МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

На правах рукописи

ГАЙФУЛЛИН АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 515.16

ПРОБЛЕМА КОМБИНАТОРНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ ПОНТРЯГИНА

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук В. М. Бухштабер

Москва — 2010

Оглавление

Введение

О теме диссертации

Теория характеристических классов первоначально возникла из задачи об особенностях векторных полей на гладких многообразиях. Задача об изучении особенностей векторного поля на многообразии восходит к работам Пуанкаре по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Первым замечательным результатом теории характеристических классов стала теорема Х. Хопфа [91], который показал, что классический инвариант многообразий — эйлерова характеристика — выражается как сумма индексов особых точек касательного векторного поля с изолированными особыми точками. Е. Штифель [123] изучил циклы особенностей наборов из k касательных векторных полей $v_1, \ldots, v_k$ общего положения; под циклом особенностей он понимал подмножество, на котором векторные поля $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы. Такие циклы особенностей являются циклами с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. В дальнейшем их изучение было продолжено в ряде работ Х. Уитни (см., например, [130], [131]); в настоящее время они носят название *классов Штифеля–Уитни*. Наконец, в 1940х годах Л. С. Понтрягин в ряде работ [37], [39], [40] поставил и полностью решил гораздо более общую задачу о циклах особенностей наборов векторных полей $v_1, \ldots, v_k$, рассмотрев циклы особенностей, определяемые несколькими условиями вида $\operatorname{rank}(v_1, \ldots, v_{l_j}) \leqslant m_j$. Наряду с циклами Е. Штифеля, Л. С. Понтрягин получил таким образом новые, целочисленные характеристические циклы; двойственные целочисленные классы когомологий называются в настоящее время *классами Понтрягина.*

Другой, дифференциально геометрический, подход к определению характеристических классов многообразий также принадлежит Л. С. Понтрягину: в работах [38], [41] он показал, что определённые свёртки степеней тензора кривизны Римана риманова многообразия являются замкнутыми дифференциальными формами, классы которых в группах когомологий де Рама не зависят от выбора римановой структуры. (На самом деле Л. С. Понтрягин рассматривал только те римановы метрики, которые индуцируются на многообразии при некотором его вложении в евклидово пространством и доказывал независимость классов когомологий от выбора метрики только для таких метрик; полностью их независимость от выбора метрики была установлена позже.) В отличие от первого подхода, такой дифференциально геометрический подход даёт только *вещественные* классы Понтрягина, лежащие в группах $H^{4i}(M; \mathbb{R})$. В действительности эти классы являются *рациональными*, то есть лежат в образах естественных гомоморфизмов $H^{4i}(M; \mathbb{Q}) \to H^{4i}(M; \mathbb{R})$; тем не менее, они несут гораздо меньше информации, чем *целочисленные* классы Понтрягина $p_i \in H^{4i}(M; \mathbb{Z})$, определяемые через особенности векторных полей.

Важнейшим шагом в развитии теории характеристических классов стало открытие В. А. Рохлиным связи между числом Понтрягина и сигнатурой ориентированного замкнутого гладкого 4-мерного многообразия: в работе [42] им была доказана формула

$$\operatorname{sign}(M^4) = \frac{1}{3}\langle p_1(M^4), [M^4]\rangle.$$

Обобщением этой формулы для многообразий размерности $4k$ является знаменитая формула Хирцебруха (см. [46]), выражающая сигнатуру ориентированного замкнутого гладкого $4k$-мерного многообразия через его числа Понтрягина

$$\operatorname{sign}(M^{4k}) = \big\langle L_k\big(p_1(M^{4k}), p_2(M^{4k}), \ldots, p_k(M^{4k})\big), [M^{4k}]\big\rangle,$$

где $L_k \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots, p_k]$ — однородные полиномы степеней $4k$ (степень переменной p_i равна $4i$), определяемые по формуле

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} L_k(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{t_j}}{\operatorname{th}(\sqrt{t_j})},$$

где σ_i есть i-ый элементарный симметрический полином от переменных t_j.

Опираясь на формулу Хирцебруха, В. А. Рохлин и А. С. Шварц [43] и, независимо, Р. Том [127] доказали в конце 1950х годов, что рациональные классы Понтрягина инвариантны относительно кусочно линейных гомеоморфизмов (являются комбинаторными инвариантами) и определены для всех кусочно линейных многообразий (хорошее изложение этого доказательства имеется в книге [32]). Наряду с формулой Хирцебруха, ключевую роль в конструкции Рохлина–Шварца–Тома играет теорема Р. Тома [126] о том, что при $m > 2n + 1$ любой n-мерный класс гомологий m-мерного гладкого или кусочно линейного многообразия M^m реализуется с некоторой кратностью подмногообразием $N^n \subset M^m$ с тривиальным нормальным расслоением, являющаяся следствием результатов Ж.-П. Серра [121] о когомотопических группах. Намного более сильным результатом является знаменитая теорема С. П. Новикова [35], [36] о топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина. С другой стороны, Дж. Милнор и М. Кервер (см. [105]) построили пример, показывающий, что целочисленные классы Понтрягина не являются комбинаторными инвариантами.

Подход Рохлина–Шварца–Тома к определению рациональных классов Понтрягина кусочно линейных многообразий является весьма неявным. В рамках этого подхода вначале определяются классы $l_k(M)$, в случае гладких многообразий совпадающие с полиномами Хирцебруха L_k от рациональных классов Понтрягина, а потом, используя то, что коэффициент при p_k в полиноме L_k ненулевой, по ним восстанавливаются классы $p_k(M)$. При этом класс $l_k(M)$ характеризуется (при $\dim M > 8k+1$) тем свойством, что его значения на фундаментальных классах всех $4k$-мерных подмногообразий $N \subset M$ с тривиальными нормальными расслоениями, равны сигнатурам этих подмногообразий. Поэтому для того, чтобы вычислить класс $l_k(M)$, необходимо реализовать элементы некоторого базиса группы $H_{4k}(M;\mathbb{Q})$ подмногообразиями с тривиальными нормальными расслоениями. Теорема Тома не даёт явной комбинаторной конструкции таких подмногообразий.

Таким образом, возникает задача о прямом комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина. Отметим, что для классов Штифеля–Уитни аналогичная задача имеет очень простой ответ: в 1940 году Х. Уитни [130] доказал гипотезу Е. Штифеля [123], утверждающую, что для любого m-мерного комбинаторного многообразия K сумма по модулю 2 всех $(m-n)$-мерных симплексов первого барицентрического подразделения K' триангуляции K является циклом, представляющим класс гомологий, двойственный по Пуанкаре классу Штифеля–Уитни $w_n(K)$. Доказательство этого факта основано на прямом построении набора векторных полей, имеющего особенности с индексами ± 1 в барицентрах симплексов триангуляции K' требуемой размерности. Аккуратное доказательство может быть найдено в статье [88]. Другое, аналитическое доказательство того же факта было получено в 1970 году Дж. Чигером [68]. В 1976 году Р. Гольдштейн и Е. Турнер [84] нашли явные комбинаторные формулы для классов Штифеля–Уитни комбинаторного многообразия с упорядоченными вершинами, дающие симплициальные циклы в исходной триангуляции, а не в её барицентрическом подразделении.

Впервые задача о прямом комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина возникла в знаменитой работе А. М. Габриэлова, И. М. Гельфанда и М. В. Лосика [13]. Подход, развитый в этой работе и последующих работах А. М. Габриэлова, И. М. Гельфанда и М. В. Лосика [14], Р. МакФерсона [100], А. М. Габриэлова [12] и И. М. Гельфанда и Р. МакФерсона [83], по сути представляет из себя попытку сымитировать для триангулированных многообразий один из первоначальных подходов Л. С. Понтрягина к построению классов Понтрягина гладких многообразий. Например, в первой работе [13] рассматривалась гладкая триангуляция K гладкого многообразия M и на каждом её симплексе максимальной размерности вводилась плоская связность. В результате на симплексах меньших размерностей возникало по несколько связностей — ограничений выбранных связностей на симплексах максимальной размерности — и в терминах этих связностей А. М. Габриэлову, И. М. Гельфанду и М. В. Лосику удалось получить формулу для первого рационального класса Понтрягина многообразия M. Основным недостатком такого подхода является неполный отказ от использования гладкой структуры на многообразии. В действительности, исходным объектом в формуле Габриэлова–Гельфанда–Лосика является не просто комбинаторное многообразие K, а комбинаторное многообразие K с заданным сглаживанием. Основным средством, при помощи которого производится перевод информации о сглаживании на комбинаторный язык, являются так называемые *пространства конфигураций*. Пространством конфигураций Σ_L $(n-1)$-мерной комбинаторной сферы L А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд и М. В. Лосик назвали пространство всех линейных на симплексах вложений $\mathrm{cone}(L) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, профакторизованное по естественному действию группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Сглаживание комбинаторного многообразия K сопоставляет каждой точке каждого симплекса σ триангуляции K точку пространства конфигураций $\Sigma_{\mathrm{link}\,\sigma}$ линка симплекса σ. Таким образом, сглаживание комбинаторного многообразия с задаёт набор согласованных отображений $|\sigma| \to \Sigma_{\mathrm{link}\,\sigma}$, пронумерованных симплексами σ триангуляции K. Именно комбинаторное многообразие с таким набором отображений выступает в качестве исходных комбинаторных данных для формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика.

В работах [14] и [100] при помощи специальных процедур усреднения по различным выборам локальных сглаживаний получены формулы для первого рационального класса Понтрягина, зависящие только от комбинаторного строения триангуляции. Однако, во-первых, эти формулы очень сложны, так как требуют усреднения по различным точкам в пространствах Σ_L для трёхмерных комбинаторных сфер L, а эти пространства могут быть устроены очень сложно, а во-вторых, полученные формулы применимы только для тех триангуляций K, для которых все пространства конфигураций линков симплексов непусты, то есть для так называемых *брауэровских* триангуляций. Для многообразий размерности больше 3 это условие является весьма ограничительным, то есть класс брауэровских триангуляций является довольно узким подклассом в классе всех комбинаторных многообразий.

Отметим, что исходная формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика (без усреднения) также очень сложна для конкретных вычислений. Единственный пример, для которого удалось произвести явный расчёт при помощи этой формулы — 9-вершинная триангуляций комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, построенная В. Кюнелем и Т. Банхофом [96]. Этот расчёт был проведён Л. Милиным [103] в 1994 году.

Трудности в обобщении формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика для старших классов Понтрягина заключается как раз в использовании пространств конфигураций. Дело в том, что строение пространств Σ_L довольно хорошо изучено при $\dim L \leqslant 2$: известно, что Σ_L стягиваемо, если $\dim L = 1$ (очевидно), линейно связно [66] и односвязно [90], если $\dim L = 2$, — но при $\dim L \geqslant 3$ о строении пространств Σ_L практически ничего не известно. В работе [83] вместо пространств конфигураций использовали более комбинаторные объекты — так называемые *ориентированные матроиды* (введение в теорию ориентированных матроидов см. в книге [54]). Это позволило И. М. Гельфанду и Р. МакФерсону получить формулы для всех рациональных классов Понтрягина, однако в качестве исходных данных этих формул по-прежнему выступают триангулированные многообразия с заданным сглаживанием, а не просто комбинаторные многообразия. Таким образом, ни одна из формул, полученных в работах [13], [14], [100], [12] и [83], не позволяет вычислять рациональные классы Понтрягина произвольного комбинаторного многообразия без каких бы то ни было дополнительных структур.

Другой, аналитический, подход к комбинаторному вычислению классов Понтрягина триангулированных многообразий предложил Дж. Чигер [70]. Он основан на конструкции η-инварианта $(4k-1)$-мерного риманова многообразия, принадлежащий М. Атья, В. Патоди и И. Зингеру [52]. Дж. Чигер наделяет триангулированное многообразие локально плоской метрикой, ограничение которой на каждый симплекс совпадает со стандартной евклидовой метрикой на правильном симплексе с ребром 1 и рассматривает операторы Лапласа в пространствах L^2-интегрируемых дифференциальных форм на линках симплексов триангуляции. Явные формулы для L-полиномов Хирцебруха от вещественных классов Понтрягина многообразия пишутся в терминах спектров этих операторов Лапласа. Формулы Чигера применимы для любого комбинаторного многообразия и даже для гораздо более общего класса так называемых *псевдомногообразий с пренебрежимой границей* (см. [69], [70]); при этом циклы, получаемые при помощи этих формул, зависят только от комбинаторного строения триангуляции. Тем не менее эти формулы стоит рассматривать скорее как важные тождества, связывающие объекты, имеющие топологическую и аналитическую природу, чем как формулы для комбинаторного вычисления классов Понтрягина, ввиду того, что для спектров операторов Лапласа также нет явного выражения в комбинаторных терминах. Отметим также, что неизвестно, являются ли коэффициенты циклов, получаемых при помощи формул Чигера, рациональными. Еще один подход к задаче комбинаторного вычисления классов Понтрягина, развивающий идеи М. Громова, принадлежит А. С. Мищенко. В работе [33] он построил локальную комбинаторную формулу Хирцебруха, что позволило ему дать локальное определение рациональных классов Понтрягина кусочно линейного многообразия. К сожалению, получить на этом пути явную формулу, вычисляющую характеристический цикл по триангуляции многообразия, пока никому не удалось. Сравнению различных формул для классов Понтрягина триангулированных многообразий посвящен обзор автора [17].

Для нас будет важен следующий результат, принадлежащий Н. Левитту и К. Рурку [98]: для любого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует функция, сопоставляющая каждому ориентированному комбинаторному многообразию K симплициальный цикл, в котором коэффициент при каждом симплексе полностью определяется комбинаторным строением звезды этого симплекса. Отметим, что эта теорема является только теоремой существования, не дающей никакой явной формулы. Доказательство Н. Левитта и К. Рурка основано на построении комбинаторной модели для классифицирующего пространства $\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{PL}}_m$ так называемых *блочных расслоений* (см. [115], [108], [92]).

В серии работ [15]–[17], [21], [23] автором была развита теория *универсальных локальных формул* для полиномов от рациональных классов Понтрягина. В её основе лежит подход к комбинаторному вычислению рациональных классов Понтрягина, состоящий в том, что мы ищем симплициальный цикл, представляющий класс гомологий, двойственный интересующему нас однородному полиному F степени $4k$ от рациональных классов Понтрягина комбинаторного многообразия K, в виде *универсальной локальной формулы*

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma\in K,\,\dim\sigma=m-4k} f\bigl(\langle\operatorname{link}\sigma\rangle\bigr)\sigma, \tag{0.1}$$

где через $\langle L\rangle$ обозначен класс изоморфизма ориентированной комбинаторной сферы L и f — функция на множестве классов изоморфизма ориентированных $(4k-1)$-мерных комбинаторных сфер, меняющая знак при обращении ориентации комбинаторной сферы. Универсальность формулы (0.1) заключается в том, что функция f не зависит от комбинаторного многообразия K и цепь $f_\sharp(K)$ является искомым циклом для любого комбинаторного многообразия K.

Изначально мотивацией для такого подхода послужили следующие три результата.

1. Локальная формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика [14] для первого рационального класса Понтрягина: в частном случае брауэровских триангуляций, удовлетворяющих некоторому специальному условию, она даёт цикл коразмерности 4, в котором коэффициент при каждом симплексе зависит только от класса изоморфизма его линка.

2. Сформулированная выше теорема Левитта–Рурка [98].

3. Аналитические формулы Чигера для L-полиномов Хирцебруха от *вещественных* классов Понтрягина имеют вид (0.1).

В формуле Габриэлова–Гельфанда–Лосика локальность достигается при помощи специального усреднения по различным локальным сглаживаниям; формула Чигера основана на изучении L^2-операторов Лапласов на линках симплексов с локально плоскими метриками — она получается локальной автоматически, так как изоморфные линки изометричны. Мы же ставим локальность во главу угла, то есть сначала изучаем циклы, задаваемые универсальными локальными формулами вида (0.1), а потом уже выясняем, что все такие циклы представляют классы гомологий, двойственные по Пуанкаре полиномам от рациональных классов Понтрягина.

Отметим, что теорема Левитта–Рурка слабее, чем результат о существовании универсальной формулы вида (0.1). Дело в том, что звезда симплекса несёт в себе немного больше информации, чем его линк, а именно, она несёт в себе информацию о размерности многообразия K. Таким образом, теорема Левитта–Рурка по сути означает, что для каждого m существует своя функция $f = f_m$ такая, что формула (0.1) задаёт цикл, двойственный первому рациональному классу Понтрягина, но функции f_m для разных m могут быть никак между собой не связаны.

Для того, чтобы изучать функции на множестве классов изоморфизма ориентированных комбинаторных сфер, удобно ввести на множестве таких функций какую-нибудь алгебраическую структуру. Мы определяем *дифференциальное градуированное кольцо ориентированных комбинаторных сфер* $\mathcal{T}_*$ следующим образом: группа $\mathcal{T}_n$ есть абелева группа, порождённая классами изоморфизма $\langle L\rangle$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер и соотношениями $\langle -L\rangle = -\langle L\rangle$, где $-L$ — комбинаторная сфера L с обращённой ориентацией; умножение в кольце $\mathcal{T}_*$ индуцируется джойном комбинаторных сфер; дифференциал определяется по формуле

$$\partial\langle L\rangle = \sum_{v\in V(L)} \langle \operatorname{link} v\rangle,$$

где $V(L)$ — множество вершин комбинаторной сферы L. Непосредственно проверяется, что $\partial^2 = 0$. Элементы двойственного коцепного комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q})$ суть в точности рациональнозначные функции на множестве классов изоморфизма ориентированных комбинаторных сфер, меняющие знак при обращении ориентации сфер; дифференциал комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ мы будем обозначать через δ.

Основные наши результаты об универсальных локальных формулах формулируются следующим образом:

- Цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K тогда и только тогда, когда функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ является коциклом комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$; цепь $f_\sharp(K)$ является границей для любого комбинаторного многообразия K тогда и только тогда, когда функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ является кограницей комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

- Предположим, что цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K; тогда она является универсальной локальной формулой для некоторого однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$, то есть для любого комбинаторного многообразия K цикл $f_\sharp(K)$ представляет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре полиному F от рациональных классов многообразия K.

- Универсальная локальная формула $f \in \mathcal{T}^{4k}(\mathbb{Q})$ для однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ степени $4k$ существует и единствена с точностью до прибавления кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

- Для каждого однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ степени $4k$ существует универсальная локальная формула f такая, что задача вычисления значения $f(\langle L\rangle)$ по данной ориентированной $(4k-1)$-мерной комбинаторной сфере L алгоритмически разрешима.

При доказательстве этих результатов важную роль играет вычисление гомологий кольца $\mathcal{T}_*$, тензорно умноженного на $\mathbb{Q}$, и групп когомологий комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Результат этого вычисления таков: имеет место мультипликативный изоморфизм

$$H_*(\mathcal{T}_*)\otimes\mathbb{Q}\cong\Omega_*^{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q}\cong\Omega_*^{\mathrm{SO}}\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}\bigl[[\mathbb{C}\mathrm{P}^2],[\mathbb{C}\mathrm{P}^4],\ldots\bigr], \tag{0.2}$$

где Ω_*^{SPL} и Ω_*^{SO} — кольца кобордизмов ориентированных кусочно линейных и гладких многообразий соответственно, и сопряжённый ему аддитивный изоморфизм

$$H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))\cong\mathbb{Q}[p_1,p_2,\ldots].$$

Одним из центральных результатов диссертации является явное описание всех универсальных локальных комбинаторных формул $f\in\mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ для первого рационального класса Понтрягина. Чтобы описать явно функцию f на множестве классов изоморфизма ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер, нам необходимо научиться каким-либо образом «перемещаться» по этому множеству классов изоморфизма. Для этой цели мы используем так называемые *бизвёздные преобразования* — элементарные преобразования комбинаторных многообразий специального вида. Согласно теореме, доказанной в 1987 году У. Пахнером [111] (см. также [112] и [99]), два комбинаторных многообразия соединяются последовательностью бизвёздных преобразований и изоморфизмов тогда и только тогда, когда они кусочно линейно гомеоморфны. В частности, любая 3-мерная комбинаторная сфера переводится в границу 4-мерного симплекса посредством конечной последовательности бизвёздных преобразований и изоморфизмов. Таким образом, для того, чтобы задать функцию на множестве классов изоморфизма ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер, нам достаточно описать, как её значение изменяется при бизвёздном преобразовании комбинаторной сферы. Оказывается, что из уравнения $\delta f = 0$, которому удовлетворяют локальные формулы для первого класса Понтрягина, следует, что приращение значения $f(\langle L\rangle)$ при бизвёздном преобразовании β является суммой локальных вкладов $h(\langle\beta_v\rangle)$, зависящих только от бизвёздных преобразований β_v, индуцированных преобразованием β в линках вершин сферы L. При этом функция h является коциклом, представляющим некоторый конкретный класс одномерных когомологий c_0 графа Γ_2, вершинами которого являются классы изоморфизма ориентированных 2-мерных комбинаторных сфер, а рёбрами — бизвёздные преобразования; мы явно вычисляем класс когомологий c_0.

В результате мы получаем явную локальную комбинаторную формулу для первого класса Понтрягина, которая может быть применена к любому комбинаторному многообразию без каких бы то ни было дополнительных структур. Процесс вычисления при помощи этой формулы содержит два сложных с вычислительной точки зрения шага. Первый из них связан с нахождением для данной 3-мерной комбинаторной сферы последовательности бизвёздных преобразований, переводящих её в границу 4-мерного симплекса. Отметим, что из теоремы С. П. Новикова [11] об алгоритмической нераспознаваемости n-мерной сферы при $n \geqslant 5$ следует, что при $n \geqslant 5$ длина кратчайшей цепочки бизвёздных преобразований, соединяющей n-мерную комбинаторную сферу с m вершинами с границей $(n+1)$-

мерного симплекса, не ограничена сверху никакой вычислимой функцией от m. Задача распознавания 3-мерной сферы алгоритмически разрешима (см. [31]), поэтому длина кратчайшей цепочки бизвёздных преобразований, соединяющей 3-мерную комбинаторную сферу с m вершинами с границей 4-мерного симплекса, ограничена сверху некоторой вычислимой функцией от m; однако не известно никакой явной оценки такого вида. Тем не менее, имеются эмпирические алгоритмы, позволяющие находить интересующие нас цепочки бизвёздных преобразований для комбинаторных сфер с не очень большим числом вершин (см. [55]).

Второй шаг, сложный с вычислительной точки зрения, связан с задачей канонического выбора коцикла h, представляющего класс когомологий c_0. В отличие от первого сложного шага, этот не носит принципиальный характер, а связан с нашим желанием получить ответ в виде универсальной локальной формулы. Мы показываем, что эту сложность можно обойти, если отказаться от требования локальности.

В отличие от старших целочисленных классов Понтрягина, первый целочисленный класс Понтрягина комбинаторно инвариантен. Поэтому имеет смысл задача о его вычислении в комбинаторных терминах. К настоящему времени эта задача не решена: все известные комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина дают только рациональные (или даже вещественные) циклы. Мы показываем, что в рамках теории универсальных локальных формул эта задача не может быть решена: знаменатели значений любой универсальной локальной формулы $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ для первого класса Понтрягина неограничены. Мы доказываем следующую оценку: пусть $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ — локальная формула для первого класса Понтрягина;

тогда для любого $l \geqslant 12$ наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(\langle L\rangle)$, где L пробегает множество всех ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер с не более, чем l вершинами, делится на наименьшее общее кратное чисел $2, 3, \ldots, l-3$. Результаты Н. Левитта и К. Рурка [98] показывают, что, по-видимому, может быть найдена комбинаторная формула для первого целочисленного класса Понтрягина, которая является локальной для комбинаторных многообразий с упорядоченными вершинами; тем не менее, нахождение такой явной формулы пока остаётся нерешённой задачей.

До сих пор мы всё время обсуждали рациональные классы Понтрягина многообразий. Перейдём теперь к рассмотрению классов Понтрягина расслоений. Хорошо известно, что исходные определения классов Понтрягина гладких многообразий, данные Л. С. Понтрягиным, легко переносятся на случай векторных расслоений. В кусочно линейном случае имеется несколько неэквивалентных друг другу теорий расслоений. Наиболее важными из них являются теория кусочно линейных дисковых расслоений, теория микрорасслоений Милнора [105], теория блочных расслоений, введённых независимо К. Рурком и Б. Сандерсоном [115], [117]–[119], К. Морле [108], [109] и М. Като [92] (термин «блочное расслоение» принадлежит К. Рурку и Б. Сандерсону). Блочное расслоение размерности q над клеточным разбиением полиэдра P на клетки σ_i есть полиэдр $E(\xi) \supset P$, состоящий из блоков β_i над клетками σ_i таких, что $\dim\beta_i = \dim\sigma_i + q$ и (β_i, σ_i) — незаузленная пара шаров для любого i. (Это не строгое определение; строгое определение будет дано в тексте диссертации.) По-видимому, с точки зрения изучения нормальных расслоений кусочно линейных подмногообразий и кусочно линейной теории трансверсальности наиболее правильными аналогами векторных расслоений являются именно блочные расслоения. Это связано с тем, что всякое локально плоское кусочно линейное подмногообразие кусочно линейного многообразия имеет единственное с точности до эквивалентности нормальное блочное расслоение, что неверно для дисковых расслоений и микрорасслоений (см. [89], [116]), а также с наличием для блочных расслоений как абсолютной, так и относительной теорем трансверсальности (см. [118]). Определение рациональных классов Понтрягина кусочно линейных многообразий сразу переносится на блочные расслоения. Действительно, если ξ — блочное расслоение над кусочно линейным многообразием M, то сумма Уитни блочного расслоения ξ и касательного блочного расслоения к M эквивалентна ограничению на $E(\xi)$ касательного блочного расслоения к $E(\xi)$. Поэтому рациональные классы Понтрягина блочного расслоения ξ легко выражаются при помощи формулы Уитни через рациональные классы Понтрягина кусочно линейных многообразий M и $E(\xi)$. Случай расслоений над произвольным компактным полиэдром легко сводится к случаю расслоений над кусочно линейным многообразием, так как любой компактный полиэдр вкладывается в качестве деформационного ретракта в кусочно линейное многообразие.

Естественным образом возникает вопрос, насколько теория универсальных локальных формул распространяется на задачу о прямом комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина блочных расслоений. Оказывается, все наши результаты о формулах для классов Понтрягина многообразий могут быть перенесены на случай блочных расслоений в следующем смысле: каждая функция $f \in \mathcal{T}^{4k}(\mathbb{Q})$, являющаяся коциклом комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, задаёт формулу, выражающую полином от рациональных классов Понтрягина q-мерного блочного расслоения ξ над полиэдром P в терминах пары (K, g), где

- K — кусочно линейная триангуляция тотального пространства $E(\xi)$, являющаяся измельчением разбиения на блоки;
- $g : P \to E(\xi)$ — кусочно линейное отображение такое, что
  1. образ каждой клетки σ_i разбиения полиэдра P при отображении g содержится в блоке β_i над ней;
  2. отображение g *транссимплициально* триангуляции K;
  3. для каждого симплекса τ триангуляции K замыкание каждой компоненты связности прообраза $g^{-1}\big(\mathring{\tau}\big)$ есть кусочно линейный шар размерности $\dim \tau - q$; здесь $\mathring{\tau}$ — относительная внутренность симплекса τ.

Понятие отображения, транссимплициального триангуляции, было введено в 1967 году М. Армстронгом и Е. Зиманом [51]; строгое определение будет дано в тексте диссертации. Понятие транссимплициальности очень близко к понятию трансверсальности, однако говорить о трансверсальности в нашем случае не очень корректно, так как тотальное пространство $E(\xi)$ не обязано быть многообразием.

Из условия 1, накладываемого на отображение g, следует, что g гомотопно тождественному вложению $P \subset E(\xi)$. Отметим, что условия 2 и 3, накладываемые на отображение g, осмысленны и в том случае, когда отображение g совпадает с тождественным вложением $P \subset E(\xi)$; в этом случае они становятся условиями на триангуляцию K и примерно соответствуют нашим интуитивным представлениям о том, как должна пересекать подполиэдр P достаточно общая и достаточно мелкая триангуляция полиэдра $E(\xi)$. Можно было бы именно так и формулировать эти условия, но на самом деле приводить отображение $P \to E(\xi)$ в «достаточно общее положение» по отношению к заданной триангуляции гораздо проще, чем приводить триангуляцию в «достаточно общее положение» по отношению к подполиэдру P.

Пусть (K, g) — пара, удовлетворяющая сформулированным выше условиям и $f \in \mathcal{T}^{4k}(\mathbb{Q})$ — универсальная локальная формула для полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$. Рассмотрим разбиение Y полиэдра P на клетки, являющиеся замыканиями компонент связности множеств $g^{-1}\bigl(\mathring{\tau}\bigr)$. Можно показать, что для каждой $4k$-мерной клетки Q разбиения Y частично упорядоченное множество её граней (включая саму её, но не включая $\varnothing$) изоморфно с обращением отношения порядка частично упорядоченному множеству симплексов (включая $\varnothing$) некоторого кусочно линейного симплициально клеточного разбиения $(4k-1)$-мерной сферы; мы обозначим это симплициально клеточное разбиение через L_Q. (Симплициально клеточное разбиение отличается от симплициального тем, что два его симплекса могут иметь несколько общих граней.) Тогда барицентрическое подразделение L_Q' является комбинаторной сферой. Рассмотрим клеточную коцепь $f^{\sharp}_{(1)}(Y) \in C^{4k}(Y; \mathbb{Q})$, значение которой на каждой $4k$-мерной клетке Q разбиения Y равно $f\bigl(\bigl\langle L_Q' \bigr\rangle\bigr)$. Наш основной результат заключается в том, что коцепь $f^{\sharp}(Y)$ является коциклом, представляющим полином $\widetilde{F}(p_1(\xi), p_2(\xi), \ldots, p_k(\xi))$, где $\widetilde{F}$ — образ полинома F при каноническом автоморфизме w кольца $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] = H^*(\mathrm{BO}; \mathbb{Q})$, задаваемом отображением гомотопического обращения H-пространства BO. Автоморфизм w характеризуется тем, что он переводит образующие p_i в такие однородные полиномы $\widetilde{p}_i$, что

$$\widetilde{p}_i + \widetilde{p}_{i-1}p_1 + \widetilde{p}_{i-2}p_2 + \ldots + p_i = 0$$

для всех k.

