О ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ КОМБИНАТОРНЫХ КЛАССОВ ПОНТРЯГИНА МНОГООБРАЗИЙ

А. А. Гайфуллин

Задаче построения комбинаторных классов Понтрягина многообразия по его триангуляции посвящен большой ряд работ. Соотношение результатов, полученных в [1]–[4], с результатами настоящей работы обсуждается в конце заметки.

Далее все многообразия, их триангуляции и бордизмы предполагаются кусочно-линейными, все многообразия – компактными, все бордизмы – ориентированными.

Пусть $\mathscr{T}_n$ – множество всех ориентированных триангуляций $(n-1)$-мерной сферы с точностью до изоморфизма, сохраняющего ориентацию. Пусть G – абелева группа. Обозначим через $\mathscr{T}^n(G)$ абелеву группу всех функций $f\colon \mathscr{T}_n \to G$, изменяющих знак при замене ориентации триангуляции (считаем, что $\mathscr{T}^0(G)=G$). Определим дифференциал $\delta\colon \mathscr{T}^n(G) \to \mathscr{T}^{n+1}(G)$ по формуле $(\delta f)(L)=\sum f(\operatorname{Lk} v)$, где сумма берется по всем вершинам v триангуляции $L\in\mathscr{T}_{n+1}$ и ориентация $\operatorname{Lk} v$ индуцирована ориентацией L. Легко проверить, что $\delta^2=0$. Таким образом, в $\mathscr{T}^*(G)$ вводится структура коцепного комплекса.

Пусть K – триангуляция m-мерного многообразия. Коориентацией симплекса будем называть ориентацию его линка. Обозначим через $\widehat{C}_*(K;G)$ цепной комплекс коориентированных симплициальных цепей комплекса K. Гомологии этого цепного комплекса совпадают с гомологиями $H_*(|K|;\widehat{G})$, где $\widehat{G}$ – ориентирующий пучок многообразия $|K|$ со слоем G. Каждой функции $f\in\mathscr{T}^n(G)$ сопоставим коориентированную цепь $f_\#(K)\in\widehat{C}_{m-n}(K;G)$ по формуле $f_\#(K)=\sum_{\Delta^{m-n}\in K} f(\operatorname{Lk}\Delta^{m-n})\Delta^{m-n}$. Назовем функцию $f\in\mathscr{T}^n(G)$ *локальной формулой*, если для любого многообразия и любой его триангуляции K коориентированная цепь $f_\#(K)$ является циклом.

Предложение. 1) *Функция f является локальной формулой тогда и только тогда, когда f является коциклом в коцепном комплексе $\mathscr{T}^*(G)$.*

2) *Если f является кограницей в коцепном комплексе $\mathscr{T}^*(G)$, то для любого многообразия и любой его триангуляции K цепь $f_\#(K)$ является границей.*

3) *Если K_1 и K_2 – две триангуляции одного многообразия, f – локальная формула, то циклы $f_\#(K_1)$ и $f_\#(K_2)$ гомологичны.*

Таким образом, класс когомологий $\psi\in H^n(\mathscr{T}^*(G))$ определяет для любого многообразия M^m класс гомологий $\psi_\#(M^m)\in H_{m-n}(M^m;\widehat{G})$ и, следовательно, по двойственности Пуанкаре, класс когомологий $\psi^\#(M^m)\in H^n(M^m;G)$. Если $m=n$ и многообразие M^n ориентировано, то классу ψ соответствует элемент $\psi^\star(M^n)=\langle\psi^\#(M^n),[M^n]\rangle\in G$. Кограницы коцепного комплекса $\mathscr{T}^*(G)$ будем называть *тривиальными* локальными формулами.

Теорема 1. *Пусть ψ – произвольный элемент группы $H^n(\mathscr{T}^*(G))$. Тогда $\psi^\star(M_1^n)=\psi^\star(M_2^n)$ для любых двух бордантных ориентированных многообразий M_1^n и M_2^n.*

Следовательно, определен гомоморфизм $\star\colon H^n(\mathscr{T}^*(G))\to\operatorname{Hom}(\Omega_n,G)$, сопоставляющий классу когомологий ψ гомоморфизм $\psi^\star$, где Ω_* – группа кусочно-линейных ориентированных бордизмов точки.

