Опишем теперь ребра графа Γ_n, оба конца которых совпадают с вершиной L. Будем называть бизвездное преобразование β, переводящее триангуляцию L в себя, *несущественным*, если оно эквивалентно обратному бизвездному преобразованию β^{-1}. Классам эквивалентности несущественных бизвездных преобразований не будет соответствовать никакое ребро графа Γ_n. Остальные классы эквивалентности бизвездных преобразований, переводящих L в себя, разбиваются на пары взаимно обратных. Ребра графа Γ_n, соединяющие вершину L с собой, находятся во взаимно однозначном соответствии с такими парами классов эквивалентности. Из теоремы Пахнера следует, что граф Γ_n связен. Обозначим через e_β ребро, соответствующее бизвездному преобразованию β. Обозначениям e_β и $e_{\beta^{-1}}$ будет соответствовать одно и то же ребро, но с разными ориентациями.

Пусть $C_*(\Gamma_n;\mathbb{Z})$ – клеточный цепной комплекс графа Γ_n. Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на графе Γ_n заменой ориентации триангуляций и на группе $\mathbb{Q}$ заменой знака. Следовательно, можно определить эквивариантные коцепи $C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(C_*(\Gamma_n;\mathbb{Z}),\mathbb{Q})$ и эквивариантные когомологии $H^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ (считается, что на группе $\mathbb{Z}$ группа $\mathbb{Z}_2$ действует тривиально). Обозначим через d дифференциал комплекса $C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ и через $B^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}) \subset C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ подгруппу эквивариантных кограниц. Существует канонический изоморфизм

$$H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\Gamma_n;\mathbb{Z}),\mathbb{Q}).$$

Очевидно, что $C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathbb{Q}) = \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$. Поэтому определен дифференциал

$$\delta\colon C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathbb{Q}) \to C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q}).$$

Пусть $L_1, L_2 \in \mathcal{T}_{n+1}$, β – бизвездное преобразование, переводящее L_1 в L_2. Можно считать, что L_1 и L_2 – симплициальные комплексы с одним и тем же множеством вершин V (если $\dim\Delta_1 > 0$ и $\dim\Delta_2 > 0$, то это действительно так, иначе введем для одного из комплексов L_1 и L_2 фиктивную вершину v_0, которая не будет симплексом этого комплекса). Для любой вершины $v \in V$ бизвездное преобразование β либо не изменяет комплекс $\mathrm{Lk}\, v$, либо индуцирует бизвездное преобразование β_v, переводящее комплекс $\mathrm{Lk}_{L_1} v$ в комплекс $\mathrm{Lk}_{L_2} v$. Обозначим через $W \subset V$ подмножество, состоящее из всех вершин v таких, что бизвездное преобразование β_v не является несущественным (считаем, что $v_0 \notin W$). Определим дифференциал $\delta\colon C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathbb{Q}) \to C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathbb{Q})$ по формуле

$$(\delta h)(e_\beta) = \sum_{v\in W} h(e_{\beta_v}).$$

Легко проверить, что $\delta^2 = 0$ и $\delta d = d\delta$.

Введем обозначение $C^{j,n} = C^j_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathbb{Q})$. Тогда $C^{*,*}$ имеет структуру биградуированного комплекса с двумя дифференциалами d и δ бистепени $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно такими, что $\delta d = d\delta$. Обозначим через $Z^{*,*}_d$, $B^{*,*}_d$ и $H^{*,*}_d$ группы коциклов, кограниц и когомологий комплекса $C^{*,*}$ относительно дифференциала d; через $Z^{*,*}_\delta$, $B^{*,*}_\delta$ и $H^{*,*}_\delta$ – группы коциклов, кограниц и когомологий комплекса $C^{*,*}$ относительно дифференциала δ. Граф Γ_{n-1} связен. Поэтому $H^{0,n}_d = 0$, т. е. $d\colon C^{0,n} \to C^{1,n}$ – мономорфизм.

Пусть $L_1, L_2 \in \mathcal{T}_n$, β – бизвездное преобразование, переводящее триангуляцию L_1 в L_2. Определим множества V и W так же, как они были определены раньше. Пусть β заменяет полный подкомплекс $\Delta_1 * \partial\Delta_2$ симплициального комплекса L_1 на полный подкомплекс $\partial\Delta_1 * \Delta_2$ симплициального комплекса L_2. Рассмотрим конус CL_1 с вершиной u_1 и конус CL_2 с вершиной u_2. Тогда $L_\beta = CL_1 \cup CL_2 \cup \{\Delta_1 * \Delta_2\}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $V \cup \{u_1, u_2\}$. Очевидно, что L_β – триангуляция n-мерной сферы. Ориентируем L_β так, чтобы индуцированная ориентация комплекса $\mathrm{Lk}\, u_2 = L_2$ совпадала с заданной. Тогда $L_\beta \in \mathcal{T}_{n+1}$. Триангуляции L_β, соответствующие эквивалентным бизвездным преобразованиям, изоморфны. Триангуляции L_β и $L_{\beta^{-1}}$ антиизоморфны. Если β – несущественное бизвездное преобразование, то L_β – симметричная триангуляция. Определим отображение $s\colon C^{0,n+1} \to C^{1,n}$ по формуле $s(f)(e_\beta) = f(L_\beta)$.

Из равенства $\delta d = d\delta$ следует, что $d\colon C^{0,*} \to C^{1,*}$ – цепное отображение комплексов с дифференциалами δ.

Предложение 3.1. *Отображение s осуществляет цепную гомотопию между отображениями d и 0 цепного комплекса $C^{0,*}$ в цепной комплекс $C^{1,*}$, т. е. $d = \delta s + s\delta$.*

Доказательство. Пусть $f \in C^{0,n}$, $L_1, L_2 \in \mathcal{T}_n$, β – бизвездное преобразование, переводящее L_1 в L_2. Очевидно, что линки всех вершин $v \in V \backslash W$ в комплексе L_β симметричны. Линк вершины $v \in W$ в комплексе L_β изоморфен комплексу $-L_{\beta_v}$. Линки вершин u_1 и u_2 изоморфны соответственно комплексам $-L_1$ и L_2. Поэтому

$$\begin{aligned} s(\delta f)(e_\beta) = (\delta f)(L_\beta) &= -\sum_{v \in W} f(L_{\beta_v}) + f(L_2) - f(L_1) \\ &= -\sum_{v \in W} s(f)(e_{\beta_v}) + f(\partial e_\beta) = -\delta s(f)(e_\beta) + df(e_\beta). \end{aligned}$$

Следовательно, $df = \delta s(f) + s(\delta f)$.

Обозначим через A^n подгруппу группы $C^{1,n}$, состоящую из всех элементов h таких, что $\delta h \in B_d^{1,n+1}$.

Предложение 3.2. *Отображение s мономорфно отображает группу $Z_\delta^{0,n}$ (группу локальных формул) в группу A^{n-1}.*

Доказательство. Из предложения 3.1 следует, что $d\big|_{Z_\delta^{0,n}} = \delta s\big|_{Z_\delta^{0,n}}$. Поскольку d – мономорфизм, то и $s\big|_{Z_\delta^{0,n}}$ – мономорфизм. Если $f \in Z_\delta^{0,n}$, то $\delta s(f) = df$, значит, $s(f) \in A^{n-1}$.

Следствие 3.1. *Имеет место $Z_\delta^{0,3} = 0$ и, следовательно, $H_\delta^{0,3} = 0$.*

Доказательство. Граф Γ_1 изоморфен графу такому, что его вершинами являются все натуральные числа, не меньшие 3, и для любого $k \geqslant 3$ вершины k и $k+1$ соединены только одним ребром. Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на нем тривиально. Значит, $C^{1,2} = 0$. Осталось заметить, что по предложению 3.2 группа $Z_\delta^{0,3}$ мономорфно отображается в группу $C^{1,2}$.

Предложение 3.3. *Отображение s изоморфно отображает группу $B_\delta^{0,4}$ на группу $B_d^{1,3}$.*

Доказательство. Имеем $s(\delta g) = dg$ для любого $g \in C^{0,3}$, так как $C^{1,2} = 0$.

Таким образом, отображение s индуцирует мономорфизм групп когомологий $s^*\colon H_\delta^{0,4} \to H_d^{1,3} = H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathbb{Q})$. При этом $s^*(H_\delta^{0,4}) \subset \widetilde{A}^3$, где $\widetilde{A}^3$ – ядро гомоморфизма $\delta^*\colon H_d^{1,3} \to H_d^{1,4}$, индуцированного цепным отображением $\delta\colon C^{*,3} \to C^{*,4}$.

3.2. Образующие группы $H_1(\Gamma_2; \mathbb{Z})$. В дальнейшем если упоминается симплекс $\{u_1, u_2, \dots, u_l\}$ ориентированного симплициального комплекса L, то подразумевается, что порядок вершин $u_1, u_2, \dots, u_l$ задает положительную ориентацию комплекса L. Ориентированные двумерные симплициальные комплексы изображаются на рисунках так, что направление обхода вершин в треугольнике по часовой стрелке совпадает с порядком вершин, задающим положительную ориентацию. Для любого цикла $\gamma \in Z_1(\Gamma_n; \mathbb{Z})$ обозначим через $\bar{\gamma}$ его класс гомологий в группе $H_1(\Gamma_n; \mathbb{Z})$.

Пусть L – произвольная ориентированная триангуляция двумерной сферы. Ребро e триангуляции L назовем *допустимым*, если у треугольников Δ_1 и Δ_2, примыкающих к ребру e, вершины, противолежащие ребру e, не соединены ребром, т. е. если существует бизвездное преобразование, ассоциированное с ребром e.

Пусть Δ_1 и Δ_2 – два различных треугольника триангуляции L. Произведем для триангуляции L бизвездное преобразование, разбив треугольник Δ_1 на три новых треугольника. Потом в получившейся триангуляции разобьем треугольник Δ_2 на три новых треугольника. После этого произведем бизвездное преобразование, вновь объединив треугольники, образовавшиеся при разбиении треугольника Δ_1. Теперь таким же образом восстановим треугольник Δ_2. Мы получили цикл в графе Γ_2 (рис. 1, *а*, *б*, *в*). Обозначим его через $\alpha_1(L, \Delta_1, \Delta_2)$.

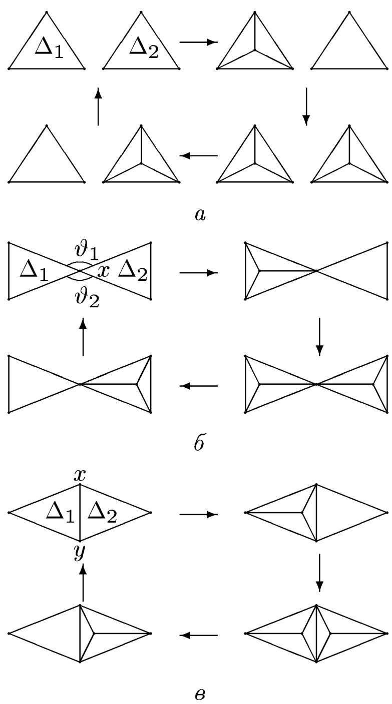

Рис. 1

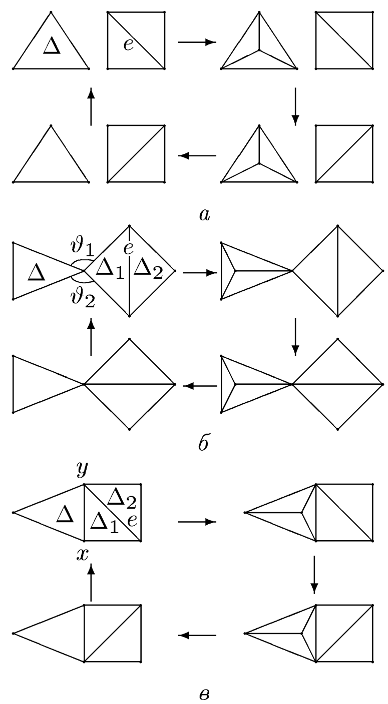

Рис. 2

Возможны три случая: треугольники Δ_1 и Δ_2 могут не иметь ни одной общей вершины, иметь одну или две общие вершины. Обозначим через $\mathcal{S}_1^0$ множество всех классов гомологий $\bar{\alpha}_1(L, \Delta_1, \Delta_2)$ таких, что треугольники Δ_1 и Δ_2 не имеют общих вершин (рис. 1, *а*). Обозначим через $\mathcal{S}_1^1(p, q)$ множество классов гомологий $\bar{\alpha}_1(L, \Delta_1, \Delta_2)$ таких, что треугольники Δ_1 и Δ_2 имеют одну общую вершину x, к которой примыкают p треугольников триангуляции L внутри угла ϑ_1 и q треугольников внутри угла ϑ_2 (рис. 1, *б*). Обозначим через $\mathcal{S}_1^2(p, q)$ множество классов гомологий $\bar{\alpha}_1(L, \Delta_1, \Delta_2)$ таких, что треугольники Δ_1 и Δ_2 имеют общее ребро e с концами x и y (обозначения выбраны так, что если пройти по ребру e от вершины x к вершине y, то треугольник Δ_1 останется справа), причем к вершине x примыкает p треугольников триангуляции L, отличных от Δ_1 и Δ_2, а к вершине y – ровно q треугольников, отличных от Δ_1 и Δ_2 (рис. 1, *в*).

Пусть Δ – произвольный треугольник триангуляции L, e – допустимое ребро триангуляции L, не являющееся ребром треугольника Δ. Обозначим через $\alpha_2(L,\Delta,e)$ цикл, изображенный на рис. 2. Обозначим через $\mathcal{S}_2^0$ множество классов гомологий $\bar\alpha_2(L,\Delta,e)$, изображенных на рис. 2, *а*, и через $\mathcal{S}_2^1(p,q)$ – множество классов гомологий $\bar\alpha_2(L,\Delta,e)$, изображенных на рис. 2, *б*, таких, что к общей вершине x треугольников Δ и Δ_1 примыкает p треугольников внутри угла ϑ_1 и q треугольников внутри угла ϑ_2. Обозначим через $\mathcal{S}_2^2(p,q)$ множество классов гомологий $\bar\alpha_2(L,\Delta,e)$, изображенных на рис. 2, *в*, таких, что к вершине x примыкает p треугольников, отличных от Δ и Δ_1, а к вершине y – ровно q треугольников, отличных от Δ, Δ_1 и Δ_2.

Пусть e_1 и e_2 – два допустимых ребра триангуляции L такие, что не существует треугольника триангуляции L, содержащего оба эти ребра, и ребро e_2 не перестает быть допустимым после бизвездного преобразования, ассоциированного с ребром e_1. Обозначим через $\alpha_3(L,e_1,e_2)$ цикл, изображенный на рис. 3. Обозначим через $\mathcal{S}_3^0$ множество классов гомологий $\bar\alpha_3(L,e_1,e_2)$, изображенных на рис. 3, *а*, и через $\mathcal{S}_3^1(p,q)$ – множество классов гомологий $\bar\alpha_3(L,e_1,e_2)$, изображенных на рис. 3, *б*, таких, что к общей вершине x треугольников Δ_1 и Δ_2 примыкает p треугольников внутри угла ϑ_1 и q треугольников внутри угла ϑ_2. Обозначим через $\mathcal{S}_3^2(p,q)$ множество классов гомологий $\bar\alpha_3(L,e_1,e_2)$, изображенных на рис. 3, *в*, таких, что к вершине x примыкает p треугольников, отличных от Δ_1, Δ_2 и Δ_4, а к вершине y – ровно q треугольников, отличных от Δ_1, Δ_2 и Δ_3.

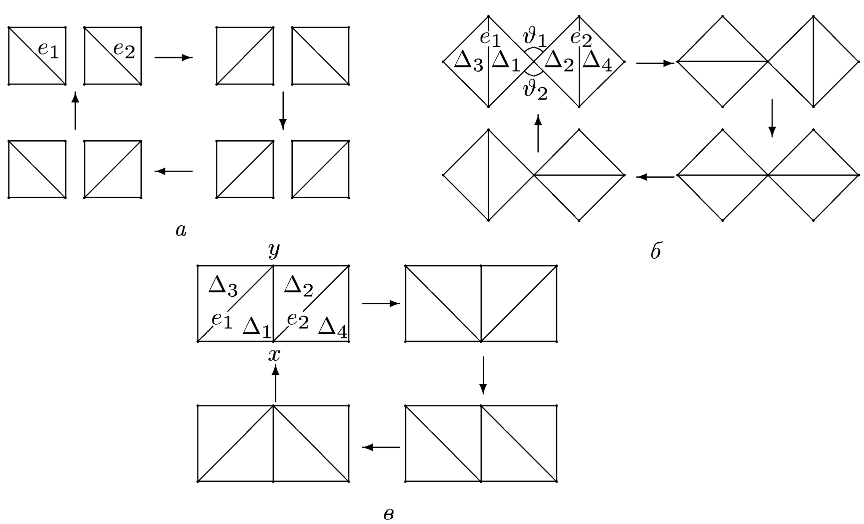

Рис. 3

Пусть x,y,z – вершины триангуляции L такие, что существует вершина u такая, что $\{u,x,y\}$, $\{u,y,z\}$ и $\{u,z,x\}$ – треугольники триангуляции L. Обозначим через $\alpha_4(L,x,y,z)$ цикл, изображенный на рис. 4. Обозначим через $\mathcal{S}_4(p,q,r)$ множество классов гомологий $\bar\alpha_4(L,x,y,z)$ таких, что к вершинам x, y и z примыкает соответственно p, q и r треугольников, отличных от $\{u,x,y\}$, $\{u,y,z\}$ и $\{u,z,x\}$.

Пусть x,y,z,u – вершины триангуляции L такие, что полный подкомплекс комплекса L, натянутый на это множество вершин, состоит из треугольников $\{x,y,z\}$

и $\{x, z, u\}$, их сторон и вершин. Обозначим через $\alpha_5(L, x, y, z, u)$ цикл, изображенный на рис. 5, и через $\mathcal{S}_5(p, q, r, k)$ – множество классов гомологий $\bar{\alpha}_5(L, x, y, z, u)$ таких, что к вершинам x, y, z и u примыкает соответственно p, q, r и k треугольников, отличных от $\{x, y, z\}$ и $\{x, z, u\}$.

Пусть x, y, z, u, v – вершины триангуляции L такие, что полный подкомплекс комплекса L, натянутый на это множество вершин, состоит из треугольников $\{x, y, z\}$, $\{x, z, u\}$ и $\{x, u, v\}$, их сторон и вершин. Обозначим цикл, изображенный на рис. 6, через $\alpha_6(L, x, y, z, u, v)$, и через $\mathcal{S}_6(p, q, r, k, l)$ – множество классов гомологий $\bar{\alpha}_6(L, x, y, z, u, v)$ таких, что к вершинам x, y, z, u и v примыкает соответственно p, q, r, k и l треугольников, отличных от $\{x, y, z\}$, $\{x, z, u\}$ и $\{x, u, v\}$.

Обозначим через $\mathcal{S}$ объединение всех множеств $\mathcal{S}_1^0$, $\mathcal{S}_1^1(p, q)$, $\mathcal{S}_1^2(p, q)$, $\mathcal{S}_2^0$, $\mathcal{S}_2^1(p, q)$, $\mathcal{S}_2^2(p, q)$, $\mathcal{S}_3^0$, $\mathcal{S}_3^1(p, q)$, $\mathcal{S}_3^2(p, q)$, $\mathcal{S}_4(p, q, r)$, $\mathcal{S}_5(p, q, r, k)$ и $\mathcal{S}_6(p, q, r, k, l)$.