Описанная конструкция позволяет определить рациональные классы Понтрягина для довольно неожиданных объектов — разбиений компактных полиэдров на простые клетки. *Простой клеткой* мы называем кусочно линейный шар с клеточным разбиением границы, двойственным некоторой её кусочно линейной триангуляции. Два разбиения компактного полиэдра P на простые клетки называются *конкордантными*, если существует разбиение полиэдра $P \times [0, 1]$ на простые клетки, ограничения которого на основания $P \times 0$ и $P \times 1$ совпадают с двумя данными разбиениями. Класс конкордантности разбиений полиэдра P на простые клетки мы называем $\mathcal{D}$-*структурой* на полиэдре P. Мы показываем, что на множестве всех $\mathcal{D}$-структур на компактном полидре P имеется естественная операция сложения, превращающее это множество в абелеву полугруппу с нулём, которую мы будем обозначать через $\mathcal{D}(P)$. Каждое непрерывное отображение $h : P_1 \to P_2$ индуцирует гомоморфизм полугрупп $h^* : \mathcal{D}(P_2) \to \mathcal{D}(P_1)$, причём гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы; таким образом, $\mathcal{D}(\cdot)$ — контравариантный функтор из категории компактных полиэдров и гомотопических классов их непрерывных отображений в категорию абелевых полугрупп с нулём. Конструкция, сопоставляющая каждому блочному расслоению ξ описанное выше разбиение Y, определяет корректно опеределённое естественное преобразование функторов $I(\cdot) \to \mathcal{D}(\cdot)$, где $I(P)$ — группа классов стабильной эквивалентности блочных расслоений. (Имеется небольшая техническая сложность, связанная с тем, что описанное выше разбиение Y является несколько более общим объектом, чем разбиение на простые клетки, но мы не будем сейчас на ней останавливаться.) Таким образом, для каждого полиэдра P имеется последовательность естественных гомоморфизмов

$$\widetilde{KO}(P) \to I(P) \to \mathcal{D}(P),$$

где $\widetilde{KO}(P)$ — группа стабильной эквивалентности векторных расслоений над P. Комбинаторная инвариантность рациональных классов Понтрягина означает, что отображения $p_i : \widetilde{KO}(P) \to H^{4i}(P;\mathbb{Q})$ пропускаются сквозь группу $I(P)$. Рассматривая определённые выше коцепи $f^{\sharp}_{(1)}(K)$, мы определяем рациональные классы Понтрягина $\mathcal{D}$-структур и показываем, что в действительности отображения $p_i : \widetilde{KO}(P) \to H^{4i}(P;\mathbb{Q})$ пропускаются сквозь полугруппу $\mathcal{D}(P)$. Интересно, что по крайней мере первый класс Штифеля–Уитни не пропускается через полугруппу $\mathcal{D}(P)$. Таким образом, $\mathcal{D}$-структура, построенная по блочному расслоению, с одной стороны, не позволяет восстановить класс стабильной эквивалентности этого блочного расслоения (так как не позволяет восстановить даже его первый класс Штифеля–Уитни), а с другой стороны, позволяет восстановить достаточно много информации о блочном расслоении, а именно, все его рациональные классы Понтрягина. К сожалению, автору неизвестно, является ли полугруппа $\mathcal{D}(P)$ группой для прлоизвольного компактного полиэдра P; кроме того, практически ни для каких полиэдров эту полугруппу не удалось вычислить.

Ещё одной задачей, рассматриваемой в диссертации, является задача о построении комбинаторного многообразия с заданным набором линков вершин. Каждой триангуляции многообразия можно сопоставлять различные характеризующие ее комбинаторные данные. Простейшим примером таких данных является f-вектор $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, где через f_i обозначено количество i-мерных симплексов в триангуляции. В более сложных случаях комбинаторные данные тем или иным образом описывают взаимное расположение симплексов. Некоторые функции от комбинаторных данных дают инварианты многообразия, не зависящие от триангуляции. Например, эйлерова характеристика многообразия выражается через его f-вектор. Мы будем сопоставлять каждому ориентированному комбинаторному многообразию неупорядоченный набор классов изоморфизма линков его вершин. Интерес к таким комбинаторным данным обусловлен в том числе тем, что числа Понтрягина многообразия могут быть вычислены по набору классов изоморфизма линков его вершин. Таким образом, нашим объектом изучения является преобразование $\mathcal{L}$, сопоставляющее каждому ориентированному комбинаторному многообразию K неупорядоченный набор классов изоморфизма ориентированных комбинаторных сфер — линков вершин многообразия K. Изучая преобразование $\mathcal{L}$, естественно поставить задачу о его обращении:

Для каких наборов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер существует ориентированное n-мерное комбинаторное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$?

Этот вопрос является типичным примером часто встречающейся в топологии проблемы характеризации наборов локальных данных, которые могут быть реализованы как локальные инварианты некоторого глобального объекта. Классический пример задачи такого типа — задача характеризации возможных наборов локальных весов действия группы $\mathbb{Z}_p$ с изолированными неподвижными точками на замкнутом стабильно комплексном многообразии (см., например, [7]). Другим примером такой задачи является задача о соотношениях между классами кобордизмов циклов, реализующих классы Понтрягина стабильно комплексного многообразия, решенная В. М. Бухштабером и А. П. Веселовым [61].

Ввиду наличия групповой структуры в множестве $\mathcal{T}_n$ нам будет удобнее работать не с преобразование $\mathcal{L}$, а с преобразованием $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, сопоставляющим каждому ориентированному n-мерному комбинаторному многообразию сумму линков его вершин в группе $\mathcal{T}_n$. Задача об обращении преобразования $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ эквивалентна следующему вопросу:

Для каких наборов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер существует ориентированное n-мерное комбинаторное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Z_1, Z_2 \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2 \ldots, -Z_l$$

для некоторого набора $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер?

Несложно показать, что для того, чтобы элемент $\eta = \langle Y_1\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ лежал в образе преобразования $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ необходимо, чтобы он был циклом дифференциала $\partial : \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_{n-1}$, то есть, чтобы вершины несвязного объединения $Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \ldots \sqcup Y_k$ могли быть разбиты на пары так, что линки вершин в каждой паре изоморфны с обращением ориентации.

Основным нашим результатом по задаче об обращении преобразования $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ является явная конструкция, показывающая, что если $\eta = \langle Y_1\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ — цикл дифференциала ∂, то для некоторого натурального q элемент $q\eta$ лежит в образе преобразования $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, то есть существует n-мерное комбинаторное многообразие $\mathbf{K}$, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором

$$\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{q}, \underbrace{Y_2, \ldots, Y_2}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k, \ldots, Y_k}_{q}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_l \tag{0.3}$$

для некоторого натурального числа q и некоторых ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$.

Аналог этого утверждения для кубически клеточных комбинаторных многообразий формулируется следующим образом: при тех же предположениях относительно ориентированных комбинаторных сфер $Y_1, \ldots, Y_k$ существует ориентированное n-мерное кубически клеточное комбинаторное многообразие $\mathbf{Q}$, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором

$$\underbrace{Y_1', \ldots, Y_1'}_{q}, \underbrace{Y_2', \ldots, Y_2'}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k', \ldots, Y_k'}_{q} \tag{0.4}$$

для некоторого натурального числа q. Здесь Y_i' — барицентрическое подразделение комбинаторной сферы Y_i.

Помимо интереса, который эти результаты представляют сами по себе, их важность для нас вызвана тем, что они являются ключевыми для доказательства мультипликативного изоморфизма (0.2), из которого следуют существование и единственность с точностью до кограниц универсальных формул для полиномов от классов Понтрягина.

Наши результаты по задаче о построении триангулированных многообразий с заданными наборами линков вершин находят своё приложение к классической проблеме о реализации циклов, поставленной Н. Стинродом в конце 1940х годов (см. [78]): существуют ли для данного класса (сингулярных) гомологий $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$ топологического пространства X замкнутое ориентированное многообразие N^n и непрерывное отображение $f : N^n \to X$, такие что $f_*[N^n] = z$? Классическим результатом является следующая теорема Р. Тома.

Теорема (Р. Том [126]). *Для каждого натурального числа n существует такое натуральное число $k = k(n)$, что для любого n-мерного целочисленного класса гомологий $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$, класс kz реализуем в виде образа ориентированного замкнутого гладкого многообразия.*

В той же работе Р. Том доказал, что все классы гомологий размерностей $\leqslant 6$ реализуемы и построил первый пример 7-мерного целочисленного класса гомологий, не реализуемого по Стинроду. Согласно классической теореме Милнора–Новикова, кольцо комплексных кобордизмов Ω_*^{U} не имеет кручения. Опираясь на этот факт, С. П. Новиков [34] доказал, что, если целочисленные гомологии пространства X не имеют кручения, все классы гомологий пространства X реализуются по Стинроду. Задача о реализации циклов тесно связана с задачей о дифференциалах спектральной последовательности Атья–Хирцебруха в теории $\mathrm{SO}_*(\cdot)$ ориентированных бордизмов. Член E^2 этой спектральной последовательности имеет вид $E^2_{s,t} = H_s(X;\Omega_t^{\mathrm{SO}})$, а член E^∞ присоединён к градуированной группе $\mathrm{SO}_*(X)$ ориентированных бордизмов пространства X. Класс

$z \in H_n(X;\mathbb{Z}) = E^2_{n,0}$ реализуем образом гладкого многообразия тогда и только тогда, когда он является циклом всех дифференциалов. Аналогично, класс z может быть реализован образом стабильно комплексного многообразия тогда и только тогда, когда он является циклом всех дифференциалов спектральной последовательности Атья-Хирцебруха в теории $\mathrm{U}_*(\cdot)$ унитарных бордизмов. Порядки дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха были вычислены В. М. Бухштабером [2]. В результате им были получены важные результаты о числах $k(n)$.

Классический подход к проблеме Стинрода о реализации циклов, при помощи которого были получены указанные выше результаты, заключается в её сведении к гомотопической задаче при помощи теоремы трансверсальности Тома и последующего исследования этой гомотопической задачи методами алгебраической топологии. В настоящей работе мы предлагаем новый, комбинаторный подход к проблеме Стинрода, основанный на изучении локальной комбинаторной структуры цикла, представляющего заданный класс гомологий.

Хорошо известно, что всякий целочисленный класс сингулярных гомологий может быть реализован непрерывным образом ориентированного симплициального псевдомногообразия. Поэтому задача о реализации по Стинроду произвольных целочисленных классов гомологий сводится к задаче о реализации фундаментальных классов ориентированных симплициальных псевдомногообразий. Для каждого ориентированного симплициального псевдомногообразия Z^n мы даём явную комбинаторную конструкцию гладкого многообразия N^n и отображения $g : N^n \to Z^n$, таких что $g_*[N^n] = q[Z^n]$ для некоторого ненулевого целого числа q.

Некоторые идеи нашего подхода восходят к работе Д. Сулливана [125], в которой был предложен подход к проблеме Стинрода, основанный на разрешении особенностей псевдомногообразий. Пусть Z^n — псевдомногообразие, $\Sigma \subset Z^n$ — подмножество, такое что $Z^n \setminus \Sigma$ — гладкое ориентированное многообразие. Разрешение особенностей псевдомногообразия Z^n в смысле Сулливана — это отображение $f : N^n \to Z^n$, где N^n — гладкое ориентированное многообразие, такое что ограничение

$$g|_{g^{-1}(Z \setminus \Sigma)} : g^{-1}(Z \setminus \Sigma) \to Z \setminus \Sigma$$

является диффеоморфизмом. В работе [125] Д. Сулливан построил серию геометрических препятствий к существованию разрешения особенностей псевдомногообразия. Эти препятствия дают геометрическую интерпретацию дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха. Отметим, что исследование задачи о разрешение особенностей Д. Сулливан проводил с помощью теории кобордизмов, то есть по сути всё равно с помощью сведения к гомотопической задаче и исследования её методами алгебраической топологии. Наш подход заключается в том, чтобы построить отображение $g : N^n \to Z^n$ исходя из локальной комбинаторной структуры псевдомногообразия Z^n. При этом нам на самом деле не нужно стремиться к тому, чтобы отображение g было разрешением особенностей в смысле Сулливана, а достаточно лишь выполнения условия $g_*[N^n] = q[Z^n]$ для некоторого ненулевого целого числа q.

Наряду с задачей о реализации целочисленных классов гомологий Н. Стинрод ставил и задачу о реализации классов гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Р. Том [126] доказал, что всякий класс гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ реализуется образом замкнутого гладкого многообразия.

В 1981 году С. Буонкристиано и Д. Хэкон [64], развивая идеи Сулливана, получили геометрическое доказательство этой теоремы Тома, не использующее результатов алгебраической топологии; тем не менее, их доказательство использует гладкую теорему трансверсальности (причём не один раз, как исходное доказательство Тома, а многократно внутри некоторого итеративного процесса) и не даёт явной комбинаторной конструкции реализующего многообразия. Вопрос о нахождении такой комбинаторной конструкции для реализации циклов по модулю 2 остаётся открытым.

Представляет интерес задача о реализации классов гомологий образами специальных многообразий, имеющих сравнительно простое топологическое строение. Классическим примером является задача о реализации классов гомологий образами сфер, то есть задача об описании образа гомоморфизма Гуревича. Отметим, что при такой постановке аналог теоремы Р. Тома очевидно не верен: существуют целочисленные классы гомологий, для которых никакой кратный им класс гомологий не лежит в образе гомоморфизма Гуревича. В настоящей работе мы решаем задачу о нахождении набора $\mathcal{M}_n$ гладких n-мерных многообразий, достаточного для реализации с некоторыми кратностями всех целочисленных n-мерных классов гомологий всех пространств X. Эта задача тесно связана с отношением доминирования ориентированных замкнутых многообразий. Пусть M и N — ориентированные замкнутые многообразия одной размерности. Говорят, что многообразие M *доминирует* многообразие N и пишут $M \geqslant N$, если существует отображение $M \to N$ ненулевой степени; говорят, что многообразие M *виртуально доминирует* многообразие N, если некоторое конечнолистное накрытие над M доминирует N. Частичное упорядочение доминирования на множестве гомотопических классов ориентированных многообразий восходит к работам Дж. Милнора и У. Тёрстона [107] и М. Громова [86]. Очевидно, что гомотопический класс n-мерной сферы является наименьшим элементом в множестве гомотопических классов n-мерных ориентированных многообразий относительно рассматриваемого частичного упорядочения. С другой стороны, из того, что $M \geqslant N$ следует, что числа Бетти многообразия M не меньше соответствующих чисел Бетти многообразия N и группа $\pi_1(M)$ отображается на подгруппу конечного индекса в $\pi_1(N)$, то есть многообразие M устроено «не проще», чем многообразие N. Отсюда следует, что в множестве гомотопических классов n-мерных ориентированных многообразий не может быть наибольшего элемента. В 1989 году Дж. Карлсон и Д. Толедо [67] поставили задачу о нахождении *максимального класса* многообразий относительно отношения доминирования, то есть такого класса n-мерных ориентированных многообразий, что любое n-мерное ориентированное многообразие доминируется каким-нибудь многообразием из рассматриваемого класса. Естественно, хочется найти по возможности более узкий такой класс. В силу теоремы Тома эта задача полностью эквивалентна сформулированной выше задаче о нахождении класса $\mathcal{M}_n$. Д. Котщик и К. Лёх [95] высказали интересную гипотезу о том, что в качестве искомого максимального класса можно взять класс всех гиперболических многообразий, то есть многообразий, на которых существует риманова метрика постоянной отрицательной кривизны.

В случае $n = 2$ отношение доминирования легко полностью описывается. Случай $n = 3$ довольно хорошо исследован (см. обзор [129]); в частности, доказано [56], что всякое ориентированное 3-мерное многообразие доминируется гиперболическим. Случай $n \geqslant 4$ исследован довольно плохо. В основном вопрос о наличии доминирования $M \geqslant N$ исследовался в двух случаях: когда N высокосвязно [76], [77] и когда N имеет риманову метрику неположительной кривизны (или кусочно евклидову метрику неположительной полиэдральной кривизны в смысле CAT(0)-пространств) [86], [120], [95]. При этом если в первом случае основные методы исследования были алгебротопологическими, то во втором решающую роль играли геометрические методы, основанные, в частности, на теориях симплициального объёма и гармонических отображений. Для многообразий неположительной кривизны практически все результаты были негативными: доказывалось, что при определённых условиях на M и N многообразие M не может доминировать многообразие N. Наиболее интересным результатом в этом направлении является результат Д. Котщика и К. Лёх [95], которые для большого класса многообразий (включающего в себя, в частности, все римановы многообразия строго отрицательной кривизны) доказали невозможность их доминирования никаким произведением двух многообразий положительных размерностей.

До сих пор по сути единственным результатом по задаче об отыскании максимального класса многообразий в смысле отношения доминирования при $n \geqslant 4$ являлась конструкция гиперболизации М. Дэвиса и Т. Янушкевича [75]. Эта конструкция позволяет для каждого полиэдра P строить асферический полиэдр $\widehat{P}$ и непрерывное отображение $\widehat{P} \to P$, индуцирующее эпиморфизм в гомологиях; при этом, если исходный полиэдр P является многообразием, полиэдр $\widehat{P}$ оказывается многообразием той же размерности. (Пространство называется *асферическим*, если оно имеет тип $K(\pi, 1)$ для некоторой группы π.) Из конструкции Дэвиса–Янушкевича сразу следует, что в качестве максимального класса многообразий в смысле отношения доминирования можно взять класс всех асферических многообразий. Однако этот класс слишком обширен и естественно представляет интерес задача о его уменьшении.

В центре нашей конструкции находится многообразие M^n изоспектральных вещественных симметрических трёхдиагональных $(n+1)\times(n+1)$ матриц, то есть многообразие вещественных симметрических трёхдиагональных матриц с фиксированным простым спектром $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n+1}$. (Матрица $A = (a_{ij})$ называется *трёхдиагональной*, если $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.) Многообразие M^n возникает в теории интегрируемых систем при изучении цепочки Тоды (см. [110], [26]). Топологические свойства многообразия M^n были первоначально изучены К. Томеи [128]. Им было построено клеточное разбиение многообразия M^n и, опираясь на результаты М. Дэвиса [71], доказана его асферичность. К. Томеи также доказал, что класс диффеоморфизма многообразия M^n не зависит от чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$.

В настоящей работе мы доказываем, что в качестве максимального класса n-мерных многообразий в смысле отношения доминирования или, что то же самое, в качестве набора $\mathcal{M}_n$ многообразий, достаточных для реализации всех n-мерных классов гомологий, можно взять набор всевозможных конечнолистных накрытий над многообразием M^n. Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ мы выбираем реализующее его сингулярное ориентированное псевдомногообразие $h : Z^n \to X$, после чего строим явно накрытие $\widehat{M}^n$ над многообразием M^n и отображение $g : \widehat{M}^n \to X$, такие что $g_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n]$ и, значит, $(h \circ g)_*[\widehat{M}^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q.

Отметим одно очень существенное отличие нашей конструкции от конструкции гиперболизации Дэвиса–Янушкевича. В конструкции Дэвиса–Янушкевича асферический полиэдр $\widehat{P}$ является многообразием только в том случае, когда исходный полиэдр P являлся многообразием. Наша конструкция даёт асферическое многообразие $\widehat{M}^n$ для любого исходного псевдомногообразия Z^n. Мы склеиваем многообразие $\widehat{M}^n$ из специальных простых многогранников — пермутоэдров и именно борьба за то, чтобы получившийся комплекс был многообразием, является наиболее сложным местом нашей конструкции.

Многообразие M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных матриц является важным представителем интересного класса гладких многообразий с действием группы $\mathbf{Z}_2^n$, называемых *малыми накрытиями*. Этот класс многообразий был введён и исследован М. Дэвисом и Т. Янушкевичем в работе [74]. Ранее важные примеры малых накрытий были исследованы в работах [128], [81], [72]. Использование этих результатов играет большую роль в наших конструкциях.

Краткий перечень результатов

Основными результатами настоящей работы являются следующие.

1. Построена теория универсальных локальных формул для рациональных классов Понтрягина комбинаторных многообразий, то есть формул

вида
$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma\in K,\,\dim\sigma=m-4k} f\bigl(\langle\operatorname{link}\sigma\rangle\bigr)\sigma,$$
где f — функция на множестве классов изоморфизма ориентированных $(4k-1)$-мерных комбинаторных сфер, не зависящая от многообразия K. Построено и изучено дифференциальное кольцо $\mathcal{T}_*$ ориентированных комбинаторных сфер и двойственный ему коцепной комплекс $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q})$. Доказано, что функции f, задающие универсальные локальные формулы для полиномов от рациональных классов Понтрягина, суть в точности коциклы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$; при этом функция f, задающая универсальную локальную формулу для любого однородного полинома, существует и единственна с точностью до прибавления кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

2. Доказано, что для любого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует такая универсальная локальная формула f, что задача о вычислении значения $f(\langle L\rangle)$ по данной комбинаторной сфере L является алгоритмически разрешимой.

3. Решена задача о нахождении явной локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина комбинаторных многообразий.

4. Получена нижняя оценка на рост знаменателей локальной формулы f для первого рационального класса Понтрягина: доказано, что для любой универсальной локальной формулы f для первого класса Понтрягина и любого $l \geqslant 12$ наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(\langle L\rangle)$, где L пробегает множество всех ориентированных комбинаторных сфер с не более, чем l вершинами, делится на наименьшее общее кратное чисел

$2, 3, \ldots, l-3$. Доказано, что ни для какого кратного первого класса Понтрягина не существует целочисленной универсальной локальной формулы.

5. Показано, что рациональные классы Понтрягина блочного расслоения ξ над компактным полиэдром P могут быть комбинаторно вычислены в терминах триангуляции K тотального пространства $E(\xi)$ и отображения $g : P \to E(\xi)$, гомотопного нулевому сечению, транссимплициального к триангуляции K и такого, что замыкания всех компонент связности прообразов открытых симплексов триангуляции K при отображении g являются кусочно линейными шарами.

6. Для компактного полиэдра P введена абелева полугруппа $\mathcal{D}(P)$ классов конкордантности разбиения полиэдра P на простые клетки. Дана конструкция, сопоставляющая каждому классу стабильной эквивалентности блочных расслоений над полиэдром P, класс конкордантности разбиений полиэдра P на простые клетки. Показано, что эта конструкция индуцирует естественный гомоморфизм $\mathcal{X} : I(P) \to \mathcal{D}(P)$, где $I(P)$ — группа классов стабильной эквивалентности блочных расслоений над P. Доказано, что отображения $p_i : I(P) \to H^{4i}(P; \mathbb{Q})$, задаваемые рациональными классами Понтрягина блочных расслоений, раскладываются в композицию гомоморфизма $\mathcal{X}$ и естественных отображений $\mathcal{D}(P) \to H^{4i}(P; \mathbb{Q})$, которые естественно называть рациональными классами Понтрягина разбиений на простые клетки.

7. Найдены явные конструкции, позволяющие по набору ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ такому, что вершины несвязного объединения $Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_k$ разбиваются на пары с линками вершин в каждой паре изоморфными друг другу с обращением ориента-

ции, строить ориентированное кубически клеточное комбинаторное многообразие $\mathbf{Q}$, набор линков вершин которого совпадает с точностью до сохраняющего ориентацию изоморфизма с набором

$$\underbrace{Y_1', \ldots, Y_1'}_{q}, \underbrace{Y_2', \ldots, Y_2'}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k', \ldots, Y_k'}_{q},$$

и ориентированное симплициальное комбинаторное многообразие $\mathbf{K}$, набор линков вершин которого совпадает с точностью до сохраняющего ориентацию изоморфизма с набором

$$\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{q}, \underbrace{Y_2, \ldots, Y_2}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k, \ldots, Y_k}_{q}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_l,$$

для некоторого натурального числа q и некоторых ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$. Здесь $-Z_i$ — комбинаторная сфера Z_i с обращённой ориентацией и Y_i' — первое барицентрическое подразделение комбинаторной сферы Y_i.

8. Получены явные описания всех универсальных локальных формул для L-полиномов Хирцебруха от рациональных классов Понтрягина.

9. Решена задача о прямом комбинаторном построении ориентированного гладкого многообразия, реализующего с некоторой кратностью заданный класс целочисленных гомологий топологического пространства.

10. Решена задача о нахождении класса $\mathcal{M}_n$ ориентированных n-мерных гладких замкнутых многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью любого n-мерного целочисленного класса гомологий любого топологического пространства. Доказано, что в качестве такого класса $\mathcal{M}_n$ можно взять класс всех конечнолистных накрытий над многообразием M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1) \times (n+1)$-матриц. В частности, доказано, что любое ориен-

тированное замкнутое n-мерное многообразие виртуально доминируется многообразием M^n.

Содержание работы

Здесь мы кратко опишем структуру работы. Диссертация разбита на главы, а главы — на разделы. Теоремы, предложения, примеры, замечания и т. д. нумеруются в пределах раздела, а рисунки и уравнения — в пределах главы.

В конце введения мы приводим основные соглашения, которые используются в работе, и список наиболее часто встречающихся обозначений.

Глава 1. Универсальные локальные формулы для характеристических классов триангулированных многообразий

В разделе 1.1 мы вводим дифференциальное кольцо ориентированных комбинатороных сфер $\mathcal{T}_*$, строим гомоморфизм $\Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$, где Ω_*^{SPL} — кольцо ориентированных кусочно линейных кобордизмов, и формулируем результат о том, что этот гомоморфизм является изоморфизмом по модулю класса групп кручения. В разделе 1.2 мы исследуем, двойственный коцепной комплекс $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q})$; вводим понятие универсальной локальной формулы для полинома от рациональных классов Понтрягина; доказываем основные утверждения об универсальных локальных формулах и их связи с коциклами комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. В разделе 1.3 мы доказываем, что для любого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует такая универсальная локальная формула f, что задача о вычислении значения $f(\langle L\rangle)$ по данной комбинаторной сфере L является алгоритмически разрешимой. В разделе 1.4 мы вводим и изучаем кольцо $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$ — обобщение кольца $\mathcal{T}_*$ на случай многообразий с особенностями. Раздел 1.5 посвящён локальным формулам для коциклов, представляющих полиномы от классов Понтрягина.

Глава 2. Явная формула для первого класса Понтрягина

Эта глава посвящена построению явной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина. Наш подход заключается в том, чтобы искать цикл, представляющий класс гомологий, двойственный первому классу Понтрягина данного комбинаторного многообразия K, в виде универсальной локальной формулы (0.1). Здесь $n = 4$, значит, f — рациональнозначная функция на множестве классов изоморфизма ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер. Чтобы описать явно такую функцию f, нам необходимо научиться каким-либо образом «перемещаться» по множеству классов изоморфизма ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер. Для этой цели мы используем так называемые *бизвёздные преобразования* комбинаторных многообразий. В разделе 2.1 приводится необходимая информация о бизвёздных преобразованиях, для каждого n строится граф Γ_n, вершинами которого являются классы изоморфизма ориентированных n-мерных комбинаторных сфер, а рёбрами — бизвёздные преобразования. Рассматриваются абелевы группы эквивариантных клеточных коцепей $C^{j,n} = C^j_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1}; \mathcal{Q})$, где группа $\mathbb{Z}_2$ действует на графе Γ_{n-1} обращением ориентаций комбинаторных сфер и $\mathcal{Q}$ — группа $\mathbb{Q}$, наделённая структурой $\mathbb{Z}_2$-модуля такой, что образующая группы $\mathbb{Z}_2$ действует умножением на -1. На биградуированной группе $C^{*,*}$ вводится структура биградуированного коцепного комплекса с двумя коммутирующими дифференциалами: повышающим первую градуировку дифференциалом d эквивариантных клеточных коцепных комплексов графов Γ_n и повышающим вторую градуировку дифференциалом δ, индуцированным операцией взятия формальной суммы линков комбинаторной сферы. При этом первый столбец $C^{0,*}$ введённого бикомплекса канонически изоморфен коцепному комплексу $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Кроме того, строится цепная гомотопия s между цепными отображениями d и 0 коцепного комплекса $(C^{0,*},\delta)$ в коцепной комплекс $(C^{1,*},\delta)$. Оказывается, что гомоморфизм

$$s:\mathcal{T}^4(\mathbb{Q})=C^{0,4}\to C^{1,3}=C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})$$

отображает подгруппу $\ker\delta\subset\mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, состоящую из универсальных локальных формул для классов, кратных первому классу Понтрягина, изоморфно на подгруппу группы $C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})$, состоящую из всех коциклов, классы гомологий которых лежат в ядре N гомоморфизма

$$\delta^*:H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})\to H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3;\mathcal{Q}),$$

индуцированного дифференциалом δ; при этом обратный к s изоморфизм совпадает с отображением $d^{-1}\delta$. Таким образом, явное описание универсальных локальных формул для классов, кратных первому классу Понтрягина сводится к явному вычислению группы N.

В разделах 2.2 и 2.3 изучаются циклы в графе Γ_2. В разделе 2.2 строятся несколько семейств циклов в графе Γ_2, которые удобно называть *элементарными циклами*, и доказывается, что любой цикл в графе Γ_2 представляется в виде линейной комбинации элементарных. В разделе 2.3

приводится эффективный алгоритм для нахождения представления данного цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных. Явное описание группы N даётся в разделе 2.5: группа N является одномерным векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$, порождённым классом когомологий $c_0 \in H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$, для которого явно указываются его значения на всех элементарных циклах.

В окончательном виде явная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина приведена в разделе 2.4. Отметим, что в разделе 2.4 мы доказываем лишь, что выписанная явная формула даёт первый класс Понтрягина с точностью до умножения на некоторую универсальную (то есть не зависящую от многообразия K) константу. Чтобы доказать, что эта константа в действительности равна 1, необходимо произвести вычисления по полученной формуле для некоторого конкретного многообразия с известным ненулевым классом Понтрягина. Такие вычисления для $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ вынесены в приложение B.

В разделе 2.6 доказана оценка на рост знаменателей значений локальных формул для первого класса Понтрягина: пусть $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ — локальная формула для первого класса Понтрягина; тогда для любого $l \geqslant 12$ наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(\langle L \rangle)$, где L пробегает множество всех ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер с не более, чем l вершинами, делится на наименьшее общее кратное чисел $2, 3, \ldots, l-3$.

Глава 3. Формулы для классов Понтрягина расслоений в терминах триангуляций их тотальных пространств

Глава 3 посвящена распространению полученных в первых двух главах результатов о комбинаторных формулах для классов Понтрягина многообразий на задачу о комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина блочных расслоений. Мы показываем, что рациональные классы Понтрягина q-мерного блочного расслоения ξ над клеточным разбиением Z компактного полиэдра P могут быть комбинаторно вычислены в терминах пары (K, g), где K — кусочно линейная триангуляция тотального пространства $E(\xi)$, являющаяся измельчением разбиения на блоки, $g : P \to E(\xi)$ — кусочно линейное отображение такое, что

1) образ каждой клетки σ_i разбиения Z при отображении g содержится в блоке β_i над ней;

2) отображение g транссимплициально триангуляции K;

3) для каждого симплекса τ триангуляции K замыкание каждой компоненты связности прообраза $g^{-1}\bigl(\mathring{\tau}\bigr)$ есть кусочно линейный шар размерности $\dim \tau - q$; здесь $\mathring{\tau}$ — относительная внутренность симплекса τ.

При выполнении указанных условий замыкания множеств $g^{-1}\bigl(\mathring{\tau}\bigr)$ образуют клеточное разбиение полиэдра P, которое мы будем обозначать через $g^!K$. При этом каждая клетка Q разбиения $g^!K$ имеет структуру кусочно линейного многообразия с углами, все грани которого являются кусочно линейными шарами. Такие многообразия с углами мы будем называть *квазипростыми клетками*; квазипростая клетка называется *простой клеткой*, если пересечение любого числа её граней либо пусто, либо снова является её гранью. Основной результат главы 3 заключается в том, что рациональные классы Понтрягина блочного расслоения ξ могут быть восстановлены по комбинаторному строению разбиения $g^!K$ полиэдра P на квазипростые клетки.