Теорема 2. *В случае $G=\mathbb{Q}$ гомоморфизм $\star$ является изоморфизмом. Таким образом, группа $H^*(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$ изоморфна аддитивной группе кольца полиномов $\mathbb{Q}[p_1,p_2,\dots]$, $\deg p_j=4j$.*

Следствие. *Для любого набора $I=(i_1,i_2,\dots,i_k)$ неотрицательных целых чисел существует единственный класс когомологий $\phi_I\in H^{4(i_1+2i_2+\dots+ki_k)}(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$ такой, что $\phi_I^\#(M^m)=p_1^{i_1}(M^m)p_2^{i_2}(M^m)\cdots p_k^{i_k}(M^m)$ для любого многообразия M^m, где $p_j(M^m)$ – j-й рациональный класс Понтрягина многообразия M^m. Классы ϕ_I образуют базис векторного пространства $H^*(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$.*

Задача о явном виде локальных формул представляет особый интерес. Приведем нашу схему построения явной формулы для первого рационального класса Понтрягина. Пусть $f \in \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ – локальная формула. Значение $(\delta f)(K) = 0$ не меняется при бизвездных преобразованиях триангуляции K четырехмерной сферы (определение бизвездных преобразований см. в [5] и [6]). Это позволяет описать, как меняется значение $f(L)$ при бизвездных преобразованиях триангуляции L трехмерной сферы. Остается заметить, что по теореме Пахнера [5] любая триангуляция сферы получается из границы симплекса с помощью конечного числа бизвездных преобразований. Явной формуле для первого класса Понтрягина будет посвящена отдельная публикация.

Теорема 3. $H^n(\mathscr{T}^*(G)) = 0,\ 1 \leqslant n \leqslant 4,$ *для любой собственной подгруппы* $G \subset \mathbb{Q}$.

Следовательно, если $f \in \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ – нетривиальная локальная формула, то для любого натурального числа q существует триангуляция $L \in \mathscr{T}_4$ такая, что знаменатель значения $f(L)$ делится на q. Для любой функции $f \in \mathscr{T}^*(\mathbb{Q})$ обозначим через $\operatorname{den}_k(f)$ наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(L)$, где L пробегает все триангуляции сферы с не более чем k вершинами.

Теорема 4. *Для любого класса когомологий* $\psi \in H^*(\mathscr{T}^*(\mathbb{Q}))$ *существуют локальная формула* f, *представляющая класс* ψ, *и целая константа* C *такие, что* $\operatorname{den}_k(f)$ *делит* $C(k+1)!$ *для любого* k.

Теорема 5. *Пусть* $f \in \mathscr{T}^4(\mathbb{Q})$ – *произвольная локальная формула, представляющая класс* $\phi_{(1)}$. *Тогда* $\operatorname{den}_k(f)$ *делится на наименьшее общее кратное чисел* $1, 2, \dots, k-3$ *для любого четного* $k \geqslant 10$.

В [4] было впервые доказано, что классы гомологий, двойственные по Пуанкаре рациональным комбинаторным классам Понтрягина многообразия, могут быть представлены циклами, в которые каждый симплекс входит с коэффициентом, зависящим только от его звезды. Из результатов настоящей работы вытекает обратное утверждение: любой рациональный цикл, полученный по локальной формуле, представляет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре полиному от комбинаторных классов Понтрягина. В [2] найдены явные локальные формулы для вещественных классов Понтрягина, использующие асимптотику спектра дифференциального оператора. При этом остается неизвестным, являются ли построенные по ним циклы рациональными. В [1], [3] получены явные формулы для циклов, классы гомологий которых двойственны по Пуанкаре рациональным классам Понтрягина (в [1] – только для первого класса Понтрягина). Эти формулы используют некоторые дополнительные структуры, заданные на многообразии (например, в [1] – гладкую структуру, согласованную с триангуляцией). Поэтому формулы из [1], [3] не локальны в нашем смысле. В [1] получена нелокальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина, такая, что построенный по ней симплициальный цикл имеет знаменатели, не превосходящие 48.

Я благодарен В. М. Бухштаберу за постановки задач и за постоянное внимание к моей работе, а также Л. А. Алания, И. В. Баскакову и Г. И. Шарыгину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд, М. В. Лосик // Функц. анализ и прил. 1975. Т. 9. №2. С. 12–28; №3. С. 5–26. **[2]** J. Cheeger // J. Differential Geom. 1983. V. 18. №4. P. 575–657. **[3]** I. M. Gel'fand, R. D. MacPherson // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 26. №2. P. 304–309. **[4]** N. Levitt, C. Rourke // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 239. P. 391–397. **[5]** U. Pachner // European J. Combin. 1991. V. 12. №2. P. 129–145. **[6]** V. M. Buchstaber, T. E. Panov. Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Univ. Lecture Ser. V. 24.)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.01.2004