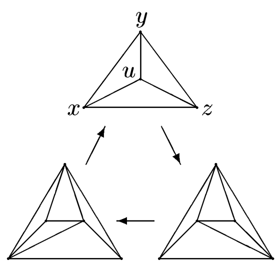

Рис. 4

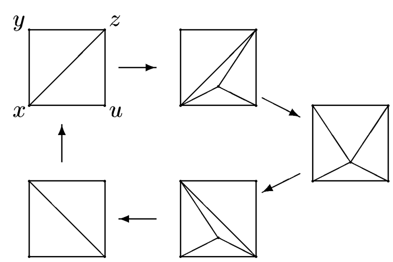

Рис. 5

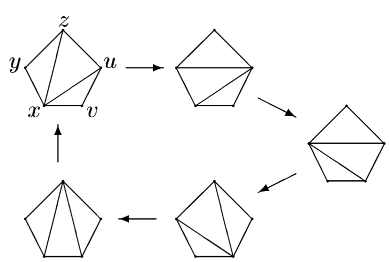

Рис. 6

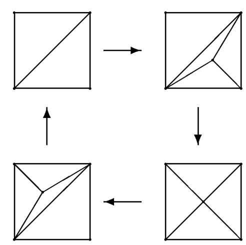

Рис. 7

Предложение 3.4. *Множество $\mathcal{S}$ порождает группу $H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Доказательство предложения будет опираться на следующие три утверждения.

1) Любая триангуляция двумерной сферы может быть реализована в виде границы выпуклого симплициального многогранника в $\mathbb{R}^3$.

2) Если P_0 и P_1 – два выпуклых симплициальных многогранника в $\mathbb{R}^3$, границы которых изоморфны, то существует непрерывно зависящее от t семейство выпуклых симплициальных многогранников P_t, $t \in [0, 1]$, с тем же комбинаторным типом.

3) Пусть L – триангуляция двумерной сферы, e – допустимое ребро этой триангуляции. Тогда существует выпуклый многогранник P в $\mathbb{R}^3$, одна грань F которого является четырехугольником, а остальные – треугольниками, такой, что его граница становится изоморфной L после проведения одной из диагоналей грани F.

Эти утверждения доказаны в [12] (см. также [13]).

Обозначим через $\mathcal{T}_{3,l}$ множество ориентированных триангуляций двумерной сферы, имеющих не более l вершин. Обозначим через $\Gamma_{2,l}$ полный подграф графа Γ_2, натянутый на множество вершин $\mathcal{T}_{3,l}$.

Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{R}^{3l}$, $l \geqslant 12$, точки которого будем представлять как наборы $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$, $y_j \in \mathbb{R}^3$. Точки y_j будем называть *координатами точки* y. Обозначим через $P(y)$ выпуклую оболочку точек $y_1, y_2, \dots, y_l$. Удалим из набора точек $y_1, y_2 \dots, y_l$ все точки, лежащие во внутренности множества $P(y)$. Обозначим получившийся набор точек через $V(y)$ (этот набор может содержать кратные точки). Обозначим через $\Theta^{3l} \subset \mathbb{R}^{3l}$ множество, состоящее из всех точек y таких, что множество $P(y)$ не содержится ни в какой двумерной плоскости. Обозначим через $\Theta_0^{3l} \subset \Theta^{3l}$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ находится в общем положении, т. е. не содержит четырех точек, лежащих в одной плоскости. Обозначим через $\Theta_1^{3l-1} \subset \Theta^{3l} \backslash \Theta_0^{3l}$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ содержит только одну четверку точек, лежащую в одной плоскости. Обозначим через $\Theta_{2,1}^{3l-2} \subset \Theta^{3l} \backslash \big(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}\big)$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ содержит ровно две четверки точек, каждая из которых лежит в одной плоскости. Обозначим через $\Theta_{2,2}^{3l-2} \subset \Theta^{3l} \backslash \big(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}\big)$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ содержит только одну тройку точек, лежащую на одной прямой, и четверка точек из $V(y)$ лежит в одной плоскости тогда и только тогда, когда она содержит эту тройку точек. Обозначим через $\Theta^{3l-2} \subset \Theta^{3l} \setminus \big(\Theta^{3l} \cup \Theta^{3l-1}\big)$ множество, состоящее из точек y таких, что набор $V(y)$ содержит ровно одну пятерку точек, лежащих в одной плоскости, и четверка точек из $V(y)$ лежит в одной плоскости тогда, когда она содержится в этой пятерке точек. Пусть $\Theta_2^{3l-2} = \Theta_{2,1}^{3l-2} \cup \Theta_{2,2}^{3l-2} \cup \Theta_{2,3}^{3l-2}$. Тогда

$$\dim \Theta_0^{3l} = 3l, \qquad \dim \Theta_1^{3l-1} = 3l-1, \qquad \dim \Theta_2^{3l-2} = 3l-2$$
$$\dim\big(\mathbb{R}^{3l} \setminus \big(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1} \cup \Theta_2^{3l-2}\big)\big) = 3l-3.$$

Из утверждений 1)–3) легко следует, что множество $\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$ связно. На множестве Θ^{3l} определено действие группы перестановок S_l.

Каждой точке $y \in \Theta_0^{3l}$ сопоставим вершину графа $\Gamma_{2,l}$, соответствующую комбинаторному типу границы многогранника $P(y)$. Гладкая кривая $y\colon [0,1] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$, трансверсальная к подмножеству Θ_1^{3l-1}, задает последовательность бизвездных преобразований и, следовательно, путь в графе $\Gamma_{2,l}$. Очевидно, что это соответствие продолжается до корректно определенного гомоморфизма

$$j\colon H_1(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}; \mathbb{Z}) \to H_1(\Gamma_{2,l}; \mathbb{Z}).$$

Из утверждений 1)–3) легко получить следующее предложение.

Предложение 3.5. *Пусть γ – путь в графе $\Gamma_{2,l}$, начало и конец которого совпадают с вершиной графа $\Gamma_{2,l}$, отвечающей границе тетраэдра. Тогда существует гладкая кривая $y\colon [0,1] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$, трансверсальная к подмножеству Θ_1^{3l-1}, проход по которой задает путь γ в графе $\Gamma_{2,l}$. Кривую y можно выбрать так, что $y(1) = \nu y(0)$ для некоторой перестановки $\nu \in S_l$.*

Предложение 3.6. *Пусть* $y^0, y^1 \in \Theta_0^{3l}$ *– точки такие, что* $P(y^0)$ *и* $P(y^1)$ *– тетраэдры и* $\nu y^0 = y^1$ *для некоторой перестановки* $\nu \in S_l$*. Тогда существует гладкая кривая* $y\colon [0,1] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$*, трансверсальная к подмножеству* Θ_1^{3l-1}*, такая, что* $y(0) = y^0$*,* $y(1) = y^1$ *и проход по кривой* y *задает в графе* $\Gamma_{2,l}$ *цикл, гомологичный нулю.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что все координаты точек y^0 и y^1, не входящие в наборы $V(y^0)$ и $V(y^1)$ соответственно, совпадают с барицентром тетраэдра $P(y^0) = P(y^1)$. Поскольку $l \geqslant 12$, можно считать, что перестановка ν оставляет на месте хотя бы четыре числа. Тогда существует точка $y^{\frac12} \in \Theta_0^{3l}$ такая, что $\nu y^{\frac12} = y^{\frac12}$.

Пусть $y\colon \left[0, \frac12\right] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$ – произвольная гладкая кривая, трансверсальная к подмножеству Θ_1^{3l-1}, такая, что $y(0) = y^0$, $y\left(\frac12\right) = y^{\frac12}$. Положим $y(t) = \nu y(1-t)$ для любого $t \in \left[\frac12, 1\right]$. Сгладив кривую y в окрестности точки $y\left(\frac12\right)$, получим искомую кривую.

Из предложений 3.5 и 3.6 следует, что гомоморфизм j является эпиморфизмом. Группа $H_1(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}; \mathbb{Z})$ порождается обходами ω_X вокруг компонент связности X множества Θ_2^{3l-2}. Если X – компонента связности множества $\Theta_{2,1}^{3l-2}$ или $\Theta_{2,3}^{3l-2}$, то $j(\omega_X) \in \mathcal{S}$ или $-j(\omega_X) \in \mathcal{S}$. Если X – компонента связности множества $\Theta_{2,2}^{3l-2}$, то класс гомологий $j(\omega_X)$ представляется циклом, изображенным на рис. 7. Очевидно, что такой цикл представим в виде суммы двух циклов вида $\alpha_5(L, x, y, z, u)$.

3.3. Формула. Из теоремы 2.1 следует, что $H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$ и в группе $H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ можно выбрать образующую φ такую, что $\varphi^\sharp(M^m) = p_1(M^m)$ для любого многообразия M^m. Следующая теорема дает явное выражение для образующей φ.

Теорема 3.1. *Рассмотрим функцию* c_0*, заданную на образующих группы* $H_1(\Gamma_2; \mathbb{Z})$ *следующим образом:*

$$
\begin{aligned}
c_0(\bar\alpha) &= 0, \qquad \bar\alpha \in \mathcal{S}_1^0 \cup \mathcal{S}_2^0 \cup \mathcal{S}_3^0,\\
c_0(\bar\alpha) &= \frac{q-p}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)}\,, \qquad \bar\alpha \in \mathcal{S}_1^1(p,q) \cup \mathcal{S}_2^1(p,q) \cup \mathcal{S}_3^1(p,q),\\
c_0(\bar\alpha) &= \frac{q}{(q+2)(q+3)(q+4)} - \frac{p}{(p+2)(p+3)(p+4)}\,, \qquad \bar\alpha \in \mathcal{S}_1^2(p,q) \cup \mathcal{S}_3^2(p,q),\\
c_0(\bar\alpha) &= \frac{q}{(q+2)(q+3)(q+4)} + \frac{p}{(p+2)(p+3)(p+4)}\,, \qquad \bar\alpha \in \mathcal{S}_2^2(p,q),\\
c_0(\bar\alpha) &= \frac{1}{(p+2)(p+3)} - \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \frac{1}{(r+2)(r+3)} - \frac{1}{12}\,, \qquad \bar\alpha \in \mathcal{S}_4(p,q,r),\\
c_0(\bar\alpha) &= \frac{1}{(p+2)(p+3)} - \frac{1}{(q+2)(q+3)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)}\\
&\quad + \frac{1}{(k+2)(k+3)}\,, \qquad \bar\alpha \in \mathcal{S}_5(p,q,r,k),
\end{aligned}
$$

$$c_0(\bar{\alpha}) = \frac{1}{(p+2)(p+3)} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \frac{1}{(r+2)(r+3)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(l+2)(l+3)} - \frac{1}{12}, \qquad \bar{\alpha} \in \mathcal{S}_6(p,q,r,k,l).$$

Тогда функция c_0 продолжается до класса когомологий $c_0 \in H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\Gamma_2;\mathbb{Z}),\mathbb{Q})$. При этом $c_0 = s^*(\varphi)$. Таким образом, отображение s осуществляет изоморфизм между аффинным пространством всех локальных формул, вычисляющих первый класс Понтрягина, и аффинным пространством всех коциклов $\widehat{c}_0 \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathbb{Q})$, представляющих класс когомологий c_0.

Замечание 3.1. Похожие числовые выражения возникали в статье [14] (см. также [15]) при решении совсем другой задачи, а именно при нахождении формулы для класса Чженя–Эйлера S^1-расслоения через особенности ограничений морсовской функции на тотальном пространстве на слои этого расслоения.

Опишем, как производить конкретные вычисления с помощью этой теоремы. Прежде всего необходимо выбрать локальную формулу f, вычисляющую первый класс Понтрягина, что равносильно выбору коцикла $\widehat{c}_0 = s(f)$, представляющего класс когомологий c_0. Пусть теперь нужно вычислить значение $f(L)$, $L \in \mathcal{T}_4$. Выберем последовательность бизвездных преобразований $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$, переводящих границу 4-мерного симплекса в триангуляцию L. Обозначим через L_j триангуляцию, полученную из $\partial\Delta^4$ применением бизвездных преобразований $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$, и через W_j – множество вершин v триангуляции L_j таких, что бизвездное преобразование β_j индуцирует в линке вершины v бизвездное преобразование β_{jv}, не являющееся несущественным.

Следствие 3.2. $f(L) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{v\in W_j} \widehat{c}_0(e_{\beta_{jv}})$.

Доказательство. Имеем

$$f(L_{j+1}) - f(L_j) = df(e_{\beta_j}) = \delta\widehat{c}_0(e_{\beta_j}) = \sum_{v\in W_j} \widehat{c}_0(e_{\beta_{jv}}).$$

На самом деле, для того чтобы найти цикл, представляющий класс гомологий, двойственный первому классу Понтрягина компактного комбинаторного многообразия K, не нужно выбирать коцикл $\widehat{c}_0$ на всем графе Γ_2. Достаточно выбрать коцикл, представляющий ограничение класса c_0 на некоторый конечный подграф графа Γ_2.

Чтобы вычислить первое число Понтрягина ориентированного 4-мерного комбинаторного многообразия K, вообще не нужно выбирать коцикл $\widehat{c}_0$. Пусть L_1, $L_2, \dots, L_k$ – линки всех вершин симплициального комплекса K. Для каждой триангуляции L_i выберем последовательность бизвездных преобразований β_{i1}, $\beta_{i2}, \dots, \beta_{il_i}$, переводящую границу 4-мерного симплекса в триангуляцию L_i. Обозначим через L_{ij} триангуляцию, полученную из $\partial\Delta^4$ применением бизвездных преобразований $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i,j-1}$, и через W_{ij} – множество вершин v триангуляции L_{ij} таких, что бизвездное преобразование β_{ij} индуцирует в линке вершины v бизвездное преобразование β_{ijv}, не являющееся несущественным.

Рассмотрим цепь

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{v \in W_{ij}} (e_{\beta_{ijv}} - \widetilde{e}_{\beta_{ijv}}) \in C_1(\Gamma_2; \mathbb{Z}),$$

где $\widetilde{e}$ – ребро, в которое переходит ребро e при автоморфизме графа Γ_2, задаваемом действием группы $\mathbb{Z}_2$. Легко проверить, что γ – цикл.

Следствие 3.3. *Первое число Понтрягина многообразия K равно $\frac{1}{2}\, c_0(\bar{\gamma})$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{c}_0 \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ – произвольный коцикл, представляющий класс когомологий c_0. Первое число Понтрягина многообразия K равно

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f(L_i) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{v \in W_{ij}} \widehat{c}_0(e_{\beta_{ijv}}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{v \in W_j} \left(\frac{1}{2}\, \widehat{c}_0(e_{\beta_{ijv}}) - \frac{1}{2}\, \widehat{c}_0(\widetilde{e}_{\beta_{ijv}}) \right) = \frac{1}{2}\, \widehat{c}_0(\gamma) = \frac{1}{2}\, \widehat{c}_0(\bar{\gamma}).\end{aligned}$$

Для практического вычисления по этой формуле нужно уметь представлять класс когомологий $\bar{\gamma}$ в виде линейной комбинации образующих из множества $\mathcal{S}$.

Замечание 3.2. В отличие от формулы следствия 3.2, формула следствия 3.3 уже не является локальной.

План доказательства теоремы 3.1. Из эпиморфности отображения

$$\star\colon H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \mathrm{Hom}(\Omega_*, \mathbb{Q})$$

следует, что $\dim H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \geqslant 1$. В п. 3.4 будет доказано, что для любого класса когомологий $c \in \widetilde{A}^3$ существует рациональное число λ такое, что $c(\bar{\alpha}) = \lambda c_0(\bar{\alpha})$ для любого $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}$. Значит, $\dim \widetilde{A}^3 \leqslant 1$. При этом существует мономорфизм $s^*\colon H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \widetilde{A}^3$. Следовательно,

$$\dim H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) = \dim \widetilde{A}^3 = 1.$$

Значит, класс когомологий c_0 корректно определен, принадлежит $\widetilde{A}^3$ и $s^*(\varphi) = \lambda c_0$ для некоторого рационального числа λ. В п. 3.5 будет доказано, что $\lambda = 1$.

Замечание 3.3. Это доказательство не использует мономорфность гомоморфизма $\star$ для рациональных коэффициентов. Наоборот, из него следует, что $\star$ – мономорфизм в размерности 4.

3.4. Строение векторного пространства $\widetilde{A}^3$. Пусть c – произвольный элемент группы $\widetilde{A}^3 \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\Gamma_2;\mathbb{Z}),\mathbb{Q})$.

Пусть $\alpha = \alpha_i(L,\dots)$ – цикл, изображенный на одном из рис. 1–6. Обозначим через $X(\alpha)$ множество, состоящее из всех вершин триангуляции L, которые обозначены через x, y, z, u, v на соответствующем рисунке (на некоторых рисунках использованы не все эти обозначения). Образующую $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}$ будем называть *регулярной*, если выполнены следующие условия:

1) объединение звезд всех вершин из множества $X(\alpha)$ является полным подкомплексом комплекса L;

2) если какая-нибудь вершина w триангуляции L, не лежащая во множестве $X(\alpha)$, соединена ребрами с двумя вершинами $a, b \in X(\alpha)$, то треугольник $\{w, a, b\}$ принадлежит комплексу L.

Рассмотрим произвольную образующую $\bar{\alpha}_1(L, \Delta_1, \Delta_2) \in \mathcal{S}_1^0$. Очевидно, что существует триангуляция $K \in \mathcal{T}_4$, содержащая вершину u такую, что $\mathrm{Lk}\, u$ изоморфен L и звезда вершины u является полным подкомплексом комплекса K. Будем отождествлять комплексы L и $\mathrm{Lk}\, u$. Обозначим через $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$ тетраэдры комплекса K, натянутые на вершину u и треугольники Δ_1 и Δ_2 соответственно. Рассмотрим цикл $\gamma \in Z_1(\Gamma_3;\mathbb{Z})$, построенный по комплексу K и тетраэдрам $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$ так же, как цикл $\alpha_1(L, \Delta_1, \Delta_2)$ был построен по комплексу L и треугольникам Δ_1 и Δ_2. Цикл γ индуцирует для каждой вершины $v \in K$ цикл γ_v в графе Γ_2, состоящий из ребер, соответствующих индуцированным бизвездным преобразованиям линка вершины v. Тогда
$$\delta^*(c)(\bar{\gamma}) = \sum_v c(\bar{\gamma}_v).$$
Имеем $\delta^*(c) = 0$, так как $c \in \widetilde{A}^3$. Для всех вершин комплекса K, кроме вершины u, циклы γ_v гомологичны нулю. Цикл γ_u совпадает с циклом $\alpha_1(L, \Delta_1, \Delta_2)$. Значит, $c(\bar{\alpha}_1(L, \Delta_1, \Delta_2)) = 0$. Аналогично доказывается, что $c(\bar{\alpha}) = 0$ для любой $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}_2^0 \cup \mathcal{S}_3^0$.

Предложение 3.7. *Для любых $p, q > 0$ функция c постоянна на множестве $\mathcal{S}_1^1(p, q)$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\alpha}_1\big(L^{(i)}, \Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)}\big) \in \mathcal{S}_1^1(p, q)$, $i = 1, 2$. Обозначим через $x^{(i)}$ общую вершину треугольников $\Delta_1^{(i)}$ и $\Delta_2^{(i)}$. Предположим, что $\bar{\alpha}_1\big(L^{(1)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\big)$ – регулярная образующая. Докажем, что существует ориентированная триангуляция K трехмерной сферы с выделенными вершинами u и w, соединенными ребром e, обладающая следующими свойствами:

1) линк ребра e является $(p + q + 2)$-угольником с двумя выделенными ребрами e_1 и e_2;

2) линк вершины u изоморфен симплициальному комплексу $L^{(1)}$; при этом изоморфизме треугольник, натянутый на вершину w и ребро e_j, переходит в треугольник $\Delta_j^{(1)}$, $j = 1, 2$;

3) линк вершины w изоморфен симплициальному комплексу $-L^{(2)}$; при этом изоморфизме треугольник, натянутый на вершину u и ребро e_j, переходит в треугольник $\Delta_j^{(2)}$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим конус $CL^{(1)}$ с вершиной u и конус $CL^{(2)}$ с вершиной w. Отождествим полный подкомплекс $\operatorname{Star} x^{(1)} \subset CL^{(1)}$ с подкомплексом $\operatorname{Star} x^{(2)} \subset CL^{(2)}$ так, чтобы вершина $x^{(1)}$ отождествилась с вершиной w, вершина u – с вершиной $x^{(2)}$, тетраэдр, натянутый на вершину u и треугольник $\Delta_j^{(1)}$, – с тетраэдром, натянутым на вершину w и треугольник $\Delta_j^{(2)}$, $j = 1, 2$. Склеим комплексы $CL^{(1)}$ и $CL^{(2)}$ по такому отождествлению их подкомплексов. Получим триангуляцию J трехмерного диска. Тогда $K = J \cup_{\partial J} C(\partial J)$ – искомая триангуляция ($K \in \mathcal{T}_4$, так как любая триангуляция трехмерной сферы изоморфна кусочно линейной). В приведенном доказательстве существенно, что $\operatorname{Star} x^{(1)} \subset CL^{(1)}$ – полный подкомплекс, т.е. что $\bar{\alpha}_1\big(L^{(1)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\big)$ – регулярная образующая (если это не выполнено, то J может не быть симплициальным комплексом). В дальнейшем мы будем опускать подобные доказательства.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}_j$ тетраэдр триангуляции K, натянутый на ребра e и e_j. Определим цикл γ так же, как в предыдущем случае. Для любой вершины $v \in K$, кроме вершин u и w, индуцированный цикл γ_v гомологичен нулю. Цикл γ_u совпадает с циклом $\alpha_1\big(L^{(1)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\big)$, цикл γ_w – с циклом $\alpha_1\big(-L^{(2)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}\big)$. Значит, $c\big(\bar{\alpha}_1\big(L^{(1)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\big)\big) = c\big(\bar{\alpha}_1\big(L^{(2)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}\big)\big)$. Осталось заметить, что в каждом множестве $\mathcal{S}_1^1(p, q)$ есть регулярная образующая.