Разделы 3.1 и 3.2 содержат определения кусочно линейных многообразий с углами, простых и квазипростых клеток, разбиений на многообразия с углами, простые и квазипростые клетки. Раздел 3.3 содержит необходимые сведения о блочных расслоениях. В разделе 3.4 формулируется основной результат. Оставшаяся часть главы 3 посвящена систематическому изучению разбиений компактных полиэдров на многообразия с углами, простые и квазипростые клетки. Основным объектом изучения является множество классов конкордантности таких разбиений. Два разбиения полиэдра P на многообразия с углами (соответственно, простые или квазипростые клетки) называются *конкордантными*, если существует разбиение полиэдра $P \times [0, 1]$ на многообразия с углами (соответственно, простые или квазипростые клетки), ограничения которого на основания цилиндра $P \times [0, 1]$ совпадают с двумя данными разбиениями. В разделе 3.5 мы показываем, что получающееся множество $\mathcal{D}(P)$ классов конкордантности не зависит от того, рассматриваем ли мы разбиения полиэдра на многообразия с углами, на простые клетки или на квазипростые клетки; элементы множества $\mathcal{D}(P)$ мы называем $\mathcal{D}$-*структурами* на полиэдре P. В разделах 3.6 и 3.7 в множестве $\mathcal{D}(P)$ вводится операция сложения, превращающая его в абелеву полугруппу с нулём, и доказывается, что полугруппа $\mathcal{D}(P)$ является гомотопическим инвариантом полиэдра P, а сопоставление $P \mapsto \mathcal{D}(P)$ является контравариантным функтором из категории компактных полиэдров и гомотопических классов их отображений в категорию абелевых полугрупп с нулём. В разделе 3.8 доказывается, что при определённых условиях на триангуляцию K существует отображение $g : P \to E(\xi)$, удовлетворяющее сформулированным выше условиям 1–3; также доказывается относительный вариант этого утверждения. Эти результаты позволяют нам в разделе 3.9 сопоставить каждому блочному расслоению ξ класс конкордантности разбиения $g^! K$. Доказывается, что этот класс конкордантности не зависит от выбора пары (K, g) и определяет естественный гомоморфизм $\mathcal{X} : I(P) \to \mathcal{D}(P)$, где $I(P)$ — группа классов стабильной эквивалентности блочных расслоений над полиэдром P. В разделе 3.10 доказывается основной результат о $\mathcal{D}$-структурах на компактных полиэдрах, который и является основной мотивацией для их изучения: оказывается, что можно определить рациональные классы Понтрягина $\mathcal{D}$-структур, то есть естественные отображения $p_k : \mathcal{D}(P) \to H^{4k}(P; \mathbb{Q})$ такие, что в композиции с естественным гомоморфизмом $\mathcal{X}$ они дают рациональные классы Понтрягина блочных расслоений. В разделе 3.11 строится классифицирующее пространство $\mathcal{Z}$ такое, что $\mathcal{D}(P) \cong [P, \mathcal{Z}]$ для любого полиэдра P; доказывается, что имеет место изоморфизм

$$H^*(\mathcal{Z}; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots];$$

с помощью этого изоморфизма доказывается несколько естественных свойств рациональных классов Понтрягина $\mathcal{D}$-структур, в частности, аналог формулы Уитни. В разделе 3.12 доказана двусвязность пространства $\mathcal{Z}$, откуда сразу следует тривиальность полугрупп $\mathcal{D}(P)$ для всех двумерных полиэдров P; в разделе 3.13 сформулировано несколько открытых вопросов.

Глава 4. Задача о построении триангулированного многообразия с заданным набором линков вершин

Эта глава посвящена задаче об обращении преобразований $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, сопоставляющим каждому ориентированному n-мерному комбинаторному многообразию неупорядоченный набор классов изоморфизма линков его вершин и сумму классов изоморфизма линков его вершин в группе $\mathcal{T}_n$. В разделе 4.1 обсуждается постановка задачи и формулируются основные результаты. В разделах 4.2 и 4.3 излагается конструкция Пеццана–Ферри [113], [79] построения симплициально клеточного псевдомногообразия по однородному графу и приводится её обобщение на случай псевдомногообразий, склеенных из простых многогранников. Если P^n — простой многогранник с m гипергранями и Γ — конечный однородный граф степени m, эта конструкция даёт псевдомногообразие $M^n(\Gamma, P^n)$, склеенное из многогранников P^n. В разделе 4.4 мы останавливаемся подробнее на случае, когда P^n — куб $[0,1]^n$. Оказывается, что, если граф Γ удовлетворяет некоторым специальным условиям, кубически клеточное разбиение $\mathbf{Q}(\Gamma) = M^n(\Gamma, [0,1]^n)$ является каноническим подразделением некоторого кубически клеточного псевдомногообразия $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$.

В разделе 4.5 даётся конструкция ориентированного кубически клеточного комбинаторного многообразия $\mathbf{Q}$ с набором линков вершин (0.4). Она основана на прямом построении однородного графа Γ степени $2n$ такого, что $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ — искомое кубически клеточное комбинаторное многообразие. Раздел 4.6 содержит конструкцию симплициального комбинаторного многообразия $\mathbf{K}$ с набором линков вершин (0.3): оно является несвязным объединением двух экземпляров барицентрического подразделения $\mathbf{Q}'$ и нескольких комбинаторных сфер. Также в разделе 4.6 даётся доказательство того, что построенный в главе 1 гомоморфизм $\Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$ является изоморфизмом по модулю класса групп кручения. В разделе 4.7 мы используем конструкцию комбинаторного многообразия $\mathbf{Q}$ для получения явного описания всех универсальных локальных формул для L-полиномов Хирцебруха от классов Понтрягина.

Глава 5. Комбинаторный подход к проблеме Стинрода о реализации циклов

Эта глава посвящена явному построению многообразия, реализующего с некоторой кратностью заданный целочисленный класс гомологий. Раздел 5.1 посвящён формулировкам основных результатов. Любой класс гомологий z произвольного топологического пространства X может быть реализован в виде непрерывного образа некоторого ориентированного псевдомногообразия Z. В разделах 5.2, 5.3 мы для любого ориентированного псевдомногообразия Z, склеенного из простых клеток, строим явно его *разрешение особенностей с некоторой кратностью* q, то есть ориентированное кусочно линейное многообразие N и отображение $g : N \to Z$ такие, что вне остова коразмерности 2 псевдомногообразия Z отображение g является q-листным накрытием, уважающим ориентацию. При этом N — кубически клеточное многообразие, получающееся при помощи конструкции из раздела 4.5, применённой к набору комбинаторных сфер, двойственных простым клеткам максимальной размерности псевдомногообразия Z. В разделе 5.4 исследуется вопрос о классе бордизмов $\frac{[\varphi]}{q} \in \mathrm{SPL}_*(X) \otimes \mathbb{Q}$, где $\varphi : N \xrightarrow{g} Z \to X$ — сквозное отображение.

В оставшейся части главы 5 исследуется задача о нахождении класса $\mathcal{M}_n$ ориентированных замкнутых многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью любого n-мерного класса гомологий любого топологического пространства. В центре нашей конструкции находится многообразие M^n изоспектральных вещественных симметрических трёхдиагональных $(n+1)\times(n+1)$-матриц. Мы доказываем, что любой класс гомологий любого топологического пространства с некоторой кратностью может быть реализован образом некоторого конечнолистного накрытия над многообразием M^n. Этот результат получается практически сразу из нашей явной конструкции разрешения особенностей псевдомногообразия, склеенного из простых клеток: дело в том, что в случае, когда исходное псевдомногообразие Z является симплициальным, наша конструкция автоматически даёт многообразие, являющееся конечнолистным накрытием над многообразием M^n. Разделы 5.5–5.7 содержат необходимую информацию о многообразии M^n и его конечнолистных накрытиях. В разделах 5.8–5.10 конструкция разрешения особенностей симплициального псевдомногообразия Z излагается на другом языке, более удобном для доказательства того, что построенное многообразие является конечнолистным накрытием над многообразием M^n.

Содержание приложений

Приложение A содержит необходимые сведения о простых многогранниках, клеточных комплексах, склеенных из простых многогранников, в частности, о симплициальных, кубических, симплициально клеточных и кубически клеточных комплексах, а также об операциях над такими комплексами.

Приложение B посвящено вычислениям при помощи явной комбинаторной формулы для первого класса Понтрягина, построенной в главе 2. Мы приводим явные расчёты для двух простейших случаев: 9-вершинной триангуляции $\mathbb{C}P^2$, построенной В. Кюнелем и Т. Банхофом [96], и 15-вершинной триангуляции $\mathbb{C}P^2$, построенной автором [22].

Приложение C посвящено применению некоторых идей, возникших в задаче о построении комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин, рассматриваемой в главе 4, в задаче об интегрируемости m-значных динамик при помощи m-значных групп. Результаты этого приложения получены автором совместно с В. М. Бухштабером [6].

Основные соглашения и обозначения

В основном мы работаем в кусочно линейной категории и в терминологии следуем книге [44]. Все многообразия, триангуляции, вложения и т. п. предполагаются кусочно линейными, если не оговорено противное. Основные определения, касающиеся клеточных комплексов, склеенных из простых многогранников, в частности, симплициальных и кубических комплексов, собраны в приложении A. В главах 1, 2, 4 и 5 все рассматриваемые клеточные комплексы предполагаются компактными, все многообразия и псевдомногообразия — замкнутыми, то есть компактными и без края, все графы — конечными. В главе 3 все рассматриваемые многообразия и псевдомногообразия компактны, но могут иметь край.

Символ $\cong$ используется для обозначения изоморфности групп, графов и клеточных комплексов, склеенных из многогранников. Подчеркнём, что мы *не* называем изоморфизмом кусочно линейный гомеоморфизм, резервирую слово *изоморфизм* для обозначения линейного на гранях гомеоморфизма, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между гранями комплексов (см. строгое определение в приложении А). При работе с ориентированными комплексами мы, если не оговорено противное, всегда понимаем под изоморфизмом изоморфизм, сохраняющий ориентацию. Символ $\approx$ используется для обозначения диффеоморфности гладких многообразий.

Циклическая группа порядка l в мультипликативной записи обозначается через $\mathbf{Z}_l$; группа $\mathbf{Z}_2$ отождествляется с множеством $\{\pm 1\}$. Циклическая группа порядка l в аддитивной записи обозначается через $\mathbb{Z}_l$ и отождествляется с группой $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

Собственным подмножеством множества A называется подмножество $B \subset A$, такое что $B \neq A$. Раскраской элементов множества A в цвета из множества C называется функция $A \to C$. Образ элемента $a \in A$ называется его цветом.

Приведём теперь список основных обозначений.

$[n]$	множество натуральных чисел от 1 до n включительно.
$\lvert A\rvert$	мощность множества A.
id_A	тождественное отображение множества A в себя.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	спаривание между когомологиями и гомологиями.
f_*, f^*	гомоморфизмы групп гомологий и когомологий соответственно, индуцированные непрерывным отображением f.

$[N^n]$	фундаментальный гомологический класс многообразия или псевдомногообразия N^n или класс кобордизмов многообразия N^n.
Ω_*^{SO}, Ω_*^{SPL}	кольца ориентированных гладких и кусочно линейных кобордизмов.
$\mathrm{SO}_*(X)$, $\mathrm{SO}^*(X)$, $\mathrm{SPL}_*(X)$, $\mathrm{SPL}^*(X)$	группы ориентированных гладких и кусочно линейных бордизмов и кобордизмов пространства X.
$[X, Y]$	множество гомотопических классов отображений $X \to Y$, переводящих отмеченную точку пространства X в отмеченную точку пространства Y.
K'	барицентрическое подразделение комплекса K.
$\mathrm{cub}(K)$	каноническое кубическое подразделение симплициального комплекса K.
$\operatorname{link}\sigma$, $\operatorname{link}_K \sigma$	линк грани σ комплекса K.
$\operatorname{cone} K$	конус над комплексом K.
ΣK	неприведённая надстройка над комплексом K.
$K_1 * K_2$	джойн (соединение) комплексов K_1 и K_2.
$b(\sigma)$	барицентр симплекса (куба) σ.
$v_0 v_1 \dots v_k$	k-мерный симплекс с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_k$, наделённый ориентацией, соответствующей указанному упорядочению его вершин.
Δ^n	n-мерный симплекс.
Π^n	n-мерный пермутоэдр.
D^n, S^n	n-мерный шар и n-мерная сфера.
S_n	группа перестановок множества из n элементов.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту В.М. Бухштаберу за постоянное внимание и многочисленные полезные советы. Автор благодарен Л.А. Алания, И.В. Баскакову, Н.П. Долбилину, И.А. Дынникову, Н.Ю. Ероховцу, М.Э. Казаряну, В.П. Лексину, С.А. Мелихову, А.С. Мищенко, С.П. Новикову, Т.Е. Панову, А.В. Пенскому, А.Б. Сосинскому, Г.И. Шарыгину, О.В. Шварцману за полезные обсуждения. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

Глава 1

Универсальные локальные формулы для характеристических классов триангулированных многообразий

1.1 Дифференциальное градуированное кольцо ориентированных комбинаторных сфер

Для каждого $n \geqslant 1$ обозначим через $\mathcal{T}_n$ абелеву группу, порожденную элементами $\langle L \rangle$, соответствующими классам изоморфизма всевозможных ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер, и соотношениями $\langle -L \rangle = -\langle L \rangle$. Очевидно, что $\mathcal{T}_1 \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{T}_2$ — прямая сумма счетного количества групп $\mathbb{Z}_2$ и $\mathcal{T}_n$ — прямая сумма счетного количества групп $\mathbb{Z}_2$ и счетного количества групп $\mathbb{Z}$ при $n \geqslant 3$. Слагаемые $\mathbb{Z}_2$ соответствуют классам изоморфизма комбинаторных сфер, обладающих автоморфизмами, обращающими ориентацию, слагаемые $\mathbb{Z}$ — классам изоморфизма комбинаторных сфер, не обладающих автоморфизмами, обращающими ориентацию (точнее, парам таких классов изоморфизма, отличающихся ориентацией).

Полагаем, $\mathcal{T}_0 = \mathbb{Z}$.

Определим понижающий градуировку дифференциал $\partial : \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_{n-1}$ на образующих по формуле

$$\partial \langle L \rangle = \sum_{v \in V(L)} \langle \operatorname{link} v \rangle,$$

где линки вершин наделяются ориентациями, индуцированными ориентацией сферы L. Дифференциал $\partial : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_0$ полагается нулевым. Легко проверить, что $\partial^2 = 0$.

Прямая сумма

$$\mathcal{T}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$$

превращается в суперкоммутативное ассоциативное дифференциальное градуированное кольцо (с понижающим ориентацию дифференциалом) при помощи умножения, задаваемого на образующих по формуле

$$\langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle = \langle L_1 * L_2 \rangle.$$

Непосредственно проверяется, что имеет место формула Лейбница

$$\partial(\lambda\mu) = (\partial\lambda)\mu + (-1)^l \lambda \partial\mu, \tag{1.1}$$

где $\lambda \in \mathcal{T}_l$, $\mu \in \mathcal{T}_m$. Мы будем называть кольцо $\mathcal{T}_*$ *дифференциальным градуированным кольцом ориентированных комбинаторных сфер.*

Замечание 1.1.1. Отметим, что имеется определённое сходство между кольцом $\mathcal{T}_*$ и определённым в 2008 году В. М. Бухштабером [5] *кольцом простых многогранников* $\mathcal{P}_*$. Сопоставляя каждому простому многограннику комбинаторную сферу — границу двойственного симплициального многогранника, мы получим, что гиперграням простого многогранника соответствуют линки вершин комбинаторной сферы и прямому произведению простых многогранников соответствует джойн комбинаторных сфер. Таким образом, на первый взгляд, умножение и дифференциал в кольце Бухштабера в точности соответствуют умножению и дифференциалу в кольце $\mathcal{T}_*$. Тем не менее в действительности между кольцами $\mathcal{T}_*$ и $\mathcal{P}_*$ имеется кардинальное отличие. Оно заключается в том, что образующие кольца $\mathcal{T}_*$ соответствуют *ориентированным* комбинаторным сферам, причём образующая *меняет знак* при обращении ориентации, в то время как образующие кольца $\mathcal{P}_*$ соответствуют простым многогранникам *без выбранной ориентации*. В результате в случае кольца $\mathcal{T}_*$ мы имеем равенство $\partial^2 = 0$, что позволяет нам изучать гомологии кольца $\mathcal{T}_*$, а в случае кольца $\mathcal{P}_*$ дифференциал D (определяемый по такой же формуле, что и ∂) в квадрате не обращается в нуль, что позволило В. М. Бухштаберу получить много важных результатов о связи кольца простых многогранников $\mathcal{P}_*$ с дифференциальными операторами и уравнениями в частных производных.

Если в определении цепного комплекса $\mathcal{T}_*$ в качестве образующих вместо классов изоморфизма $\langle L\rangle$ всех ориентированных комбинаторных сфер взять классы изоморфизма $\langle K\rangle$ всех ориентированных (замкнутых) комбинаторных многообразий с теми же соотношениями $\langle -K\rangle = -\langle K\rangle$, мы получим больший цепной комплекс $\widetilde{\mathcal{T}}_* \supset \mathcal{T}_*$ с таким же дифференциалом

$$\partial\langle K\rangle = \sum_{v\in V(K)} \langle \operatorname{link} v\rangle, \tag{1.2}$$

квадрат которого равен нулю. Отметим, однако, что цепной комплекс $\widetilde{\mathcal{T}}_*$ не будет кольцом, так как джойн двух комбинаторных многообразий вообще говоря не является комбинаторным многообразием.

Если K — ориентированное n-мерное комбинаторное многообразие, линки его вершин являются ориентированными $(n-1)$-мерными комбинаторными сферами. Поэтому правая часть формулы (1.2) принадлежит подгруппе $\mathcal{T}_n \subset \widetilde{\mathcal{T}}_n$. Из того, что $\partial^2 = 0$ в комплексе $\widetilde{\mathcal{T}}_n$, следует, что элемент $\partial\langle K\rangle$ является циклом в цепном комплексе $\mathcal{T}_*$. Однако, будучи границей в цепном комплексе $\widetilde{\mathcal{T}}_*$, он не обязан быть границей в цепном комплексе $\mathcal{T}_*$. Нас будет интересовать класс гомологий, представляемый этим элементом в группе $H_n(\mathcal{T}_*)$.

Предложение 1.1.2. *Если два ориентированных n-мерных комбинаторных многообразия K_1 и K_2 ориентированно кобордантны, то циклы $\partial\langle K_1\rangle$ и $\partial\langle K_2\rangle$ гомологичны в цепном комплексе $\mathcal{T}_*$. Таким образом, дифференциал ∂ комплекса $\widetilde{\mathcal{T}}_*$ индуцирует гомоморфизм градуированных групп $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$.*

Доказательство. Для доказательства этого предложения нам будет полезно ввести ещё один цепной комплекс $\widetilde{\widetilde{\mathcal{T}}}_*$. *Комбинаторным многообразием с коническими особенностями* мы будем называть псевдомногообразие, линки всех вершин которого являются комбинаторными многообразиями. Определение цепного комплекса $\widetilde{\widetilde{\mathcal{T}}}_*$ дословно повторяет определение комплексов $\mathcal{T}_*$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_*$, если вместо ориентированных комбинаторных сфер и ориентированных комбинаторных многообразий соответственно везде рассматривать ориентированные комбинаторные многообразия с коническими особенностями.

Пусть теперь W — ориентированное комбинаторное многообразие с краем, осуществляющее ориентированный кобордизм между комбинаторными многообразиями K_1 и K_2, то есть такое, что его край изоморфен $K_1 \sqcup (-K_2)$. Приклеим к краю многообразия W конусы $\operatorname{cone} K_1$ и $\operatorname{cone} K_2$ с вершинами u_1 и u_2 соответственно и обозначим через Z полученное ориентированное комбинаторное многообразие с коническими особенностями. Линки вершин u_1 и u_2 в Z изоморфны $-K_1$ и K_2 соответственно. Значит,

$$\partial\langle Z\rangle = -\langle K_1\rangle + \langle K_2\rangle + \sum_{v\in V(W)} \langle \operatorname{link}_Z v\rangle.$$

Применив к обеим частям этого равенства дифференциал ∂, получим

$$\partial\langle K_1\rangle - \partial\langle K_2\rangle = \sum_{v\in V(W)} \partial\langle \operatorname{link}_Z v\rangle.$$

Правая часть этого равенства является границей в комплексе $\mathcal{T}_*$, так как линки в Z всех вершин, отличных от u_1 и u_2, являются комбинаторными сферами. Значит, циклы $\partial\langle K_1\rangle$ и $\partial\langle K_2\rangle$ гомологичны в цепном комплексе $\mathcal{T}_*$. $\square$

Предложение 1.1.3. *Гомоморфизм $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$ является мультипликативным с точностью до элементов порядка 2.*

Для того, чтобы доказать это предложение, нам вначале нужно будет исследовать свойства *оператора барицентрического подразделения* $\beta : \mathcal{T}_* \to \mathcal{T}_*$, определяемого по формуле $\beta\langle L\rangle = \langle L'\rangle$.

Предложение 1.1.4. *Отображение β является цепным по модулю элементов порядка 2, то есть $2(\partial\beta - \beta\partial)\xi = 0$ для любого $\xi \in \mathcal{T}_*$.*

Доказательство. Пусть L — ориентированная комбинаторная сфера. Если вершина комбинаторной сферы L' является барицентром симплекса положительной размерности, её линк обладает обращающим ориентацию автоморфизмом и, значит, является элементом порядка 2 в группе $\mathcal{T}_*$. Линк в комбинаторной сфере L' вершины v комбинаторной сферы L изоморфен барицентрическому подразделению линка вершины v в L. Поэтому

$$\partial\langle L'\rangle = \sum_{v\in V(L)} \langle \mathrm{link}_L\, v\rangle' + [\text{элементы порядка } 2].$$

$\square$

Имеется стандартная конструкция, сопоставляющая каждому симплициальному комплексу L симплициальное разбиение Z цилиндра $L\times[0,1]$ такое, что ограничение Z на нижнее основание $L\times 0$ есть L и ограничение Z на верхнее основание $L\times 1$ есть L' (см., например, [25]). Для каждого симплекса σ комплекса L обозначим через $b(\sigma)$ его барицентр. Тогда Z есть симплициальный комплекс, составленный из симплексов, натянутых на всевозможные наборы вершин вида

$$(v_1,0),\dots,(v_k,0),(b(\sigma_1),1),\dots,(b(\sigma_l),1),$$

где $v_1,\dots,v_k$ — различные вершины комплекса Y, содержащиеся в некотором $(k-1)$-мерном симплексе τ, и $\sigma_1,\dots,\sigma_l$ — различные симплексы комплекса L, такие что $\tau\subset\sigma_1\subset\ldots\subset\sigma_l$.

Пусть теперь L является $(n-1)$-мерной комбинаторной сферой. Тогда Z есть кусочно линейная триангуляция цилиндра $S^{n-1}\times[0,1]$, с краем, который состоит из двух компонент, одна из которых изоморфна L, а вторая изоморфна L'. Заклеим эти компоненты края конусами $\mathrm{cone}(L)$ и $\mathrm{cone}(L')$ соответственно. В результате мы получим n-мерную комбинаторную сферу, для которой мы будем использовать обозначение $\widehat{L}$.

Комбинаторная сфера $\widehat{L}$ имеет вершины четырех типов:

1) вершина u_0 конуса $\mathrm{cone}(L)$;

2) вершины вида $(v, 0)$, где v — вершина комбинаторной сферы L;

3) вершины вида $(b(\sigma), 1)$, где σ — симплекс комбинаторной сферы L;

4) вершина u_1 конуса $\mathrm{cone}(L')$.

Если комбинаторная сфера L ориентирована, мы выберем на комбинаторной сфере $\widehat{L}$ такую ориентацию, что $\mathrm{link}\, u_1 \cong L'$ и $\mathrm{link}\, u_0 \cong -L$.

Предложение 1.1.5. *Отображение β цепно гомотопно тождественному по модулю элементов порядка 2, то есть существует линейное отображение $D : \mathcal{T}_* \to \mathcal{T}_*$ степени 1, такое что*

$$\beta\xi - \xi = \partial D\xi + D\partial\xi + [\text{элементы порядка 2}]$$

для любого $\xi \in \mathcal{T}_*$.

Доказательство. Определим отображение D на образующих по формуле $D\langle L\rangle = \langle\widehat{L}\rangle$. Линк каждой вершины $(v, 0)$ комбинаторной сферы $\widehat{L}$ изоморфен с обращением ориентации комбинаторной сфере $\widehat{\mathrm{link}_L v}$. Линк каждой вершины $(b(\sigma), 1)$ обладает обращающим ориентацию автоморфизмом и, следовательно, является элементом порядка 2 в группе $\mathcal{T}_*$. Значит,

$$\partial D\langle L\rangle = \langle L'\rangle - \langle L\rangle - \sum_{v \in V(L)} \langle\widehat{\mathrm{link}_Y v}\rangle + [\text{элементы порядка 2}] =$$

$$= \beta\langle L\rangle - \langle L\rangle - D\partial\langle L\rangle + [\text{элементы порядка 2}].$$

□

Следствие 1.1.6. *Отображение $(2\beta)_* : H_*(\mathcal{T}_*) \to H_*(\mathcal{T}_*)$ совпадает с умножением на 2.*

Доказательство предложения 1.1.3. Пусть K_1, K_2 — два ориентированных комбинаторных многообразия. Рассмотрим произведение $K_1 \times K_2$. Это — комплекс, склеенный из клеток, каждая из которых является произведением симплексов. Тогда $K = (K_1 \times K_2)'$ — ориентированное комбинаторное многообразие и $[K] = [K_1][K_2]$ в кольце Ω_*^{SPL}. Каждая вершина комбинаторного многообразия K имеет вид $(b(\sigma_1), b(\sigma_2))$, где σ_1 и σ_2 — симплексы комбинаторных многообразий K_1 и K_2 соответственно. При этом

$$\operatorname{link}_K(b(\sigma_1), b(\sigma_2)) \cong (-1)^{\operatorname{codim}\sigma_1 \dim\sigma_2}(\partial(\sigma_1 \times \sigma_2))' * (\operatorname{link}_{K_1}\sigma_1 * \operatorname{link}_{K_2}\sigma_2)'.$$

Если $\dim\sigma_1 \neq 0$ или $\dim\sigma_2 \neq 0$, то комбинаторная сфера $(\partial(\sigma_1 \times \sigma_2))'$ обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Значит, комбинаторная сфера $\operatorname{link}_K(b(\sigma_1), b(\sigma_2))$ также обладает обращающим ориентацию автоморфизмом и, следовательно, является элементом порядка 2 в группе $\mathcal{T}_*$. Значит,

$$\partial\langle K\rangle = \sum_{v_1 \in V(K_1)} \sum_{v_2 \in V(K_2)} \langle(\operatorname{link}_{K_1} v_1 * \operatorname{link}_{K_2} v_2)'\rangle + [\text{элементы порядка } 2] =$$

$$= \beta((\partial\langle K_1\rangle)(\partial\langle K_2\rangle)) + [\text{элементы порядка } 2].$$

Следовательно, в кольце $H_*(\mathcal{T}_*)$ имеет место равенство

$$2\partial_*([K_1][K_2]) = (2\beta)_*((\partial_*[K_1])(\partial_*[K_2])) = 2(\partial_*[K_1])(\partial_*[K_2]).$$

$\square$

Основным нашим результатом о дифференциальном кольце $\mathcal{T}_*$ является следующая теорема.

Теорема 1.1.7. *Ядро и коядро гомоморфизма* $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$ *являются группами кручения. Таким образом, гомоморфизм*

$$\partial_* \otimes \mathbb{Q} : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q} \to H_*(\mathcal{T}_*) \otimes \mathbb{Q}$$

является изоморфизмом градуированных колец.

Хорошо известно, что естественный гомоморфизм кольца Ω_*^{SO} кобордизмов ориентированных гладких многообразий в кольцо Ω_*^{SPL} индуцирует мультипликативный изоморфизм

$$\Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q} \cong \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}\left[[\mathbb{C}\mathrm{P}^2], [\mathbb{C}\mathrm{P}^4], [\mathbb{C}\mathrm{P}^6], \ldots\right].$$

Отметим также, что $H_*(\mathcal{T}_* \otimes \mathbb{Q}) = H_*(\mathcal{T}_*) \otimes \mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы 1.1.7 тесно связано с задачей о построении ориентированного комбинаторного многообразия с заданным набором линков вершин; оно будет дано в главе 4.

1.2 Универсальные локальные формулы

Наш подход к комбинаторному вычислению рациональных классов Понтрягина комбинаторных многообразий основан на том, что мы ищем симплициальный цикл, представляющий класс гомологий, двойственный по Пуанкаре интересующему нас однородному полиному F от рациональных классов Понтрягина комбинаторного многообразия K, в виде *универсальной локальной формулы*

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma \in K,\, \dim \sigma = m-n} f\big(\langle \operatorname{link} \sigma \rangle\big)\sigma, \tag{1.3}$$

где $f \in \operatorname{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q})$. Здесь n — степень полинома F, если считать степень переменной p_i равной $4i$. Если многообразие K неориентируемо, цикл $f_\sharp(K)$ лежит в *коориентированнных симплициальных цепях многообразия* K (см. определение ниже). Универсальность формулы (1.3) заключается в том, что гомоморфизм f не зависит от комбинаторного многообразия K.

Изначально мотивацией для такого подхода послужили следующие три результата.

1. А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд и М. В. Лосик [14] получили в частном случае брауэровских многообразий, удовлетворяющих некоторому специальному дополнительному условию, комбинаторную формулу для первого рационального класса Понтрягина, дающую коориентированный цикл коразмерности 4, в котором коэффициент при каждом симплексе зависит только от класса изоморфизма его линка.

2. Н. Левитт и К. Рурк [98] доказали, что для каждого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует функция, сопоставляющая каждому комбинаторному многообразию K симплициальный цикл, в котором коэффициент при каждом симплексе полностью определяется комбинаторным строением звезды этого симплекса. Эта теорема является только теоремой существования, не дающей никакой явной формулы. Результат Н. Левитта и К. Рурка слабее, чем результат о существовании универсальной формулы вида (1.3). Дело в том, что звезда симплекса несёт в себе немного больше информации, чем его линк, а именно, она несёт в себе информацию о размерности многообразия K. Таким образом, в наших терминах результат Н. Левитта и К. Рурка может быть сформулирован следующим образом. (Н. Левитт и К. Рурк конечно же формулировали его по-другому, так как они не рассматривали комплекс $\mathcal{T}_*$.)

Теорема 1.2.1. *Пусть* $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ — *однородный полином степени* $n = 4k$, *где* $\deg p_i = 4i$. *Тогда для каждого* $m \geqslant n$ *существует функция* $f_m \in \mathrm{Hom}(T_n, \mathbb{Q})$ *такая, что для любого* m*-мерного ориентированного комбинаторного многообразия* K *цепь* $f_{m\sharp}(K)$ *является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре классу* $F\bigl(p_1(K), p_2(K), \ldots\bigr)$, *где* $p_i(K)$ — *рациональные классы Понтрягина многообразия* K.

Доказательство Н. Левитта и К. Рурка основано на построении комбинаторной модели для классифицирующего пространства $\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{PL}}_m$ так называемых *блочных расслоений*. При этом функции f_m для различных m (но для одного и того же полинома F) никак не связаны между собой.

3. Дж. Чигер нашёл явные формулы для L-полиномов Хирцебруха от *вещественных* классов Понтрягина комбинаторных многообразий, дающие циклы, в которых коэффициенты при симплексах зависят только классов изоморфизма их линков. Эти коэффициенты выражаются в аналитических терминах — в терминах спектра оператора Лапласа в пространстве L^2-форм на линке, снабжённом стандартной локальной плоской метрикой. Поэтому для этих коэффициентов нет комбинаторного алгоритма их вычисления; кроме того, неясно, являются ли они рациональными.

Наш подход основан на том, чтобы вначале изучить циклы, задаваемые универсальными локальными формулами вида (1.3), а потом уже выяснить, что эти циклы представляют классы гомологий, двойственные по Пуанкаре полиномам от рациональных классов Понтрягина.

Так как мы хотим писать формулы для циклов, представляющих классы гомологий, двойственные классам Понтрягина не только ориентируемых, но и неориентируемых многообразий, мы, следуя [13], будем работать с так называемыми *коориентированными симплициальными цепями.*

Пусть K — m-мерное комбинаторное многообразие, G — абелева группа. Обозначим через $\mathcal{G}$ ориентирующий пучок многообразия $|K|$ со слоем, изоморфным G. *Коориентацией симплекса* $\sigma \in K$ называется ориентация линка симплекса σ. Любой m-мерный симплекс считается положительно коориентированным. Обозначим через $\widehat{C}_*(K;G)$ цепной комплекс коориентированных цепей комплекса K с коэффициентами в G, через $\widehat{\partial}$ – граничный оператор этого комплекса (коэффициент инцидентности двух коориентированных симплексов $\tau \subset \sigma$, размерности которых отличаются на 1, равен $+1$, если ориентация $\operatorname{link}\sigma$ индуцирована ориентацией $\operatorname{link}\tau$, и -1 в противном случае). Гомологии комплекса $\widehat{C}_*(K;G)$ совпадают с гомологиями $H_*(|K|;\mathcal{G})$. Если многообразие K ориентировано, комплекс $\widehat{C}_*(K;G)$ естественным образом изоморфен стандартному комплексу симплициальных цепей $C_*(K;G)$.

Нам будет удобно ввести обозначение

$$\mathcal{T}^n(G) = \operatorname{Hom}(\mathcal{T}_n, G).$$

Тогда

$$\mathcal{T}^*(G) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}^n(G)$$

есть коцепной комплекс с дифференциалом, определяемым по формуле

$$(\delta f)\big(\langle L\rangle\big) = (-1)^n \sum_{v \in V(L)} f\big(\langle \operatorname{link} v\rangle\big), \tag{1.4}$$

где $f \in \mathcal{T}^n(G)$. Если G — коммутативное кольцо с единицей, умножение в кольце $\mathcal{T}_*$ индуцирует на комплексе $\mathcal{T}^*(G)$ структуру суперкокоммутативной коассоциативной дифференциальной градуированной коалгебры с повышающим ориентацию дифференциалом.

Пусть $f \in \mathcal{T}^n(G)$ и K — m-мерное комбинаторное многообразие. Определим коориентированную симплициальную цепь $f_\sharp(K) \in \widehat{C}_{m-n}(K;G)$ по формуле (1.3). Здесь каждый симплекс σ наделяется произвольной коориентацией; знак слагаемого $f\big(\langle \operatorname{link}\sigma\rangle\big)\sigma$ не зависит от выбранной коориентации симплекса σ.

В основном нас будет интересовать случай $G = \mathbb{Q}$. В этом случае ориентирующий пучок будет обозначаться через $\mathcal{Q}$. Так как гомологии цепного комплекса $\mathcal{T}_* \otimes \mathbb{Q}$ конечномерны в каждой размерности, имеется невырожденное спаривание

$$H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \otimes H_*(\mathcal{T}_* \otimes \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}.$$

С другой стороны, хорошо известно, что имеется невырожденное спаривание

$$\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] \otimes (\Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q},$$

задаваемого числами Понтрягина. Поэтому из теоремы 1.1.7 сразу получаем следующий результат.

Теорема 1.2.2. *Имеется изоморфизм градуированных коалгебр*

$$\delta^* : H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots],$$

сопряжённый изоморфизму $\partial_* \otimes \mathbb{Q}$. Если $\psi \in H^{4k}(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ и $\delta^*(\psi) = F$, то для любого коцикла f, представляющего класс когомологий ψ и любого ориентированного $4k$-мерного комбинаторного многообразия K имеет место равенство

$$F(p_1, p_2, \ldots)[K] = \sum_{v \in V(K)} f(\langle \operatorname{link} v\rangle), \tag{1.5}$$

где $F(p_1, p_2, \ldots)[K]$ — число Понтрягина многообразия K, соответствующее полиному F.

Определение 1.2.3. Функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ называется (*универсальной*) *локальной формулой* для однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ степени n, если для любого комбинаторного многообразия K цепь $f_\sharp(K)$ является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре классу $F\bigl(p_1(K), p_2(K), \ldots\bigr)$.

Нашим основным результатом об универсальных локальных формулах является следующая теорема. Мы рассматриваем обратный вопрос к вопросу о нахождении локальных комбинаторных формул для классов Понтрягина: пусть функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ такова, что цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K; что можно сказать о классах гомологий, представляемых циклами $f_\sharp(K)$?

Теорема 1.2.4. *Следующие условия на функцию $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ эквивалентны:*

1) цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K;

2) f — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, то есть $\delta f = 0$;

3) f является универсальной локальной формулой для некоторого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина.

При этом если f — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, представляющий класс когомологий ψ, и $\delta^*(\psi) = F$, то f — универсальная локальная формула для полинома F от рациональных классов Понтрягина. Таким образом, универсальная локальная формула для каждого однородного полинома от *рациональных классов Понтрягина существует и единственна с точностью до прибавления кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.*

Часть теоремы 1.2.4, утверждающая, что для любого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует универсальная локальная формула, является усилением теоремы Левитта–Рурка.

Сформулируем одно простое следствие предложений 1.1.4 и 1.1.5, которое будет нам полезно при доказательстве теоремы $\psi_m^\sharp(M)$.

Предложение 1.2.5. *Отображение $\beta^* : \mathcal{T}^*(\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, определяемое по формуле*

$$(\beta^* f)(\langle L\rangle) = f(\langle L'\rangle),$$

является цепным и цепно гомотопно тождественному.

Доказательство теоремы 1.2.4. Докажем вначале эквивалентность первых двух условий на функцию f. Легко проверить, что для любой функции $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ выполнено равенство

$$\widehat{\partial} f_\sharp(K) = (-1)^n (\delta f)_\sharp(K). \tag{1.6}$$

Из него сразу следует, что если f — коцикл, то цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K. Обратно: предположим, что $\delta f \neq 0$. Тогда существует ориентированная n-мерная комбинаторная сфера L такая, что $(\delta f)(\langle L\rangle) \neq 0$. Очевидно, что существует комбинаторное многообразие K такое, что $\operatorname{link}\sigma \cong L$ для некоторого симплекса $\sigma \in K$. Симплекс σ входит в цепь $\widehat{\partial} f_\sharp(K)$ с коэффициентом $(-1)^n(\delta f)(\langle L\rangle) \neq 0$. Следовательно, $f_\sharp(K)$ не цикл.

Нам осталось доказать, что если $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, представляющий класс когомологий ψ, и $\delta^*(\psi) = F$, то для любого комбинаторного многообразия K цепь $f_\sharp(K)$ является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре классу когомологий $F(p_1(K), p_2(K), \ldots)$. Если $\dim K = n$, это утверждение сразу вытекает из формулы (1.5).

Рассмотрим теперь случай $\dim K = m > n$.

Предложение 1.2.6. *Пусть $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$, M — m-мерное кусочно линейное многообразие и $m > n$; тогда класс гомологий цикла $f_\sharp(K)$ не зависит от выбора коцикла f, представляющего класс ψ, и кусочно линейной триангуляции K многообразия M.*

Доказательство. Из равенства (1.6) следует, что цикл $f_\sharp(K)$ изменяется на гомологичный при прибавлении к f кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Поэтому нам достаточно доказать, что класс гомологий цикла $f_\sharp(K)$ в группе $H_{m-n}(M; \mathcal{Q})$ не зависит от выбора кусочно линейной триангуляции K кусочно линейного многообразия M. Напомним, что звёздным подразделением симплекса $\sigma \in K$ называется операция, состоящая в замене подкомплекса $\sigma * \operatorname{link} \sigma \subset K$ на подкомплекс $(\operatorname{cone} \partial\sigma) * \operatorname{link} \sigma$. Согласно теореме Александера [49], две кусочно линейные триангуляции одного и того же полиэдра переводятся друг в друга последовательностью из звездных подразделений симплексов и преобразований, обратных к звездным подразделениям симплексов. Поэтому нам достаточно доказать, что циклы $f_\sharp(K_1)$ и $f_\sharp(K_2)$ гомологичны в том случае, когда триангуляция K_2 получается из K_1 одним звёздным подразделением некоторого симплекса $\sigma \in K_1$. Но тогда носитель цикла $f_\sharp(K_2) - f_\sharp(K_1)$ лежит в замкнутой звезде симплекса σ, которая стягиваема. Если $m > n$, то размерность цикла $f_\sharp(K_2) - f_\sharp(K_1)$ положительна. Поэтому он гомологичен нулю. $\square$

В условиях предложения 1.2.6 мы будем обозначать класс гомологий цикла $f_\sharp(K)$ через $\psi_\sharp(M)$, а двойственный ему по Пуанкаре класс когомологий, лежащий в группе $H^n(M;\mathbb{Q})$ — через $\psi^\sharp(M)$. Отметим, что, как мы уже доказали, класс когомологий $\psi^\sharp(M)$ не зависит от выбора коцикла f и триангуляции K и при $m = n$ — в этом случае он равен $F(p_1(M), p_2(M), \ldots)$ в силу формулы (1.5). Нам нужно доказать, что равенство

$$\psi^\sharp(M) = F(p_1(M), p_2(M), \ldots) \tag{1.7}$$

имеет место при всех m.

Пусть $i : N \hookrightarrow M$ — кусочно линейное вложение k-мерного кусочно линейного многообразия N в m-мерное кусочно линейное многообразие N. Предположим, что это вложение имеет *тривиальное нормальное расслоение*, то есть имеется кусочно линейное вложение $N \times \Delta^{m-k} \hookrightarrow M$, ограничение которого на $N \times b(\Delta^{m-k})$ совпадает с исходным вложением i.

Предложение 1.2.7. *Ограничение класса когомологий $\psi^\sharp(M)$ на N, зависит лишь от многообразия N и числа m и не зависит от выбора m-мерного многообразия M и вложения i с тривиальным нормальным расслоением.*

Доказательство. Пусть $i_j : N \hookrightarrow M_j$, $j = 1, 2,$ — два вложения с тривиальными нормальными расслоениями в m-мерные многообразия. Тогда окрестности подмногообразий $i_j(N)$ в многообразиях M_j кусочно линейно гомеоморфны друг другу, значит, мы можем выбрать кусочно линейные триангуляции K_1 и K_2 многообразий M_1 и M_2 так, что они одинаково устроены в окрестности подмногообразий $i_j(N)$. Теперь очевидно, что классы гомологий циклов $f_\sharp(K_j)$ высекают на подмногообразии N один и тот же класс гомологий. $\square$

Мы будем обозначать класс когомологий $i^*(\psi^\sharp(M))$, где $i : N \hookrightarrow M$ — вложение с тривиальным нормальным расслоением и $\dim M = m$, через $\psi^\sharp_m(N)$. Очевидно, что $\psi^\sharp_m(M) = \psi^\sharp(M)$, если $\dim M = m$.

Предложение 1.2.8. *Для любого m-мерного кусочно линейного многообразия M имеет место равенство $\psi^\sharp_{m+1}(M) = \psi^\sharp(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим стандартное вложение $M \subset M \times \partial\Delta^2$. Оно конечно же имеет тривиальное нормальное расслоение. Значит, нам нужно доказать, что ограничение класса $\psi^\sharp(M \times \partial\Delta^2)$ на M равно $\psi^\sharp(M)$. Пусть K — какая-нибудь кусочно линейная триангуляция многообразия M. Тогда $K \times \partial\Delta^2$ — кусочно линейное разбиение многообразия $M \times \partial\Delta^2$ на клетки, являющиеся произведениями симплексов на отрезки. Обозначим через J барицентрическое подразделение этого разбиения. Пусть $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ — какой-нибудь коцикл, представляющий класс когомологий ψ. Нам нужно доказать, что класс гомологий цикла $f_\sharp(J)$ является $\times$-произведением класса гомологий цикла $f_\sharp(K)$ на фундаментальный класс окружности $\partial\Delta^2$. Выделим в триангуляции J все $(m-n+1)$-мерные симплексы τ, которые содержатся в произведении какого-нибудь $(m-n)$-мерного симплекса σ комплекса K на $\partial\Delta^2$. Очевидно, что для каждого такого симплекса τ имеет место изоморфизм $\operatorname{link}_J \tau \cong (\operatorname{link}_K \sigma)'$. Значит, такой симплекс τ входит в цикл $f_\sharp(J)$ с коэффициентом $f(\langle \operatorname{link}_J \tau \rangle) = (\beta^* f)(\langle \operatorname{link}_K \sigma \rangle)$. С другой стороны, легко проверить, что все остальные $(m-n+1)$-мерные симплексы триангуляции J входят в цикл $f_\sharp(J)$ с нулевыми коэффициентами, так как их линки допускают обращающие ориентацию автоморфизмы. Следовательно, класс гомологий цикла $f_\sharp(J)$ является $\times$-произведением класса гомологий цикла $(\beta^* f)_\sharp(K)$ на фундаментальный класс окружности $\partial\Delta^2$. Осталось заметить, что циклы $f_\sharp(K)$ и $(\beta^* f)_\sharp(K)$ гомологичны, так как отображение β^* цепно гомотопно тождественному. $\square$

Следствие 1.2.9. *Для любого m-мерного кусочно линейного многообразия M и любого $r \geqslant m$ имеет место равенство $\psi^\sharp_r(M) = \psi^\sharp(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим стандартное вложение $M \subset M \times (\partial\Delta^2)^r$. Применяя r раз предыдущее предложение, получим, что ограничение класса когомологий $\psi^\sharp\big(M \times (\partial\Delta^2)^r\big)$ на M равно $\psi^\sharp(M)$. $\square$

Рассмотрим теперь ориентированное m-мерное кусочно линейное многообразие M. Из следствия 1.2.9 и формулы (1.5) получаем, что

$$\big\langle \psi^\sharp(M), [N] \big\rangle = \big\langle \psi^\sharp(M), [N] \big\rangle = F(p_1, p_2, \ldots)[N] \tag{1.8}$$

для любого n-мерного подмногообразия $N \subset M$ с тривиальным нормальным расслоением. Согласно теореме Тома, при $m > 2n+1$ любой целочисленный n-мерный класс гомологий многообразия M реализуется с некоторой кратностью кусочно линейным подмногообразием с тривиальным нормальным расслоением, значит, равенство (1.8) однозначно характеризует класс когомологий $F(p_1(M), p_2(M), \ldots)$. Таким образом, формула (1.7) верна для ориентируемых многообразий M размерности $m > 2n+1$.

Пусть теперь $n < m \leqslant 2n+1$. Рассмотрим стандартное вложение $i : M \hookrightarrow M \times \partial\Delta^{n+2}$. Тогда

$$i^*\left(\psi^\sharp(M \times \partial\Delta^{n+2})\right) = \psi^\sharp(M).$$

Значит, формула (1.7) для многообразия M следует из формулы (1.7) для многообразия $M \times \partial\Delta^{n+2}$, размерность которого больше $2n+1$.

Пусть теперь M неориентируемо, $\widetilde{M}$ – его ориентируемое двулистное накрытие, $\pi : \widetilde{M} \to M$ – проекция. Равенство (1.7) для многообразия M следует из равенства (1.7) для многообразия $\widetilde{M}$ и того, что $\pi^*(\psi^\sharp(M)) = \psi^\sharp\bigl(\widetilde{M}\bigr)$, $\pi^*(p_i(M)) = p_i\bigl(\widetilde{M}\bigr)$ и π^* – мономорфизм. $\square$

1.3 Существование алгоритмов для вычисления локальных формул

Теорема 1.3.1. *Пусть $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ – произвольный класс когомологий. Тогда существует коцикл (универсальная локальная формула) f, представляющий класс когомологий ψ, такой, что задача вычисления значения $f(\langle L\rangle)$ по заданной ориентированной $(n-1)$-мерной комбинаторной сфере L алгоритмически разрешима.*

Замечание 1.3.2. С. П. Новиков [11] доказал, что проверка того, является ли $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс L комбинаторной сферой, — алгоритмически неразрешимая задача при $n \geqslant 6$. Точная формулировка теоремы 1.3.1 выглядит следующим образом: существует алгоритм, который получает на входе ориентированный $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс L, выдает на выходе значение $f(\langle L\rangle)$, если L — комбинаторная сфера, и работает бесконечно долго, если L не комбинаторная сфера.

Будем рассматривать бесконечные векторы $b = (b_i)_{i=1}^{\infty}$, $b_i \in \mathbb{Q}$, и бесконечные матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. Матрицу A будем называть *финитной по строкам*, если в каждой ее строке содержится лишь конечное число отличных от нуля элементов. Корректно определено произведение финитной по строкам матрицы на вектор. Произведение двух матриц, финитных по строкам, снова является матрицей, финитной по строкам. Бесконечный вектор b назовем *вычислимым*, если существует алгоритм, вычисляющий число b_i по числу i. Финитную по строкам матрицу A назовем *вычислимой*, если, во-первых, существует алгоритм, вычисляющий значение a_{ij} по числам i и j, а во-вторых, существует алгоритм, вычисляющий по натуральному числу i число $j_0(i)$ такое, что $a_{ij} = 0$ для любого $j > j_0(i)$. В дальнейшем все матрицы предполагаются финитными по строкам. Обозначим через $r_i(A)$ ранг матрицы, состоящей из i первых строк матрицы A. Если матрица A вычислима, то вектор $r(A)$ тоже вычислим.

Предложение 1.3.3. *Пусть A – вычислимая матрица, b – вычислимый вектор. Предположим, что линейная система $Ax = b$ имеет единственное решение x^0. Тогда вектор x^0 вычислим.*

Доказательство. Дополним систему уравнений $Ax = b$ уравнением $x_k = x_k^0 + 1$. Полученная система уравнений не имеет решений. Значит, некоторая ее конечная подсистема не имеет решений. Следовательно, значение x_k^0 однозначно определяется из некоторой конечной подсистемы системы $Ax^0 = b$. □

Предложение 1.3.4. *Пусть A и B – вычислимые матрицы такие, что $AB = 0$. Пусть b – вычислимый вектор. Предположим, что система $Ax = b$ имеет решение, а любое решение однородной системы $Ax = 0$ имеет вид $x = Bz$. Тогда система $Ax = b$ имеет вычислимое решение.*

Доказательство. Очевидно, что для любого $i > 1$ либо $r_i(B) = r_{i-1}(B)$, либо $r_i(B) = r_{i-1}(B) + 1$. Пусть $l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$ – набор, состоящий из всех чисел i таких, что $r_i(B) = r_{i-1}(B) + 1$ ($l_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $r_1(B) = 1$). Этот набор может быть как конечным, так и бесконечным. В любом случае вектор $l = (l_i)$ вычислим. Для любого бесконечного вектора v обозначим через $\widehat{v}$ вектор, состоящий из координат вектора v с номерами $l_1, l_2, l_3, \ldots$. Обозначим через $\widehat{B}$ матрицу, состоящую из строк матрицы B с номерами $l_1, l_2, l_3, \ldots$. Очевидно, что для любого вектора u система $\widehat{B}z = \widehat{u}$ имеет решение (так как любая ее конечная подсистема имеет решение). Каждая строка матрицы B является конечной линейной комбинацией строк матрицы $\widehat{B}$. Поэтому если $\widehat{B}z = 0$, то $Bz = 0$.

Дополним систему $Ax = b$ уравнениями $x_{l_1} = 0,\ \ x_{l_2} = 0,\ \ \ldots$, расположив их через одно с уравнениями системы $Ax = b$. Пусть $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ – полученная система. Матрица $\widetilde{A}$ и вектор $\widetilde{b}$ вычислимы. Поэтому для доказательства предложения достаточно показать, что система $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ имеет только одно решение.

Пусть y – произвольное решение системы $Ax = b$. Обозначим через z^0 решение системы $\widehat{B}z = -\widehat{y}$. Тогда вектор $x^0 = y + Bz^0$ является решением системы $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$.

Пусть x^* – решение однородной системы $\widetilde{A}x = 0$. Тогда $x^* = Bz^*$ для некоторого вектора z^*. При этом $\widehat{B}z^* = 0$, так как $0 = x^*_{l_1} = x^*_{l_2} = \ldots$. Значит, $x^* = 0$. Следовательно, решение системы $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ единственно. $\square$

Доказательство теоремы 1.3.1. Для любого m множество классов изоморфизма ориентированных $(m-1)$-мерных комбинаторных сфер является перечислимым. Это следует, например, из того, что любая комбинаторная сфера получается из границы симплекса с помощью конечной последовательности бизвездных преобразований (см. определение ниже в разделе 2.1). Значит, существует алгоритм, выписывающий бесконечную последовательность $(m-1)$-мерных комбинаторных сфер, не обладающих обращающими ориентацию автоморфизмами такую, что в этой последовательности из каждой пары изоморфных с обращением ориентации $(m-1)$-мерных комбинаторных сфер, не обладающих обращающими ориентацию автоморфизмами, встречается ровно одна и ровно один раз.

Обозначим через $(K_1, K_2, \dots)$, $(L_1, L_2, \dots)$ и $(J_1, J_2, \dots)$ такие последовательности для $m = n+1, n$ и $n-1$ соответственно. Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ – ориентированные комбинаторные многообразия, образующие базис в векторном пространстве $\Omega_n \otimes \mathbb{Q}$. Положим $Q_j = K_{j-k}$ при $j > k$. Будем отождествлять произвольную функцию $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ с бесконечным вектором $v_f = (f(\langle L_1 \rangle), f(\langle L_2 \rangle), \dots)^{\mathrm{T}}$, произвольную функцию $g \in \mathcal{T}^{n-1}(\mathbb{Q})$ – с бесконечным вектором $v_g = (g(\langle J_1 \rangle), g(\langle J_2 \rangle), \dots)^{\mathrm{T}}$. Тогда оператор $\delta : \mathcal{T}^{n-1}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ будет задаваться финитной по строкам матрицей, которую мы обозначим через B. Каждой функции $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ можно сопоставить вектор $w_f = (\varepsilon(f_\sharp(Q_1)), \varepsilon(f_\sharp(Q_2)), \dots)^{\mathrm{T}}$, где $\varepsilon : C_0(Q_i; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ — аугментация. Матрицу линейного оператора, переводящего v_f в w_f для любой функции $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$, обозначим через A. Очевидно, что матрицы A и B вычислимы и $AB = 0$.

Пусть $F = \delta^*(\psi)$. По теореме 1.2.2 условие, что функция f является локальной формулой и представляет класс когомологий ψ, равносильно системе уравнений $Av_f = b$, где $b_j = F(p_1, p_2, \dots)[Q_j]$. Вектор b имеет не более r отличных от нуля компонент, поэтому он вычислим. Система уравнений $Ax = b$ удовлетворяет всем условиям предложения 1.3.4, так как ее решение определено однозначно с точностью до прибавления кограницы, т. е. вектора вида Bv_g. Следовательно, эта система имеет вычислимое решение x^0. Искомая локальная формула задается равенствами $f(\langle L_i\rangle) = x_i^0$. $\square$

1.4 Кобордизмы многообразий с особенностями

В этом параграфе мы всегда будем понимать под псевдомногообразием замкнутое симплициальное псевдомногообразие. Пусть C — класс ориентированных псевдомногообразий, удовлетворяющий следующим свойствам.

Свойство I. Нульмерное псевдомногообразие принадлежит классу C тогда и только тогда, когда оно является нульмерной сферой, то есть парой точек с противоположными ориентациями.

Свойство II. Если псевдомногообразие Y принадлежит классу C, то любое псевдомногообразие, кусочно линейно гомеоморфное псевдомногообразию Y с сохранением или с обращением ориентации, также принадлежит классу C.

Свойство III. Если n-мерное псевдомногообразие Y принадлежит классу C и σ — симплекс псевдомногообразия Y, такой что $\dim\sigma < n$, то псевдомногообразие $\operatorname{link}\sigma$ принадлежит классу C.

Свойство IV. Если псевдомногообразие Y принадлежит классу C, то неприведённая надстройка ΣY также принадлежит классу C.

Приведем примеры классов, удовлетворяющих свойствам I–IV:

1. Класс PM всех ориентированных псевдомногообразий — наибольший класс, удовлетворяющий свойствам I–IV.

2. Из свойств I–IV сразу следует, что любая ориентированная комбинаторная сфера принадлежит классу C. Поэтому наименьшим классом, удовлетворяющим свойствам I–IV, является класс CS всех ориентированных комбинаторных сфер.

3. Класс CM всех ориентированных комбинаторных многообразий.

4. Класс MCS всех многообразий с коническими особенностями (см. определение в п. 1.1).

5. Симплициальный комплекс называется *n-мерным симплициальным гомологическим многообразием*, если линк каждого его k-мерного симплекса имеет гомологии $(n-k-1)$-мерной сферы. *Симплициальной гомологической сферой* называется симплициальное гомологическое многообразие, имеющие гомологии сферы. Класс HS всех ориентированных симплициальных гомологических сфер и класс HM всех ориентированных симплициальных гомологических многообразий удовлетворяют свойствам I–IV. Рассматривая вместо целочисленных гомологий гомологии с коэффициентами в абелевой группе G, мы аналогично получаем классы HS(G) и HM(G) всех ориентированных симплициальных G-гомологических сфер и многообразий соответственно. Эти классы также удовлетворяет свойствам I–IV.

6. Класс NPM, состоящий из нульмерный сфер и всех связных нормальных псевдомногообразий положительной размерности.

7. Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность комбинаторных многообразий. Определим класс C$(P_1, P_2, \ldots)$, порожденный этими многообразиями, как наименьший класс псевдомногообразий, содержащий комбинаторные многообразия $P_1, P_2, \ldots$ и удовлетворяющий

свойствам I–IV. Класс $\mathrm{C}(P_1, P_2, \ldots)$ состоит из всех комбинаторных сфер и всех псевдомногообразий X, для которых существуют натуральные числа $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и неотрицательное целое число q, такие что псевдомногообразие X кусочно линейно гомеоморфно (с сохранением или с обращением ориентации) q-кратной надстройке над джойном $P_{i_1} * P_{i_2} * \ldots * P_{i_k}$.

Пересечение любого количества классов псевдомногообразий, удовлетворяющих свойствам I–IV, также удовлетворяет свойствам I–IV.

Обобщим конструкцию цепного комплекса $\mathcal{T}_*$ ориентированных комбинаторных сфер на случай произвольного класса C. Рассмотрим свободную абелеву группу, порожденную всеми классами изоморфизма $\langle Y \rangle$ ориентированных $(n-1)$-мерных псевдомногообразий Y из класса C. Профакторизуем эту группу по соотношениям $\langle Y \rangle + \langle -Y \rangle = 0$, где $-Y$ — псевдомногообразие Y с обращенной ориентацией; полученную группу обозначим через $\mathcal{T}_n^{\mathrm{C}}$. Полагаем, что $\mathcal{T}_0^{\mathrm{C}} = \mathbb{Z}$.

Понижающий градуировку дифференциал $\partial : \mathcal{T}_n^{\mathrm{C}} \to \mathcal{T}_{n-1}^{\mathrm{C}}$ определяется по той же формуле, что и дифференциал в комплексе $\mathcal{T}_*$:

$$\partial \langle Y \rangle = \sum_{v \in V(Y)} \langle \operatorname{link} v \rangle.$$

(Дифференциал $\partial : \mathcal{T}_1^{\mathrm{C}} \to \mathcal{T}_0^{\mathrm{C}}$ тривиален.) Тогда $\partial^2 = 0$ и, значит, $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$ — цепной комплекс. Имеем, $\mathcal{T}_*^{\mathrm{CS}} = \mathcal{T}_*$.

Для произвольного класса C, удовлетворяющего свойствам I–IV, цепной комплекс $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$ вообще говоря не будет иметь естественной структуры кольца. Чтобы ввести кольцевую структуру, нужно предположить, что класс C удовлетворяет следующему дополнительному свойству мультипликативности.

Свойство V. Если псевдомногообразия Y_1 и Y_2 принадлежат классу C, то их джойн $Y_1 * Y_2$ тоже принадлежит классу C.

Тогда операция взятия джойна задает билинейное умножение

$$* : \mathcal{T}_m^{\mathrm{C}} \times \mathcal{T}_n^{\mathrm{C}} \to \mathcal{T}_{m+n}^{\mathrm{C}},$$

которое превращает градуированную группу $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$ в суперкоммутативное ассоциативное градуированное кольцо. Имеет место тождество Лейбница (1.1). Поэтому $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$ — дифференциальное градуированное кольцо с понижающим градуировку дифференциалом и, значит, $H_*(\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}})$ — суперкоммутативное градуированное кольцо.

Классы PM, NPM, CS, HS(G) удовлетворяют свойству V, классы CM, MCS, HM(G) — нет, классы C$(P_1, P_2, \ldots)$ — вообще говоря, нет (но могут удовлетворять ему для некоторых специальных последовательностей $P_1, P_2, \ldots$).

Пусть C — класс псевдомногообразий, удовлетворяющий свойствам I–IV. *Многообразием с особенностями из класса* C мы будем называть псевдомногообразие, линки всех вершин которого принадлежат классу C. Класс всех ориентированных многообразий с особенностями из класса C мы обозначим через $\widetilde{\mathrm{C}}$. Очевидно, что класс $\widetilde{\mathrm{C}}$ удовлетворяет свойствам I–IV и $\mathrm{C} \subset \widetilde{\mathrm{C}}$. Имеем, $\widetilde{\mathrm{PM}} = \mathrm{PM}$, $\widetilde{\mathrm{CS}} = \mathrm{CM}$, $\widetilde{\mathrm{CM}} = \mathrm{MCS}$, $\widetilde{\mathrm{HS}(G)} = \mathrm{HM}(G)$.