Обозначим через $\rho(p, q)$ значение функции c на множестве $\mathcal{S}_1^1(p, q)$.

Предложение 3.8. *Для любых $p, q > 0$ функция c постоянна на множестве $\mathcal{S}_1^2(p, q)$. Если $\tau(p, q)$ – значение функции c на множестве $\mathcal{S}_1^2(p, q)$, то $\tau(p, q) + \tau(q, r) + \tau(r, p) = 0$ для любых $p, q, r > 0$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\alpha}_1\big(L^{(1)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\big) \in \mathcal{S}_1^2(p, q)$. Пусть $r > 1$. Выберем регулярные образующие $\bar{\alpha}_1\big(L^{(2)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}\big) \in \mathcal{S}_1^2(q, r)$ и $\bar{\alpha}_1\big(L^{(3)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(3)}\big) \in \mathcal{S}_1^2(r, p)$. Существует ориентированная триангуляция K трехмерной сферы, содержащая треугольник Δ_0 с вершинами $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и $u^{(3)}$ такими, что их линки изоморфны комплексам $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ и $L^{(3)}$ соответственно, причем изоморфизм $\operatorname{Lk} u^{(i)} \cong L^{(i)}$ переводит гиперграни тетраэдров $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$, противолежащие вершине $u^{(i)}$, в треугольники $\Delta_1^{(i)}$ и $\Delta_2^{(i)}$. Здесь $\widetilde{\Delta}_1$, $\widetilde{\Delta}_2$ – тетраэдры триангуляции K, содержащие треугольник Δ_0. Аналогично доказательству предложения 3.7 получаем, что

$$c\big(\bar{\alpha}_1\big(L^{(1)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\big)\big) + c\big(\bar{\alpha}_1\big(L^{(2)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}\big)\big) + c\big(\bar{\alpha}_1\big(L^{(3)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(3)}\big)\big) = 0.$$

Вместо образующей $\bar{\alpha}_1\big(L^{(1)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\big)$ можно взять любую другую образующую из $\mathcal{S}_1^2(p, q)$. Поэтому значение $c(\bar{\alpha})$ не зависит от выбора образующей $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}_1^2(p, q)$. Кроме того, сразу получаем, что $\tau(p, q) + \tau(q, r) + \tau(r, p) = 0$.

Очевидно, что $\tau(p, q) = -\tau(q, p)$. Поэтому из равенства $\tau(p, q) + \tau(q, r) + \tau(r, p) = 0$ следует, что существует функция $\chi\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Q}$, определенная однозначно с точностью до прибавления произвольной рациональной константы, такая, что для любых $p, q > 0$ верно равенство $\tau(p, q) = \chi(q) - \chi(p)$. Функция $\rho(p, q)$ определена для всех $p, q > 0$. Доопределим ее равенствами $\rho(0, p) = \chi(p)$, $\rho(p, 0) = -\chi(p)$, $\rho(0, 0) = 0$.

Предложение 3.9. *Функция* $\rho(p,q)$ *удовлетворяет следующим уравнениям*:

(i) $\rho(p,q) = -\rho(q,p)$;

(ii) $\rho(p,q+r+2)+\rho(q,r+p+2)+\rho(r,p+q+2) = \rho(p,q+r+1)+\rho(q,r+p+1)+\rho(r,p+q+1)$.

Доказательство. Равенство (i) следует для $p,q>0$ из очевидного равенства $\alpha_1(K,\Delta_1,\Delta_2) = -\alpha_1(K,\Delta_2,\Delta_1)$, а для $p=0$ или $q=0$ – непосредственно из определения функции ρ.

Чтобы доказать равенство (ii), рассмотрим ориентированную триангуляцию L двумерной сферы, содержащую вершину x, к которой примыкает $p+q+r+3$ треугольника. Выберем среди треугольников, примыкающих к вершине x, три треугольника Δ_0, Δ_1 и Δ_2 таких, что при обходе вокруг вершины x по часовой стрелке мы пройдем последовательно через треугольник Δ_0, через r других треугольников, через треугольник Δ_1, через p других треугольников, через треугольник Δ_2 и через q оставшихся треугольников. Обозначим L_j комплекс, получаемый из L при бизвездном преобразовании, ассоциированном с треугольником Δ_j. Легко проверить, что

$$\sum_{j=0}^{2}\alpha_1(L_j,\Delta_{j+1},\Delta_{j+2}) = \sum_{j=0}^{2}\alpha_1(L,\Delta_{j+1},\Delta_{j+2}),$$

где суммы индексов берутся по модулю 3. Возьмем классы гомологий обеих частей этого равенства и применим к ним отображение c. Получим равенство (ii).

Предложение 3.10. *Если функция* $\rho\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\times\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\to\mathbb{Q}$ *удовлетворяет уравнениям* (i) *и* (ii) *из предложения* 3.9, *то существуют рациональные константы* b_1 *и* λ *такие, что*

$$\rho(p,q) = \frac{\lambda(q-p)}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)}$$

для любых $p,q>0$ *и*

$$\rho(0,q) = \frac{\lambda q}{(q+2)(q+3)(q+4)} + b_1$$

для любого $q>0$.

Доказательство. Легко проверить, что для любых $b_1,\lambda\in\mathbb{Q}$ функция, заданная такими формулами, удовлетворяет уравнениям (i) и (ii) из предложения 3.9. Таким образом, достаточно доказать, что функция ρ однозначно определяется из уравнений (i) и (ii), если известны значения $\rho(0,1)$ и $\rho(1,2)$. Подставляя в уравнение (ii) значения $p=q=r=0$ и $p=1, q=r=0$, получим уравнения $\rho(0,2)=\rho(0,1)$ и $2\rho(0,3)+\rho(1,2)=2\rho(0,2)$. Значит, значения функции ρ на всех парах (k,l) таких, что $k+l\leqslant 3$, однозначно выражаются через значения $\rho(0,1)$ и $\rho(1,2)$.

Докажем, что при $m\geqslant 4$ значения функции ρ на всех парах (k,l) таких, что $k+l=m$, однозначно выражаются из уравнений (i) и (ii) через значения функции ρ на всех парах (k,l) таких, что $k+l=m-1$. Рассмотрим все уравнения вида (ii), для которых $p+q+r+2=m$. Заменим в левой части каждого из них все слагаемые вида $\rho(k,l)$, где $k>l$, на слагаемые $-\rho(l,k)$, а все слагаемые вида $\rho(k,k)$ на нули. Систему полученных уравнений можно рассматривать как линейную систему уравнений с неизвестными $\rho(0,m), \rho(1,m-1), \dots, \rho(n-1,n+1)$, если $m=2n$, и с неизвестными $\rho(0,m), \rho(1,m-1), \dots, \rho(n-1,n)$, если $m=2n-1$. Необходимо доказать, что такая система уравнений имеет не более одного решения при любой правой части, т.е. что ее ранг равен n в каждом из двух случаев. Выделим из этой системы n уравнений таких, что матрица полученной подсистемы невырождена. Если $m=2n$, то выберем уравнения, соответствующие тройкам (p,q,r) вида $(m-2-k,k,0)$, $k=0,1,\dots,n-1$. Если $m=2n-1$, то выберем уравнения, соответствующие тройкам (p,q,r) вида $(m-2-k,k,0)$, $k=0,1,\dots,n-2$, и добавим к ним уравнение, соответствующее тройке $(m-4,1,1)$. Невырожденность соответствующих матриц проверяется непосредственно.

Поскольку функция χ была определена с точностью до прибавления произвольной константы, можно считать, что

$$\rho(p,q)=\frac{\lambda(q-p)}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)}$$

для любых $p,q\geqslant 0$.

Пусть $\bar{\alpha}_2(L,\Delta,e)\in\mathcal{S}_2^1(p,q)$. Определим треугольники Δ_1 и Δ_2 и вершину x так же, как в п. 3.2. Рассмотрим ориентированную триангуляцию K трехмерной сферы, содержащую вершину u, звезда которой является полным подкомплексом комплекса K, а линк изоморфен комплексу L. Будем отождествлять комплексы $\operatorname{Lk} u$ и L. Обозначим через $\widetilde{e}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta}_1, \widetilde{\Delta}_2$ симплексы комплекса K, натянутые на вершину u и симплексы e, Δ, Δ_1, Δ_2 соответственно. Определим цикл γ в графе Γ_3 следующим образом: произведем для триангуляции K бизвездное преобразование, разбив тетраэдр $\widetilde{\Delta}$ на четыре тетраэдра, потом произведем бизвездное преобразование, ассоциированное с треугольником $\widetilde{e}$, потом восстановим тетраэдр $\widetilde{\Delta}$, а потом – тетраэдры $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$. Циклы γ_v гомологичны нулю для всех вершин v комплекса K, кроме вершин u и x. При этом $\bar{\gamma}_x\in\mathcal{S}_1^1(q,p)$, значит, $c(\bar{\gamma}_x)=\rho(q,p)$. Следовательно,

$$c(\bar{\alpha}_2(L,\Delta,e))=c(\bar{\gamma}_u)=-c(\bar{\gamma}_x)=\rho(p,q).$$

Аналогично доказывается, что $c(\bar{\alpha})=\rho(p,q)$ для любой $\bar{\alpha}\in\mathcal{S}_3^1(p,q)$.

Предложение 3.11. *Если $\bar{\alpha}_2(L,\Delta,e)\in\mathcal{S}_2^2(p,q)$, то*

$$c(\bar{\alpha}_2(L,\Delta,e))=\rho(0,p)+\rho(0,q)+b_2,$$

где $b_2\in\mathbb{Q}$ – константа, не зависящая от p и q.

Доказательство. Пусть $\bar{\alpha}_2(L^{(0)},\Delta^{(0)},e^{(0)})\in\mathcal{S}_2^2(r,q)$ – регулярная образующая. Определим треугольники $\Delta_1^{(0)}$ и $\Delta_2^{(0)}$, ребро $e^{(0)}$ и вершины $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ так же, как треугольники Δ_1, Δ_2, ребро e и вершины x и y (см. рис. 2, *в*). Существует ориентированная триангуляция K трехмерной сферы, содержащая три тетраэдра $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$, такая, что выполнены условия:

1) тетраэдры $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\Delta}_1$ имеют общую двумерную грань, тетраэдры $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$ имеют общую двумерную грань $\widetilde{e}$, при этом все три тетраэдра $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$ имеют общее

ребро ε; вершины тетраэдров $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$, противолежащие грани $\widetilde{e}$, не соединены ребром;

2) один из концов u ребра ε имеет линк, изоморфный комплексу L; при этом изоморфизме двумерные грани тетраэдров $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$, противолежащие вершине u, переходят в треугольники Δ, Δ_1 и Δ_2.

3) другой конец v ребра ε имеет линк, изоморфный комплексу $-L^{(0)}$; при этом изоморфизме двумерные грани тетраэдров $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$, противолежащие вершине v, переходят в треугольники $\Delta^{(0)}$, $\Delta_1^{(0)}$ и $\Delta_2^{(0)}$.

Определим цикл γ так же, как в предыдущем случае. Обозначим через w вершину, принадлежащую тетраэдрам $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\Delta}_1$, отличную от вершин u и v. Тогда $c(\bar{\gamma}_u)+c(\bar{\gamma}_v)+c(\bar{\gamma}_w)=0$, так как цикл γ_t гомологичен нулю для любой вершины t, отличной от u, v и w. По доказанному ранее, $c(\bar{\gamma}_w)=-\rho(0,p)+\rho(0,r)$, так как $\bar{\gamma}_w\in S_1^2(p,r)$. Цикл γ_u совпадает с циклом $\alpha_2(L,\Delta,e)$, а цикл γ_v совпадает с циклом $\alpha_2\bigl(-L^{(0)},\Delta^{(0)},e^{(0)}\bigr)$. Поэтому

$$c(\bar{\alpha}_2(L,\Delta,e))-c\bigl(\bar{\alpha}_2\bigl(L^{(0)},\Delta^{(0)},e^{(0)}\bigr)\bigr)=\rho(0,p)-\rho(0,r).$$

Следовательно, значение $c(\bar{\alpha})$, $\bar{\alpha}\in\mathcal{S}_2^2(p,q)$, зависит только от пары чисел (p,q). Обозначим это значение через $\xi(p,q)$. Тогда

$$\xi(p,q)-\xi(r,q)=\rho(0,p)-\rho(0,r).$$

Осталось заметить, что $\xi(p,q)=\xi(q,p)$, так как если $\bar{\alpha}_2(L,\Delta,e)\in\mathcal{S}_2^2(p,q)$, то $-\bar{\alpha}_2(-L,\Delta,e)\in S_2^2(q,p)$.

Рассмотрим произвольную образующую $\bar{\alpha}_3(L,e_1,e_2)\in\mathcal{S}_3^2(p,q)$. Введем обозначения x, y, e, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 так же, как на рис. 3, *в*. Рассмотрим ориентированную триангуляцию K трехмерной сферы, содержащую вершину u, звезда которой является полным подкомплексом комплекса K, а линк изоморфен комплексу L. Будем отождествлять комплексы $\operatorname{Lk}u$ и L. Обозначим через $\widetilde{e}_j$, $\widetilde{\Delta}_j$ симплексы, натянутые на вершину u и симплексы e_j, Δ_j соответственно. Пусть к ребру e примыкает r тетраэдров триангуляции K, отличных от $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$. Рассмотрим следующий цикл $\gamma\in Z_1(\Gamma_3;\mathbb{Z})$: произведем для триангуляции K бизвездное преобразование, ассоциированное с треугольником $\widetilde{e}_1$, потом бизвездное преобразование, ассоциированное с треугольником $\widetilde{e}_2$, затем восстановим тетраэдры $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_3$ и, наконец, тетраэдры $\widetilde{\Delta}_2$ и $\widetilde{\Delta}_4$. Тогда цикл γ_v гомологичен нулю для любой вершины v комплекса K, отличной от u, x и y. Цикл γ_u совпадает с циклом $\alpha_3(L,e_1,e_2)$, $\bar{\gamma}_x\in\mathcal{S}_2^2(r,p)$, $(-\bar{\gamma}_y)\in\mathcal{S}_2^2(r,q)$. Поэтому $c(\bar{\alpha}_3(L,e_1,e_2))=\rho(0,q)-\rho(0,p)$.

Пусть p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{25}, p_{34}, p_{35}, p_{36}, p_{45}, p_{46} и p_{56} – произвольные натуральные числа, не меньшие 3. Рассмотрим произвольные циклы $\omega_j\in Z_1(\Gamma_2;\mathbb{Z})$, $j=1,2,\dots,6$, такие, что:

1) $\omega_1=\alpha_4(L_1,x_1,y_1,z_1)$, $\bar{\omega}_1\in\mathcal{S}_4(p_{13},p_{14},p_{12})$;

2) $\omega_2=\alpha_5(L_2,x_2,y_2,z_2,u_2)$, $\bar{\omega}_2\in\mathcal{S}_5(p_{23},p_{12},p_{24},p_{25})$;

3) $\omega_3=\alpha_6(L_3,x_3,y_3,z_3,u_3,v_3)$, $\bar{\omega}_3\in\mathcal{S}_6(p_{34},p_{13},p_{23},p_{35},p_{36})$;

4) $\omega_4=\alpha_6(L_4,x_4,y_4,z_4,u_4,v_4)$, $\bar{\omega}_4\in\mathcal{S}_6(p_{34},p_{46},p_{45},p_{24},p_{14})$;

5) $\omega_5=\alpha_5(L_5,x_5,y_5,z_5,u_5)$, $\bar{\omega}_5\in\mathcal{S}_5(p_{45},p_{56},p_{35},p_{25})$;

6) $\omega_6=\alpha_4(L_6,x_6,y_6,z_6)$, $\bar{\omega}\in\mathcal{S}_4(p_{46},p_{36},p_{56})$;

7) все образующие $\bar{\omega}_j$, кроме, быть может, какой-нибудь одной, являются регулярными.

Обозначим через $L_j^{(1)}$, $j = 1, 6$, симплициальный комплекс, полученный из комплекса L_j с помощью бизвездного преобразования, ассоциированного с вершиной u_j, которая определяется так же, как вершина u на рис. 4.

Существует ориентированная триангуляция K трехмерной сферы, содержащая вершины w_j, $j = 1, 2, \dots, 6$, такая, что выполнены следующие условия:

1) полный подкомплекс комплекса K, натянутый на множество вершин $\{w_j,\ j = 1, \dots, 6\}$, состоит из тетраэдров $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $\{w_2, w_3, w_4, w_5\}$ и $\{w_3, w_4, w_5, w_6\}$ и всех их граней;

2) к каждому ребру $\{w_i, w_j\} \in K$, $i < j$, примыкает p_{ij} тетраэдров триангуляции K, отличных от тетраэдров $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $\{w_2, w_3, w_4, w_5\}$ и $\{w_3, w_4, w_5, w_6\}$;

3) линки вершин w_j можно отождествить с комплексами L_j при $1 < j < 6$ и с комплексами $L_j^{(1)}$ при $j = 1, 6$ так, чтобы при этом произошли следующие отождествления вершин: $w_1 = y_2 = y_3 = v_4$, $w_2 = z_1 = z_3 = u_4 = u_5$, $w_3 = x_1 = x_2 = x_4 = z_5 = y_6$, $w_4 = y_1 = z_2 = x_3 = x_5 = x_6$, $w_5 = u_2 = u_3 = z_4 = z_6$, $w_6 = v_3 = y_4 = y_5$.

Произведем с симплициальным комплексом K бизвездные преобразования:

1) заменим тетраэдры $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и $\{w_2, w_3, w_4, w_5\}$ на тетраэдры $\{w_1, w_2, w_3, w_5\}$, $\{w_1, w_3, w_4, w_5\}$ и $\{w_1, w_4, w_2, w_5\}$;

2) заменим тетраэдры $\{w_1, w_3, w_4, w_5\}$ и $\{w_3, w_4, w_5, w_6\}$ на тетраэдры $\{w_1, w_3, w_4, w_6\}$, $\{w_1, w_4, w_5, w_6\}$ и $\{w_1, w_5, w_3, w_6\}$;

3) заменим тетраэдры $\{w_1, w_2, w_3, w_5\}$ и $\{w_1, w_5, w_3, w_6\}$ на тетраэдры $\{w_2, w_3, w_1, w_6\}$, $\{w_2, w_1, w_5, w_6\}$ и $\{w_2, w_5, w_3, w_6\}$;

4) заменим тетраэдры $\{w_1, w_4, w_2, w_5\}$, $\{w_1, w_6, w_4, w_5\}$ и $\{w_1, w_2, w_6, w_5\}$ на тетраэдры $\{w_1, w_2, w_6, w_4\}$ и $\{w_2, w_6, w_4, w_5\}$;

5) заменим тетраэдры $\{w_1, w_2, w_3, w_6\}$, $\{w_1, w_3, w_4, w_6\}$ и $\{w_1, w_4, w_2, w_6\}$ на тетраэдры $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и $\{w_2, w_3, w_4, w_6\}$;

6) заменим тетраэдры $\{w_2, w_3, w_4, w_6\}$, $\{w_2, w_4, w_5, w_6\}$ и $\{w_2, w_5, w_3, w_6\}$ на тетраэдры $\{w_2, w_3, w_4, w_5\}$ и $\{w_3, w_4, w_5, w_6\}$.

В результате мы снова получим симплициальный комплекс K. Полученный цикл в графе Γ_3 обозначим через γ. Легко проверить, что цикл γ_{w_j} гомологичен циклу ω_j при $j = 3, 5, 6$ и циклу $-\omega_j$ при $j = 1, 2, 4$. Поэтому

$$c(\bar{\omega}_1) + c(\bar{\omega}_2) - c(\bar{\omega}_3) + c(\bar{\omega}_4) - c(\bar{\omega}_5) - c(\bar{\omega}_6) = 0.$$

Из этой формулы следует, что функция c постоянна на каждом из множеств $\mathcal{S}_4(p, q, r)$, $\mathcal{S}_5(p, q, r, k)$ и $\mathcal{S}_6(p, q, r, k, l)$, $p, q, r, k, l \geqslant 3$. Значения функции c на этих множествах обозначим через $\eta(p, q, r)$, $\zeta(p, q, r, k)$ и $\theta(p, q, r, k, l)$ соответственно.

Предложение 3.12. *Существует рациональная константа b_5 такая, что для любых натуральных $p, q, r, k, l \geqslant 3$ выполнено равенство*

$$\theta(p, q, r, k, l) = \frac{\lambda}{(p+2)(p+3)} + \frac{\lambda}{(q+2)(q+3)} + \frac{\lambda}{(r+2)(r+3)} + \frac{\lambda}{(k+2)(k+3)} + \frac{\lambda}{(l+2)(l+3)} + b_5.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную образующую

$$\bar{\alpha}_6(L,x,y,z,u,v)\in\mathcal{S}_6(p,q,r,k,l),\qquad p,q,r,k,l\geqslant 3.$$

Существует треугольник $\Delta\in L$ такой, что x – вершина Δ, а y, z, u и v – не вершины Δ. Пусть при обходе вокруг вершины x по часовой стрелке мы проходим по порядку через треугольник Δ, через $p'>0$ других треугольников, через треугольники $\{x,y,z\}$, $\{x,z,u\}$, $\{x,u,v\}$, через $p''>0$ других треугольников, после чего снова попадаем в треугольник Δ. Тогда $p'+p''=p-1$. Обозначим через L_j, $j=0,1,2,3,4$, симплициальный комплекс, полученный из комплекса L после j первых бизвездных преобразований цикла $\alpha_6(L,x,y,z,u,v)$ (в частности, $L_0=L$). Обозначим через $L_j^{(1)}$ симплициальный комплекс, полученный из симплициального комплекса L_j при бизвездном преобразовании, ассоциированном с треугольником Δ. Рассмотрим граф G с множеством вершин $\{L_0,\dots,L_4,L_0^{(1)},\dots,L_4^{(1)}\}$: для любого j соединим вершины L_j и $L_j^{(1)}$ ребром, соответствующим бизвездному преобразованию, ассоциированному с треугольником Δ, для любого j соединим вершину L_j с вершиной L_{j+1} (или L_0, если $j=4$) ребром, соответствующим $(j+1)$-му бизвездному преобразованию в цикле $\alpha_6(L,x,y,z,u,v)$, аналогично соединим ребром вершину $L_j^{(1)}$ с вершиной $L_{j+1}^{(1)}$ (или $L_0^{(1)}$, если $j=4$). Граф G естественным образом отображается в граф Γ_2 (но это отображение не обязательно является вложением). При этом граф G изоморфен 1-остову пятиугольной призмы. Обход вокруг каждой ее грани индуцирует цикл в графе Γ_2. Таким образом получаются циклы $\alpha_6(L,x,y,z,u,v)$, $-\alpha_6(L_0^{(1)},x,y,z,u,v)$, $\alpha_2(L_0,\Delta,\{x,z\})$, $\alpha_2(L_1,\Delta,\{u,x\})$, $\alpha_2(L_2,\Delta,\{y,u\})$, $\alpha_2(L_3,\Delta,\{v,y\})$, $\alpha_2(L_4,\Delta,\{z,v\})$. Сумма всех этих циклов гомологична нулю. Следовательно,

$$\theta(p,q,r,k,l)-\theta(p+1,q,r,k,l)-\rho(p',p''+1)+\rho(p'+1,p'')=0.$$

Значит,

$$\theta(p+1,q,r,k,l)-\theta(p,q,r,k,l)=-\frac{2\lambda}{(p+2)(p+3)(p+4)}\,.$$

Кроме того, функция θ симметрична относительно циклических перестановок переменных. Для доказательства предложения осталось заметить, что для любого натурального j верно равенство

$$\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(j+1)(j+2)}\,.$$

Предложение 3.13. *Константа b_2 из предложения 3.11 равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную образующую

$$\bar{\alpha}_6(L,x,y,z,u,v)\in\mathcal{S}_6(p,q,r,k,l),\qquad p,q,r,k,l\geqslant 3.$$

Обозначим через Δ треугольник, отличный от $\{x, y, z\}$, примыкающий к ребру $\{x, y\}$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 3.12, получим формулу

$$\begin{aligned}\theta(p+1, q+1, r, k, l) &- \theta(p, q, r, k, l) \\ &= -\frac{2\lambda}{(p+2)(p+3)(p+4)} - \frac{2\lambda}{(q+2)(q+3)(q+4)} - b_2.\end{aligned}$$

Следовательно, $b_2 = 0$.

Следующие два предложения доказываются так же, как предложение 3.12.

Предложение 3.14. *Существует рациональная константа b_3 такая, что для любых натуральных $p, q, r \geqslant 3$ выполнено равенство*

$$\eta(p, q, r) = \frac{\lambda}{(p+2)(p+3)} - \frac{\lambda}{(q+2)(q+3)} + \frac{\lambda}{(r+2)(r+3)} + b_3.$$

Предложение 3.15. *Существует рациональная константа b_4 такая, что для любых натуральных $p, q, r, k \geqslant 3$ выполнено равенство*

$$\begin{aligned}\zeta(p, q, r, k) = \frac{\lambda}{(p+2)(p+3)} &- \frac{\lambda}{(q+2)(q+3)} \\ &- \frac{\lambda}{(r+2)(r+3)} + \frac{\lambda}{(k+2)(k+3)} + b_4.\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную образующую

$$\bar{\alpha}_6(L, x, y, z, u, v) \in \mathcal{S}_6(p, q, r, k, l), \qquad p, q, r, k, l \geqslant 2.$$

Обозначим через Δ треугольник, отличный от $\{x, y, z\}$, примыкающий к ребру $\{x, y\}$. Обозначим через $L^{(1)}$ симплициальный комплекс, получающийся из симплициального комплекса L с помощью бизвездного преобразования, ассоциированного с треугольником Δ. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 3.13, получим формулу

$$\begin{aligned}c\bigl(\bar{\alpha}_6\bigl(L, x, y, z, u, v\bigr)\bigr) &- c\bigl(\bar{\alpha}_6\bigl(L^{(1)}, x, y, z, u, v\bigr)\bigr) \\ &= \frac{2\lambda}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \frac{2\lambda}{(q+2)(q+3)(q+4)}\,.\end{aligned}$$

Из этой формулы легко следует, что для любых $p, q, r, k, l \geqslant 2$ функция c постоянна на множестве $\mathcal{S}_6(p, q, r, k, l)$ и верна формула из предложения 3.12. Аналогично, для любых $p, q, r \geqslant 2$ $(p, q, r, k \geqslant 2)$ функция c постоянна на множестве $\mathcal{S}_4(p, q, r)$ $(\mathcal{S}_5(p, q, r, k))$ и верна формула из предложения 3.14 (предложения 3.15). Формула из предложения 3.14 верна также для $p = q = r = 1$.

Очевидно, что $\eta(1, 1, 1) = 0$ и $\zeta(2, 2, 2, 2) = 0$. Значит, $b_3 = -\frac{\lambda}{12}$ и $b_4 = 0$. Несложно проверить, что $\theta(2, 2, 2, 2, 2) = -5\eta(2, 2, 2) = \frac{\lambda}{6}$. Значит, $b_5 = -\frac{\lambda}{12}$.

Таким образом, $c(\bar{\alpha}) = \lambda c_0(\bar{\alpha})$ для любой образующей $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}$.

3.5. Константа λ. Итак, $s^*(\varphi) = \lambda c_0$ для некоторого рационального числа λ. Докажем, что $\lambda = 1$. Для этого достаточно проверить, что формула из следствия 3.3 верна для какого-нибудь одного ориентированного комбинаторного многообразия с ненулевым первым числом Понтрягина.

В работах [16], [17] построена триангуляция K комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ с девятью вершинами. Линки всех вершин триангуляции K изоморфны одной и той же триангуляции трехмерной сферы L с восьмью вершинами. Триангуляция L является одной из двух триангуляций 3-мерной сферы с восьмью вершинами, которые не могут быть реализованы в виде границы выпуклого симплициального многогранника (см. [18]). Вершины триангуляции L можно пронумеровать числами от 1 до 8 так, что ее максимальные симплексы будут задаваться следующими наборами вершин (порядок вершин в каждом из этих симплексов выбран так, чтобы комплексная проективная плоскость с соответствующей ориентацией имела сигнатуру $+1$):

1243	3476	5386	7165
1237	3465	4285	1785
1276	4576	4875	1586
2354	2385	4817	1682
2376	2368	4371	1284

Рассмотрим следующую последовательность из девяти бизвездных преобразований, переводящую триангуляцию L в границу четырехмерного симплекса:

1) заменим три симплекса 1243, 1237 и 4371 на два симплекса 1247 и 3274;
2) заменим три симплекса 2354, 2385 и 4285 на два симплекса 2384 и 3584;
3) заменим три симплекса 7165, 1785 и 1586 на два симплекса 1786 и 5687;
4) заменим три симплекса 1786, 1682 и 1276 на два симплекса 1278 и 6287;
5) заменим четыре симплекса 1247, 1278, 1284 и 4817 на один симплекс 2487;
6) заменим три симплекса 3274, 2384 и 2487 на два симплекса 2387 и 3487;
7) заменим четыре симплекса 2387, 6287, 2376 и 2368 на один симплекс 6387;
8) заменим три симплекса 3465, 5386 и 3584 на два симплекса 4386 и 5486;
9) заменим четыре симплекса 4386, 6387, 3476 и 3487 на один симплекс 6487.

Используя эту последовательность бизвездных преобразований, формулу из следствия 3.3 можно проверить непосредственным вычислением.

Следствие 3.4. *Пусть f – произвольная локальная формула, представляющая класс когомологий φ. Тогда $f(L) = \frac{1}{3}$.*

§ 4. Знаменатели значений локальных формул

Пусть $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ – локальная формула. Выясним, как растут знаменатели значений $f(L)$ с ростом числа вершин триангуляции L. Так же, как в п. 3.2, обозначим через $\mathcal{T}_{n,l}$ множество всех ориентированных триангуляций $(n-1)$-мерной сферы, имеющих не более l вершин. Обозначим через $\operatorname{den}_l(f)$ наименьшее общее кратное знаменателей всех значений $f(L)$, где $L \in \mathcal{T}_{n,l}$.

4.1. Оценка сверху. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ – произвольный класс когомологий. Тогда существуют локальная формула f, представляющая класс ψ, и натуральная константа b такие, что число $\operatorname{den}_l(f)$ делит $b(l+1)!$ для любого l.*

Доказательство. По теореме 2.2 существует гомоморфизм $p \in \operatorname{Hom}(\Omega_n, \mathbb{Q})$ такой, что $\star(\psi) = p$. Соответствующий характеристический класс блочных расслоений также обозначим через p. Построим функции g, h, f_1 и локальную формулу f, представляющую класс когомологий ψ так же, как это было сделано в п. 2.3. Существует натуральная константа b_1 такая, что характеристический класс $b_1 p$ лежит в образе естественного гомоморфизма $H^n(\widetilde{\mathrm{BPL}}_n; \mathbb{Z}) \to H^n(\widetilde{\mathrm{BPL}}_n; \mathbb{Q})$. Тогда функция g может быть выбрана так, что $b_1 g(J)$ – целое число для любой вполне упорядоченной триангуляции J диска размерности n. Следовательно, знаменатель значения $f(L) = \frac{h(CL)-h(-CL)}{2}$ делит $2b_1(l+1)!$ для любой $L \in \mathcal{T}_{n,l}$.

4.2. Оценка снизу. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть f – произвольная локальная формула, представляющая образующую φ группы $H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$. Тогда число $\operatorname{den}_l(f)$ делится на наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, l-3$ для любого четного $l \geqslant 10$.*

Доказательство. Пусть $l = 2k$. Рассмотрим выпуклый $(l-5)$-угольник с вершинами $v_1, \dots, v_{l-5}$. Пусть L_0 – произвольная триангуляция этого $(l-5)$-угольника, множество вершин которой совпадает с множеством $\{v_1, \dots, v_{l-5}\}$. Добавим к триангуляции L_0 вершину v_0 и треугольники $\{v_0, v_1, v_2\}$, $\{v_0, v_2, v_3\}, \dots$ $\dots, \{v_0, v_{l-5}, v_1\}$. Получим триангуляцию L двумерной сферы. Ориентируем ее так, чтобы треугольник $\{v_0, v_1, v_2\}$ был положительно ориентированным. Пусть $\alpha = \alpha_1(L, \{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_{k-2}, v_{k-1}\})$. Тогда $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}_1^1(k-4, k-3)$. Значит,

$$c_0(\bar{\alpha}) = \frac{1}{(l-5)(l-4)(l-3)}\,.$$

Пусть $\widehat{c}_0 = s(f)$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ – бизвездные преобразования, образующие цикл α. Тогда

$$\sum_{i=1}^{4} f(L_{\beta_i}) = \sum_{i=1}^{4} \widehat{c}_0(e_{\beta_i}) = c_0(\bar{\alpha}).$$

Значит, наименьшее общее кратное знаменателей чисел $f(L_{\beta_i})$ делится на $(l-5) \times (l-4)(l-3)$. Легко проверить, что $L_{\beta_i} \in \mathcal{T}_{4,l}$. Следовательно, $\operatorname{den}_l(f)$ делится на $(l-5)(l-4)(l-3)$ для любого четного $l \geqslant 10$. Очевидно, что $\operatorname{den}_l(f)$ делится на $\operatorname{den}_m(f)$ для любого $m < l$. Поэтому $\operatorname{den}_l(f)$ делится на наименьшее общее кратное чисел $5, 6, \dots, l-3$ для любого четного $l \geqslant 10$. Осталось доказать, что $\operatorname{den}_{10}(f)$ делится на 4.

Пусть L – триангуляция двумерной сферы с семью вершинами $v_0, v_1, \dots, v_6$, состоящая из треугольников $\{v_0, v_1, v_6\}$, $\{v_1, v_2, v_6\}$, $\{v_2, v_0, v_6\}$, $\{v_0, v_2, v_3\}$, $\{v_0, v_3, v_4\}$, $\{v_0, v_4, v_5\}$, $\{v_0, v_5, v_1\}$, $\{v_1, v_5, v_4\}$, $\{v_2, v_1, v_4\}$ и $\{v_3, v_2, v_4\}$. Тогда $c_0(\bar{\alpha}_4(L, v_0, v_1, v_2)) = \eta(4,3,3) = -\frac{5}{84}$. Следовательно, если β_1, β_2 и β_3 – бизвездные преобразования, образующие цикл $\alpha_4(L, v_0, v_1, v_2)$, то наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(L_{\beta_i})$, $i = 1, 2, 3$, делится на 4. Осталось заметить, что $L_{\beta_i} \in \mathcal{T}_{4,10}$, $i = 1, 2, 3$.

4.3. Локальные формулы с коэффициентами в подгруппах группы $\mathbb{Q}$. Очевидно, что $\mathcal{T}^1(G) = 0$ и $\mathcal{T}^2(G) = 0$ для любой группы G, не содержащей элементов порядка 2. Согласно следствию 3.1 в группе $\mathcal{T}^3(\mathbb{Q})$ нет ненулевых локальных формул. Поэтому для любой подгруппы $G \subset \mathbb{Q}$ в группе $\mathcal{T}^3(G)$ нет ненулевых локальных формул.

ТЕОРЕМА 4.3. *Имеет место равенство $H^4(\mathcal{T}^*(G)) = 0$ для любой собственной подгруппы $G \subset \mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.2 следует, что если $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ – локальная формула, не являющаяся кограницей, то для любого натурального числа q найдется натуральное число l такое, что $\mathrm{den}_l(f)$ делится на q. Следовательно, если $f \in \mathcal{T}^4(G)$ – локальная формула, то $f = \delta g$ для некоторой функции $g \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$. Осталось доказать, что $g \in \mathcal{T}^4(G)$. Имеем $s(f) = dg \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathbb{Q})$. Поскольку $f \in \mathcal{T}^4(G)$, значение коцепи $s(f) = dg$ на любом ребре графа Γ_2 является элементом группы G. Следовательно, $g \in \mathcal{T}^4(G)$.

§ 5. Разбиения на простые клетки

В этом параграфе, если не оговорено противное, под полиэдром всегда понимается компактный полиэдр, под многообразием – компактное многообразие, быть может, с краем. Через L' будем обозначать барицентрическое подразделение симплициального комплекса L.

5.1. $\mathcal{D}$-структуры. Пусть L – произвольная триангуляция $(n-1)$-мерной сферы. Пусть $\tau \neq \varnothing$ – симплекс триангуляции L. Обозначим через Q_τ полный подкомплекс комплекса L', натянутый на барицентры всех симплексов $\sigma \supseteq \tau,\ \sigma \in L$. Полагаем $Q_\varnothing = CL'$. Заметим, что $\dim Q_\tau = n - 1 - \dim \tau$ (считаем, что $\dim \varnothing = -1$). Подмножества Q_τ задают разбиение симплициального комплекса CL' на замкнутые грани. Симплициальный комплекс CL' с таким разбиением на грани будем называть *простой клеткой* Q, двойственной триангуляции сферы L. Триангуляцию CL' клетки Q будем называть *барицентрическим подразделением простой клетки* Q. При этом вершину конуса CL' будем называть *барицентром простой клетки* Q; вершину триангуляции L', являющуюся барицентром симплекса $\tau \in L$, будем также называть *барицентром грани* Q_τ. Очевидно, что грань Q_τ – это простая клетка, двойственная триангуляции $\mathrm{Lk}\,\tau$.

Если L – граница выпуклого симплициального многогранника, то Q – двойственный простой многогранник. В частности, симплекс Δ^n и куб I^n являются простыми клетками.

Под простой клеткой всегда понимается простая клетка, двойственная некоторой триангуляции сферы. *Изоморфизмом двух простых клеток* называется изоморфизм их барицентрических подразделений, сохраняющий разбиение на грани. Несложно проверить, что две простые клетки, двойственные триангуляциям L_1 и L_2, изоморфны тогда и только тогда, когда триангуляции L_1 и L_2 изоморфны. Будем склеивать простые клетки по изоморфизмам их граней. Разрешим склеивать две простые клетки по нескольким граням, но запретим производить склейки, при которых происходит отождествление различных вершин одной и той же простой клетки. Пространство, склеенное таким образом из простых клеток, будем называть *комплексом из простых клеток.* Очевидным образом определяются барицентрические подразделения и изоморфизмы комплексов из простых клеток.

Определение 5.1. *Разбиением полиэдра P на простые клетки* называется комплекс K из простых клеток с заданным гомеоморфизмом $P \cong K$ (обычно полиэдр P будет отождествляться с пространством K). Два разбиения полиэдра P на простые клетки называются *изоморфными*, если они отличаются на изоморфизм комплекса K. Далее, если не оговорено противное, под разбиением понимается разбиение на простые клетки.

Пусть P – полиэдр, Y – его разбиение на простые клетки. Если подмножество $R \subset P$ является объединением нескольких клеток разбиения Y, то соответствующее разбиение полиэдра R на простые клетки будем называть *ограничением разбиения Y на подмножество R*.