Пусть K и L — ориентированные n-мерные многообразия с особенностями из класса C. Будем говорить, что многообразия K и L C-*кобордантны*, если существует замкнутое ориентированное симплициальное псевдомногообразие Z с вершинами $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_m$, такими что

$$\operatorname{link} x_1 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{link} x_k \cong K, \qquad \operatorname{link} y_1 \sqcup \ldots \sqcup \operatorname{link} y_l \cong -L$$

и $\operatorname{link} z_i \in \mathrm{C}$ при $i = 1, \ldots, m$. Это определение имеет простой геометрический смысл: если в псевдомногообразии Z вырезать регулярные окрестности вершин $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$, мы получим многообразие с особенностями из класса C с краем, изоморфным псевдомногообразию $K \sqcup (-L)$. Чтобы введенное отношение C-кобордантности было геометрически содержательным, нам нужно доказать следующее предложение.

Предложение 1.4.1. *Пусть K_1 и K_2 — кусочно линейно гомеоморфные с сохранением ориентации многообразия с особенностями из класса* C. *Тогда многообразия K_1 и K_2 являются C-кобордантными.*

Доказательство. Рассмотрим кусочно линейную триангуляцию Z полиэдра $|\Sigma K_1|$ такую, что линки вершин надстройки x и y изоморфны псевдомногообразиям K_1 и $-K_2$ соответственно. Пусть z — произвольная вершина триангуляции Z, отличная от x и y. Рассмотрим симплекс σ комплекса K_1, в относительной внутренности которого лежит образ точки z при естественной проекции $|\Sigma K_1| \setminus \{x, y\} \to |K_1|$. Тогда линк вершины z в триангуляции Z кусочно линейно гомеоморфен комплексу $\Sigma(\partial\sigma * \operatorname{link}_{K_1} \sigma)$. Следовательно, $\operatorname{link} z \in \mathrm{C}$. Таким образом, псевдомногообразие Z осуществляет C-кобордизм между псевдомногообразиями K_1 и K_2. □

Непосредственно проверяется, что отношение C-кобордантности на множестве ориентированных многообразий с особенностями из класса C является отношением эквивалентности; обозначим через Ω_n^{C} множество классов C-кобордантности n-мерных ориентированных многообразий с особенностями из класса C. Множество Ω_n^{C} является абелевой полугруппой относительно операции несвязного объединения. Из свойства IV следует, что для любого $K \in \widetilde{\mathrm{C}}$ псевдомногообразие ΣK осуществляет C-кобордизм между псевдомногообразием $K \sqcup (-K)$ и пустым псевдомногообразием. Поэтому полугруппа Ω_n^{C} является группой. Имеем, $\Omega_0^{\mathrm{C}} \cong \mathbb{Z}$ — группа, порожденная классом кобордизмов точки.

Если класс C удовлетворяет свойству V, в градуированной группе Ω_*^{C} можно ввести кольцевую структуру. Прямое произведение двух псевдомногообразий $K_1, K_2 \in \widetilde{\mathrm{C}}$ конечно же не является симплициальным псевдомногообразием. Однако мы можем взять произвольную кусочно линейную триангуляцию K полиэдра $|K_1| \times |K_2|$. Пусть y — произвольная вершина триангуляции K, $y_i, i = 1, 2,$ — ее образы при проекциях $|K_1| \times |K_2| \to |K_i|$. Пусть σ_i — симплекс триангуляции K_i, в относительной внутренности которого лежит точка y_i. Несложно проверить, что линк вершины y в комплексе K кусочно линейно гомеоморфен комплексу

$$\partial\sigma_1 * \mathrm{link}_{K_1} \sigma_1 * \partial\sigma_2 * \mathrm{link}_{K_2} \sigma_2$$

и, значит, принадлежит классу C. Следовательно, псевдомногообразие K принадлежит классу $\widetilde{\mathrm{C}}$. По предложению 1.4.1, его класс C-кобордизмов $[K]$ не зависит от произвола в выборе триангуляции K. Положим, $[K_1][K_2] = [K]$. Несложно проверить, что таким образом мы получаем корректно определенную операцию умножения в градуированной группе Ω_*^{C}, относительно которой она является суперкоммутативным ассоциативным градуированным кольцом.

Непосредственно из определения следует, что каждое псевдомногообразие, принадлежащее классу C, представляет нулевой класс кобордизмов в Ω_*^{C}. В частности, $\Omega_n^{\mathrm{PM}} = 0$ при $n > 0$. Кольцо Ω_*^{CS} совпадает с кольцом Ω_*^{SPL} ориентированных кусочно линейных кобордизмов.

Замечание 1.4.2. Пусть $\mathrm{C} = \mathrm{C}(P_1, P_2, \ldots)$. В этом случае кольцо кобордизмов Ω_*^{C} можно рассматривать как кольцо кобордизмов с особенностями «типа джойна» $P_{i_1} * \ldots * P_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Идея рассмотрения таких кобордизмов и их первые приложения принадлежат Д. Сулливану (см. [124], [45], [125]). Первое строгое построение теории кобордизмов с особенностями типа джойна было произведено Н. Баасом [53]. (Он работал в гладкой категории, но мы будем рассматривать кусочно линейный аналог его конструкции.) Группы кобордизмов, построенные Н. Баасом, отличны от групп Ω_*^{C}. Проиллюстрируем причины этого отличия на примере случая с одним типом особенности P. Многообразие с особенностями типа P в смысле Сулливана–Бааса — это полиэдр вида

$$V \cup_{W \times P} (W \times \mathrm{cone}(P)),$$

где W — кусочно линейное многообразие без края и V — кусочно линейное многообразие с краем $W \times P$. Оказывается, что определенное нами выше понятие многообразия с особенностями из класса $\mathrm{C}(P)$ шире, чем понятие многообразия с особенностями типа P в смысле Сулливана–Бааса. Действительно, пусть $E \to B$ — произвольное кусочно линейное расслоение со слоем P и замкнутым кусочно линейным многообразием в качестве базы и пусть V — кусочно линейное многообразие с краем E. Обозначим через $Z \to B$ ассоциированное с E расслоение со слоем $\mathrm{cone}(P)$. Рассмотрим полиэдр $X = V \cup_E Z$. Несложно проверить, что, согласно нашему определению, полиэдр X является многообразием с особенностями из класса $\mathrm{C}(P)$. Однако X может не быть многообразием с особенностями типа P в смысле Сулливана–Бааса, если расслоение E нетривиально.

Полностью аналогично случаю $\mathrm{C} = \mathrm{CS}$, изученному в п. 1.1, в случае произвольного класса C, удовлетворяющего свойствам I–IV, дифференциал цепного комплекса $\mathcal{T}_*^{\widetilde{\mathrm{C}}}$ индуцирует корректно определённый аддитивный гомоморфизм $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{C}} \to H_*\bigl(\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}\bigr)$; если класс C удовлетворяет свойству V, гомоморфизм ∂_* является мультипликативным с точностью до элементов порядка 2. Имеет место следующее обобщение теоремы 1.1.7.

Теорема 1.4.3. *Пусть класс ориентированных псевдомногообразий* C *удовлетворяет свойствам I–IV и содержится в классе* NPM. *Тогда ядро и коядро гомоморфизма $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{C}} \to H_*\bigl(\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}\bigr)$ являются группами кручения. Таким образом, гомоморфизм*

$$\partial_* \otimes \mathbb{Q} : \Omega_*^{\mathrm{C}} \otimes \mathbb{Q} \to H_*\bigl(\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}\bigr) \otimes \mathbb{Q}$$

является изоморфизмом градуированных абелевых групп. Если, кроме того, класс C *удовлетворяет свойству V, гомоморфизм $\partial_* \otimes \mathbb{Q}$ является является изоморфизмом градуированных колец.*

Доказательство этой теоремы будет дано в главе 4. Условие, что класс C содержится в классе NPM является техническим. По-видимому, теорема верна и без него. Однако отказ от этого условия приводит к усложнению доказательства. В основном интерес представляют классы псевдомногообразий, содержащиеся в классе NPM.

Для произвольной абелевой группы G введем обозначение

$$\mathcal{T}_{\mathrm{C}}^*(G) = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}, G).$$

Тогда элементами группы $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}^n(G)$ являются G-значные функции f на множестве классов изоморфизма $(n-1)$-мерных псевдомногообразий из класса C, удовлетворяющие условию $f(\langle -Y\rangle) = -f(\langle Y\rangle)$. Дифференциал в коцепном комплексе $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}^n(G)$ задаётся по формуле (1.4).

Аддитивным инвариантом n-мерных C*-кобордизмов* мы будем называть произвольный аддитивный гомоморфизм $q : \Omega_n^{\mathrm{C}} \to G$, где G — абелева группа. Значение инварианта q на классе C-кобордизмов многообразия K мы будем обозначать через $q(K)$. *Локальной формулой* для инварианта q мы будем называть аддитивный гомоморфизм $f : \mathcal{T}_n^{\mathrm{C}} \to G$ такой, что

$$q(K) = \sum_{v \in V(K)} f(\operatorname{link} v)$$

для любого ориентированного n-мерного многообразия K с особенностями из класса C.

Аналогично теореме 1.2.2 и первой половине теоремы 1.2.4 доказывается следующее утверждение.

Предложение 1.4.4. *Любой коцикл f коцепного комплекса $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}^*(G)$ задаёт локальную формулу для аддитивного инварианта* C*-кобордизмов, являющегося образом класса когомологий коцикла f при гомоморфизме*

$$\delta^* : H^*(\mathcal{T}_{\mathrm{C}}^*(G)) \to \operatorname{Hom}(\Omega_*^{\mathrm{C}}, G),$$

сопряженном гомоморфизму ∂_*; обратно, всякая локальная формула для аддитивного инварианта кобордизмов является коциклом комплекса $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}^*(G)$. При $G = \mathbb{Q}$ гомоморфизм δ^* является изоморфизмом. Таким образом, для каждого рациональнозначного аддитивного инварианта C*-кобордизмов имеется локальная формула, единственная с точностью до кограницы комплекса $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}^*(\mathbb{Q})$.*

В случае произвольной абелевой группы G (в частности, при $G = \mathbb{Z}$) вопрос о характеризации инвариантов C-кобордизма, допускающих локальные формулы, остается открытым даже в случае C = CS. Как будет показано в разделе 2.6, первое число Понтрягина (а также, никакое его кратное) не допускает целочисленной локальной формулы.

В качестве интересного примера рассмотрим немного подробнее случай $\mathrm{C} = \mathrm{HS}$. Кольцо Ω_*^{HS} — кольцо кобордизмов ориентированных симплициальных гомологических многообразий. Хорошо известно, что для ориентированных симплициальных гомологических многообразий корректно определены рациональные классы Понтрягина и, в частности, числа Понтрягина (см., например, [32]). Как доказал Ч. Р. Ф. Маундер [102], числа Понтрягина являются инвариантами кобордизмов ориентированных гомологических многообразий. Следовательно, для них существуют рациональные локальные формулы. Таким образом, группа когомологий $H^*(\mathcal{T}_{\mathrm{HS}}^*(\mathbb{Q}))$ содержит подгруппу, аддитивно изоморфную кольцу полиномов от классов Понтрягина с рациональными коэффициентами. Н. Мартин [101] доказал, что $\Omega_4^{\mathrm{HS}} \cong \mathbb{Z} \oplus \Theta_3^H$, где Θ_3^H — группа H-кобордизмов (гомологических кобордизмов) трехмерных гомологических сфер. М. Фурута [82] доказал, что группа Θ_3^H содержит бесконечно порожденную свободную абелеву подгруппу. Таким образом, полиномы от классов Понтрягина далеко не исчерпывают группы $H^*(\mathcal{T}_{\mathrm{HS}}^*(\mathbb{Q}))$. Имеем,

$$H^4(\mathcal{T}_{\mathrm{HS}}^*(\mathbb{Q})) \cong \mathrm{Hom}(\Omega_4^{\mathrm{HS}}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathrm{Hom}(\Theta_3^H, \mathbb{Q}).$$

Прямое слагаемое $\mathbb{Q}$ порождено первым числом Понтрягина. Локальные формулы для первого числа Понтрягина и локальные формулы для инвариантов кобордизмов, соответствующих элементам группы $\mathrm{Hom}(\Theta_3^H, \mathbb{Q})$, имеют принципиально разную природу. Рассмотрим инвариант HS-кобордизмов q, соответствующий гомоморфизму $h : \Theta_3^H \to \mathbb{Q}$. Гомоморфизм $\mathcal{T}_4^{\mathrm{HS}} \xrightarrow{\iota} \Theta_3^H \xrightarrow{h} \mathbb{Q}$, где ι — отображение, сопоставляющее каждой симплициальной гомологической сфере ее класс H-кобордизмов, является локальной формулой для инварианта q. Подчеркнем, что значение этой локальной формулы на трехмерной симплициальной гомологической сфере Y зависит лишь от класса H-кобордизмов гомологической сферы Y и не зависит от комбинаторики триангуляции Y. В частности, ее значение на любой комбинаторной сфере равно нулю. Если же f — локальная формула для первого класса Понтрягина, значение $f(\langle Y\rangle)$ с необходимостью существенно зависит от комбинаторики триангуляции Y. В частности, обязательно существует трехмерная комбинаторная сфера Y, такая что $f(\langle Y\rangle)\neq 0$.

Локальные формулы для инвариантов кобордизмов, соответствующих элементам группы $\mathrm{Hom}(\Theta_3^H, G)$, где G — абелева группа, тесно связаны со следующей конструкцией. В [125] Д. Сулливан сопоставил каждому ориентированному симплициальному гомологическому многообразию Z симплициальный цикл

$$\sum_{\substack{\sigma\text{ – симплекс } Z,\\ \operatorname{codim}\sigma=4}} \sigma\otimes[\operatorname{link}\sigma]\in C_{\dim Z-4}\left(Z;\Theta_3^H\right),$$

класс гомологий которого является полным препятствием к существованию разрешения особенностей $g\colon M\to Z$, такого что M — комбинаторное многообразие и множество $g^{-1}(z)$ ациклично для любой точки $z\in Z$.

1.5 Локальные формулы для коциклов

Согласно теореме 1.2.2, имеется аддитивный изоморфизм

$$\delta^*\colon H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))\to \mathrm{Hom}(\Omega_*^{\mathrm{SPL}},\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}[p_1,p_2,\ldots].$$

Естественно возникает вопрос о том, как описать каким-либо явным комбинаторным способом умножение возникающее в когомологиях комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. В этом разделе мы комбинаторно определим операцию умножения на коциклах комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, которая индуцирует искомое умножение в когомологиях. К сожалению, эта операция умножения не является ни билинейной, ни ассоциативной, ни коммутативной, не удовлетворяет тождеству Лейбница и, по-видимому, не имеет естественного продолжения на весь комплекс $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Таким образом, следующий вопрос остается открытым.

Вопрос 1.5.1. Существует ли в комплексе $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ билинейное ассоциативное умножение, удовлетворяющее формуле Лейбница и индуцирующее в когомологиях умножение, относительно которого изоморфизм δ^* является мультипликативным?

Комбинаторное определение даже небилинейного и неассоциативного умножения коциклов комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ сразу дает нам возможность по двум известным локальным формулам для двух полиномов от рациональных классов Понтрягина построить явно локальную формулу для произведения этих полиномов. Таким образом, в сочетании с явными (хотя и неэффективными) локальными формулами для L-полиномов Хирцебруха, которые будут построены в разделе 4.7, этот результат даст нам явные локальные формулы для всех полиномов от рациональных классов Понтрягина. (Напомним, что полиномы Хирцебруха порождают кольцо $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$.)

Коциклы коцепного комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ задают локальные формулы для циклов, классы гомологии которых двойственны по Пуанкаре полиномам от классов Понтрягина. Однако, когда мы хотим по локальным формулам для двух полиномов от классов Понтрягина построить локальную формулу для их произведения, нам удобнее работать с коциклами, представляющими полиномы от классов Понтрягина. Впервые локальные формулы для коциклов, представляющих характеристические классы, рассматривались Н. Левиттом и К. Рурком [98]. При этом рассматривались симплициальные коциклы в первом барицентрическом подразделении данного комбинаторного многообразия, значения которых на каждом симплексе зависят только от комбинаторного строения звезды младшей вершины этого симплекса. (*Младшая вершина* — вершина, являющаяся барицентром симплекса наименьшей размерности.) Нам будет удобнее работать не с барицентрическим подразделением, а с каноническим кубическим подразделением комбинаторного многообразия. Мы определим коцепной комплекс $\mathcal{W}^*(G)$, являющийся аналогом комплекса $\mathcal{T}^*(G)$ в рассматриваемой ситуации. При этом для любого кольца Λ в комплексе $\mathcal{W}^*(\Lambda)$ вводится ассоциативное умножение, удовлетворяющее формуле Лейбница. Основным результатом этого раздела будет теорема 1.5.3, устанавливающая изоморфизм $H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong H^*(\mathcal{W}^*(\mathbb{Q}))$. Эта теорема даст нам возможность использовать умножение в комплексе $\mathcal{W}^*(\mathbb{Q})$ для построения искомого умножения коциклов комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

Для каждой абелевой группы G определим коцепной комплекс $\mathcal{W}^*(G)$ следующим образом. Элементами группы $\mathcal{W}^n(G)$ будут функции h, такие что h сопоставляет каждой комбинаторной сфере Y (произвольной размерности и без выделенной ориентации) симплициальную коцепь $h(Y) \in C^{n-1}(Y; G)$, так что выполнено следующее условие: если $i : Y_1 \to Y_2$

— изоморфизм комбинаторных сфер, то индуцированное отображение коцепей переводит коцепь $h(Y_2)$ в коцепь $h(Y_1)$. В частности, коцепь $h(Y)$ должна быть инвариантна относительно всех (в том числе, меняющих ориентацию) автоморфизмов комбинаторной сферы Y. Значение коцепи $h(Y)$ на цепи $\xi \in C_{n-1}(Y;\mathbb{Z})$ мы будем обозначать через $h(Y,\xi)$. Определим дифференциал $\delta : \mathcal{W}^n(G) \to \mathcal{W}^{n+1}(G)$ по формуле

$$(\delta h)(Y,\xi) = (-1)^n h(Y,\partial\xi) + (-1)^{n-1} \sum_{v\in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \xi_v),$$

где ξ_v — цепь, в которую каждый симплекс σ комплекса $\operatorname{link} v$ входит с коэффициентом, равным коэффициенту при симплексе $v * \sigma$ в цепи ξ.

Предложение 1.5.2. $\delta^2 = 0$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$(\delta_1 h)(Y,\xi) = (-1)^n h(Y,\partial\xi), \qquad (\delta_2 h)(Y,\xi) = (-1)^{n-1} \sum_{v\in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \xi_v).$$

Очевидно, что $\delta_1^2 = 0$. Для доказательства равенства $\delta_2^2 = 0$ достаточно заметить, что $(\xi_u)_v = -(\xi_v)_u$ для любой цепи $\xi \in C_{n-1}(Y;\mathbb{Z})$ и любых двух вершин $u, v \in V(Y)$, соединенных ребром. Для доказательства равенства $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$ достаточно заметить, что $\partial(\xi_v) = -(\partial\xi)_v$ для любой цепи $\xi \in C_{n-1}(Y;\mathbb{Z})$ и любой вершины $v \in V(Y)$. □

Таким образом, $\mathcal{W}^*(G)$ — коцепной комплекс с дифференциалом δ.

Определим гомоморфизм $\alpha : \mathcal{W}^n(G) \to \mathcal{T}^n(G)$ по формуле

$$\alpha(h)(\langle Y\rangle) = h(Y,[Y]),$$

где $[Y]$ — фундаментальный цикл комбинаторной сферы Y. Из того, что коцепь $h(Y)$ не зависит от выбора ориентации комбинаторной сферы Y

следует, что значение $\alpha(h)(\langle Y \rangle)$ меняет знак при изменении ориентации комбинаторной сферы Y. Несложно проверить, что α — цепное отображение. Следовательно, оно индуцирует гомоморфизм

$$\alpha^* : H^*(\mathcal{W}^*(G)) \to H^*(\mathcal{T}^*(G)).$$

Теорема 1.5.3. *При $G = \mathbb{Q}$ гомоморфизм α^* является изоморфизмом.*

Пусть Y — комбинаторная сфера, $\xi \in C_l(Y;\mathbb{Z})$ — симплициальная цепь, τ — ориентированный $(n-1)$-мерный симплекс комплекса Y. Обозначим через $\xi_\tau \in C_{l-n}(\operatorname{link}\tau;\mathbb{Z})$ цепь, в которую каждый симплекс ρ комплекса $\operatorname{link}\tau$ входит с коэффициентом, равным коэффициенту при симплексе $\tau * \rho$ в цепи ξ.

Пусть Λ — ассоциативное кольцо. Определим умножение

$$\mathcal{W}^n(\Lambda) \otimes \mathcal{W}^k(\Lambda) \to \mathcal{W}^{n+k}(\Lambda)$$

по формуле

$$(h_1h_2)(Y,\xi) = (-1)^{nk} \sum_{\substack{\tau - \text{симплекс}\, Y, \\ \dim\tau = n-1}} h_1(Y,\tau)h_2(\operatorname{link}\tau, \xi_\tau),$$

где $\xi \in C_{n+k-1}(Y;\mathbb{Z})$. (Слагаемое $h_1(Y,\tau)h_2(\operatorname{link}\tau,\xi_\tau)$ не зависит от выбора ориентации симплекса τ.) Несложно проверить, что введенное умножение является ассоциативным. Непосредственно проверяется, что

$$\delta(h_1h_2) = (\delta h_1)h_2 + (-1)^n h_1 \delta h_2$$

для любых $h_1 \in \mathcal{W}^n(\Lambda)$, $h_2 \in \mathcal{W}^k(\Lambda)$. Таким образом, $\mathcal{W}^*(\Lambda)$ — ассоциативное дифференциальное градуированное кольцо. Следовательно, мы получаем ассоциативное умножение в когомологиях кольца $\mathcal{W}^*(\Lambda)$.

Для каждого симплициального комплекса K определено его каноническое кубическое подразделение $\mathrm{cub}(K)$ (см. приложение A, а также [8]). Опишем здесь эту конструкцию. Пусть комплекс K имеет q вершин. Будем отождествлять множество вершин комплекса K с множеством $\{1, 2, \ldots, q\}$. Пусть $I^q = [0, 1]^q$ — стандартный куб. Для любых непустых симплексов $\tau \subset \sigma$ комплекса K положим

$$C_{\tau\subset\sigma} = \left\{(y_1, y_2, \ldots, y_q) \in I^q : y_j = 0 \text{ при } j \in \tau, y_j = 1 \text{ при } j \notin \sigma\right\}.$$

Тогда $C_{\tau\subset\sigma}$ — замкнутая грань куба I^q размерности $\dim\sigma - \dim\tau$. Пусть $i : K \to I^q$ — отображение, переводящее барицентр каждого симплекса σ комплекса K в вершину $C_{\sigma\subset\sigma}$ и линейное на всех симплексах барицентрического подразделения комплекса K. Тогда i — вложение, образ которого совпадает с объединением всех граней $C_{\tau\subset\sigma}$, где $\tau \subset \sigma$ — симплексы K. Прообразы граней $C_{\tau\subset\sigma}$ при отображении i (которые мы будем также обозначать через $C_{\tau\subset\sigma}$) образуют кубическое подразделение $\mathrm{cub}(K)$ симплициального комплекса K.

Если симплексы τ и σ ориентированы, то на клетке $C_{\tau\subset\sigma}$ выбирается ориентация, такая что произведение ориентации симплекса τ на ориентацию клетки $C_{\tau\subset\sigma}$ дает ориентацию симплекса σ. Определим умножение в клеточных коцепях $C^*(\mathrm{cub}(K); \Lambda)$ разбиения $\mathrm{cub}(K)$ по формуле

$$(ab)\left(C_{\tau\subset\sigma}\right) = (-1)^{nk} \sum_{\substack{\rho-\text{ симплекс } K,\\ \dim\rho=\dim\tau+n}} a\left(C_{\tau\subset\rho}\right) b\left(C_{\rho\subset\sigma}\right),$$

где $a \in C^n(\mathrm{cub}(K); \Lambda)$, $b \in C^k(\mathrm{cub}(K); \Lambda)$, σ и τ — ориентированные симплексы комплекса K, такие что $\dim\sigma - \dim\tau = n + k$. Следующее предложение доказывается непосредственно.

Предложение 1.5.4. *Введенное умножение ассоциативно, удовлетворяет формуле Лейбница и индуцирует стандартное умножение в когомологиях пространства K.*

Пусть теперь K — комбинаторное многообразие, h — произвольный элемент группы $\mathcal{W}^n(G)$. Определим коцепь $h^\sharp(K) \in C^n(\mathrm{cub}(K);G)$ по формуле

$$h^\sharp(K)(C_{\tau\subset\sigma}) = h(\operatorname{link}\tau, \sigma_\tau).$$

Следующие предложения проверяются непосредственно.

Предложение 1.5.5. $\delta\left(h^\sharp(K)\right) = (\delta h)^\sharp\,(K)$.

Следствие 1.5.6. *Коцепь $h^\sharp(K)$ является коциклом для любого комбинаторного многообразия K тогда и только тогда, когда h является коциклом в комплексе $\mathcal{W}^*(G)$. Если h является кограницей в комплексе $\mathcal{W}^*(G)$, то коцепь $h^\sharp(K)$ является кограницей для любого комбинаторного многообразия K.*

Предложение 1.5.7. *Пусть Λ — кольцо, $h_1, h_2 \in \mathcal{W}^*(\Lambda)$. Тогда*

$$(h_1h_2)^\sharp(K) = h_1^\sharp(K)h_2^\sharp(K)$$

для любого комбинаторного многообразия K.

Предложение 1.5.8. *Пусть $h \in \mathcal{W}^n(G)$ — коцикл, $f = \alpha(h)$. Тогда для любого ориентированного комбинаторного многообразия K класс гомологий, представляемый циклом $f_\sharp(K)$, двойствен по Пуанкаре классу когомологий, представляемому коциклом $h^\sharp(K)$.*

Доказательство. Обозначим через m размерность многообразия K. Пусть τ — симплекс размерности $m-n$. Разбиение $\mathrm{cub}(K)$ является подразделением разбиения K^*, двойственного триангуляции K. При этом n-мерная клетка $D\tau$, двойственная симплексу τ, является объединением кубов $C_{\tau\subset\sigma}$, где σ — всевозможные m-мерные симплексы, содержащие τ. Пусть c — образ коцепи $h^\sharp(K)$ при естественном отображении $C^n(\mathrm{cub}(K);G)\to C^n(K^*;G)$. Тогда

$$c(D\tau)=\sum_{\substack{\sigma\supset\tau,\\ \dim\sigma=m}} h^\sharp(K)(C_{\tau\subset\sigma})=h(\mathrm{link}\,\tau,[\mathrm{link}\,\tau])=f(\langle\mathrm{link}\,\tau\rangle).$$

Следовательно, коцикл c двойствен по Пуанкаре циклу $f_\sharp(K)$. □

Рассмотрим изоморфизмы

$$H^*(\mathcal{W}^*(\mathbb{Q}))\xrightarrow{\alpha^*}H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))\xrightarrow{\delta^*}\mathbb{Q}[p_1,p_2,\ldots].$$

Пусть $h\in\mathcal{W}^*(\mathbb{Q})$ — коцикл, $F(p_1,p_2,\ldots)=\delta^*\alpha^*[h]$ — соответствующий полином от рациональных классов Понтрягина. Из предложения 1.5.8 сразу следует, что коцикл $h^\sharp(K)$ представляет класс когомологий $F(p_1(K),p_2(K),\ldots)$ для любого комбинаторного многообразия K. В частности, класс когомологий $\left[h^\sharp(K)\right]$ не зависит от выбора коцикла h, представляющего класс когомологий $[h]$, и кусочно линейной триангуляции K заданного многообразия. Мы будем говорить, что коцикл h является *локальной формулой* для полинома F от классов Понтрягина. Из теоремы 1.5.3 следует, что для любого полинома от рациональных классов Понтрягина существует локальная формула $h\in\mathcal{W}^*(\mathbb{Q})$, единственная с точностью до прибавления кограницы комплекса $\mathcal{W}^*(\mathbb{Q})$.

Обозначим через Z^n ядро дифференциала $\delta : \mathcal{T}^n(\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}^{n+1}(\mathbb{Q})$. Построим явно отображение $\gamma : Z^n \to \mathcal{W}^n(\mathbb{Q})$, такое что $\gamma(f)$ — коцикл для любой локальной формулы f и $\alpha \circ \gamma$ — тождественное отображение.

Пусть $f \in Z^n$ — коцикл. Коцепь $h = \gamma(f)$ должна удовлетворять условиям $\delta h = 0$ и $\alpha(h) = f$, то есть системе уравнений двух типов:

1) $h(Y, \partial\xi) = \sum\limits_{v \in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \xi_v)$ для любой комбинаторной сферы Y и любой цепи $\xi \in C_n(Y; \mathbb{Z})$;

2) $h(Y, [Y]) = f(\langle Y \rangle)$ для любой ориентированной $(n-1)$-мерной комбинаторной сферы Y.

Мы будем строить набор коцепей $h(Y)$, удовлетворяющий этой системе уравнений, применяя индукцию по размерности комбинаторной сферы Y.

Для каждой ориентированной $(n-1)$-мерной комбинаторной сферы Y, имеющей q симплексов старшей размерности, положим

$$h(Y, \sigma) = \frac{f(\langle Y \rangle)}{q}$$

для любого положительно ориентированного $(n-1)$-мерного симплекса σ комплекса Y. Очевидно, что коцепь $h(Y)$ не меняется при изменении ориентации комбинаторной сферы Y.

Пусть $m \geqslant n$. Предположим, что коцепи $h(Y)$ уже определены для всех комбинаторных сфер Y, размерность которых меньше m. Определим коцепь $h(Y)$ для m-мерной комбинаторной сферы Y. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ — все $(n-1)$-мерные симплексы комбинаторной сферы Y, для каждого из которых фиксирована какая-нибудь ориентация. Рассмотрим всевозможные уравнения вида

$$h(Y, \partial\xi) = \sum_{v \in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \xi_v), \tag{1.9}$$

где $\xi \in C_n(Y;\mathbb{Z})$. Каждое из этих уравнений можно рассматривать как линейное уравнение на величины $h(Y,\sigma_1), h(Y,\sigma_2), \dots, h(Y,\sigma_q)$.

Предложение 1.5.9. *Система линейных уравнений* (1.9) *совместна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\sum_{v\in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \xi_v) = 0,$$

если ξ — цикл. Рассмотрим два случая.