Определение 5.2. Два разбиения Y_1 и Y_2 полиэдра P на простые клетки называются *эквивалентными*, если существует разбиение X полиэдра $P \times [0,1]$ на простые клетки, ограничение которого на полиэдр $P \times \{0\}$ изоморфно разбиению Y_1, а на полиэдр $P \times \{1\}$ – разбиению Y_2.

Будем обозначать через $D(P)$ множество разбиений полиэдра P на простые клетки, через $\mathcal{D}(P)$ – множество классов эквивалентности разбиений полиэдра P. Класс эквивалентности разбиений полиэдра P на простые клетки будем называть *$\mathcal{D}$-структурой* на полиэдре P.

Будем обозначать через $\dim_x P$ локальную размерность полиэдра P в точке x. Далее нам понадобится следующее предложение. Оно будет доказано в п. 5.2.

Предложение 5.1. *Пусть P_1, P_2 – полиэдры такие, что $\dim_y P_2 \geqslant \dim P_1$ для любой точки $y \in P_2$. Пусть $Y_2 \in D(P_2)$, $R \subset P_1$ – замкнутое кусочно линейное подмножество, $X \in D(R)$. Пусть $h\colon P_1 \to P_2$ – непрерывное отображение, переводящее каждую клетку разбиения X изоморфно на некоторую клетку разбиения Y_2. Тогда существуют разбиение $Y_1 \in D(P_1)$ и непрерывное отображение $g\colon P_1 \to P_2$ такие, что*:

1) *разбиение X является ограничением разбиения Y_1*;

2) *отображение g гомотопно h, при этом гомотопия тождественна на R*;

3) *g отображает каждую клетку разбиения Y_1 изоморфно на некоторую клетку разбиения Y_2.*

Пусть P_1 и P_2 – полиэдры с разбиениями Y_1 и Y_2 соответственно. Назовем *прямым произведением* разбиений Y_1 и Y_2 разбиение $Y_1 \times Y_2 \in D(P_1 \times P_2)$, клетками которого являются произведения клеток разбиения Y_1 на клетки разбиения Y_2. Очевидно, что если заменить разбиения Y_1 и Y_2 на эквивалентные, то разбиение $Y_1 \times Y_2$ тоже заменится на эквивалентное. Значит, корректно определено прямое произведение $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_1 \times P_2)$ двух $\mathcal{D}$-структур $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{D}(P_1)$ и $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_2)$.

Пусть $h\colon P_1 \to P_2$ – непрерывное отображение. Определим отображение индуцирования $h^*\colon \mathcal{D}(P_2) \to \mathcal{D}(P_1)$ следующим образом. Рассмотрим произвольную $\mathcal{D}$-структуру $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_2)$. Пусть n – произвольное натуральное число такое, что $\dim_y(P_2 \times I^n) \geqslant \dim P_1$ для любой точки $y \in P_2 \times I^n$. Выберем произвольное разбиение $Y_2 \in \mathcal{Y}_2$. Из предложения 5.1 следует, что существуют разбиение $Y_1 \in D(P_1)$ и отображение $g\colon P_1 \to P_2 \times I^n$, гомотопное отображению $h \times \mathrm{pt}\colon P_1 \to P_2 \times I^n$, такие, что g отображает каждую клетку разбиения Y_1 изоморфно на некоторую клетку разбиения $Y_2 \times I^n$. Обозначим класс эквивалентности разбиения Y_1 через $h^*\mathcal{Y}_2$ и назовем его *$\mathcal{D}$-структурой, индуцированной отображением* h.

Предложение 5.2. *$\mathcal{D}$-структура $h^*\mathcal{Y}_2$ зависит только от $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y}_2$ и отображения h и не зависит от выбора разбиения Y_2, числа n и отображения g.*

Доказательство. Пусть, выбирая вместо разбиения Y_2, числа n и отображения g соответственно разбиение $\widetilde{Y}_2$, число $\widetilde{n}$ и отображение $\widetilde{g}$, мы получим разбиение $\widetilde{Y}_1 \in D(P_1)$. Докажем, что разбиения Y_1 и $\widetilde{Y}_1$ эквивалентны. Прежде всего, всегда можно вложить стандартным образом полиэдр $P_2 \times I^n$ в полиэдр $P_2 \times I^m$, где $m > n$. При этом построенное разбиение Y_1 не изменится. Поэтому можно считать, что $n = \widetilde{n} \geqslant \dim P_1 + 1$.

Разбиения Y_2 и $\widetilde{Y}_2$ эквивалентны. Значит, существует разбиение X_2 полиэдра $P_2 \times I^n \times [0,1]$, ограничения которого на подмножества $P_2 \times I^n \times \{0\}$ и $P_2 \times I^n \times \{1\}$ изоморфны соответственно разбиениям Y_2 и $\widetilde{Y}_2$. Пусть $G\colon P_1 \times [0,1] \to P_2 \times I^n$ – гомотопия между отображениями g и $\widetilde{g}$. Определим отображение $\widehat{G}\colon P_1 \times [0,1] \to P_2 \times I^n \times [0,1]$ по формуле $\widehat{G}(x,t) = (G(x,t),t)$. Разобьем множество $P_1 \times \{0\}$ с помощью разбиения Y_1 и множество $P_1 \times \{1\}$ с помощью разбиения $\widetilde{Y}_1$. Применив предложение 5.1 к полиэдру $P_1 \times [0,1]$, его подмножеству $P_1 \times \{0\} \sqcup P_1 \times \{1\}$ и отображению $\widehat{G}$, получим, что существует разбиение $X_1 \in D(P_1 \times [0,1])$, ограничения которого на подмножества $P_1 \times \{0\}$ и $P_1 \times \{1\}$ изоморфны соответственно разбиениям Y_1 и $\widetilde{Y}_1$. Следовательно, разбиения Y_1 и $\widetilde{Y}_1$ эквивалентны.

Очевидно, что отображение h^* не изменяется при гомотопии отображения h. Легко проверить, что если $h_1\colon P_1 \to P_2$ и $h_2\colon P_2 \to P_3$ – непрерывные отображения, то $(h_2 \circ h_1)^* = h_1^* \circ h_2^*$.

Определим прямую сумму $\mathcal{D}$-структур $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P)$ по формуле

$$\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2 = d^*(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2),$$

где $d\colon P \hookrightarrow P \times P$ – диагональное вложение.

Триангуляция полиэдра является частным случаем разбиения на простые клетки. Любые две триангуляции полиэдра P эквивалентны, так как любая триангуляция полиэдра $P \times \{0\} \sqcup P \times \{1\}$ продолжается до триангуляции полиэдра $P \times [0,1]$. Таким образом, в множестве $\mathcal{D}(P)$ есть выделенный элемент $\mathcal{E}_P$, отвечающий триангуляциям полиэдра P. Очевидно, что $h^*\mathcal{E}_{P_2} = \mathcal{E}_{P_1}$ для любого непрерывного отображения $h\colon P_1 \to P_2$. В п. 5.3 будет показано, что $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{E}_P = \mathcal{Y}$ для любого $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$. Множество $\mathcal{D}(P)$ является абелевой полугруппой относительно прямой суммы. Элемент $\mathcal{E}_P$ является нулем этой полугруппы. Будем называть разбиение полиэдра P на простые клетки *тривиальным*, если оно эквивалентно триангуляции.

5.2. Доказательство предложения 5.1. Рассмотрим сначала случай $(P_1, R) \cong (D^n, S^{n-1})$. Из того, что $\dim_y P_2 \geqslant \dim P_1$ для любой точки $y \in P_2$, следует, что отображение h можно заменить на кусочно линейное отображение h_1 такое, что:

1) h_1 гомотопно h, причем гомотопия постоянна на R;

2) $h_1(P_1)$ лежит в n-мерном остове разбиения Y_2;

3) h_1 является локальным гомеоморфизмом с образом на открытом всюду плотном подмножестве полиэдра P_1.

Выберем триангуляции J_1 и J_2 полиэдров P_1 и P_2 соответственно так, чтобы отображение h_1 было симплициальным. Выберем триангуляцию K_2 полиэдра P_2, являющуюся общим прямолинейным подразделением триангуляций J_2 и Y_2', такую, что ее ограничение на каждую n-мерную клетку Q разбиения Y_2 является симплициальным комплексом K_Q, изоморфным некоторому прямолинейному подразделению симплекса Δ^n. Перейдем к подразделению K_1 триангуляции J_1 такому, чтобы отображение h_1 было симплициальным по отношению к паре триангуляций (K_1, K_2). Тогда h_1 отображает каждый симплекс триангуляции K_1 линейно на некоторый симплекс триангуляции K_2 той же размерности.

Для каждой n-мерной клетки Q разбиения Y_2 обозначим $(n-1)$-мерный остов комплекса K_Q через L_Q. Реализуем клетку Q в виде геометрического симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ так, что все симплексы триангуляции K_Q будут реализованы в виде геометрических симплексов. Выберем точку o, лежащую во внутренности симплекса Δ^n, такую, что o не лежит ни в одной из плоскостей, содержащих симплексы триангуляции L_Q. Обозначим через $\pi\colon |L_Q| \to \partial\Delta^n$ центральную проекцию из точки o. Пусть $\widetilde{L}_Q$ – такое подразделение триангуляции L_Q, что образ каждого симплекса триангуляции $\widetilde{L}_Q$ при отображении π лежит в некоторой гиперграни симплекса Δ^n. Обозначим через $\widetilde{\pi}\colon |\widetilde{L}_Q| \to \partial\Delta^n$ псевдорадиальную проекцию из точки o (определение см. в [6]). Тогда, в отличие от отображения π, отображение $\widetilde{\pi}$ будет кусочно линейным.

Определим кусочно линейное отображение $t\colon \Delta^n \to \Delta^n$ такое, что $t|_{|L_Q|} = \widetilde{\pi}$, следующим образом. Пусть τ_0 – n-мерный симплекс триангуляции K_Q, во внутренности которого лежит точка o. В качестве ограничения отображения t на симплекс τ_0 возьмем какое-нибудь продолжение гомеоморфизма $\widetilde{\pi}|_{\partial\tau_0}\colon \partial\tau_0 \to \partial\Delta^n$ до гомеоморфизма $\tau_0 \to \Delta^n$. Пусть теперь τ – произвольный n-мерный симплекс триангуляции K_Q, отличный от τ_0. Тогда граница симплекса τ делится на две части: $(\partial\tau)_-$ – замыкание множества всех точек $x \in \partial\tau$ таких, что отрезок с концами x и o не пересекает внутренности симплекса τ, и $(\partial\tau)_+$ – замыкание множества всех точек $x \in \partial\tau$ таких, что отрезок с концами x и o пересекает внутренность симплекса τ. Четверка $(\partial\tau, (\partial\tau)_-, (\partial\tau)_+, (\partial\tau)_- \cap (\partial\tau)_+)$ гомеоморфна стандартной четверке $(S^{n-1}, D_-^{n-1}, D_+^{n-1}, S^{n-2})$. Отображение $\widetilde{\pi}$ переводит каждое из множеств $(\partial\tau)_-$ и $(\partial\tau)_+$ гомеоморфно на некоторый замкнутый диск $B^n \subset \partial\Delta^n$. Пусть b_τ – барицентр симплекса τ. Обозначим через τ_- и τ_+ конусы с вершиной b_τ над множествами $(\partial\tau)_-$ и $(\partial\tau)_+$ соответственно. Полагаем $\tau_m = \tau_+ \cap \tau_-$. В качестве ограничения отображения t на подмножество τ_m выберем произвольный гомеоморфизм $\tau_m \to \overline{\partial\Delta^n \setminus B}$, совпадающий с $\widetilde{\pi}$ на $\partial\tau_m = (\partial\tau)_- \cap (\partial\tau)_+$. Тогда ограничение отображения t на каждое из множеств $\partial\tau_-$ и $\partial\tau_+$ является гомеоморфизмом этого множества с $\partial\Delta^n$. Возьмем в качестве ограничений отображения t на множества τ_- и τ_+ произвольные продолжения этих гомеоморфизмов до гомеоморфизмов $\tau_- \to \Delta^n$ и $\tau_+ \to \Delta^n$ соответственно.

Таким образом, мы получили кусочно линейное отображение $t\colon Q \to Q$, тождественное на ∂Q, которое отображает симплекс τ_0, а также каждое из множеств τ_- и τ_+ (для любого симплекса τ) гомеоморфно на всю клетку Q. Рассматривая такие отображения для всех клеток Q, получим отображение $t\colon \operatorname{Sk}^n Y_2 \to \operatorname{Sk}^n Y_2$, гомотопное тождественному и тождественное на $(n-1)$-мерном остове разбиения Y_2. Пусть ρ – произвольный n-мерный симплекс триангуляции K_1. Тогда отображение h_1 переводит симплекс ρ в некоторый симплекс τ триангуляции K_2, лежащий в некоторой клетке Q разбиения Y_2. Если $\tau \neq \tau_0$, то разбиение симплекса τ на две клетки τ_- и τ_+ индуцирует разбиение симплекса ρ на две клетки ρ_- и ρ_+. Произведя такое подразделение для всех симплексов $\rho \in K_1$, получим клеточное разбиение Y_1 полиэдра P_1. Композиция $g = t \circ h_1$ отображает каждую клетку этого разбиения гомеоморфно на некоторую клетку разбиения Y_2. Следовательно, разбиение Y_1 получает структуру разбиения на простые клетки. Легко проверить, что разбиение Y_1 и отображение g удовлетворяют всем требованиям предложения 5.1.

Если (P_1, R) – произвольная полиэдральная пара, то предложение легко доказывается индукцией по остовам полиэдра P_1.

5.3. Классифицирующее пространство $\mathcal{Z}$. *Нумерацией вершин простой клетки* Q будем называть инъекцию из множества вершин клетки Q в $\mathbb{Z}$. *Нумерацией вершин разбиения Y на простые клетки* будем называть отображение из множества вершин разбиения Y в $\mathbb{Z}$, ограничение которого на множество вершин любой клетки Q разбиения Y является инъекцией. *Изоморфизмом двух простых клеток с пронумерованными вершинами* будем называть их изоморфизм, сохраняющий нумерацию вершин. Иногда мы не будем различать простую клетку и ее класс изоморфизма.

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех классов изоморфизма n-мерных простых клеток с пронумерованными вершинами (здесь простые клетки не предполагаются ориентированными). Будем строить пространство $\mathcal{Z}$ последовательно по остовам. Нульмерный остов пространства $\mathcal{Z}$ – множество $\mathbb{Z}$. Множество n-мерных клеток пространства $\mathcal{Z}$ совпадает с множеством $\mathcal{P}_n$. При этом каждая простая клетка $Q \in \mathcal{P}_n$ приклеивается к $(n-1)$-мерному остову пространства $\mathcal{Z}$ так, что каждая ее гипергрань отображается изоморфно на соответствующую $(n-1)$-мерную клетку пространства $\mathcal{Z}$. Построенное разбиение пространства $\mathcal{Z}$ на простые клетки мы будем также обозначать через $\mathcal{Z}$.

Заметим, что при определении индуцированной $\mathcal{D}$-структуры в п. 5.1 условие, что P_2 является компактным полиэдром, несущественно. Поэтому для любого непрерывного отображения $h\colon P \to \mathcal{Z}$ корректно определена $\mathcal{D}$-структура $h^*\mathcal{Z} \in \mathcal{D}(P)$, не меняющаяся при гомотопии отображения h. Таким образом, определено естественное отображение $i_P\colon [P, \mathcal{Z}] \to \mathcal{D}(P)$.

Теорема 5.1. *Естественное отображение i_P является биекцией.*

Доказательство. Пусть $Y \in D(P)$ – произвольное разбиение. Пронумеруем его вершины произвольным образом. Полученное разбиение с пронумерованными вершинами обозначим через $\overline{Y}$. Рассмотрим отображение $g_{\overline{Y}}\colon P \to \mathcal{Z}$, переводящее каждую клетку разбиения $\overline{Y}$ изоморфно на соответствующую клетку пространства $\mathcal{Z}$. Тогда $g_{\overline{Y}}^*\mathcal{Z}$ – класс эквивалентности, содержащий разбиение Y. Значит, i_P – сюръекция.

Пусть $h_0, h_1 \colon P \to \mathcal{Z}$ – два отображения такие, что $h_0^*\mathcal{Z} = h_1^*\mathcal{Z} = \mathcal{Y}$. Из предложения 5.1 следует, что существуют разбиения $\overline{Y}_0, \overline{Y}_1 \in \mathcal{Y}$ с пронумерованными вершинами такие, что h_0 гомотопно $g_{\overline{Y}_0}$ и h_1 гомотопно $g_{\overline{Y}_1}$. Предположим, что номера всех вершин разбиения $\overline{Y}_0$ отличны от номеров вершин разбиения $\overline{Y}_1$. Тогда существует разбиение с пронумерованными вершинами $\overline{X} \in D(P \times [0,1])$, ограничения которого на подмножества $P \times \{0\}$ и $P \times \{1\}$ изоморфны разбиениям $\overline{Y}_0$ и $\overline{Y}_1$ соответственно. Отображение $g_{\overline{X}} \colon P \times [0,1] \to \mathcal{Z}$ является гомотопией между отображениями $g_{\overline{Y}_0}$ и $g_{\overline{Y}_1}$. Пусть теперь номер какой-нибудь вершины разбиения $\overline{Y}_0$ совпадает с номером какой-нибудь вершины разбиения $\overline{Y}_1$. Выбрав другую нумерацию вершин разбиения $\overline{Y}_0$, получим разбиение $\overline{Y}_2$ такое, что номер каждой вершины разбиения $\overline{Y}_2$ отличен от номеров всех вершин разбиений $\overline{Y}_0$ и $\overline{Y}_1$. Аналогично предыдущему случаю устанавливаем, что отображение $g_{\overline{Y}_2}$ гомотопно каждому из отображений $g_{\overline{Y}_0}$ и $g_{\overline{Y}_1}$. Итак, отображения h_0 и h_1 гомотопны. Значит, i_P – мономорфизм.

Для каждой $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$ обозначим через $g_{\mathcal{Y}}$ произвольное отображение из $i_P^{-1}(\mathcal{Y})$. Очевидно, что для любого полиэдра P отображение $g_{\mathcal{E}_P}$ гомотопно отображению в точку.

Каждому классу когомологий $\psi \in H^*(\mathcal{Z}; G)$ соответствует функция, сопоставляющая каждой $\mathcal{D}$-структуре $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$ класс когомологий $\psi(\mathcal{Y}) = g_{\mathcal{Y}}^*(\psi) \in H^*(P; G)$. Будем называть такую функцию *характеристическим классом* разбиений на простые клетки. Классы когомологий $\psi \in H^*(\mathcal{Z}; G)$ и $\psi(\mathcal{Y}) \in H^*(P; G)$ будем также называть *характеристическими классами* разбиений на простые клетки.

Пусть $\chi \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – произвольная инъекция. Пусть $\mu \colon \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ – отображение, при котором номера вершин преобразуются с помощью функции χ и клетки разбиения $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ отображаются изоморфно на клетки разбиения $\mathcal{Z}$. Легко проверить, что класс гомотопии отображения μ не зависит от функции χ. Очевидно, что если $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{D}(P_1)$ и $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_2)$, то

$$g_{\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2} \simeq \mu \circ (g_{\mathcal{Y}_1} \times g_{\mathcal{Y}_2}).$$

Значит, если $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P)$, то

$$g_{\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2} \simeq \mu \circ (g_{\mathcal{Y}_1} \times g_{\mathcal{Y}_2}) \circ d.$$

В частности, отсюда следует, что $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{E}_P = \mathcal{Y}$ для любой $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$.

5.4. Когомологии пространства $\mathcal{Z}$. Пусть Q – ориентированная клетка пространства $\mathcal{Z}$. Простая клетка Q двойственна некоторой триангуляции $L \in \mathcal{T}_n$. Соответствие $Q \mapsto L$ индуцирует гомоморфизм $\varkappa \colon H^*(\mathcal{T}^*(G)) \to H^*(\mathcal{Z}; G)$.

Предложение 5.3. *В случае $G = \mathbb{Q}$ гомоморфизм $\varkappa$ является изоморфизмом.*

Доказательство. *Разложением* клетки $Q \in \mathcal{P}_n$ назовем ее представление в виде $Q = Q_1 \times \Delta^k$, где Q_1 – простая клетка размерности $n-k$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{P}}_n$ множество всех классов изоморфизма n-мерных простых клеток с фиксированными нумерацией вершин и разложением, где под изоморфизмом понимается изоморфизм, сохраняющий нумерацию вершин и разложение. *Рангом* клетки

$Q \in \widehat{\mathcal{P}}_n$ назовем размерность соответствующей клетки Q_1. Так же, как по множеству $\mathcal{P}_*$ было построено пространство $\mathcal{Z}$, по множеству $\widehat{\mathcal{P}}_*$ можно построить пространство $\widehat{\mathcal{Z}}$. При этом существуют вложение $i\colon \mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{Z}}$, сопоставляющее каждой клетке Q разложение $Q = Q \times \Delta^0$, и ретракция $r\colon \widehat{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z}$, состоящая в забывании разложения.

Обозначим через Z^p объединение всех клеток $Q \in \widehat{\mathcal{P}}_*$, ранги которых не превосходят p. Множества Z^p задают фильтрацию пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$. Пусть $E_*^{*,*}$ – когомологическая спектральная последовательность этой фильтрации с коэффициентами в $\mathbb{Q}$.

Множество $Z^p \backslash Z^{p-1}$ не содержит клеток размерности меньше, чем p. Поэтому $E_1^{p,q} = 0$ при $q < 0$. Множество p-мерных клеток множества $Z^p \backslash Z^{p-1}$ состоит из всех клеток $Q \in \widehat{\mathcal{P}}_p$ с разложением $Q = Q \times \Delta^0$. Каждая такая ориентированная клетка является относительным циклом в $C_*(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$. Легко проверить, что два такие цикла представляют одинаковый класс гомологий в группе $H_*(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда соответствующие клетки изоморфны с сохранением ориентации, но, возможно, с изменением нумерации вершин. Следовательно, существует естественный изоморфизм $E_1^{p,0} = \mathcal{T}^p(\mathbb{Q})$. При этом дифференциал δ_1 совпадает с дифференциалом δ комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Значит, $E_2^{p,0} = H^p(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$.

Пусть $\alpha \in C_{p+q}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$, $q > 0$ – относительный цикл. Докажем, что существует целое число $m \neq 0$ такое, что $m\alpha$ – относительная граница. Цикл α представим в виде

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} l_j (Q_j \times \Delta_j^q),$$

где $l_j \in \mathbb{Z}$, $Q_j \times \Delta_j^q$ – ориентированные клетки пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$, имеющие ранг p. Если мы выберем в этой сумме все слагаемые, для которых клетки Q_j имеют одинаковый комбинаторный тип, то полученная цепь тоже будет относительным циклом. Поэтому можно считать, что все клетки Q_j имеют одинаковый комбинаторный тип. Пусть $Q = Q \times \Delta^0$ – какая-нибудь клетка пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$ с тем же комбинаторным типом, которая не пересекается ни с одной из клеток $Q_j \times \Delta_j^q$. Пусть m – порядок группы всех (в том числе изменяющих ориентацию и нумерацию вершин) автоморфизмов клетки Q. Для любого изоморфизма $h\colon Q_j \cong Q$ существует единственный способ натянуть на клетки $Q_j \times \Delta_j^q$ и Q клетку $\widetilde{Q}_{j,h} \cong Q \times \Delta^{q+1}$ ранга p. При этом ориентация клетки $\widetilde{Q}_{j,h}$ выбрана так, чтобы коэффициент инцидентности клеток $\widetilde{Q}_{j,h}$ и $Q_j \times \Delta_j^q$ был равен $+1$. Обозначим через $\gamma \in C_{p+q+1}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$ цепь, задаваемую по формуле

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h} l_j Q_{j,h},$$

где внутренняя сумма берется по всем изоморфизмам $h\colon Q_j \cong Q$. Легко проверить, что $\partial\gamma = m\alpha$. Таким образом, $H_{p+q}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$ – группа кручения при $q > 0$. Следовательно, по теореме об универсальных коэффициентах группа $E_1^{p,q} = H^{p+q}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Q})$ тривиальна при $q > 0$.

Таким образом, спектральная последовательность $E_*^{*,*}$ стабилизируется во втором члене. Значит, $H^*(\widehat{\mathcal{Z}};\mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \xrightarrow{\varkappa} H^*(\mathcal{Z};\mathbb{Q}) \xrightarrow{r^*} H^*(\widehat{\mathcal{Z}};\mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^*(\mathcal{Z};\mathbb{Q}).$$

Из доказанного выше следует, что $r^* \circ \varkappa$ – изоморфизм. Осталось заметить, что $i^* \circ r^*$ – тождественное отображение.

Замечание 5.1. Отображение $\mu\colon \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ задает коумножение в рациональных когомологиях пространства $\mathcal{Z}$. В п. 5.7 будет построено отображение $\mathcal{X}\colon \mathrm{BPL} \to \mathcal{Z}$, переводящее это коумножение в стандартное коумножение в рациональных когомологиях пространства BPL. Изоморфизм $\varkappa$ позволяет ввести структуры умножения и коумножения в когомологиях коцепного комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, и возникает задача о нахождении явных комбинаторных формул для определенных таким образом умножения и коумножения. Коумножение может быть определено на уровне коцепей комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ и задается явной формулой

$$a(f)(L_1 \otimes L_2) = f(L_1 * L_2).$$

Для умножения вопрос о явной формуле остается открытым.

Замечание 5.2. Пусть Q – простая клетка. Если точка $x \in Q$ лежит во внутренности симплекса триангуляции Q', вершинами которого являются барицентры клеток $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_k$, то будем говорить, что точка x имеет особенность, соответствующую комбинаторному типу клетки Q_1. Зададим разбиение пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$ на страты: будем считать, что точка $(x, y) \in Q \times \Delta^l$ имеет тот же тип особенности, что и точка $x \in Q$. Легко проверить, что страт, соответствующий комбинаторному типу простой клетки Q, гомотопически эквивалентен пространству $K(G(Q), 1)$, где $G(Q)$ – группа автоморфизмов клетки Q. Обычно в теории особенностей пространство, склеенное из пространств $K(G, 1)$, где G – группы симметрий особенностей, является классифицирующим пространством для соответствующей классификации особенностей (см., например, [19], [15]). Однако нам нужно классифицировать не все пространства, разбитые на страты, соответствующие комбинаторным типам простых клеток, а только те из них, которые получаются из разбиений на простые клетки. Поэтому неизвестно, является ли вложение $i\colon \mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{Z}}$ гомотопической эквивалентностью.

5.5. Двойственное разбиение.

Определение 5.3. Разбиение Y полиэдра P на простые клетки назовем *хорошим*, если пересечение любых двух замкнутых клеток разбиения Y либо пусто, либо является замкнутой клеткой разбиения Y. Два хороших разбиения Y_1 и Y_2 полиэдра P на простые клетки назовем *сильно эквивалентными*, если существует хорошее разбиение X полиэдра $P \times [0, 1]$ на простые клетки, ограничения которого на нижнее и верхнее основания цилиндра $P \times [0, 1]$ изоморфны разбиениям Y_1 и Y_2 соответственно.

Обозначим через $D_g(P)$ множество всех хороших разбиений полиэдра P на простые клетки, через $\mathcal{D}_g(P)$ – множество всех классов сильной эквивалентности хороших разбиений полиэдра P на простые клетки. Элементы множества $\mathcal{D}_g(P)$ будем называть *$\mathcal{D}_g$-структурами* на полиэдре P.

Пусть Y – хорошее разбиение полиэдра P на простые клетки, Q – какая-нибудь клетка этого разбиения. Рассмотрим частично упорядоченное множество $\mathcal{B}(Q)$, элементами которого являются клетки разбиения Y, содержащие клетку Q, упорядоченные по включению. Легко проверить, что частично упорядоченное множество $\mathcal{B}(Q)$ может быть реализовано как решетка граней (содержащая $\varnothing$) некоторого симплициального комплекса, который естественно называть линком клетки Q в разбиении Y и обозначать через $\operatorname{Lk} Q$ или $\operatorname{Lk}_Y Q$. Если Y – триангуляция полиэдра P, то такое определение линка совпадает со стандартным. Если P – многообразие без края, то $\operatorname{Lk} Q$ – триангуляция $(\dim P - \dim Q - 1)$-мерной сферы.

Пусть Y – хорошее разбиение многообразия без края M^m на простые клетки. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_t$ – вершины разбиения Y. Обозначим через Q_j^* замкнутую звезду вершины v_j в триангуляции Y'. Множества $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_t^*$ образуют разбиение многообразия M^m на замкнутые подмножества с непересекающимися внутренностями. На каждом множестве Q_j^* естественно определена структура простой клетки, двойственной триангуляции $\operatorname{Lk}_Y v_j$ сферы размерности $m-1$. Таким образом, разбиение многообразия M^m на множества Q_j^* является хорошим разбиением на простые клетки, которое мы будем называть разбиением, *двойственным* разбиению Y, и обозначать через Y^*. При этом, $(Y^*)' = Y'$. Каждой k-мерной клетке Q разбиения Y соответствует $(n-k)$-мерная клетка Q^* разбиения Y^*; при этом

$$Q^* = Q_{j_1}^* \cap Q_{j_2}^* \cap \dots \cap Q_{j_s}^*,$$

где $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_s}$ – все вершины клетки Q. Легко проверить, что Q^* – простая клетка, двойственная триангуляции $\operatorname{Lk} Q$.

Распространим теперь определение двойственного разбиения на несколько более общий случай. Пусть $\mathbb{R}_+$ – замкнутая полупрямая.

Определение 5.4. m-мерным *многообразием с углами* называется пара, состоящая из связного компактного полиэдра M^m и его фильтрации $\mathcal{F}$ замкнутыми подмножествами

$$\varnothing = F^{-1} \subset F^0 \subset F^1 \subset \ldots \subset F^m = M^m$$

таких, что для любой точки $y \in F^k \setminus F^{k-1}$ существуют окрестность U точки y в пространстве M^m и гомеоморфизм $i\colon U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^{n-k}$, который для любого l отображает множество $F^l \cap U$ на l-мерный остов пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^{n-k}$. Компоненты связности множества $F^k \setminus F^{k-1}$ называются *открытыми k-мерными гранями* этого многообразия с углами, их замыкания – *замкнутыми гранями*.

Пусть $(M^m, \mathcal{F})$ – многообразие с углами, Y – хорошее разбиение этого многообразия с углами на простые клетки, согласованное с фильтрацией $\mathcal{F}$, т. е. такое, что все подмножества $F^k \subset M^m$ являются подкомплексами разбиения Y. Пусть, как и раньше, Q_j^* – замкнутая звезда вершины v_j в триангуляции Y', где $v_1, v_2, \dots, v_t$ – вершины разбиения Y. Введем на каждом множестве Q_j^* структуру простой клетки, указав его гиперграни:

1) для любой вершины v_l, соединенной ребром разбиения Y с вершиной v_j, множество $Q_j^* \cap Q_l^*$ будет гипергранью клетки Q_j^*;

2) для любой компоненты связности A множества $Q_j^* \cap (F^{m-1} \setminus F^{m-2})$ множество $\bar{A}$ будет гипергранью клетки Q_j^*.

Несложно проверить, что такое разбиение границы клетки Q_j^* на гиперграни действительно корректно определяет на Q_j^* структуру простой клетки. Кроме того, структуры простых клеток на различных Q_j^* согласованы. Таким образом, мы получаем хорошее разбиение Y^* многообразия с углами $(M^m, \mathcal{F})$ на простые клетки, которое мы будем называть *двойственным разбиению* Y.

В дальнейшем везде, кроме п. 5.6, нас будет интересовать случай, когда M^m – многообразие, быть может, с краем, но без углов. В этом случае двойственное разбиение определено для любого хорошего разбиения на простые клетки, так как условие согласования с фильтрацией всегда выполнено. Далее, если не оговорено противное, под многообразием понимается многообразие без углов.

Предложение 5.4. *Пусть Y_1, Y_2 – сильно эквивалентные хорошие разбиения многообразия M^m на простые клетки. Тогда разбиения Y_1^* и Y_2^* сильно эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим хорошее разбиение X цилиндра $M^m \times [0,1]$ на простые клетки, ограничение которого на нижнее основание изоморфно разбиению Y_1, а на верхнее – разбиению Y_2. Цилиндр $M^m \times [0,1]$ имеет естественную структуру многообразия с углами, и разбиение X согласовано с соответствующей фильтрацией. Разбиение X^* – хорошее разбиение цилиндра $M^m \times [0,1]$ на простые клетки, ограничение которого на нижнее основание изоморфно разбиению Y_1^*, а на верхнее – разбиению Y_2^*. Значит, разбиения Y_1^* и Y_2^* сильно эквивалентны.

Таким образом, корректно определено отображение $*\colon \mathcal{D}_g(M^m) \to \mathcal{D}_g(M^m)$, переводящее каждую $\mathcal{D}_g$-структуру $\mathcal{Y}$ на многообразии M^m в некоторую другую $\mathcal{D}_g$-структуру $\mathcal{Y}^*$, о которой мы будем говорить, что она двойственна $\mathcal{D}_g$-структуре $\mathcal{Y}$.

5.6. Каноническое подразделение разбиения на простые клетки. Построим по произвольному разбиению на простые клетки Y его подразделение $\widehat{Y}$, которое является хорошим разбиением на простые клетки, эквивалентным разбиению Y.

Пусть Q – простая клетка. Тогда Q имеет естественную структуру многообразия с углами. Обозначим через $\widehat{Q}$ хорошее разбиение многообразия с углами Q на простые клетки, двойственное разбиению $Q' \in D(Q)$. Будем называть $\widehat{Q}$ *каноническим подразделением* простой клетки Q. Легко проверить, что ограничение разбиения $\widehat{Q}$ на любую грань клетки Q совпадает с каноническим подразделением этой грани. Пусть теперь Y – произвольное разбиение некоторого полиэдра P на простые клетки. Заменим каждую простую клетку разбиения Y на ее каноническое подразделение. Получим некоторое хорошее разбиение полиэдра P на простые клетки, которое мы будем называть *каноническим подразделением* разбиения Y и обозначать через $\widehat{Y}$.

Предложение 5.5. *Разбиения Y и $\widehat{Y}$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть L – триангуляция $(n-1)$-мерной сферы. Рассмотрим стандартную триангуляцию цилиндра $S^{n-1} \times [0,1]$, ограничение которой на нижнее основание изоморфно триангуляции L, а на верхнее – триангуляции L'.

Приклеим к нижнему основанию этого цилиндра диск D^n, триангулированный как конус с вершиной u_0 над симплициальным комплексом L, а к верхнему – диск D^n, триангулированный как конус с вершиной u_1 над симплициальным комплексом L'. Полученную триангуляцию сферы S^n будем обозначать через $\widetilde{L}$. Для удобства введем следующую терминологию: вершину u_0 будем называть *нижней* вершиной, вершины, лежащие в нижнем основании цилиндра $S^{n-1} \times [0,1]$, будем называть *средними* вершинами, а вершины, лежащие в верхнем основании цилиндра $S^{n-1} \times [0,1]$, и вершину u_1 будем называть *верхними* вершинами. Пусть v – произвольная вершина триангуляции L. Тогда v можно также понимать как соответствующую среднюю вершину триангуляции $\widetilde{L}$. Несложно проверить, что при этом $\operatorname{Lk}_{\widetilde{L}} v = \widetilde{\operatorname{Lk}_L v}$.

Пусть Q – простая клетка, двойственная триангуляции L. Рассмотрим простую клетку $\widetilde{Q}$, двойственную триангуляции $\widetilde{L}$. Гиперграни клетки $\widetilde{Q}$ будем называть *нижними*, *боковыми* и *верхними* в зависимости от того, соответствуют ли они нижним, средним или верхним вершинам триангуляции $\widetilde{L}$. Очевидно, что нижняя гипергрань клетки $\widetilde{Q}$ изоморфна клетке Q. Несложно проверить, что подкомплекс границы клетки $\widetilde{Q}$, составленный из всех верхних граней, изоморфен каноническому подразделению $\widehat{Q}$ клетки Q. Если Q_0 – гипергрань клетки Q, то соответствующая боковая гипергрань клетки $\widetilde{Q}$ будет изоморфна клетке $\widetilde{Q}_0$.

Пусть теперь $Y \in D(P)$ – разбиение на простые клетки, состоящее из клеток $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$. В разбиении Y каждая клетка Q_j приклеена своими гипергранями к клеткам Q_k на единицу меньшей размерности по некоторым изоморфизмам ι_{jk}. Аналогично можно каждую клетку $\widetilde{Q}_j$ приклеить ее боковыми гипергранями к клеткам $\widetilde{Q}_k$ на единицу меньшей размерности по изоморфизмам $\tilde{\iota}_{jk}$, индуцированным изоморфизмами ι_{jk}. В итоге получим разбиение $\widetilde{Y}$ цилиндра $P \times [0,1]$ на простые клетки, ограничение которого на нижнее основание изоморфно разбиению Y, а на верхнее – разбиению $\widehat{Y}$.

Следствие 5.1. *Если разбиение Y хорошее, то разбиения Y и $\widehat{Y}$ сильно эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если разбиение Y хорошее, то разбиение $\widetilde{Y}$ тоже будет хорошим.

Предложение 5.6. *Пусть Y_1 и Y_2 – эквивалентные хорошие разбиения полиэдра P на простые клетки. Тогда разбиения Y_1 и Y_2 сильно эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение $X \in D(P \times [0,1])$, ограничения которого на основания цилиндра $P \times [0,1]$ изоморфны разбиениям Y_1 и Y_2 соответственно. Тогда ограничения хорошего разбиения $\widehat{X} \in D_g(P \times [0,1])$ на основания цилиндра $P \times [0,1]$ изоморфны разбиениям $\widehat{Y}_1$ и $\widehat{Y}_2$ соответственно. Осталось заметить, что по следствию 5.1 разбиение Y_j сильно эквивалентно разбиению $\widehat{Y}_j$, $j = 1, 2$.

Из предложений 5.5 и 5.6 легко выводится следующее утверждение.

Следствие 5.2. *Естественное отображение $\mathcal{D}_g(P) \to \mathcal{D}(P)$ является биекцией.*

Таким образом, понятия $\mathcal{D}_g$-структуры и $\mathcal{D}$-структуры совпадают. Далее мы будем отождествлять множества $\mathcal{D}_g(P)$ и $\mathcal{D}(P)$.

Предложение 5.7. *Пусть M^m – многообразие. Тогда отображение $*\colon \mathcal{D}(P) \to \mathcal{D}(P)$ является инволюцией.*

Доказательство. Если M^m – многообразие без края, то $Y^{**} = Y$ для любого $Y \in D_g(M^m)$ и предложение очевидно. Пусть теперь M^m – многообразие с краем, $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(M^m)$. Пусть $Y \in D(M^m)$ – произвольное разбиение на простые клетки, представляющее $\mathcal{D}$-структуру $\mathcal{Y}$. Обозначим через N объединение всех замкнутых клеток разбиения $\widehat{Y}$, которые не пересекаются с краем многообразия M^m. Очевидно, что N – деформационный ретракт многообразия M^m. Значит, $i^*\colon \mathcal{D}(M^m) \to \mathcal{D}(N)$ – изоморфизм, где $i\colon N \hookrightarrow M^m$ – тождественное вложение. Ограничения разбиений $\widehat{Y}$ и $(\widehat{Y})^{**}$ на подмножество $N \subset M^m$ совпадают. Значит, $i^*(\mathcal{Y}) = i^*(\mathcal{Y}^{**})$. Следовательно, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^{**}$.

5.7. Связь с блочными расслоениями. Изложим здесь некоторые необходимые нам определения и результаты работы [8].