Если $m = n$, то $\xi = l[Y]$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\sum_{v\in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \xi_v) = l \sum_{v\in V(Y)} f(\langle \operatorname{link} y\rangle) = (-1)^n l\,(\delta f)(\langle Y\rangle) = 0.$$

Если $m > n$, то $\xi = \partial\eta$ для некоторой цепи $\eta \in C_{n+1}(Y;\mathbb{Z})$. Значит,

$$\sum_{v\in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \xi_v) = \sum_{v\in V(Y)} h(\operatorname{link} v, (\partial\eta)_v) = -\sum_{v\in V(Y)} h(\operatorname{link} v, \partial(\eta_v)) =$$

$$= \sum_{(u,v)} h\left(\operatorname{link}(u*v), (\eta_v)_u\right) = 0,$$

где последняя сумма берется по всем упорядоченным парам вершин (u,v), соединенных ребром в комплексе Y. Последнее равенство следует из того, что $(\eta_u)_v = -(\eta_v)_u$. $\square$

В качестве коцепи $h(Y)$ выберем то решение системы линейных уравнений (1.9), для которого сумма

$$h(Y,\sigma_1)^2 + h(Y,\sigma_2)^2 + \dots + h(Y,\sigma_q)^2$$

принимает наименьшее значение. Такое решение существует, единственно, рационально, инвариантно относительно всех автоморфизмов комбинаторной сферы Y и его вычисление сводится к решению системы линейных уравнений.

Заметим, что для вычисления коцепи $h(Y)$ для m-мерной комбинаторной сферы Y достаточно знать только значения функции f на линках всех $(m-n)$-мерных симплексов комбинаторной сферы Y.

Определим операцию умножения $Z^n \times Z^k \to Z^{n+k}$ по формуле

$$f_1 \diamond f_2 = \alpha(\gamma(f_1)\gamma(f_2)).$$

Это умножение не будет ни ассоциативным, ни коммутативным, ни линейным по первому аргументу. Можно проверить, что оно будет линейным по второму аргументу. Из предложений 1.5.7 и 1.5.8 немедленно следует, что если f_1 и f_2 — локальные формулы для полиномов $F_1(p_1, p_2, \ldots)$ и $F_2(p_1, p_2, \ldots)$ соответственно, то $f_1 \diamond f_2$ — локальная формула для полинома $F_1(p_1, p_2, \ldots)F_2(p_1, p_2, \ldots)$. Таким образом, умножение $\diamond$ индуцирует в когомологиях комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ умножение, совпадающее с умножением, определенным с помощью изоморфизма δ^*.

Замечание 1.5.10. Для вычисления значения функции $f_1 \diamond f_2$ на $(n+k-1)$-мерной комбинаторной сфере Y нам достаточно знать только значения функции f_1 на линках всех $(k-1)$-мерных симплексов комбинаторной сферы Y и значения функции f_2 на линках всех $(n-1)$-мерных симплексов комбинаторной сферы Y. При этом процедура вычисления значения $(f_1 \diamond f_2)(Y)$ сводится к решению систем линейных уравнений.

Доказательство теоремы 1.5.3. Эпиморфность отображения α^* сразу следует из того, что для каждого коцикла $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ существует коцикл $h = \gamma(f) \in \mathcal{W}^n(\mathbb{Q})$, такой что $\alpha(h) = f$.

Пусть $h \in \mathcal{W}^n(\mathbb{Q})$ — коцикл, $\alpha(h) = \delta f$. Тогда $\alpha(h - \delta\gamma(f)) = 0$. Поэтому для доказательства мономорфности отображения α^* достаточно доказать, что если $\alpha(h) = 0$, то существует элемент $g \in \mathcal{W}^{n-1}(\mathbb{Q})$ такой, что $h = \delta g$. Условие $h = \delta g$ можно переписать в виде системы уравнений

$$g(Y, \partial\xi) = \sum_{v \in V(Y)} g(\operatorname{link} v, \xi_v) + (-1)^{n-1} h(Y, \xi), \qquad (1.10)$$

где Y — произвольная комбинаторная сфера и $\xi \in C_{n-1}(Y; \mathbb{Z})$ — произвольная цепь.

Будем последовательно определять коцепи $g(Y)$. Для любой $(n-2)$-мерной комбинаторной сферы Y возьмем $g(Y) = 0$.

Пусть $m \geqslant n - 1$. Предположим, что коцепи $g(Y)$ уже определены для всех комбинаторных сфер размерности меньше m. Определим коцепь $g(Y)$ для m-мерной комбинаторной сферы Y. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ — все $(n-2)$-мерные симплексы комбинаторной сферы Y, для каждого из которых фиксирована какая-нибудь ориентация. Рассмотрим всевозможные уравнения вида (1.10), где $\xi \in C_{n-1}(Y; \mathbb{Z})$. Каждое из этих уравнений можно рассматривать как линейное уравнение на величины $g(Y, \sigma_1), g(Y, \sigma_2), \ldots, g(Y, \sigma_q)$.

Предложение 1.5.11. *Рассматриваемая система линейных уравнений совместна.*

Доказательство этого предложения полностью аналогично доказательству предложения 1.5.9. В качестве коцепи $g(Y)$ выберем то решение рассматриваемой системы линейных уравнений, для которого сумма

$$g(Y, \sigma_1)^2 + g(Y, \sigma_2)^2 + \cdots + g(Y, \sigma_q)^2$$

принимает наименьшее значение. $\square$

Глава 2

Явная формула для первого класса Понтрягина

В этой главе мы построим явную локальную комбинаторную формулу для первого рационального класса Понтрягина. Из теорем 1.2.2, и 1.2.4 следует, что функция $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, являющаяся решением уравнения $\delta f = 0$, единственна с точностью до прибавления кограницы и умножения на рациональную константу. При этом всякая такая функция является локальной формулой для первого рационального класса Понтрягина, умноженного на некоторую константу. План наших действий состоит в том, чтобы, используя технику бизвездных преобразований, описать явно все решения $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ уравнения $\delta f = 0$.

2.1 Бизвездные преобразования, графы Γ_n и бикомплекс $C^{*,*}$

Пусть K — n-мерное комбинаторное многообразие с множеством вершин V. Предположим, что комплекс K содержит полный подкомплекс вида $\sigma^k * \partial\tau^{n-k}$, где σ^k — симплекс комплекса K, τ^{n-k} — «пустой симплекс» комплекса K, то есть $(n-k+1)$-элементное подмножество множества V, не принадлежащее K, но такое, что все его собственные подмножества принадлежат K. Заменим в симплициальном комплексе K полный подкомплекс $\sigma^k * \partial\tau^{n-k}$ на полный подкомплекс $\partial\sigma^k * \tau^{n-k}$ и обозначим полученный симплициальный комплекс через K_1. Тогда K_1 — комбинаторное многообразие, кусочно линейно гомеоморфное комбинаторному многообразию K. Произведенная операция называется *бизвездным преобразованием* и обозначается через $\beta = \beta_{K,\sigma^k}$, а полученное в результате комбинаторное многообразие K_1 — через $\beta(K)$. В описанной выше конструкции можно брать $k = 0$ или $k = n$, принимая соглашения $\partial\,\mathrm{pt} = \varnothing$ и $\sigma * \varnothing = \sigma$. Таким образом, частными случаями бизвездных преобразований являются звездные подразделения n-мерных симплексов и операции, обратные звездным подразделениям n-мерных симплексов. Бизвездное преобразование $\beta_{K_1,\tau^{n-k}}$ мы будем называть бизвездным преобразованием, *обратным* преобразованию β и обозначать через β^{-1}. Все виды бизвездных преобразований для многообразий размерностей 2 и 3 изображены на рис. 2.1 и 2.2. Преобразование, изображенное на рис. 2.2 справа, переводит два тетраэдра, имеющие общую двумерную грань, в три тетраэдра с общим ребром.

Пусть K_1 и K_2 — ориентированные комбинаторные многообразия одной размерности, симплексы $\sigma_1 \in K_1$ и $\sigma_2 \in K_2$ таковы, что существуют бизвездные преобразования β_{K_1,σ_1} и β_{K_2,σ_2}. Бизвездные преобразования β_{K_1,σ_1} и β_{K_2,σ_2} называются *эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию изоморфизм $f : K_1 \to K_2$ такой, что $f(\sigma_1) = \sigma_2$. Бизвездное преобразование β называется *несущественным*, если β экви-

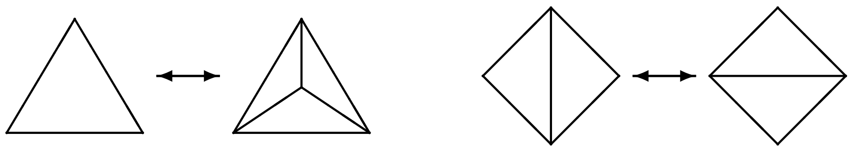


Рис. 2.1. Бизвездные преобразования для многообразий размерности 2

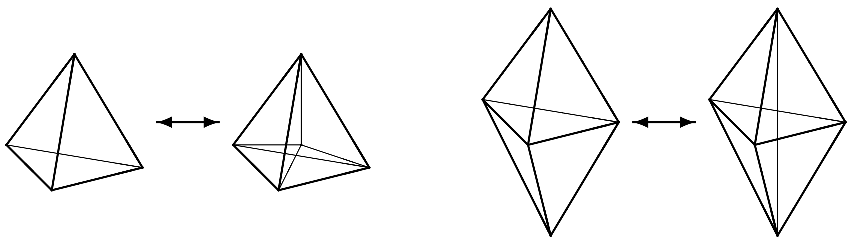


Рис. 2.2. Бизвездные преобразования для многообразий размерности 3

валентно β^{-1}. Все остальные бизвездные преобразования называются *существенными*.

Если $k \neq 0, n$, то множества вершин комбинаторных многообразий K и K_1 совпадают; если $k = 0$ или $k = n$, то одно из множеств $V(K)$ и $V(K_1)$ содержит на одну вершину больше, чем другое. В первом случае положим $V(\beta) = V(K) = V(K_1)$; во втором обозначим через $V(\beta)$ большее из множеств $V(K)$ и $V(K_1)$. Введем также обозначение $U(\beta) = V\bigl(\partial\sigma^k * \partial\tau^{n-k}\bigr) \subset V(\beta)$. Множество $U(\beta)$ состоит из тех вершин, которые не появляются и не исчезают при бизвездном преобразовании β, но линки которых изменяются при этом бизвездном преобразовании. Для каждой вершины $v \in U(\beta)$ бизвездное преобразование β индуцирует бизвездное преобразование $\beta_v = \beta_{\mathrm{link}_K v, \sigma^k \setminus \{v\}}$, переводящее комбинаторную сферу $\mathrm{link}_K v$ в комбинаторную сферу $\mathrm{link}_{K_1} v$.

В 1987 году У. Пахнером [111] (см. также [112], [99]) была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть K_1 и K_2 — кусочно линейно гомеоморфные комбинаторные многообразия. Тогда комбинаторное многообразие K_1 может быть переведено в комбинаторное многообразие K_2 при помощи конечной последовательности бизвездных преобразований и изоморфизмов.*

В частности, любые две комбинаторные сферы одной размерности связаны последовательностью из бизвездных преобразований и изоморфизмов. Поэтому для того, чтобы описать функции $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ такие, что $\delta f = 0$, достаточно указать, как значение $f\big(\langle L\rangle\big)$ изменяется при бизвездных преобразованиях трехмерной ориентированной комбинаторной сферы L.

Для каждого n построим бесконечный граф Γ_n следующим образом. Вершинами графа Γ_n будут классы изоморфизма ориентированных n-мерных комбинаторных сфер. Класс изоморфизма комбинаторной сферы L и соответствующая вершина графа Γ_n будут обозначаться через $\{L\}$. Подчеркнем, что $\{L\}$ и $\{-L\}$ — это вообще говоря разные вершины (за исключением случая, когда комбинаторная сфера L обладает обращающим ориентацию автоморфизмом). Ребра графа Γ_n соответствуют классам эквивалентности существенных бизвездных преобразований n-мерных комбинаторных сфер; при этом классам эквивалентности бизвездных преобразований β и β^{-1} соответствует одно и то же ребро с противоположными ориентациями. (Граф Γ_n может содержать кратные ребра и петли.) Ориентированное ребро, соответствующее классу эквивалентности бизвездного преобразования β, мы будем обозначать через $\{\beta\}$. Таким образом, $\{\beta^{-1}\} = -\{\beta\}$.

Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на графе Γ_n, обращая ориентации всех комбинаторных сфер. Обозначим через $\mathcal{Q}$ группу $\mathbb{Q}$, рассматриваемую как $\mathbb{Z}_2$-модуль такой, что образующая группы $\mathbb{Z}_2$ действует умножением на -1. Обозначим через $C^i_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathcal{Q})$ и $H^i_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathcal{Q})$, $i = 0, 1$, группы i-мерных эквивариантных клеточных коцепей и i-мерных эквивариантных гомологий графа Γ_n соответственно относительно указанных действий группы $\mathbb{Z}_2$. Дифференциал коцепного комплекса $C^*_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathcal{Q})$ мы будем обозначать через d. Нам будет удобно использовать такое соглашение о знаках, что $(df)(e) = f(\partial e)$, если $f \in C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathcal{Q})$ и e — ребро графа Γ_n.

Нам будет удобно ввести обозначение $C^{j,n} = C^j_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathcal{Q})$. Очевидно, что группа $C^{0,n} = C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathcal{Q})$ канонически изоморфна группе $\mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$. Таким образом, имеется дифференциал

$$\begin{array}{ccc} C^{0,n} & \xrightarrow{\delta} & C^{0,n+1} \\ \| & & \| \\ C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathcal{Q}) & & C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathcal{Q}), \end{array}$$

определяемый по формуле

$$(\delta f)(\{L\}) = (-1)^n \sum_{v \in V(L)} f(\{\operatorname{link} v\}).$$

Определим дифференциал

$$\begin{array}{ccc} C^{1,n} & \xrightarrow{\delta} & C^{1,n+1} \\ \| & & \| \\ C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathcal{Q}) & & C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_n;\mathcal{Q}) \end{array}$$

по формуле

$$(\delta h)\bigl(\{\beta\}\bigr) = (-1)^n \sum_{v \in U(\beta)} h\bigl(\{\beta_v\}\bigr).$$

Легко проверить, что $\delta^2 = 0$ и $d\delta = \delta d$. Таким образом, биградуированная группа $C^{*,*}$ имеет структуру биградуированного комплекса (бикомплекса) с двумя коммутирующими дифференциалами d и δ бистепеней $(1, 0)$ и

$(0,1)$ соответственно. Обозначим через $Z_d^{*,*}$, $B_d^{*,*}$ и $H_d^{*,*}$ группы коциклов, кограниц и когомологий комплекса $C^{*,*}$ относительно дифференциала d; через $Z_\delta^{*,*}$, $B_\delta^{*,*}$ и $H_\delta^{*,*}$ — группы коциклов, кограниц и когомологий комплекса $C^{*,*}$ относительно дифференциала δ.

Из теоремы Пахнера сразу следует, что граф Γ_{n-1} связен. Поэтому $H_d^{0,n} = H^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathcal{Q}) = 0$. Значит, гомоморфизм $d : C^{0,n} \to C^{1,n}$ является мономорфизмом. Мономорфизм d можно рассматривать как цепное отображение коцепного комплекса $\bigl(C^{0,*},\delta\bigr)$ в коцепной комплекс $\bigl(C^{1,*},\delta\bigr)$. Оказывается, что это цепное отображение цепно гомотопно нулю. Цепная гомотопия строится следующим образом. Пусть β — бизвездное преобразование, переводящее ориентированную $(n-1)$-мерную комбинаторную сферу L_1 в комбинаторную сферу L_2 и заменяющее полный подкомплекс $\sigma * \partial\tau \subset L_1$ на полный подкомплекс $\partial\sigma * \tau \subset L_2$. Рассмотрим (абстрактный) симплициальный комплекс L_β на множестве вершин $V(\beta)\sqcup\{u_1,u_2\}$, состоящий из всех симплексов $\rho\in L_1\cup L_2$, всех симплексов $\rho\cup\{u_1\}$ таких, что $\rho\in L_1$, всех симплексов $\rho\cup\{u_2\}$ таких, что $\rho\in L_2$, и симплекса $\sigma\cup\tau$. Комплекс L_β является n-мерной комбинаторной сферой. Ориентируем его так, чтобы линк вершины u_2 был изоморфен L_2 с сохранением ориентации. Тогда линк вершины u_1 будет изоморфен L_1 с обращением ориентации. Определим отображение

$$\begin{array}{ccc} C^{0,n} & \xrightarrow{s} & C^{1,n-1} \\ \| & & \| \\ C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1};\mathcal{Q}) & & C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-2};\mathcal{Q}) \end{array}$$

по формуле

$$(sf)\bigl(\{\beta\}\bigr) = (-1)^{n-1} f\bigl(\{L_\beta\}\bigr).$$

Предложение 2.1.2. *Отображение s является цепной гомотопией между цепными отображениями d и 0 коцепного комплекса $C^{0,*}$ в коцепной комплекс $C^{1,*}$, т. е. $d = \delta s + s\delta$.*

Доказательство. Пусть $f \in C^{0,n}$, L_1, L_2 — ориентированные $(n-1)$-мерные комбинаторные сферы, β — бизвездное преобразование, переводящее L_1 в L_2. В комбинаторной сфере L_β линки всех вершин $v \in V(\beta)\setminus U(\beta)$ обладают обращающими ориентацию автоморфизмами, линк каждой вершины $v \in U(\beta)$ изоморфен комбинаторной сфере $-L_{\beta_v}$; линки вершин u_1 и u_2 изоморфны комбинаторным сферам $-L_1$ и L_2 соответственно. Поэтому

$$(s\delta f)(\{\beta\}) = (-1)^n(\delta f)(\{L_\beta\}) = -\sum_{v\in U(\beta)} f(\{L_{\beta_v}\}) + f(\{L_2\}) - f(\{L_1\}) =$$
$$= (-1)^n \sum_{v\in U(\beta)} (sf)(\{\beta_v\}) + f(\partial\{\beta\}) = -(\delta s f)(\{\beta\}) + (df)(\{\beta\}).$$

Следовательно, $df = \delta s f + s\delta f$. □

Обозначим через A^n подгруппу группы $C^{1,n}$, состоящую из всех элементов h таких, что $\delta h \in B_d^{1,n+1}$.

Предложение 2.1.3. *Отображение s мономорфно отображает группу $Z_\delta^{0,n}$ в группу A^{n-1}.*

Доказательство. Из предложения 2.1.2 следует, что $d\big|_{Z_\delta^{0,n}} = \delta s\big|_{Z_\delta^{0,n}}$. Поскольку d – мономорфизм, то и $s\big|_{Z_\delta^{0,n}}$ – мономорфизм. Если $f \in Z_\delta^{0,n}$, то $\delta s f = df$, значит, $sf \in A^{n-1}$. □

Теперь рассмотрим более детально граф Γ_1. Одномерная комбинаторная сфера — это просто разбиение окружности на несколько дуг, причём количество дуг не менее 3. Поэтому вершины графа Γ_1 естественным образом находятся во взаимно однозначном соответствии с натуральными числами, не меньшими 3. Бизвёздное преобразование одномерных комбинаторных сфер — это либо разбиение одного из рёбер на два, либо обратная операция — объединение двух соседних рёбер. Поэтому в графе Γ_1 каждая пара вершин, отвечающая последовательным натуральным числам, соединена единственных ребром и других рёбер нет. Действие группы $\mathbb{Z}_2$, индуцированное обращением ориентации, на графе Γ_1 тривиально. Следовательно, $C^0_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_1;\mathcal{Q}) = C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_1;\mathcal{Q}) = 0$, т. е. $C^{0,2} = C^{1,2} = 0$.

Предложение 2.1.4. *Отображение s изоморфно отображает группу $B_\delta^{0,4}$ на группу $B_d^{1,3}$.*

Доказательство. Из предложения 2.1.3 сразу следует, что ограничение гомоморфизма s на группу $B_\delta^{0,4}$ является мономорфизмом. Так как $C^{1,2} = 0$, имеем $s\delta f = df$ для любого $f \in C^{0,3}$. Значит, образ гомоморфизма $s|_{B_\delta^{0,4}}$ совпадает с группой $B_d^{1,3}$. □

Обозначим через N ядро гомоморфизма $\delta^* : H_d^{1,3} \to H_d^{1,4}$, индуцированного цепным отображением $\delta : \big(C^{*,3}, d\big) \to \big(C^{*,4}, d\big)$. Из предложений 2.1.3 и 2.1.4 сразу получаем

Следствие 2.1.5. *Гомоморфизм s индуцирует мономорфизм групп когомологий*

$$\begin{array}{ccc} H_\delta^{0,4} & \xrightarrow{s^*} & H_d^{1,3} \\ \| & & \| \\ H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) & & H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q}). \end{array}$$

При этом образ мономорфизма s^* лежит в подгруппе N.

Из теоремы 1.2.2 следует, что $H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$. В разделе 2.5 мы докажем, что группа N является векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$ размерности не более 1. Значит, $N \cong \mathbb{Q}$ и гомоморфизм $s^* : H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to N$ является изоморфизмом. Таким образом, гомоморфизм s отображает группу

$$Z_\delta^{0,4} = \ker\bigl[\delta : C^0(\Gamma_3; \mathcal{Q}) \to C^0(\Gamma_4; \mathcal{Q})\bigr] = \ker\bigl[\delta : \mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}^5(\mathbb{Q})\bigr],$$

состоящую из локальных формул для первого класса Понтрягина, умноженного на рациональные числа, изоморфно на подгруппу $A^3 \subset C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$, состоящую из коциклов, представляющих классы когомологий, принадлежащие группе N. Поэтому чтобы получить явное описание интересующей нас группы $Z_\delta^{0,4}$, нам нужно явно описать подгруппу $N \subset H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$.

Первым делом, мы найдём образующие группы $H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z})$ и научимся раскладывать классы циклы графа Γ_2 по этим образующим. Этому будут посвящены следующие два раздела.

2.2 Циклы в графе Γ_2

Примем следующее соглашение: при изображении ориентированных двумерных симплициальных комплексов на рисунках мы изображаем треугольники так, чтобы обход вершин против часовой стрелки задавал их положительную ориентацию.

Выделим в графе Γ_2 циклы двух типов, которые мы будем называть *элементарными циклами.*

Первый тип элементарных циклов соответствует «коммутации» двух бизвездных преобразований. Нам будет полезно определить такие циклы во всех графах Γ_n. Пусть L — ориентированная n-мерная комбинаторная сфера, σ_1 и σ_2 — два ее симплекса такие, что

1) в L нет симплекса, содержащего одновременно и σ_1 и σ_2;

2) $\operatorname{link}\sigma_i = \partial\tau_i$, для некоторых «пустых» симплексов $\tau_i \notin L$, $i = 1, 2$;

3) $\tau_1 \neq \tau_2$.

Из условия 2) следует, что существуют бизвёздные преобразования β_{L,σ_1} и β_{L,σ_2}. Условие 3) гарантирует, что симплекс τ_2 останется «пустым» после бизвёздного преобразования β_{L,σ_1}, а симплекс τ_1 — после бизвёздного преобразования β_{L,σ_2}. Докажем это. Действительно, предположим, например, что $\tau_2 \in \beta_{L,\sigma_1}(L)$. Мы знаем, что $\tau_2 \notin L$, то есть симплекс τ_2 «появляется» при бизвёздном преобразовании β_{L,σ_1}, откуда следует, что $\tau_2 \supset \tau_1$. Но включение не может быть строгим, т. к. все собственные грани симплекса τ_2 являются симплексами комплекса L. Значит, $\tau_1 = \tau_2$, что противоречит условию 3). Таким образом, из условия 3) следует, что определены бизвёздные преобразования β_{L_1,σ_2} и β_{L_2,σ_1}, где $L_i = \beta_{L,\sigma_i}(L)$, $i = 1, 2$. Из условия 1) следует, что бизвёздное преобразование β_{L,σ_1} не изменяет звезду симплекса σ_2, а бизвёздное преобразование β_{L,σ_2} — звезду симплекса σ_1. Значит,

$$\beta_{L_1,\sigma_2}(L_1) = \beta_{L_2,\sigma_1}(L_2).$$

Мы обозначим эту комбинаторную сферу через $L_{1,2}$. Таким образом, в графе Γ_n имеется цикл

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\beta_{L,\sigma_1}"] & L_1 \arrow[d, "\beta_{L_1,\sigma_2}"] \\
L_2 \arrow[u, "\beta^{-1}_{L,\sigma_2}=\beta_{L_2,\tau_2}"] & L_{1,2} \arrow[l, "\beta^{-1}_{L_2,\sigma_1}=\beta_{L_{1,2},\tau_1}"]
\end{tikzcd}$$

Если этот цикл содержит несущественные бизвёздные преобразования, мы их просто пропускаем. Обозначим полученный цикл через $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$; циклы $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ мы будем называть *элементарными циклами первого типа*. Элемент группы $H_1(\Gamma_2; \mathbb{Z})$, являющийся суммой рёбер цикла $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ мы также будем обозначать через $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$. Вообще, мы, как правило, будем понимать слова «цикл в графе» в гомологическом смысле, т. е., будем называть циклом в графе замкнутую одномерную клеточную цепь, или, что равносильно, класс одномерных гомологий этого графа.

Пусть теперь $n = 2$. Для двумерных комбинаторных сфер имеются с точностью до обращения два вида бизвёздных преобразований: звёздные подразделения треугольников и флипы (см. рис. 2.1). Таким образом, имеются 3 возможности: мы можем рассматривать коммутацию двух звёздных подразделений треугольников, звёздного подразделения и флипа или двух флипов. Кроме того, в каждом из этих случаев возможно по 3 подслучая: звёзды симплексов σ_1 и σ_2 могут не иметь общих вершин, иметь одну общую вершину или две общие вершины. (Непосредственно проверяется, что число общих вершин не может быть больше двух.) Различные виды элементарных циклов в графе Γ_2 изображены на рис. 2.3, *а*–*и*. На каждом из этих рисунков имеется в виду, что комбинаторная сфера L содержит подкомплекс, изображённый в левом верхнем углу этого рисунка, и с этим подкомплексом происходят указанные бизвёздные преобразования. На всех рисунках, кроме рис. 2.3, *а*, *г* и *ж*, по два угла при вершинах отмечены дугами, рядом с которыми написаны буквы p и q. Имеется в виду, что к указанным вершинам внутри указанных дуг примыкает p и q треугольников соответственно. Пару натуральных чисел (p, q) мы будем называть *параметрами* элементарного цикла первого типа.

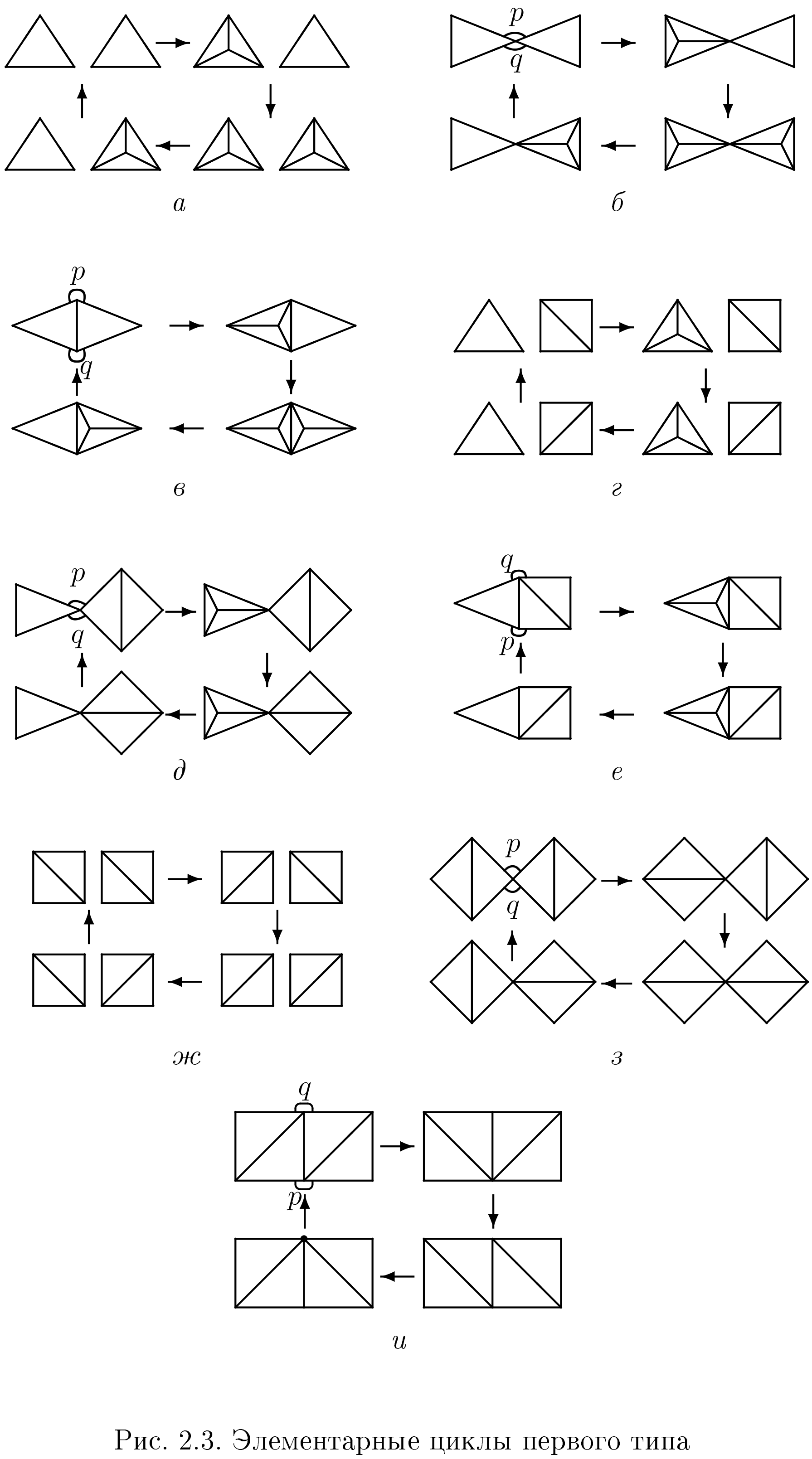


Рис. 2.3. Элементарные циклы первого типа

Элементарными циклами второго типа в графе Γ_2 мы будем называть все циклы, изображенные на рис. 2.4, *а–в*. При этом так же, как для циклов первого типа имеется в виду, что некоторая комбинаторная сфера L содержит подкомплекс, изображённый вверху рисунка для случая *а* и в левом верхнем углу рисунка в случаях *б* и *в*, и с этим подкомплексом происходят указанные бизвёздные преобразования; все несущественные бизвездные преобразования пропускаются. Так же, как в случае циклов первого типа, буквами p, q, r, k, l обозначены числа треугольников, примыкающих к указанным вершинам внутри указанных дуг. Наборы натуральных чисел (p, q, r), (p, q, r, k) и (p, q, r, k, l) мы будем называть *параметрами* элементарных циклов второго типа, изображённых на рис. 2.4, *а–в* соответственно. Вершины сфер L, углы при которых отмечены дугами с буквами p, q, r, k и l мы будем обозначать через x, y, z, u и v соответственно. (Эти буквы не написаны на рисунках, чтобы не загромождать их.) Циклы, изображённые на рис. 2.4, *а–в*, мы будем обозначать через $\gamma(L, x, y, z)$, $\gamma(L, x, y, z, u)$ и $\gamma(L, x, y, z, u, v)$ соответственно.