Пусть Y – разбиение полиэдра P на простые клетки Q_k, $k = 1, 2, \dots, t$. Блочное расслоение ξ^q/Y размерности q над разбиением Y – это пространство $E(\xi)$, покрытое замкнутыми шарами β_k, $k = 1, 2, \dots, t$, такое, что $P \subset E(\xi)$ и выполнены следующие условия:

1) β_k – это $(\dim Q_k + q)$-мерный шар, содержащий клетку Q_k, причем $\partial Q_k = Q_k \cap \partial\beta_k$ и (β_k, Q_k) – незаузленная пара шаров; шар β_k называется *блоком* над клеткой Q_k;

2) $E(\xi)$ – объединение блоков β_k;

3) внутренности блоков не пересекаются;

4) $\beta_k \cap \beta_l$ – объединение блоков над клетками подкомплекса $Q_k \cap Q_l$.

Замечание 5.3. На самом деле, в качестве Y можно взять, как это и сделано в [8], произвольное разбиение полиэдра P на замкнутые клетки (не обязательно простые) такое, что граница каждой клетки и пересечение любых двух клеток разбиения Y являются объединениями клеток разбиения Y.

Два блочных расслоения ξ_1 и ξ_2 над разбиением Y называются *изоморфными*, если существует тождественный на P гомеоморфизм $h\colon E(\xi_1) \to E(\xi_2)$, переводящий блоки расслоения ξ_1 в блоки расслоения ξ_2. Каждому подразделению Y_1 разбиения Y соответствует подразделение ξ_1/Y_1 блочного расслоения ξ/Y, единственное с точностью до изоморфизма. Пусть $Y_1, Y_2 \in D(P)$. Блочные расслоения ξ_1/Y_1 и ξ_2/Y_2 называются *эквивалентными*, если некоторые их подразделения изоморфны. Стандартным образом вводятся понятия индуцированного класса эквивалентности блочных расслоений, прямого произведения и прямой суммы классов эквивалентности блочных расслоений. Далее мы не будем различать блочное расслоение, его класс эквивалентности и, иногда, его класс стабильной эквивалентности. Для любого полиэдра P множество стабильных классов эквивалентности блочных расслоений над P обозначается через $I(P)$. Множество $I(P)$ является группой относительно операции прямой суммы. Пространство BPL является классифицирующим пространством для стабильных блочных расслоений, т. е. существует естественный изоморфизм $I(P) \cong [P, \mathrm{BPL}]$. Обозначим через ε_P^n тривиальное блочное расслоение над полиэдром P.

Если $N \subset M$ – локально плоское подмногообразие такое, что $N \cap \partial M = \partial N$, то существует единственное с точностью до эквивалентности нормальное блочное расслоение подмногообразия $N \subset M$, т.е. блочное расслоение ν над N такое, что $E(\nu) \subset M$. Нормальное блочное расслоение диагонали $M \subset M \times M$ называется *касательным блочным расслоением* многообразия M. Если ξ – блочное расслоение над многообразием M, то $E(\xi)$ – тоже многообразие.

Целью этого пункта является построение естественного отображения $\mathcal{X}\colon I(P) \to \mathcal{D}(P)$. Определим его сначала для многообразий.

Пусть M – многообразие. Чтобы избежать путаницы, будем обозначать отображение $*\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ через $*_M$. Пусть ξ – блочное расслоение над многообразием M. Обозначим через $i\colon M \to E(\xi)$ тождественное вложение, через $r\colon E(\xi) \to M$ ретракцию. Обозначим через $*_\xi$ инволюцию $i^* *_{E(\xi)} r^*\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$. Обозначим через λ_ξ отображение $*_M *_\xi\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$. $\mathcal{D}$-структуру

$$\lambda_\xi(\mathcal{E}_M) = *_M i^* *_{E(\xi)} \mathcal{E}_{E(\xi)} \in \mathcal{D}(M)$$

обозначим через $\mathcal{X}(\xi)$.

Замечание 5.4. В некоторых случаях это определение имеет простой геометрический смысл. Пусть $\partial M = \varnothing$, $\dim M = m$. Предположим, что существует триангуляция K пространства $E(\xi)$ такая, что подмногообразие $M \subset E(\xi)$ лежит в m-мерном остове двойственного разбиения K^*. Тогда пересечение многообразия M с каждым симплексом триангуляции K имеет естественную структуру простой клетки. Очевидно, что разбиение $X \in D(M)$, составленное из таких простых клеток, будет лежать в классе эквивалентности $\mathcal{X}(\xi)$. К сожалению, в общем случае определить $\mathcal{D}$-структуру $\mathcal{X}(\xi)$ таким образом не удается, так как не всегда можно найти такую триангуляцию K.

Если M_1, M_2 – многообразия, $Y_1 \in D(M_1)$, $Y_2 \in D(M_2)$, то $(Y_1 \times Y_2)^* = Y_1^* \times Y_2^*$. Поэтому если ξ_1 и ξ_2 – блочные расслоения над многообразиями M_1 и M_2 соответственно, $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{D}(M_1)$ и $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(M_2)$, то

$$*_{\xi_1 \times \xi_2}(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2) = *_{\xi_1}(\mathcal{Y}_1) \times *_{\xi_2}(\mathcal{Y}_2). \qquad (*)$$

Поскольку $\xi \oplus \varepsilon^n_M = \xi \times \varepsilon^n_{\mathrm{pt}}$ для любого блочного расслоения ξ над многообразием M, то инволюция $*_\xi$ зависит только от класса стабильной эквивалентности блочного расслоения ξ. Из этого утверждения и из формулы $(*)$ сразу вытекает следующее предложение.

Предложение 5.8. *Для блочных расслоений над многообразиями верны формулы*

$$\mathcal{X}(\xi_1 \times \xi_2) = \mathcal{X}(\xi_1) \times \mathcal{X}(\xi_2), \qquad \mathcal{X}(\xi \oplus \varepsilon^n_M) = \mathcal{X}(\xi), \qquad \mathcal{X}(\varepsilon^n_M) = \mathcal{E}_M.$$

Таким образом, для любого многообразия M корректно определено отображение $\mathcal{X}\colon I(M) \to \mathcal{D}(M)$.

Предложение 5.9. *Пусть M, N –многообразия, $h\colon M \to N$ – непрерывное отображение, ω – блочное расслоение над N. Тогда*

$$h^*\mathcal{X}(\omega) = \mathcal{X}(h^*\omega).$$

Для доказательства этого предложения нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 5.10. *Пусть M_1, M_2 – многообразия одинаковой размерности, $i\colon M_1 \hookrightarrow M_2$ – вложение. Тогда*

$$i^* *_{M_2} = *_{M_1} i^*.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 5.7.

Следствие 5.3. *Пусть выполнены условия предыдущего предложения и $\xi \in I(M_2)$. Тогда*

$$i^* *_\xi = *_{i^*\xi} i^*.$$

Предложение 5.11. *Пусть ξ и η – блочные расслоения над многообразием M, τ – касательное блочное расслоение над M. Тогда*

$$*_{\xi\oplus\eta\oplus\tau} = *_{\xi\oplus\tau} *_\tau *_{\eta\oplus\tau}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(M)$. Из формулы $(*)$ непосредственно следует, что

$$*_{\xi\times\eta}(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2) = *_{\xi\times M} *_{M\times M} *_{M\times\eta}(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2).$$

Пусть $i_1\colon M \hookrightarrow E(\tau)$, $i_2\colon E(\tau) \hookrightarrow M \times M$ – тождественные вложения, $r\colon E(\tau) \to M$ – ретракция. Используя следствие 5.3, получим

$$*_{i_2^*(\xi\times\eta)}(i_2^*(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)) = *_{i_2^*(\xi\times M)} *_{E(\tau)} *_{i_2^*(M\times\eta)}(i_2^*(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)).$$

Очевидно, что $E(\omega\oplus\tau) = E(r^*\omega)$ для любого блочного расслоения ω над многообразием M. Значит, $*_{r^*\omega} = r^* *_{\omega\oplus\tau} i_1^*$. Заметим, что

$$\begin{aligned} i_2^*(\xi\times\eta) &= r^*(\xi\oplus\eta), & i_2^*(\xi\times M) &= r^*\xi, \\ i_2^*(M\times\eta) &= r^*\eta, & i_1^* i_2^*(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2) &= \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$*_{\xi\oplus\eta\oplus\tau}(\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2) = *_{\xi\oplus\tau} *_\tau *_{\eta\oplus\tau}(\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2).$$

Следствие 5.4. *Имеем $\lambda_{\xi\oplus\eta} = \lambda_\xi\lambda_\eta$, т. е. $*_{\xi\oplus\eta} = *_\xi *_M *_\eta$.*

Доказательство. Пусть $\nu = -\tau$ в группе $I(M)$, т.е. ν – класс стабильной эквивалентности нормального расслоения вложения $M \hookrightarrow \mathbb{R}^q$. Подставляя $\xi = \nu$ в формулу из предложения 5.11, получим, что $*_\eta = *_M *_\tau *_{\eta\oplus\tau}$, т.е. $*_{\eta\oplus\tau} = *_\tau *_M *_\eta$. Аналогично, $*_{\xi\oplus\tau} = *_\tau *_M *_\xi$ и $*_{\xi\oplus\eta\oplus\tau} = *_\tau *_M *_{\xi\oplus\eta}$. Подставляя эти выражения в формулу из предложения 5.11, получим доказываемое утверждение.

Доказательство предложения 5.9. Можно считать, что отображение h кусочно линейное и $h(\partial M) = h(M) \cap \partial N$. Тогда его можно представить в виде композиции $M \hookrightarrow N \times D^q \to N$, где первое отображение – вложение, а второе – проекция на первый сомножитель. Согласно результатам Зимана [20] любое подмногообразие коразмерности не менее трех является локально плоским. Поэтому, выбрав q достаточно большим, можно добиться того, чтобы вложение $M \hookrightarrow N \times D^q$ имело нормальное блочное расслоение ξ. Получаем представление отображения h в виде композиции

$$M \xrightarrow{h_1} E(\xi) \xrightarrow{h_2} N \times D^q \xrightarrow{h_3} N.$$

Предложение достаточно доказать для каждого из отображений h_1, h_2 и h_3. Для отображений h_2 и h_3 доказываемое утверждение сразу следует из следствия 5.3 и предложения 5.8 соответственно. Докажем, что $h_1^*\mathcal{X}(\omega) = \mathcal{X}(h_1^*\omega)$ для любого блочного расслоения $\omega \in I(E(\xi))$. Пусть $r\colon E(\xi) \to M$ – ретракция. Поскольку отображение r является гомотопической эквивалентностью, то блочное расслоение ω эквивалентно некоторому блочному расслоению вида $r^*\eta$, где η – блочное расслоение над M. Тогда

$$h_1^*\mathcal{X}(\omega) = h_1^* *_{E(\xi)} *_{r^*\eta}\mathcal{E}_{E(\xi)} = (h_1^* *_{E(\xi)} r^*)(h_1^* *_{r^*\eta} r^*)\mathcal{E}_M = *_\xi *_{\xi\oplus\eta} \mathcal{E}_M,$$

$$\mathcal{X}(h_1^*\omega) = *_M *_\eta \mathcal{E}_M.$$

Таким образом, доказываемое утверждение вытекает из следствия 5.4.

Предложение 5.12. *Пусть M – многообразие, τ – его касательное блочное расслоение, $\nu = -\tau$. Тогда $\mathcal{X}(\nu) = \mathcal{E}_M^*$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое вложение $i\colon M \hookrightarrow \Delta^q$ такое, что $i(M) \cap \partial\Delta^q = i(\partial M)$ и $q \geqslant \dim M + 3$. Тогда ν – нормальное расслоение подмногообразия $i(M) \subset \Delta^q$. Вложение i разлагается в композицию двух вложений $i_1\colon M \hookrightarrow E(\nu)$ и $i_2\colon E(\nu) \hookrightarrow \Delta^q$. Значит,

$$\mathcal{X}(\nu) = *_M *_\nu \mathcal{E}_M = *_M i_1^* *_{E(\nu)} \mathcal{E}_{E(\nu)} = *_M i^* *_{\Delta^q} \mathcal{E}_{\Delta^q} = *_M i^*\mathcal{E}_{\Delta^q} = \mathcal{E}_M^*.$$

Здесь использовано, что $\mathcal{E}_{\Delta^q}^* = \mathcal{E}_{\Delta^q}$. Это верно, так как симплекс Δ^q стягиваем и, следовательно, $\mathcal{D}(\Delta^q) = \{\mathcal{E}_{\Delta^q}\}$.

Пусть теперь P – произвольный полиэдр. Выберем вложение $i\colon P \hookrightarrow M$ такое, что $i(P)$ является деформационным ретрактом многообразия M. Пусть $r\colon M \to P$ – ретракция. Положим $\mathcal{X}(\xi) = i^*\mathcal{X}(r^*\xi)$ для любого $\xi \in I(P)$. Из предложения 5.9 следует, что $\mathcal{D}$-структура $\mathcal{X}(\xi)$ не зависит от выбора многообразия M и вложения i.

Следствие 5.5. *Для блочных расслоений над произвольными полиэдрами верны формулы*

$$\mathcal{X}(\varepsilon_P^n) = \mathcal{E}_P, \qquad h^*\mathcal{X}(\xi) = \mathcal{X}(h^*\xi),$$

$$\mathcal{X}(\xi \times \eta) = \mathcal{X}(\xi) \times \mathcal{X}(\eta), \qquad \mathcal{X}(\xi_1 \oplus \xi_2) = \mathcal{X}(\xi_1) \oplus \mathcal{X}(\xi_2).$$

Таким образом, отображение $\mathcal{X}$ является естественным преобразованием функтора $I(\,\cdot\,)$ в функтор $\mathcal{D}(\,\cdot\,)$, т. е. функтора $[\,\cdot\,,\mathrm{BPL}]$ в функтор $[\,\cdot\,,\mathcal{Z}]$. Следовательно, оно индуцирует определенное однозначно с точностью до гомотопии отображение $\mathrm{BPL}\to\mathcal{Z}$, которое мы также будем обозначать через $\mathcal{X}$.

Пусть $\psi\in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ – произвольный класс когомологий. Тогда $\varkappa(\psi)\in H^n(\mathcal{Z};\mathbb{Q})$ – характеристический класс разбиений на простые клетки, $\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))\in H^n(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$ – характеристический класс стабильных блочных расслоений. С другой стороны, $\sharp(\psi)\in H^n(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$ – тоже характеристический класс стабильных блочных расслоений (см. п. 2.3). Обозначим через $w\colon H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})\to H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$ автоморфизм, переводящий каждый класс Понтрягина p_k в класс когомологий $\widetilde{p}_k\in H^{4k}(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$, где классы $\widetilde{p}_k$ определяются равенством

$$(1+p_1+p_2+\dots)\smile(1+\widetilde{p}_1+\widetilde{p}_2+\dots)=1.$$

Несложно проверить, что w – инволюция. Для любого класса когомологий $p\in H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$ и любого блочного расслоения ξ верна формула $w(p)(\xi)=p(-\xi)$.

Предложение 5.13. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) & \xrightarrow[\cong]{\varkappa} & H^*(\mathcal{Z};\mathbb{Q}) \\ {\scriptstyle\sharp}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathcal{X}^*}\big\downarrow \\ H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\cong]{w} & H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q}) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть M^m – многообразие без края, τ – его касательное блочное расслоение. Пусть K – триангуляция многообразия M^m, f – локальная формула, представляющая класс когомологий ψ. Из предложения 5.12 следует, что

$$\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))(-\tau)=\varkappa(\psi)(\mathcal{E}^*_{M^m}).$$

Поэтому класс когомологий $\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))(-\tau)\in H^n(M^m;\mathbb{Q})$ может быть представлен коцепью c, значение которой на любой простой клетке разбиения K^*, двойственной триангуляции $L\in\mathcal{T}_n$, равно $f(L)$. С другой стороны, класс когомологий $\psi^\sharp(M^m)=\sharp(\psi)(\tau)$ может быть представлен той же коцепью c. Значит, $\sharp(\psi)(\tau)=\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))(-\tau)$. Следовательно, $\sharp(\psi)(\tau)=w(\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi)))(\tau)$. Осталось заметить, что рациональный характеристический класс полностью определяется своими значениями на касательных расслоениях к замкнутым многообразиям.

В п. 2.3 было доказано, что $\sharp$ – эпиморфизм. Поэтому $\mathcal{X}^*$ – эпиморфизм. В п. 5.8 будет доказано, что $\mathcal{X}^*$ – изоморфизм. Следующее утверждение дает способ локального вычисления класса когомологий $p(\xi)$, $\xi\in I(P)$, если известно какое-нибудь разбиение $X\in\mathcal{X}(\xi)$.

Следствие 5.6. *Класс когомологий $p(\xi)$ может быть представлен коцепью, принимающей значение $f(L)$ на каждой клетке разбиения X, двойственной триангуляции $L\in\mathcal{T}_n$, где $f\in\mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ – локальная формула, представляющая класс когомологий $\varphi_{w(p)}$.*

5.8. Мономорфность отображения $\star$ для рациональных коэффициентов. Докажем вначале одно вспомогательное утверждение.

Предложение 5.14. *Пусть P^q – полиэдр размерности q, $K \in D(P^q)$ – какое-нибудь тривиальное разбиение, M^n – многообразие без края, $Y \in D(M^n)$ – произвольное разбиение. Пусть $i\colon M^n \hookrightarrow P^q$ – вложение, переводящее барицентр каждой l-мерной клетки разбиения Y в барицентр некоторой $(l+q-n)$-мерной клетки разбиения K и отображающее каждый симплекс триангуляции Y' линейно на некоторый симплекс триангуляции K'. Тогда существует блочное расслоение $\eta \in I(M^n)$ такое, что $\mathcal{X}(\eta)$ – класс эквивалентности, содержащий разбиение Y.*

Доказательство. Заметим, что вложение i переводит барицентр каждой l-мерной клетки разбиения $\widehat{Y}$ в барицентр некоторой $(l+q-n)$-мерной клетки разбиения $\widehat{K}$ и отображает каждый симплекс триангуляции $(\widehat{Y})'$ линейно на некоторый симплекс триангуляции $(\widehat{K})'$. Обозначим через N^q объединение всех замкнутых клеток разбиения $\widehat{K}$, пересекающих подмножество $i(M^n) \subset P^q$. Пусть K_1 – ограничение разбиения $\widehat{K}$ на подмножество $N^q \subset P^q$. Образ каждой l-мерной клетки Q_k разбиения $\widehat{Y}$ при отображении i лежит в некоторой $(l+q-n)$-мерной клетке β_k разбиения $\widehat{K}$. Легко проверить, что клетки β_k образуют блочное расслоение η над разбиением $\widehat{Y}$ такое, что $E(\eta) = N^q$. Осталось заметить, что K_1 – тривиальное разбиение и отображение i переводит каждую клетку разбиения $(\widehat{Y})^*$ изоморфно на некоторую клетку разбиения K_1^*.

Предложение 5.15. *Гомоморфизм $\mathcal{X}^* \circ \varkappa$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ – ненулевой класс когомологий, $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ – представляющая его локальная формула. Поскольку f не кограница, то существует набор триангуляций $L_1, L_2, \ldots, L_t \in \mathcal{T}_n$ такой, что $\sum_{j=1}^t \partial L_j = 0$ в группе $\mathcal{T}_n(\mathbb{Z})$ и $\sum_{j=1}^t f(L_j) = a \neq 0$. Пусть q – такое натуральное число, что количество вершин каждой триангуляции L_j не превосходит $q+1$. Обозначим через Q_j ориентированную простую клетку, двойственную триангуляции L_j. Удвоив, если нужно, набор триангуляций $L_1, L_2, \ldots, L_t$, можно считать, что гиперграни клеток $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ разбиты на пары такие, что гиперграни в каждой паре антиизоморфны и принадлежат разным клеткам Q_j и Q_k.

Пусть $\Delta_1^q, \Delta_2^q, \ldots, \Delta_t^q$ – набор q-мерных симплексов (на этих симплексах не задано никакой ориентации). Вложим клетку Q_j в симплекс Δ_j^q так, чтобы барицентр каждой l-мерной грани клетки Q_j переходил в барицентр некоторой $(l+q-n)$-мерной грани симплекса Δ_j^q и вложение было линейно на симплексах триангуляции Q_j'. Такое вложение единственно с точностью до автоморфизма симплекса Δ_j^q. Рассмотрим набор из $q+1$ цветов. Раскрасим вершины каждого симплекса из набора Δ_j^q в разные цвета всеми возможными способами. Получим набор симплексов $\Delta_{j,\alpha}^q$, $j = 1, 2, \ldots, t$, $\alpha \in S_{q+1}$, с вложенными в них простыми клетками $Q_{j,\alpha}$.

Назовем гипергрань симплекса $\Delta_{j,\alpha}^q$ *важной*, если в нее вложена некоторая гипергрань клетки $Q_{j,\alpha}$. Изоморфизм двух важных гиперграней симплексов $\Delta_{j,\alpha}^q$ и $\Delta_{k,\beta}^q$ назовем *допустимым*, если он сохраняет цвета вершин и его ограничение является антиизоморфизмом соответствующих гиперграней клеток $Q_{j,\alpha}$ и $Q_{k,\beta}$. Важные гиперграни симплексов $\Delta_{j,\alpha}^q$ можно разбить на пары такие, что:

1) каждая пара содержит гиперграни двух разных симплексов;

2) для каждой пары существует допустимый изоморфизм входящих в нее гиперграней.

Склеим каждую такую пару важных гиперграней вдоль допустимого изоморфизма. Получим некоторый полиэдр. Простые клетки $Q_{j,\alpha} \subset \Delta^q_{j,\alpha}$ склеятся между собой так, что получится ориентированное псевдомногообразие N^n с фиксированным разбиением $Y \in D(N^n)$. При этом

$$\langle \varkappa(\psi)(\mathcal{Y}), [N^n] \rangle = a(q+1)! \neq 0,$$

где $\mathcal{Y}$ – класс эквивалентности разбиения Y.

Существуют ориентированное многообразие без края M^n и отображение $h\colon M^n \to N^n$ такие, что $h_*([M^n]) = b[N^n]$ для некоторого целого числа $b \neq 0$. Из предложения 5.1 следует, что существуют отображение $g \simeq h$ и разбиение $Y_0 \in D(M^n)$ такие, что g отображает каждую клетку разбиения Y_0 изоморфно (возможно, с изменением ориентации) на некоторую клетку разбиения Y. Обозначим через Σ множество n-мерных клеток разбиения Y_0. Для каждой n-мерной клетки разбиения Y задано ее вложение в q-мерный симплекс с раскрашенными вершинами. Следовательно, для каждой клетки $Q \in \Sigma$ мы тоже получаем ее вложение в q-мерный симплекс Δ^q_Q с раскрашенными в разные цвета вершинами.

Рассмотрим несвязное объединение симплексов Δ^q_Q. Будем склеивать гиперграни вложенных в них клеток $Q \in \Sigma$ так, чтобы получить разбиение Y_0. Одновременно будем склеивать соответствующие важные гиперграни симплексов Δ^q_Q по допустимым изоморфизмам. В результате мы получим q-мерный полиэдр $P^q \supset M^n$ с выделенным разбиением K, все клетки которого являются симплексами. Тождественное вложение $M^n \hookrightarrow P^q$ переводит барицентр каждой l-мерной клетки разбиения Y_0 в барицентр некоторого $(l+q-n)$-мерного симплекса разбиения K и линейно на симплексах триангуляции Y_0'. Заметим, что разбиение K тривиально, так как соответствующее отображение $P^q \to \mathcal{Z}$ гомотопно отображению в точку. Значит, по предложению 5.14 существует блочное расслоение $\eta \in I(M^n)$ такое, что $\mathcal{X}(\eta) = \mathcal{Y}_0$, где $\mathcal{Y}_0$ – класс эквивалентности разбиения Y_0. Тогда

$$\langle \mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))(\eta), [M^n] \rangle = \langle \varkappa(\psi)(\mathcal{Y}_0), [M^n] \rangle = b\langle \varkappa(\psi)(\mathcal{Y}), [N^n] \rangle \neq 0.$$

Значит, $\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi)) \neq 0$.

Таким образом, гомоморфизм $\star\colon H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \mathrm{Hom}(\Omega_*, \mathbb{Q})$ является мономорфизмом, что завершает доказательство теоремы 2.2.

5.9. Полугруппа $\mathcal{D}(P)$. Из результатов пп. 5.1–5.8 следует, что $\mathcal{D}$-структуры обладают многими свойствами, похожими на свойства стабильных расслоений. Множество всех стабильных расслоений над компактным полиэдром является группой.

Вопрос 5.1. *Верно ли, что полугруппа $\mathcal{D}(P)$ является группой для любого компактного полиэдра P?*

Достаточно найти ответ на этот вопрос для многообразий, так как полугруппа $\mathcal{D}(P)$ – гомотопический инвариант. Пусть M – многообразие и $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(M)$. Несложно проверить, что класс эквивалентности $(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^*)^*$ содержит кубическое разбиение, клетками которого являются пересечения клеток разбиения $Y \in \mathcal{Y}$ с клетками разбиения Y^*. В связи с этим возникает следующий вопрос.

Вопрос 5.2. *Верно ли, что любое кубическое разбиение тривиально*?

Если ответ на вопрос 5.2 утвердительный, то $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^* \oplus \mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}_M$ для любой $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(M)$ и, следовательно, ответ на вопрос 5.1 также утвердительный. Оба эти вопроса остаются открытыми.

5.10. Доказательство предложения 2.3.

Определение 5.5. Пусть M^n – многообразие без края. *Правильным* разбиением многообразия M^n на многообразия с углами называется его фильтрация $\mathcal{F}$ замкнутыми подмножествами $\varnothing = F^{-1} \subset F^0 \subset \dots \subset F^n = M^n$ такая, что:

1) для любой компоненты связности V множества $F^k \backslash F^{k-1}$ пара $(\overline{V}, \mathcal{F}|_{\overline{V}})$ является многообразием с углами;

2) для любой точки $y \in F^k \backslash F^{k-1}$ существуют окрестность U точки y в многообразии M^n и гомеоморфизм $i\colon U \to \mathbb{R}^k \times \partial(\mathbb{R}_+^{n-k+1})$, который для любого l отображает множество $F^l \cap U$ на l-мерный остов пространства $\mathbb{R}^k \times \partial(\mathbb{R}_+^{n-k+1})$.

Замыкания компонент связности множества $F^k \backslash F^{k-1}$ будем называть *k-мерными гранями разбиения* $\mathcal{F}$. Иногда, если понятно о каком разбиении идет речь, мы будем говорить просто о гранях многообразия M^n.

Фильтрация

$$\varnothing = F^{-1} = F^0 = F^1 = \dots = F^{n-1} \subset F^n = M^n$$

задает правильное разбиение многообразия M^n на многообразия с углами, n-мерными гранями которого являются компоненты связности многообразия M^n.

Для любых $l \leqslant k \leqslant n$ определен стандартный гомеоморфизм

$$\mathbb{R}^l \times \partial\bigl(\mathbb{R}_+^{k-l+1}\bigr) \times \mathbb{R}_+^{n-k} \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^{n-k}.$$

Поэтому на пространстве $\mathbb{R}^l \times \partial\bigl(\mathbb{R}_+^{k-l+1}\bigr) \times \mathbb{R}_+^{n-k}$ определены две фильтрации: фильтрация $\mathcal{G}_{l,k,n}$ остовами пространства $\mathbb{R}^l \times \partial\bigl(\mathbb{R}_+^{k-l+1}\bigr) \times \mathbb{R}_+^{n-k}$ и фильтрация $\mathcal{F}_{l,k,n}$ остовами пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^{n-k}$. При этом $F_{l,k,n}^q \subset G_{l,k,n}^q$ для любого q.

Определение 5.6. Разбиение Y многообразия с углами $(A, \mathcal{F})$ на простые клетки будем называть *правильным*, если фильтрация $\mathcal{F}$ и фильтрация $\mathcal{G}$ остовами разбиения Y удовлетворяют следующему свойству: если $x \in F^k \backslash F^{k-1}$ и $x \in G^l \backslash G^{l-1}$, то $k \geqslant l$ и существуют окрестность U точки x в многообразии с углами A и гомеоморфизм $i\colon U \to \mathbb{R}^l \times \partial\bigl(\mathbb{R}_+^{k-l+1}\bigr) \times \mathbb{R}_+^{n-k}$, переводящий фильтрации $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в фильтрации $\mathcal{F}_{l,k,n}$ и $\mathcal{G}_{l,k,n}$ соответственно.

Несложно проверить, что если $K \in D(A)$ – триангуляция, согласованная с фильтрацией, то K^* – правильное разбиение.

В этом пункте будем предполагать, что для всех многообразий с углами фиксированы их правильные разбиения на простые клетки. Под изоморфизмом многообразий с углами будем понимать изоморфизм соответствующих комплексов из простых клеток, сохраняющий фильтрацию. Если рассматривается разбиение многообразия M^n на многообразия с углами, то предполагается, что многообразия с углами склеены по изоморфизмам их гиперграней. Эти предположения нужны для того, чтобы вместо бесконечного множества гомеоморфизмов двух многообразий с углами рассматривать конечное множество изоморфизмов этих многообразий с углами.

Если L – триангуляция сферы, то для любого ее симплекса определена операция звездного подразделения этого симплекса. Двойственную операцию для простых клеток назовем операцией *срезания грани*. Пусть $\mathcal{F}$ – правильное разбиение многообразия M^n на многообразия с углами, A^k – грань этого разбиения ($k < n$), являющаяся замкнутым многообразием без углов. Для каждой n-мерной грани разбиения $\mathcal{F}$ задано ее правильное разбиение на простые клетки, и все эти разбиения согласованы. Таким образом, получаем разбиение $Y \in D(M^n)$ такое, что A^k является подкомплексом этого разбиения. Для каждой пары простых клеток (Q_1^k, Q_2^n) разбиения Y таких, что $Q_1^k \subset A^k$ и $Q_1^k \subset Q_2^n$, срежем грань Q_1^k в клетке Q_2^n. Произведенную операцию назовем *операцией срезания* грани A^k. Топологически она эквивалентна вырезанию окрестности $A^k \times \Delta^{n-k}$ грани A^k из многообразия M^n.

Для любого ориентированного многообразия с углами A обозначим через $-A$ многообразие с углами, получающееся из A заменой ориентации. Разбиение ориентированного многообразия M^n на многообразия с углами назовем *сбалансированным*, если для любого многообразия с углами A количество n-мерных граней этого разбиения, изоморфных A с сохранением ориентации, равно количеству n-мерных граней этого разбиения, изоморфных $-A$ с сохранением ориентации.

Разбиение на простые клетки, двойственное любой триангуляции многообразия без края, является правильным разбиением на многообразия с углами. Поэтому предложение 2.3 является прямым следствием следующего предложения.

Предложение 5.16. *Если ориентированное многообразие M^n допускает сбалансированное правильное разбиение на многообразия с углами, то несвязная сумма нескольких экземпляров многообразия M^n бордантна нулю.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – фильтрация многообразия M^n, задающая сбалансированное правильное разбиение на многообразия с углами. Пусть k – наименьшее число такое, что $F^k \neq \varnothing$. Будем вести доказательство с помощью обратной индукции по k.

База индукции. Предположим, что $k = n$. Тогда n-мерные грани разбиения $\mathcal{F}$ – связные компоненты многообразия M^n. Значит, для любого связного ориентированного многообразия N^n количество компонент связности многообразия M^n, гомеоморфных N^n с сохранением ориентации, равно количеству компонент связности многообразия M^n, гомеоморфных $-N^n$ с сохранением ориентации. Значит, многообразие $M^n \sqcup M^n$ бордантно нулю.

Индукционный переход. Прежде всего, переобозначим многообразие $M^n \sqcup M^n$ через M^n. Теперь n-мерные грани многообразия M^n могут быть разбиты на пары антиизоморфных. Если A_1 и A_2 – две n-мерные грани, $i\colon A_1 \to A_2$ – антиизоморфизм, то i может быть продолжен до гомеоморфизма $\tilde{\imath}$ некоторых окрестностей граней A_1 и A_2, сохраняющего фильтрацию $\mathcal{F}$. Пусть q – количество n-мерных граней многообразия M^n. Рассмотрим набор из q цветов. Количество способов раскрасить n-мерные грани многообразия M^n в разные цвета равно $q!$. Обозначим через M_1^n несвязную сумму $q!$ экземпляров многообразия M^n, в каждом из которых n-мерные грани раскрашены в разные цвета так, что каждый способ раскраски использован только один раз. Обозначим через $\mathcal{F}_1$ фильтрацию многообразия M_1^n, совпадающую с фильтрацией $\mathcal{F}$ на каждом экземпляре многообразия M^n. Тогда n-мерные грани многообразия M_1^n могут быть разбиты на пары (A_l^-, A_l^+), $l = 1, 2, \ldots, t$, такие, что для любой пары (A_l^-, A_l^+) фиксирован антиизоморфизм $i_l \colon A_l^- \to A_l^+$, который продолжается до гомеоморфизма некоторых окрестностей граней A_l^- и A_l^+, сохраняющего фильтрацию и цвета.

Очевидно, что существует хотя бы один изоморфизм $j \colon F_1^k \to F_1^k$ такой, что:

1) $j^2 = 1$;

2) если B – компонента связности множества F_1^k, то $j(B) \cap B = \varnothing$;

3) изоморфизм j продолжается до гомеоморфизма окрестностей множества F_1^k, сохраняющего фильтрацию и цвета и меняющего ориентацию.

Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_s$ – все различные изоморфизмы, удовлетворяющие этим условиям. Обозначим через M_2^n несвязную сумму s экземпляров многообразия M_1^n. Обозначим через $\mathcal{F}_2$ фильтрацию многообразия M_2^n, совпадающую с фильтрацией $\mathcal{F}_1$ на каждом экземпляре многообразия M_1^n. Точками многообразия M_2^n являются пары (y, l), $y \in M_1^n$, $l = 1, 2, \ldots, s$. Определим изоморфизм $\hat{\jmath} \colon F_2^k \to F_2^k$ по формуле $\hat{\jmath}(y, l) = (j_l(y), l)$. Этот изоморфизм продолжается до гомеоморфизма окрестностей множества F_2^k, сохраняющего фильтрацию и цвета и меняющего ориентацию.

Срежем все k-мерные грани разбиения $\mathcal{F}_2$ многообразия M_2^n. Многообразие M_2^n превратится в многообразие, граница которого изоморфна $F_2^k \times \Delta^{n-k}$. Изоморфизм $\hat{\jmath}$ индуцирует инволютивный антиизоморфизм $F_2^k \times \Delta^{n-k} \to F_2^k \times \Delta^{n-k}$ без неподвижных точек, сохраняющий фильтрацию и цвета. Произведем склейку вдоль этого антиизоморфизма. Получим замкнутое многообразие M_3^n, бордантное многообразию M_2^n. Фильтрация $\mathcal{F}_2$ многообразия M_2^n индуцирует фильтрацию $\mathcal{F}_3$ многообразия M_3^n, задающую правильное разбиение на многообразия с углами, которое не содержит k-мерных граней.

Докажем, что получившееся разбиение многообразия M_3^n сбалансированно. Выберем какой-нибудь цвет c. Пусть $M_{1,c}^n$, $M_{2,c}^n$ и $M_{3,c}^n$ – объединения всех n-мерных граней цвета c многообразий M_1^n, M_2^n и M_3^n соответственно. Обозначим через $i_c \colon M_{1,c}^n \to M_{1,c}^n$ антиизоморфизм, совпадающий с i_l на каждой грани $A_l^- \subset M_{1,c}^n$ и с i_l^{-1} на каждой грани $A_l^+ \subset M_{1,c}^n$. Продолжим изоморфизм

$$i_c\big|_{F_1^k \cap M_{1,c}^n} \colon F_1^k \cap M_{1,c}^n \to F_1^k \cap M_{1,c}^n$$

до изоморфизма $\chi_c \colon F_1^k \to F_1^k$, который отображает множество $F_1^k \setminus (F_1^k \cap M_{1,c}^n)$ тождественно на себя. Очевидно, что $\chi_c^2 = 1$ и изоморфизм χ_c продолжается до гомеоморфизма окрестностей множества F_1^k, сохраняющего фильтрацию и цвета. Для каждого l изоморфизм $\chi_c \circ j_l \circ \chi_c$ удовлетворяет условиям 1)–3) из определения изоморфизмов $j_1, j_2, \ldots, j_s$. Значит, существует натуральное число $\kappa_c(l)$ такое, что $\chi_c \circ j_l \circ \chi_c = j_{\kappa_c(l)}$. Очевидно, что $\kappa_c \colon \{1, 2, \ldots, s\} \to \{1, 2, \ldots, s\}$ – инволюция. Определим антиизоморфизм $\hat{\imath}_c \colon M_{2,c}^n \to M_{2,c}^n$ по формуле

$$\hat{\imath}_c(y, l) = (i_c(y), \kappa_c(l)).$$

Легко проверить, что $\hat{\imath}_c(\hat{\jmath}(y, l)) = \hat{\jmath}(\hat{\imath}_c(y, l))$ для любой точки $(y, l) \in M_{2,c}^n \cap F_2^k$. Поэтому антиизоморфизм $\hat{\imath}_c$ индуцирует антиизоморфизм $M_{3,c}^n \cong M_{3,c}^n$. Следовательно, разбиение $\mathcal{F}_3\big|_{M_{3,c}^n}$ сбалансированно. В силу произвольности выбора цвета c получаем, что разбиение $\mathcal{F}_3$ многообразия M_3^n сбалансированно. Следовательно, по индукционному предположению несвязная сумма нескольких экземпляров многообразия M_3^n бордантна нулю, откуда следует доказываемое утверждение.

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановки задач и постоянное внимание к настоящей работе, а также Л. А. Алания, И. В. Баскакову, И. А. Дынникову, М. Э. Казаряну и А. С. Мищенко за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В.* Комбинаторное вычисление характеристических классов // Функцион. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. №2. 12–28; №3. С. 5–26.
2. *Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В.* Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. №1. С. 14–17.
3. *Gelfand I. M., MacPherson R. D.* A combinatorial formula for the Pontrjagin classes // Bulletin of the Amer. Math. Soc. 1992. V. 26. № 2. P. 304–309.
4. *Cheeger J.* Spectral geometry of singular Riemannian spaces // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. № 4. P. 575–657.
5. *Levitt N., Rourke C.* The existence of combinatorial formulae for characteristic classes // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 239. P. 391–397.
6. *Рурк К., Сандерсон Б.* Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974.
7. *Alexander J. W.* The combinatorial theory of complexes // Ann. Math. 1930. V. 31. № 2. P. 292–320.
8. *Rourke C. P., Sanderson B. J.* Block bundles: I // Ann. Math. 1968. V. 87. № 2. P. 1–28.
9. *Володин И. А., Кузнецов В. Е., Фоменко А. Т.* О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы // УМН. 1974. Т. 24. №5. С. 71–168.
10. *Pachner U.* P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings // European J. Combin. 1991. V. 12. № 2. P. 129–145.
11. *Buchstaber V. M., Panov T. E.* Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics // University Lecture Series. V. 24. Amer. Math. Soc. R. I.: Providence, 2002.
12. *Steinitz E., Rademacher H.* Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin: Springer-Verlag, 1934; Reprint: Springer-Verlag, 1976.
13. *Ziegler G.* Lectures on Polytopes // Graduate Texts in Math. V. 152. N. Y.: Springer-Verlag, 1995.
14. *Kazarian M. È.* The Chern-Euler Number of Circle Bundle via Singularity Theory // Mathematica Scandinavica. 1998. V. 82. P. 207–236.
15. *Васильев В. А.* Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. М.: МЦНМО, 2000.
16. *Kühnel W., Banchoff T. F.* The 9-vertex complex projective plane // Math. Intell. 1983. V. 5. № 3. P. 11–22.
17. *Kühnel W., Lassmann G.* The unique 3-neighborly 4-manifold with few vertices // J. Combin. Theory. Ser. A. 1983. V. 35. № 2. P. 173–184.
18. *Grünbaum B., Sreedharan V. P.* An enumeration of simplicial 4-polytopes with 8 vertices // J. Combin. Theory. Ser. A. 1967. V. 2. P. 437–465.
19. *Казарян М. Э.* Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей // УМН. 1995. Т. 50. №4. С. 45–70.
20. *Zeeman E. C.* Unknotting combinatorial balls // Ann. Math. 1963. V. 78. № 3. P. 501–526.

Поступило в редакцию
08.06.2004