Предложение 2.2.1. *Любой цикл в графе* Γ_2 *представляется в виде целочисленной линейной комбинации элементарных циклов первого и второго типов.*

Мы приведём два доказательства этого предложения. В этом разделе мы дадим геометрическое доказательство, которое естественным образом объясняет, почему именно такие циклы выбраны в качестве элементарных. Однако для того, чтобы получить явную комбинаторную формулу для первого рационального класса Понтрягина нам будет нужен эффективный алгоритм для нахождения представления цикла в графе Γ_2 в виде

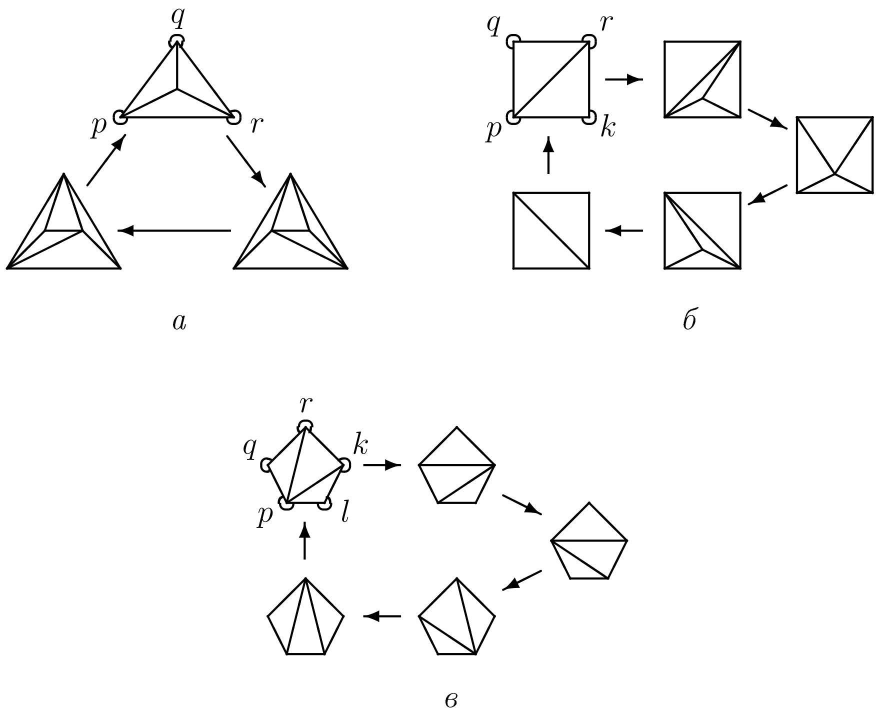


Рис. 2.4. Элементарные циклы второго типа

линейной комбинации элементарных циклов. Такой алгоритм будет дан в следующем разделе. При этом мы получим чисто комбинаторное доказательство предложения 2.2.1.

Геометрическое доказательство предложения 2.2.1. Доказательство будет опираться на следующие три утверждения.

1. Любая двумерная комбинаторная сфера может быть реализована в виде границы выпуклого симплициального многогранника в $\mathbb{R}^3$.

2. Если P_0 и P_1 — два выпуклых симплициальных многогранника в $\mathbb{R}^3$, границы которых изоморфны, то существует непрерывно зависящее от t семейство выпуклых симплициальных многогранников P_t, $t \in [0,1]$, с тем же комбинаторным типом.

3. Пусть L — двумерная комбинаторная сферы, e — её ребро такое, что определено бизвёздное преобразование $\beta_{L,e}$. Тогда существует выпуклый многогранник P в $\mathbb{R}^3$, одна грань F которого является четырехугольником, а остальные — треугольниками, такой, что его граница становится изоморфной L после проведения одной из диагоналей грани F, причём при этом изоморфизме проведённая диагональ грани F соответствует ребру e.

Эти утверждения являются частными случаями теоремы Штейница (см. [122], а также [132]).

Обозначим через $\Gamma_{2,l}$ полный подграф графа Γ_2, натянутый на множество вершин, соответствующих ориентированным комбинаторным сферам с не более, чем l вершинами. Каждый цикл в графе Γ_2 конечно же содержится в некотором подграфе $\Gamma_{2,l}$.

Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{R}^{3l}$, $l \geqslant 12$, точки которого будем представлять как наборы $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$, $y_j \in \mathbb{R}^3$. Точки y_j будем называть *координатами точки* y. Обозначим через $P(y)$ выпуклую оболочку точек $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_l$. Удалим из набора точек $y_1, y_2 \ldots, y_l$ все точки, лежащие во внутренности множества $P(y)$. Обозначим получившийся набор точек через $V(y)$ (этот набор может содержать кратные точки). Обозначим через $\Theta^{3l} \subset \mathbb{R}^{3l}$ множество, состоящее из всех точек y таких, что множество $P(y)$ не содержится ни в какой двумерной плоскости. Обозначим через $\Theta^{3l}_0 \subset \Theta^{3l}$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ находится в общем положении, т. е. не содержит четырех точек, лежащих в одной плоскости. Обозначим через $\Theta^{3l-1}_1 \subset \Theta^{3l} \backslash \Theta^{3l}_0$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ содержит только одну четверку точек, лежащую в одной плоскости. Обозначим через $\Theta_{2,1}^{3l-2} \subset \Theta^{3l} \setminus \left(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}\right)$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ содержит ровно две четверки точек, каждая из которых лежит в одной плоскости. Обозначим через $\Theta_{2,2}^{3l-2} \subset \Theta^{3l} \setminus \left(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}\right)$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ содержит только одну тройку точек, лежащую на одной прямой, и четверка точек из $V(y)$ лежит в одной плоскости тогда и только тогда, когда она содержит эту тройку точек. Обозначим через $\Theta_{2,3}^{3l-2} \subset \Theta^{3l} \setminus \left(\Theta^{3l} \cup \Theta^{3l-1}\right)$ множество, состоящее из всех точек y таких, что набор $V(y)$ содержит ровно одну пятерку точек, лежащих в одной плоскости, и четверка точек из $V(y)$ лежит в одной плоскости тогда, когда она содержится в этой пятерке точек. Пусть $\Theta_2^{3l-2} = \Theta_{2,1}^{3l-2} \cup \Theta_{2,2}^{3l-2} \cup \Theta_{2,3}^{3l-2}$. Множества Θ_0^{3l}, Θ_1^{3l-1} и Θ_2^{3l-2} являются вложенными в $\mathbb{R}^{3l}$ подмногообразиями размерностей $3l$, $3l-1$ и $3l-2$ соответственно. В действительности эти подмножества являются «началом» стратификации пространства $\mathbb{R}^{3l}$ по степени вырождения конфигурации точек $V(y)$ в $\mathbb{R}^3$. (Продолжение этой стратификации не будет нам нужно.) При этом

$$\dim\left(\mathbb{R}^{3l} \setminus \left(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1} \cup \Theta_2^{3l-2}\right)\right) = 3l-3.$$

Таким образом, множество $\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$ линейно связно и группа $H_1(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}; \mathbb{Z})$ порождается обходами вокруг компонент связности многообразия Θ_2^{3l-2}.

Симметрическая группа S_l действует на множестве Θ^{3l} перестановками координат y_i; подмножества Θ_0^{3l}, Θ_1^{3l-1} и Θ_2^{3l-2} инвариантны относительно этого действия.

Каждой точке $y \in \Theta_0^{3l}$ сопоставим вершину графа $\Gamma_{2,l}$, соответствующую комбинаторному типу границы многогранника $P(y)$. Гладкая кривая $y : [0,1] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$, трансверсальная к подмножеству Θ_1^{3l-1}, задает последовательность бизвездных преобразований и, следовательно, путь в графе $\Gamma_{2,l}$. Очевидно, что это соответствие продолжается до корректно определенного гомоморфизма

$$j : H_1(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}; \mathbb{Z}) \to H_1(\Gamma_{2,l}; \mathbb{Z}).$$

Из утверждений 1)–3) легко получить следующее предложение.

Предложение 2.2.2. *Пусть γ – путь в графе $\Gamma_{2,l}$, начало и конец которого совпадают с вершиной графа $\Gamma_{2,l}$, отвечающей границе тетраэдра. Тогда существует гладкая кривая $y : [0,1] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$, трансверсальная к подмножеству Θ_1^{3l-1}, проход по которой задает путь γ в графе $\Gamma_{2,l}$. Кривую y можно выбрать так, что $y(1) = \nu y(0)$ для некоторой перестановки $\nu \in S_l$.*

Предложение 2.2.3. *Пусть $y^0, y^1 \in \Theta_0^{3l}$ – точки такие, что $P(y^0)$ и $P(y^1)$ – тетраэдры и $\nu y^0 = y^1$ для некоторой перестановки $\nu \in S_l$. Тогда существует гладкая кривая $y : [0,1] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$, трансверсальная к подмножеству Θ_1^{3l-1}, такая, что $y(0) = y^0$, $y(1) = y^1$ и проход по кривой y задает в графе $\Gamma_{2,l}$ цикл, гомологичный нулю.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что все координаты точек y^0 и y^1, не входящие в наборы $V(y^0)$ и $V(y^1)$ соответственно, совпадают с барицентром тетраэдра $P(y^0) = P(y^1)$. Поскольку $l \geqslant 12$, можно считать, что перестановка ν оставляет на месте хотя бы четыре числа. Тогда существует точка $y^{\frac{1}{2}} \in \Theta_0^{3l}$ такая, что $\nu y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$.

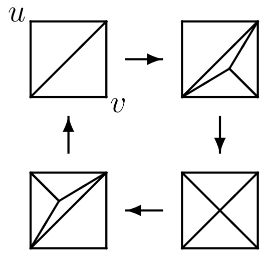


Рис. 2.5. Цикл в графе $\Gamma_{2,l}$, индуцированный обходом вокруг компоненты связности множества $\Theta_{2,2}^{3l-2}$

Пусть $y : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}$ – произвольная гладкая кривая, трансверсальная к подмножеству Θ_1^{3l-1}, такая, что $y(0) = y^0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = y^{\frac{1}{2}}$. Положим $y(t) = \nu y(1-t)$ для любого $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Сгладив кривую y в окрестности точки $y\left(\frac{1}{2}\right)$, получим искомую кривую. $\square$

Из предложений 2.2.2 и 2.2.3 следует, что гомоморфизм j является эпиморфизмом. Группа $H_1(\Theta_0^{3l} \cup \Theta_1^{3l-1}; \mathbb{Z})$ порождается обходами ω_X вокруг компонент связности X множества Θ_2^{3l-2}. Если X — компонента связности множества $\Theta_{2,1}^{3l-2}$, то $j(\omega_X)$ — элементарный цикл первого типа; если X — компонента связности множества $\Theta_{2,3}^{3l-2}$, то $j(\omega_X)$ — элементарный цикл второго типа. Цикл $j(\omega_X)$ для случая, когда X — компонента связности множества $\Theta_{2,2}^{3l-2}$, изображён на рис. 2.5. Легко доказать, что такой цикл представим в виде суммы элементарных циклов. Если вершины u и v не соединены ребром, он сразу представляется в виде суммы двух элементарных циклов из семейства, изображённого на рис. 2.4, *б*. Случай, когда вершины u и v соединены ребром, требует несколько более аккуратного рассмотрения, но всё равно разбирается непосредственно. $\square$

2.3 Алгоритм нахождения представления цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных циклов

Нам будет удобно ввести следующее вспомогательное определение. Пусть L — двумерная комбинаторная сфера с k вершинами. Будем говорить, что *сложность* $a(L)$ триангуляции L равна k, если L содержит хотя бы одну вершину степени 3, равна $k+\frac{1}{3}$, если L не содержит вершин степени 3, но содержит хотя бы одну вершину степени 4, и равна $k+\frac{2}{3}$, если L не содержит вершин степени 3 и 4. В последнем случае из формулы Эйлера следует, что L содержит хотя бы 12 вершин степени 5. Таким образом, сложность вершины принимает значения в множестве $\frac{1}{3}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Пусть β — бизвездное преобразование, переводящее двумерную комбинаторную сферу L_1 в двумерную комбинаторную сферу L_2. Положим, $a(\beta) = \max\bigl(a(L_1), a(L_2)\bigr)$, если $a(L_1) \neq a(L_2)$, и $a(\beta) = a(L_1) + \frac{1}{6}$, если $a(L_1) = a(L_2)$. Тогда *сложность* $a(\beta)$ бизвездного преобразования β принимает значения в множестве $\frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Обозначим через Γ_2^a, $a \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, подграф графа Γ_2, состоящий из всех вершин и ребер, сложность которых не превосходит a.

Предъявим теперь алгоритм для нахождения представления цикла в графе Γ_2 в виде целочисленной линейной комбинации элементарных циклов. Нам достаточно предъявить алгоритм для представления цикла в графе Γ_2^a, $a \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ в виде суммы линейной комбинации элементарных циклов и некоторого цикла в графе $\Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$. Мы предъявим такой алгоритм отдельно в каждом из случаев $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} + \frac{b}{6}$, $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Отметим, что наш алгоритм будет весьма громоздким для написания, так как имеется большое количество мелких случаев, требующих отдельного рассмотрения. Тем не менее, он весьма эффективен с вычислительной точки зрения: алгоритм для сведения цикла в графе Γ_2^a к циклу в графе $\Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$ требует ограниченное (некоторой небольшой универсальной константой) число операций на каждое ребро сложности a в рассматриваемом цикле; при этом увеличение длины получившегося цикла в графе $\Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$ по сравнению с длиной исходного цикла в графе Γ_2^a также составит ограниченное число рёбер на каждое ребро сложности a в рассматриваемом цикле.

Случай $a = k + \frac{b}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, b нечётно. Тогда множества вершин графов $\Gamma_2^{k+\frac{b}{6}}$ и $\Gamma_2^{k+\frac{b-1}{6}}$ совпадают. Поэтому каждый цикл в графе $\Gamma_2^{k+\frac{b}{6}}$ является суммой клеточной цепи графа $\Gamma_2^{k+\frac{b-1}{6}}$ и нескольких рёбер $\{\beta\}$ таких, что β — существенное бизвездное преобразование, переводящее L_1 в L_2, где $a(L_1) = a(L_2) = k + \frac{b-1}{6}$. Таким образом, наша задача заключается в том, чтобы представить каждое такое ребро $\{\beta\}$ в виде суммы линейной комбинации элементарных циклов и клеточной цепи графа $\Gamma_2^{k+\frac{b-1}{6}}$. Из того, что комбинаторные сферы L_1 и L_2 имеют одинаковую сложность, сразу следует, что β — флип, то есть бизвёздное преобразование, ассоциированное с некоторым ребром σ комбинаторной сферы L_1. Рассмотрим отдельно случаи $b = 1, 3, 5$.

Случай $b = 1$. Каждая из комбинаторных сфер L_1 и L_2 имеет по k вершин и содержит вершину степени 3. Рассмотрим два подслучая.

1. Имеется вершина $v \in V(L_1) = V(L_2)$, такая что степень вершины v в каждой из триангуляций L_1 и L_2 равна 3. Тогда $v \notin U(\beta)$ и, следовательно, корректно определен цикл $\gamma(L_1, \sigma, v)$. При этом цепь $\{\beta\} - \gamma(L_1, \sigma, v)$ имеет

носитель в графе Γ_2^k.

2. Не существует вершины $v \in V(L_1) = V(L_2)$, такой что степень вершины v в каждой из триангуляций L_1 и L_2 равна 3. Тогда существуют две вершины $v_1, v_2 \in U(\beta)$ такие, что степени вершины v_1 в триангуляциях L_1 и L_2 равны 3 и 4 соответственно, а вершины v_2 — наоборот, 4 и 3 соответственно. Тогда бизвездное преобразование β устроено так же, как бизвездное преобразование, изображенное на рис. 2.4, *а* внизу (или обратное ему). Соответственно, прибавляя к $\{\beta\}$ или отнимая от $\{\beta\}$ цикл, изображенный на этом рисунке, мы получим цепь с носителем в Γ_2^k.

<u>Случай $b = 3$.</u> Каждая из комбинаторных сфер L_1 и L_2 имеет по k вершин, не содержит вершин степени 3 и содержит вершину степени 4. Рассмотрим два подслучая.

1. Имеется вершина $v \in V(L_1) = V(L_2)$, такая что степень вершины v в каждой из триангуляций L_1 и L_2 равна 4. Тогда $v \notin U(\beta)$. Пусть u_1, u_2, u_3 и u_4 — вершины соединённые рёбрами с вершиной v (по порядку при каком-нибудь обходе вокруг вершины v), e_1, e_2, e_3 и e_4 — рёбра, соединяющие эти вершины с вершиной v. В каждой из комбинаторных сфер L_1 и L_2 может присутствовать не более одного из рёбер u_1u_3 и u_2u_4. Докажем, что хотя бы одно из этих рёбер отсутствует сразу в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2. Действительно, единственной альтернативой этому была бы ситуация, когда ребро u_1u_3 присутствует в одной из рассматриваемых триангуляций (скажем, в L_1), но отсутствует в L_2, а ребро u_2u_4 отсутствует в L_1 и присутствует в L_2. Тогда β — бизвёздное преобразование, ассоциированное с ребром u_1u_3 и в комбинаторной сфере L_1 обязаны присутствовать треугольники $u_1u_2u_3$ и $u_1u_3u_4$. Значит, степени вершин u_2 и u_4 в L_1 равны 3,

что невозможно. Итак, мы можем считать, что ребро u_2u_4 присутствует в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2. Тогда определён цикл $\gamma(L_1, \sigma, vu_1)$ и цепь $\{\beta\} - \gamma(L_1, \sigma, vu_1)$ имеет носитель в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{3}}$.

2. Не существует вершины $v \in V(L_1) = V(L_2)$, такой что степень вершины v в каждой из триангуляций L_1 и L_2 равна 4. Тогда существуют две вершины $v_1, v_2 \in U(\beta)$ такие, что степени вершины v_1 в триангуляциях L_1 и L_2 равны 4 и 5 соответственно, а вершины v_2 — наоборот, 5 и 4 соответственно. Тогда бизвездное преобразование β устроено так, как показано на рис. 2.6 (возможно, с изменением ориентации на противоположную). Ни одна из вершин комбинаторных сфер L_1 и L_2 не имеет степени 3; кроме того, ни одна из вершин не имеет степени 4 в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2 сразу. Следовательно, в комбинаторной сфере L_1 имеется не более 2 вершин степени 4: кроме вершины v_1 степень 4 может иметь только вершина v_3. Отсюда в результате простого подсчёта эйлеровой характеристики получаем, что в комбинаторной сфере L_1 имеется не менее 8 вершин степени 5. Значит, имеется вершина w степени 5, отличная от вершин $v_1, v_2, \dots, v_7$. Хотя бы для одного ребра e, выходящего из вершины w, определено бизвёздное преобразование, ассоциированное с ним. Рассмотрим цикл $\gamma(L_1, \sigma, e)$. Этот цикл состоит из ребра $\{\beta\}$ и ещё трёх рёбер сложности $k + \frac{1}{2}$. Заметим, однако, что для каждого из этих трёх рёбер существует вершина, степень которой равна 4 и до и после бизвёздного преобразования. Поэтому при помощи уже рассмотренного подслучая 1 мы можем представить каждое из этих трёх рёбер в виде суммы линейной комбинации элементарных циклов и клеточной цепи с носителем в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{3}}$. В результате мы получим такое же представление для ребра $\{\beta\}$.

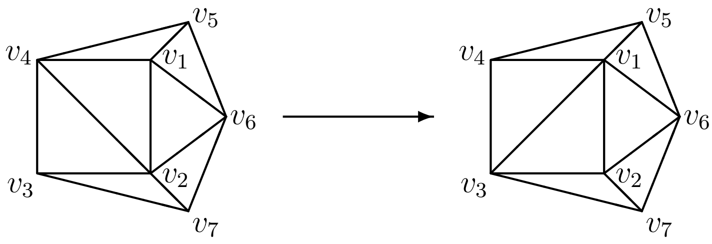


Рис. 2.6. Бизвёздное преобразование β в подслучае 2 случая $b = 3$

Случай $b = 5$. Каждая из комбинаторных сфер L_1 и L_2 имеет по k вершин и не содержит вершин степени 3 и 4. Комбинаторная сфера L_1 содержит по крайней мере 12 вершин степени 5, значит, существует вершина v степени 5, не принадлежащая множеству $U(\beta)$. Пусть u_1, u_2, u_3, u_4 и u_5 — вершины, соединённые рёбрами с вершиной v по порядку при каком-нибудь обходе вокруг вершины v. В каждой из комбинаторных сфер L_1 и L_2 может присутствовать не более двух из пяти рёбер u_1u_3, u_2u_4, u_3u_5, u_4u_1 и u_5u_2. Значит, хотя бы одно из этих пяти рёбер отсутствует в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2. Без ограничения общности мы можем считать, что это ребро u_5u_2. Тогда определён цикл $\gamma(L_1, \sigma, vu_1)$ и носитель цепи $\{\beta\} - \gamma(L_1, \sigma, vu_1)$ содержится в графе $\Gamma_2^{k+\frac{2}{3}}$.

Случай $a = k+\frac{b}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, b чётно. Граф $\Gamma_2^{k+\frac{b}{6}}$ состоит из подграфа $\Gamma_2^{k+\frac{b-1}{6}}$, вершин сложности $k + \frac{b}{6}$ и рёбер, ведущих из вершин сложности $k + \frac{b}{6}$ в вершины меньшей сложности. Значит, любой цикл в графе $\Gamma_2^{k+\frac{b}{6}}$ является суммой клеточной цепи в графе $\Gamma_2^{k+\frac{b-1}{6}}$ и нескольких разностей вида $\{\beta_1\}-\{\beta_2\}$, где β_1 и β_2 — неэквивалентные бизвёздные преобразования, переводящие какую-нибудь ориентированную комбинаторную сферу L сложности $k + \frac{b}{6}$ в какие-нибудь комбинаторные сферы меньшей сложности L_1 и L_2 соответственно. Наша задача состоит таким образом в том, чтобы представить каждую такую разность $\{\beta_1\} - \{\beta_2\}$ в виде суммы линейной комбинации элементарных циклов и клеточной цепи с носителем в графе $\Gamma_2^{k+\frac{b-1}{6}}$. Пусть $\beta_i = \beta_{L,\sigma_i}$. Если определён цикл $\gamma(L,\sigma_1,\sigma_2)$, то цепь $\{\beta_1\} - \{\beta_2\} - \gamma(L,\sigma_1,\sigma_2)$ имеет носитель в графе $\Gamma_2^{k+\frac{b-1}{6}}$ и наша цель достигнута. Таким образом, нам нужно рассмотреть только те случаи, когда цикл $\gamma(L,\sigma_1,\sigma_2)$ не определён. Рассмотрим отдельно случаи $b = 0, 2, 4$.

Случай $b = 0$. Бизвёздные преобразования β_i, $i = 1, 2$, уменьшают количество вершин комбинаторной сферы L, значит, σ_1 и σ_2 — вершины. Цикл $\gamma(L,\sigma_1,\sigma_2)$ не определён только в одном случае, когда комбинаторная сфера L изоморфна надстройке над границей треугольника и σ_1 и σ_2 — вершины надстройки. Но в этом случае бизвёздные преобразования β_1 и β_2 эквивалентны.

Случай $b = 2$. Комбинаторная сфера L не содержит вершин степени 3, но содержит хотя бы одну вершину степени 4; σ_1 и σ_2 — рёбра триангуляции L, выходящие из вершин степени 4. Имеется 3 подслучая, в которых цикл $\gamma(L,\sigma_1,\sigma_2)$ не определён.

1. Рёбра σ_1 и σ_2 содержатся в каком-нибудь одном треугольнике Δ комбинаторной сферы L и общая вершина рёбер σ_1 и σ_2 имеет степень больше 4. Пусть v_1 и v_2 — концы рёбер σ_1 и σ_2 соответственно, отличные от их общей вершины. Тогда вершины v_1 и v_2 имеют степени 4 и соединены ребром. Пусть e — ребро, выходящее из вершины v_1 напротив ребра σ_1. Легко проверить, что определены элементарные циклы $\gamma(L,\sigma_1,e)$ и $\gamma(L,\sigma_2,e)$ и цепь

$$\{\beta_1\} - \{\beta_2\} - \gamma(L,\sigma_1,e) + \gamma(L,\sigma_2,e)$$

имеет носитель в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$.

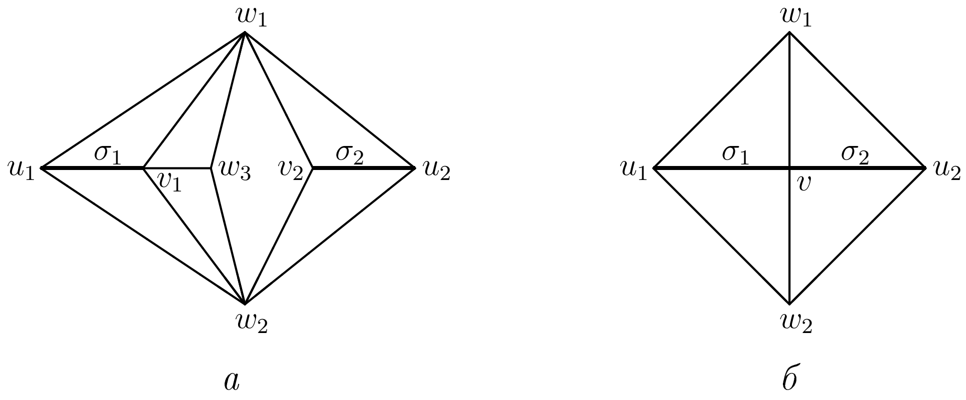


Рис. 2.7. Комбинаторная сфера L в подслучае 3 случая $b = 2$

2. Рёбра σ_1 и σ_2 содержатся в каком-нибудь одном треугольнике Δ комбинаторной сферы L и общая вершина рёбер σ_1 и σ_2 имеет степень 4. В этом случае комбинаторная сфера L содержит фрагмент, изображённый на рис. 2.4, *б* справа, такой, что центральная вершина фрагмента совпадает с общей вершиной рёбер σ_1 и σ_2, причём одно из этих рёбер ведёт из этой вершины влево-вверх, а другое — вправо-вверх. Тогда прибавляя или отнимая от разности $\{\beta_1\} - \{\beta_2\}$ соответствующий элементарный цикл второго типа, изображённый на рис. 2.4, *б*, мы получим цепь с носителем в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$.

3. Рёбра σ_1 и σ_2 не содержатся вместе ни в каком треугольнике триангуляции L, но две вершины, противолежащие ребру σ_1 в содержащих его треугольниках, совпадают с двумя вершинами, противолежащими ребру σ_2 в содержащих его треугольниках. Тогда комбинаторная сфера L содержит подкомплекс, изображённый на рис. 2.7, *а*, если рёбра σ_1 и σ_2 не имеют общих вершин, и подкомплекс, изображённый на рис. 2.7, *б*, если рёбра σ_1 и σ_2 имеют общую вершину; на рис. 2.7, *а* через v_1 обозначена та из вершин ребра σ_1, которая имеет степень 4; возможно, вершина w_3 совпадает с вершиной v_2.

На рис. 2.7, *а* вершины u_1 и w_3 не соединены ребром, значит, определено бизвёздное преобразование $\beta_3 = \beta_{L,v_1w_1}$. Мы можем представить в виде суммы линейных комбинаций элементарных циклов и цепей с носителями в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$ разность $\{\beta_1\} - \{\beta_3\}$ согласно уже рассмотренному подслучаю 2 и разность $\{\beta_2\}-\{\beta_3\}$, так как определён элементарный цикл $\gamma(L, \sigma_2, v_1w_1)$.

Рассмотрим теперь случай, изображённый на рис. 2.7, *б*. Если вершины u_1 и u_2 не соединены ребром в L мы согласно уже рассмотренному подслучаю 2 можем представить в виде суммы линейной комбинации элементарных циклов и цепи с носителем в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$ каждую из разностей $\{\beta_1\} - \{\beta_{L,vw_1}\}$ и $\{\beta_2\} - \{\beta_{L,vw_1}\}$, а значит, и разность $\{\beta_1\} - \{\beta_2\}$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда вершины u_1 и u_2 соединены ребром. Этот случай изображён на рис. 2.8 вверху посередине; на этом рисунке вершина w_2 может совпадать с вершиной w_3, а вершина w_1 — с вершиной w_4. Рассмотрим бизвёздные преобразования, изображённые на рис. 2.8. Два цикла, изображённые слева и справа на этом рисунке элементарные, а крайние левое и правое вертикальные бизвёздные преобразования имеют сложность $k + \frac{1}{6}$. Значит, нам достаточно представить в виде суммы линейной комбинации элементарных циклов и цепи с носителем в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{6}}$ разность $\{\hat{\beta}_1\} - \{\hat{\beta}_2\}$. Это мы уже умеем делать, так как вершины u_1 и u_2 не соединены ребром в комбинаторной сфере, изображённой на рис. 2.8 снизу посередине.

Случай $b = 4$. Комбинаторная сфера L не содержит вершин степеней 3 и 4; σ_1 и σ_2 — рёбра триангуляции L, выходящие из вершин степени 5. Комбинаторная сфера L содержит не менее 12 вершин степени 5, каждое из

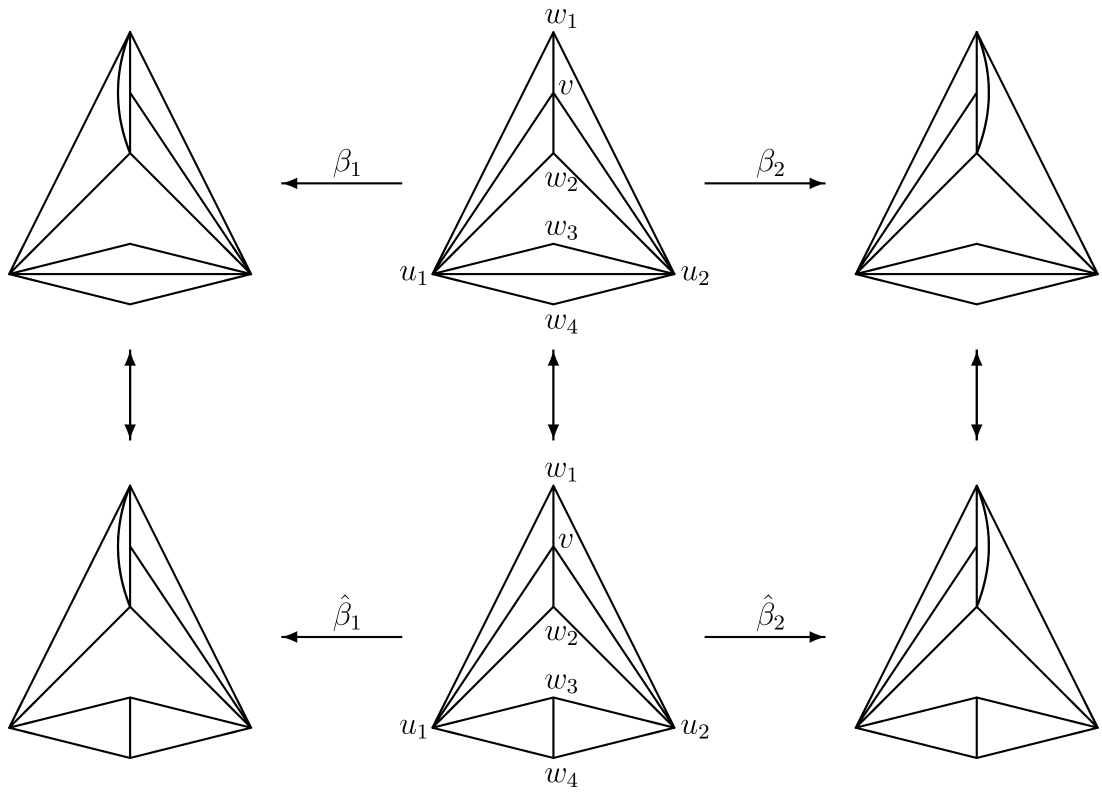


Рис. 2.8. Бизвёздные преобразования β_1, β_2, $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$

множеств $U(\beta_1)$ и $U(\beta_2)$ состоит из четырёх вершин. Значит, существует вершина v степени 5, не принадлежащая ни одному из множеств $U(\beta_1)$ и $U(\beta_2)$. Легко проверить, что из пяти рёбер, выходящих из вершины v, найдутся хотя бы три, для которых определены бизвёздные преобразования, ассоциированные с ними. Пусть это рёбра e_1, e_2 и e_3. Из того, что $v \notin U(\beta_1)$ следует, что ни для какого i не существует треугольника комбинаторной сферы L, содержащего рёбра σ_1 и e_i. Поэтому цикл $\gamma(L, \sigma_1, e_i)$ может быть не определён только в том случае, когда две вершины, противолежащие ребру e_i в двух содержащих его треугольниках, совпадают с двумя вершинами, противолежащими ребру σ_1 в двух содержащих его треугольниках. Однако это условие может быть выполнено только для какого-нибудь одного из рёбер e_i. Значит, хотя бы два из трёх циклов $\gamma(L, \sigma_1, e_i)$,

$i = 1, 2, 3$ определены. Аналогично, определены хотя бы два из трёх циклов $\gamma(L, \sigma_2, e_i)$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно, найдётся такое i, для которого определены оба цикла $\gamma(L, \sigma_1, e_i)$ и $\gamma(L, \sigma_2, e_i)$. Тогда носитель цепи

$$\{\beta_1\} - \{\beta_2\} - \gamma(L, \sigma_1, e_i) + \gamma(L, \sigma_2, e_i)$$

содержится в графе $\Gamma_2^{k+\frac{1}{2}}$.

Замечание 2.3.1. Отметим, что в этом алгоритме нам ни разу не понадобились элементарные циклы из семейства, изображённого на рис. 2.4. В принципе, несложно доказать, что элементарные циклы второго типа вообще не нужны, так как они представляются в виде линейной комбинации элементарных циклов первого типа. Тем не менее, нам удобно использовать элементарные циклы обоих типов из-за того, что алгоритм для нахождения разложения заданного цикла только по элементарным циклам первого типа более сложен.

Замечание 2.3.2. Приклеив к графу Γ_2 двумерные клетки вдоль всех элементарных циклов, мы получим двумерный комплекс X. Предложение 2.2.1 утверждает, что $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$. На самом деле несложно убедиться, что из приведенного доказательства следует односвязность комплекса X.

2.4 Формула

Опишем вначале группу

$$N = \ker\bigl[\delta^* : H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q}) \to H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3; \mathcal{Q})\bigr].$$

Из того, что группа $H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z})$ порождена элементарными циклами первого и второго типов следует, что каждый класс когомологий $c \in H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2, \mathcal{Q})$ однозначно характеризуется своими значениями на элементарных циклах. Однако элементарные циклы конечно же не являются независимыми порождающими группы $H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z})$, поэтому значения класса когомологий c на элементарных циклах не могут быть заданы произвольно. Рассмотрим функцию $\underline{c}_0$, сопоставляющую каждому элементарному циклу рациональное число так, как указано в таблице 2.1. В правом столбце этой таблицы выписаны значения функции $\underline{c}_0$ на элементарных циклах, изображенных на рисунках, номера которых выписаны в левом столбце. Эти значения зависят от количеств треугольников, примыкающих к изображенным на рисунках вершинам внутри углов, помеченных дугами на рисунках. Эти количества обозначены буквами p, q, r, k, l, которые написаны на рисунках рядом с соответствующими дугами. Мы будем называеть эти количества треугольников *параметрами* рассматриваемых элементарных циклов. Через ρ и ω обозначены функции

$$\rho(p,q) = \frac{q-p}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)};$$
$$\omega(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

Предложение 2.4.1. *Функция $\underline{c}_0$ задаёт корректно определённый класс когомологий $c_0 \in H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$. Этот класс когомологий принадлежит подгруппе $N \subset H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$; подгруппа N является одномерным векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$, порождённым классом c_0.*

Замечание 2.4.2. Интересно, что функция, очень похожая на функцию ρ, встречалась у М. Э. Казаряна [94] в выражении для класса Эйлера S^1-

Таблица 2.1. Значения класса когомологий c_0 на элементарных циклах

2.3, *а*, *г*, *ж*	0
2.3, *б*, *д*, *з*	$\rho(p,q)$
2.3, *в*, *и*	$\rho(0,q)-\rho(0,p)$
2.3, *е*	$\rho(0,q)+\rho(0,p)$
2.4, *а*	$\omega(p)-\omega(q)+\omega(r)-\frac{1}{12}$
2.4, *б*	$\omega(p)-\omega(q)-\omega(r)+\omega(k)$
2.4, *в*	$\omega(p)+\omega(q)+\omega(r)+\omega(k)+\omega(l)-\frac{1}{12}$

расслоения в терминах особенностей ограничения морсовской функции на тотальном пространстве на слои этого расслоения.

Следующая теорема описывает явно все локальные формулы для первого рационального класса Понтрягина.

Теорема 2.4.3. *Имеется канонический изоморфизм между аффинным пространством всех локальных формул для первого рационального класса Понтрягина и аффинным пространством всех коциклов $h \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})$, представляющих класс когомологий c_0. Этот изоморфизм устанавливается взаимно обратными отображениями s и $d^{-1}\delta$.*

Доказательство. Как было отмечено в конце раздела 2.1, из того, что $\dim N = 1$ следует, что гомоморфизм s отображает группу

$$Z^{0,4}_{\delta} = \ker\bigl[\delta : \mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}^5(\mathbb{Q})\bigr] = \ker\bigl[\delta : C^0(\Gamma_3;\mathcal{Q}) \to C^0(\Gamma_4;\mathcal{Q})\bigr]$$

изоморфно на подгруппу $A^3 \subset C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2;\mathcal{Q})$ и индуцирует изоморфизм $s^* : H^4(\mathcal{T}_*(\mathcal{Q})) \to N$. Из теоремы 1.2.2 следует, что группа $H^4(\mathcal{T}_*(\mathcal{Q}))$ является одномерным векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$, порождённым классом когомологий φ таким, что коциклы $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, представляющие класс когомологий φ, суть в точности все локальные формулы для первого рационального класса Понтрягина. Тогда $s^*(\varphi) = \lambda c_0$ для некоторой ненулевой рациональной константы λ. Значит, гомоморфизм s отображает аффинное пространство локальных формул для первого рационального класса Понтрягина изоморфно на аффинное пространство коциклов, представляющих класс когомологий λc_0. Из равенства $d = \delta s + s\delta$ следует, что ограничение гомоморфизма δs на группу $Z_\delta^{0,4}$ совпадает с ограничением гомоморфизма d на эту группу. Значит, обратный к s изоморфизм указанных аффинных пространств есть $d^{-1}\delta$. Таким образом, для каждого коцикла $h \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$, представляющего класс когомологий λc_0, элемент δh попадает в образ мономорфизма d и функция $f = d^{-1}\delta h \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ является локальной формулой для первого рационального класса Понтрягина. Чтобы вычислить константу λ, надо вычислить сумму $\sum_{v\in V(K)} f\bigl(\langle \operatorname{link} v\rangle\bigr)$ для некоторого ориентированного четырехмерного комбинаторного многообразия K с ненулевым первым числом Понтрягина и сравнить эту сумму с первым числом Понтрягина многообразия K. Прямое вычисление для 9-вершинной триангуляции $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, построенной В. Кюнелем и Т. Банхофом [96], даёт $\lambda = 1$. Это вычисление будет произведено в приложении В. $\square$

Опишем, как производить конкретные вычисления с помощью доказанной теоремы. Прежде всего необходимо выбрать локальную формулу f, вычисляющую первый класс Понтрягина, что равносильно выбору коцикла $h = s(f)$, представляющего класс когомологий c_0. Пусть теперь нам нужно вычислить значение $f(\langle L\rangle)$, где L — ориентированная трёхмерная комбинаторная сфера. Выберем последовательность бизвездных преобразований

$$L = L_1 \overset{\beta_1}{\rightsquigarrow} L_2 \overset{\beta_2}{\rightsquigarrow} \ldots \overset{\beta_{k-1}}{\rightsquigarrow} L_k \overset{\beta_k}{\rightsquigarrow} L_{k+1} \cong \partial\Delta^4,$$

переводящую комбинаторную сферу L в границу 4-мерного симплекса.

Следствие 2.4.4. $f(\langle L\rangle) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{v\in U(\beta_j)} h(\{(\beta_j)_v\})$.

Доказательство. Имеем,

$$f(\langle L_{j+1}\rangle) - f(\langle L_j\rangle) = (df)(\{\beta_j\}) = (\delta h)(\{\beta_j\}) = -\sum_{v\in U(\beta_j)} h(\{(\beta_j)_v\}).$$

Осталось заметить, что $f(\langle\partial\Delta^4\rangle) = 0$, так как граница симплекса обладает автоморфизмом, обращающим ориентацию. □

Коцикл h, представляющий класс когомологий c_0 можно выбрать канонически, например, следующим образом. Укажем явно для каждой вершины $\{L\}$ графа Γ_2 цепь $\xi_{\{L\}} \in C_1(\Gamma_2;\mathbb{Z})$, такую что $\partial\xi_{\{L\}} = \{L\} - \{\partial\Delta^3\}$. Положим $\xi_{\{\partial\Delta^3\}} = 0$. Цепь $\xi_{\{L\}}$ будет вычисляться через такие же цепи для вершин меньшей сложности при помощи следующей рекуррентной формулы. Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ — все бизвездные преобразования, понижающие сложность комбинаторной сферы L (очевидно, что такие бизвездные преобразования всегда есть); $L_1, L_2, \ldots, L_r$ — ориентированные комбинаторные двумерные сферы, получающиеся в результате этих преобразований. Положим

$$\xi_{\{L\}} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\bigl(\xi_{\{L_j\}} - \{\beta_j\}\bigr).$$

Коцикл h определяется теперь по формуле

$$h(\{\beta\}) = c_0\left(\{\beta\} + \xi_{\{L\}} - \xi_{\{\beta(L)\}}\right),$$

где β — бизвездное преобразование, применяемое к ориентированной комбинаторной сфере L.

Процедура вычисления значения $f\big(\langle L\rangle\big)$ выглядит следующим образом.

1. Находим последовательность бизвездных преобразований

$$L = L_1 \overset{\beta_1}{\rightsquigarrow} L_2 \overset{\beta_2}{\rightsquigarrow} \ldots \overset{\beta_{k-1}}{\rightsquigarrow} L_k \overset{\beta_k}{\rightsquigarrow} L_{k+1} \cong \partial\Delta^4, \tag{2.1}$$

переводящую трехмерную комбинаторную сферу L в границу 4-мерного симплекса.

2. Положим

$$\eta = \sum_{j=1}^{k} \sum_{v\in U(\beta_j)} \{(\beta_j)_v\} \in C_1(\Gamma_2;\mathbb{Z}).$$

3. Вычислим рекуррентно цепи $\xi_{\{\mathrm{link}\, v\}}$ для всех $v \in V(L)$. Тогда $\zeta = \eta - \sum_{v\in V(L)} \xi_{\{\mathrm{link}\, v\}}$ — цикл.

4. Представим цикл ζ в виде линейной комбинации $\sum_{i=1}^{l} n_i\gamma_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, γ_i — элементарные циклы, при помощи алгоритма, описанного в разделе 2.3.

5. Тогда

$$f\big(\langle L\rangle\big) = \sum_{i=1}^{l} n_i c_0(\gamma_i),$$

где значения $c_0(\gamma_i)$ берутся из таблицы 2.1.

Теперь цикл $f_\sharp(K)$, представляющий класс гомологий, двойственный первому рациональному классу Понтрягина ориентированного комбинаторного многообразия K вычисляется при помощи универсальной локальной формулы (1.3).

В указанном алгоритме наибольшую сложность представляют шаги 1 и 3. Из теоремы Пахнера следует, что цепочка (2.1) существует для любой трехмерной комбинаторной сферы L. Она всегда может быть найдена, если совершать с триангуляцией L всевозможные бизвездные преобразования. Однако такой алгоритм конечно же очень сложен. Основываясь на некоторых эмпирических правилах поиска упрощающих бизвездных преобразований, А. Бьорнер и Ф. Лутц создали компьютерную программу BISTELLAR (см. [55]), которая позволяет в частности достаточно эффективно находить цепочки вида (2.1) для комбинаторных сфер со сравнительно небольшим количеством вершин. Тем не менее не известно никаких теоретических оценок на число бизвездных преобразований в цепочке (2.1) для данной комбинаторной сферы L.

Сложность шага 3 состоит в том, что описанный рекуррентный процесс может сильно ветвиться. Если сложность шага 1 носит по-видимому принципиальный характер, то сложность шага 3 связана с тем, что мы хотим получить ответ в виде универсальной локальной формулы (1.3). В этом месте алгоритм может быть существенно упрощен, если отказаться от требования локальности. Опишем такую упрощенную процедуру вычисления симплициального цикла Z, представляющего класс гомологий, двойственный по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина m-мерного комбинаторного многообразия K.

1. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 3 или 4 найдем последовательность бизвездных преобразований

$$\operatorname{link}\sigma = L_1^{(\sigma)} \overset{\beta_1^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} L_2^{(\sigma)} \overset{\beta_2^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} \dots \overset{\beta_{k(\sigma)}^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} L_{k(\sigma)+1}^{(\sigma)} \cong \partial\Delta^{\operatorname{codim}\sigma}. \tag{2.2}$$

2. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 4 выберем какую-нибудь коориентацию; снабдим все симплексы $\tau \in K$ коразмерности 3, содержащие σ, такими коориентациями, чтобы коэффициент инцидентно-

сти симплексов σ и τ был равен $+1$ и положим

$$\zeta_\sigma = \sum_{j=1}^{k(\sigma)} \sum_{v \in U(\beta_j^{(\sigma)})} \left\{ \left(\beta_j^{(\sigma)}\right)_v \right\} - \sum_{\substack{\tau \in K, \tau \supset \sigma, \\ \operatorname{codim} \tau = 3}} \sum_{j=1}^{k(\tau)} \left\{ \beta_j^{(\tau)} \right\}.$$

Тогда ζ_σ — цикл в графе Γ_2.

3. Представив цикл ζ_σ в виде суммы элементарных циклов, вычислим значение $r_\sigma = c_0(\zeta_\sigma)$. Тогда искомый цикл задается по формуле

$$Z = \sum_{\sigma \in K, \operatorname{codim} \sigma = 4} r_\sigma \sigma.$$

Теорема 2.4.5. *Цепь Z, определённая при помощи указанной процедуры, является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина комбинаторного многообразия K.*

Доказательство. Пусть f — описанная выше каноническая универсальная локальная формула для первого класса Понтрягина. Непосредственно проверяется, что цепь $Z - f_\sharp(K)$ является границей цепи

$$\sum_{\tau \in K, \operatorname{codim} \tau = 3} c_0 \left(\xi_{\{\operatorname{link} \tau\}} - \sum_{j=1}^{k(\tau)} \left\{ \beta_j^{(\tau)} \right\} \right) \tau.$$

Так как класс гомологий цикла $f_\sharp(K)$ двойствен по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина многообразия K, отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

2.5 Строение группы N

В этом разделе мы докажем следующее предложение.

Предложение 2.5.1. *Пусть c — произвольный класс когомологий, принадлежащий подгруппе $N \subset H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$. Тогда значения класса когомологий c на элементарных циклах в графе Γ_2 получаются из значений, приведённых в таблице 2.1, умножением на некоторую (одну и ту же) рациональную константу λ.*

После того, как мы докажем это предложение, мы получим две возможности: либо группа N тривиальна, либо класс когомологий c, значения которого на элементарных циклах приведёны в таблице 2.1, корректно определён и N — одномерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, порождённое этим классом когомологий. Первая из указанных двух возможностей исключается, так как в разделе 2.1 было доказано, что в группу N мономорфно отображается группа $H^4(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$. Поэтому из предложения 2.5.1 сразу следует предложение 2.4.1.

Нам будет полезна следующая общая конструкция. Пусть L — ориентированная $(n-1)$-мерная комбинаторная сфера. Рассмотрим неприведённую надстройку ΣL и обозначим через u ту из её двух вершин, линк которой изоморфен комбинаторной сфере L с сохранением ориентации. Для любого симплекса $\sigma \in L$ мы будем обозначать через $\tilde{\sigma}$ симплекс на единицу большей размерности, натянутый на симплекс σ и вершину u.

Предложение 2.5.2. *Если элементарный цикл первого типа $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ определён, то элементарный цикл $\gamma(\Sigma L, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ тоже определён.*

Мы будем обозначать цикл $\gamma(\Sigma L, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ через $\tilde{\gamma}(L, \sigma_1, \sigma_2)$ или просто через $\tilde{\gamma}$. Вычислим теперь образ цикла $\tilde{\gamma}$ при гомоморфизме

$$\partial : H_1(\Gamma_n, \mathbb{Z}) \to H_1(\Gamma_{n-1}, \mathbb{Z}).$$

Для этого нам нужно выяснить, как изменяются линки вершин комбинаторной сферы ΣL при бизвёздных преобразованиях, составляющих цикл $\tilde{\gamma}$. Вершины комбинаторной сферы ΣL по отношению к циклу $\tilde{\gamma}$ бывают 4 видов:

1. Вершины, линки которых не претерпевают изменения в ходе бизвёздных преобразований, составляющих цикл $\tilde{\gamma}$; к ним относятся вершины комбинаторной сферы L, не лежащие ни в одной из звёзд $\mathrm{star}_L(\sigma_1)$ и $\mathrm{star}_L(\sigma_2)$ и вершина надстройки ΣL, противоположная вершине u. Эти вершины дают нулевой вклад в цикл $\partial\tilde{\gamma}$.

2. Вершины исчезающие и вновь появляющиеся (или наоборот, сначала появляющиеся, а потом исчезающие) в ходе бизвёздных преобразований, составляющих цикл $\tilde{\gamma}$. Эти вершины не лежат ни в одном из множеств $U(\beta)$ для бизвёздных преобразований β, составляющих цикл $\tilde{\gamma}$, поэтому они также дают нулевой вклад в цикл $\partial\tilde{\gamma}$.

3. Вершины, лежащие ровно в одной из звёзд $\mathrm{star}_L(\sigma_1)$ и $\mathrm{star}_L(\sigma_2)$ и не исчезающие в ходе бизвёздных преобразований, составляющих цикл $\tilde{\gamma}$. Линки таких вершин претерпевают в ходе бизвёздных преобразований, составляющих цикл $\tilde{\gamma}$, два взаимно обратных бизвёздных преобразования, поэтому такие вершины также дают нулевой вклад в цикл $\partial\tilde{\gamma}$.

4. Вершины, лежащие в пересечении звёзд $\mathrm{star}_{\Sigma L}(\tilde{\sigma}_1)$ и $\mathrm{star}_{\Sigma L}(\tilde{\sigma}_2)$; сюда относится вершина u и вершины, лежащие в пересечении звёзд $\mathrm{star}_L(\sigma_1)$ и $\mathrm{star}_L(\sigma_2)$. Для каждой такой вершины v цикл $\tilde{\gamma}$ ин-

дуцирует в её линке элементарный цикл первого типа

$$\gamma(\mathrm{link}_{\Sigma L}(v), (\tilde{\sigma}_1)_v, (\tilde{\sigma}_2)_v),$$

где через σ_v мы обозначаем симплекс σ, если $v \notin \sigma$, и гипергрань симплекса σ, противолежащую вершине v, если $v \in \sigma$. Имеем,

$$\gamma(\mathrm{link}_{\Sigma L}(u), (\tilde{\sigma}_1)_u, (\tilde{\sigma}_2)_u) = \gamma(L, \sigma_1, \sigma_2),$$
$$\gamma(\mathrm{link}_{\Sigma L}(v), (\tilde{\sigma}_1)_v, (\tilde{\sigma}_2)_v) = -\tilde{\gamma}(\mathrm{link}_L(v), (\sigma_1)_v, (\sigma_2)_v),$$

если вершина v лежит в пересечении звёзд $\mathrm{star}_L(\sigma_1)$ и $\mathrm{star}_L(\sigma_2)$. (Знак минус появляется из-за того, что линк вершины v в комбинаторной сфере $L = \mathrm{link}_{\Sigma L}(u)$ и линк вершины u в комбинаторной сфере $\mathrm{link}_{\Sigma L}(v)$ имеют противоположные ориентации.)

Таким образом,

$$\partial\tilde{\gamma}(L, \sigma_1, \sigma_2) = \gamma(L, \sigma_1, \sigma_2) - \sum_v \tilde{\gamma}(\mathrm{link}_L(v), (\sigma_1)_v, (\sigma_2)_v),$$

где суммирование ведётся по всем вершинам v, лежащим в пересечении звёзд $\mathrm{star}_L(\sigma_1)$ и $\mathrm{star}_L(\sigma_2)$. Так как класс когомологий c принадлежит группе N — ядру гомоморфизма δ^*, его значение на левой части полученного равенства равно нулю. Значит,

$$c\big(\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)\big) = \sum_v c\big(\tilde{\gamma}(\mathrm{link}_L(v), (\sigma_1)_v, (\sigma_2)_v)\big), \tag{2.3}$$

где суммирование ведётся по всем вершинам v, лежащим в пересечении звёзд $\mathrm{star}_L(\sigma_1)$ и $\mathrm{star}_L(\sigma_2)$. Отсюда, в частности, сразу следует, что значение класса когомологий c на всех циклах $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$, для которых $\mathrm{star}_L(\sigma_1) \cap \mathrm{star}_L(\sigma_2) = \varnothing$, то есть для всех циклов, изображённых на рис. 2.3, *а*, *г*, *ж*, равно нулю.

Для любых целых $p, q \geqslant 0$, хотя бы одно из которых строго больше нуля, возьмём надстройку над $(p+q+2)$-вершинной триангуляцией окружности, выберем в ней два треугольника, примыкающие к одной вершине надстройки так, что между ними к этой вершине примыкают с одной стороны p, а с другой q треугольников, и рассмотрим соответствующий элементарный цикл $\gamma_{p,q}$ в графе Γ_2 (см. рис. 2.9). Очевидно, что $\gamma_{q,p} = -\gamma_{p,q}$. Если оба числа p и q строго положительны, цикл $\gamma_{p,q}$ принадлежит семейству, изображённому на рис. 2.3, *б* с парой параметров (p, q). Цикл $\gamma_{0,q}$ принадлежит семейству циклов, изображённому на рис. 2.3, *в* с парой параметров $(2, q)$. Если $p, q > 0$, положим $\rho(p, q) = c(\gamma_{p,q})$. Тогда $\rho(q, p) = -\rho(p, q)$. Нам будет удобно распространить функцию ρ на множество всех пар неотрицательных, не равных одновременно нулю целых чисел так, что $c(\gamma_{0,q}) = \rho(0, q) - \rho(0, 2)$ и $\rho(q, 0) = -\rho(0, q)$ для всех натуральных q. Этими равенствами функция ρ определена однозначно с точностью до одновременного прибавления какой-нибудь константы ко всем значениям $\rho(0, q)$ и вычитания той же константы из всех значений $\rho(q, 0)$. Такая нормировка функции ρ будет выбрана позже.

Предложение 2.5.3. *Значение класса когомологий c на любом элементарном цикле, принадлежащем одному из семейств, изображённых на рис. 2.3, б, д, з с параметрами (p, q), равно $\rho(p, q)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ — элементарный цикл, принадлежащий одному из семейств, изображённых на рис. 2.3, *б*, *д*, *з* с параметрами (p, q). Звёзды симплексов σ_1 и σ_2, имеют единственную общую вершину, которую мы обозначим через x. Имеем $\tilde{\gamma}(\operatorname{link}_L x, (\sigma_1)_x, (\sigma_2)_x) = \gamma_{p,q}$. Поэтому равенство 2.3 принимает вид $c(\gamma) = c(\gamma_{p,q}) = \rho(p, q)$. □

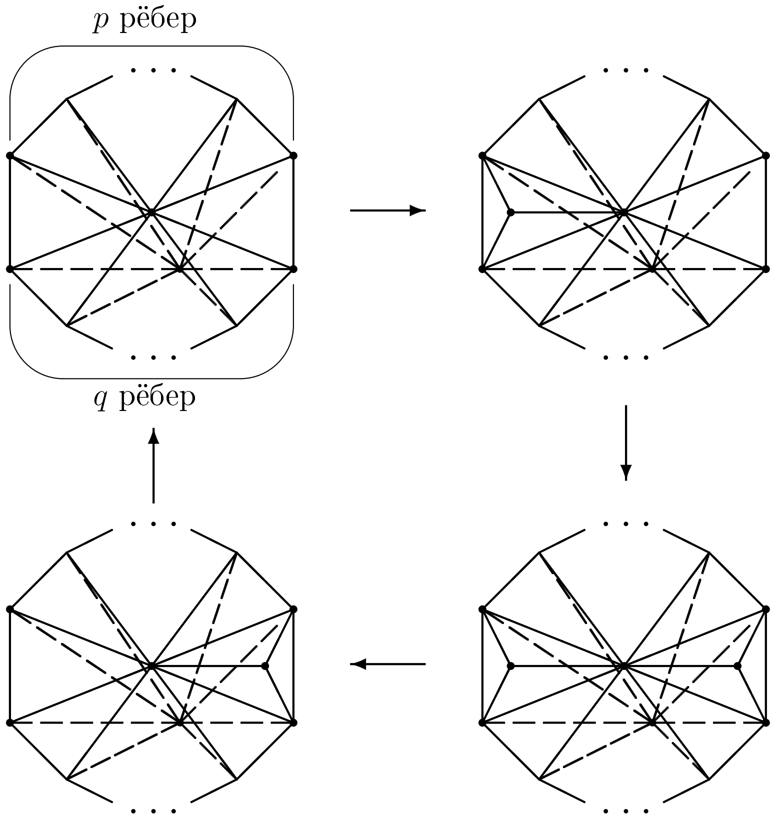


Рис. 2.9. Цикл $\gamma_{p,q}$

Предложение 2.5.4. *Значение класса когомологий c на любом элементарном цикле, принадлежащем семейству, изображённому на рис. 2.3, в с параметрами (p, q), равно $\rho(0, q) - \rho(0, p)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma(L, \Delta_1, \Delta_2)$ — элементарный цикл, принадлежащий семейству, изображённому на рис. 2.3, *в* с параметрами (p, q). Звёзды треугольников Δ_1 и Δ_2, то есть сами треугольники Δ_1 и Δ_2, имеют две общие вершины, которые мы обозначим через x_1 и x_2. При этом циклы $\tilde{\gamma}(\mathrm{link}_L\, x_i, (\Delta_1)_{x_i}, (\Delta_2)_{x_i})$, $i = 1, 2$, равны циклам $\gamma_{p,0}$ и $\gamma_{0,q}$. Поэтому равенство (2.3) принимает вид $c(\gamma) = \rho(0, q) - \rho(0, p)$. $\square$

Предложение 2.5.5. *Функция $\rho(p,q)$ удовлетворяет уравнению*

$$\rho(p,q+r+2)+\rho(q,r+p+2)+\rho(r,p+q+2)=$$
$$=\rho(p,q+r+1)+\rho(q,r+p+1)+\rho(r,p+q+1). \quad (2.4)$$

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь двумерную ориентированную комбинаторную сферу L, содержащую вершину x, к которой примыкает $p+q+r+3$ треугольника. Выберем среди треугольников, примыкающих к вершине x, три треугольника Δ_0, Δ_1 и Δ_2 таких, что при обходе вокруг вершины x по часовой стрелке мы пройдем последовательно через треугольник Δ_0, через r других треугольников, через треугольник Δ_1, через p других треугольников, через треугольник Δ_2 и через q оставшихся треугольников. Обозначим L_j комплекс, получаемый из L при бизвездном преобразовании, ассоциированном с треугольником Δ_j. Тогда

$$\sum_{j=0}^{2}\gamma(L_j,\Delta_{j+1},\Delta_{j+2})=\sum_{j=0}^{2}\gamma(L,\Delta_{j+1},\Delta_{j+2}),$$

где суммы индексов берутся по модулю 3. Возьмем классы гомологий обеих частей этого равенства и применим к ним отображение c. Получим требуемое равенство $\square$

Предложение 2.5.6. *Если функция*

$$\rho:(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\times\mathbb{Z}_{\geqslant 0})\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{Q}$$

удовлетворяет уравнению $\rho(q,p)=-\rho(p,q)$ и уравнению (2.4), то существуют рациональные константы b_1 и λ такие, что

$$\rho(p,q)=\frac{\lambda(q-p)}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)}$$

для любых $p, q > 0$ *и*

$$\rho(0,q) = -\rho(q,0) = \frac{\lambda q}{(q+2)(q+3)(q+4)} + b_1$$

для любого $q > 0$.

Доказательство. Легко проверить, что для любых $b_1, \lambda \in \mathbb{Q}$ функция, заданная приведёнными формулами, кососимметрична и удовлетворяет уравнению (2.4). Таким образом, нам достаточно доказать, что кососимметрическая функция ρ однозначно определяется из уравнения (2.4), если известны значения $\rho(0,1)$ и $\rho(1,2)$. Подставляя в уравнение (2.4) значения $p = q = r = 0$ и $p = 1, q = r = 0$, получим равенства $\rho(0,2) = \rho(0,1)$ и $2\rho(0,3) + \rho(1,2) = 2\rho(0,2)$. Значит, значения функции ρ на всех парах (k,l) таких, что $k + l \leqslant 3$, однозначно выражаются через значения $\rho(0,1)$ и $\rho(1,2)$.

Докажем, что при $m \geqslant 4$ значения функции ρ на всех парах (k,l) таких, что $k + l = m$, однозначно выражаются из уравнения (2.4) через значения функции ρ на всех парах (k,l) таких, что $k + l = m - 1$. Рассмотрим все уравнения вида (2.4), для которых $p + q + r + 2 = m$. Заменим в левой части каждого из них все слагаемые вида $\rho(k,l)$, где $k > l$, на слагаемые $-\rho(l,k)$, а все слагаемые вида $\rho(k,k)$ на нули. Систему полученных уравнений можно рассматривать как линейную систему уравнений с неизвестными $\rho(0,m), \rho(1,m-1), \ldots, \rho(n-1,n+1)$, если $m = 2n$, и с неизвестными $\rho(0,m), \rho(1,m-1), \ldots, \rho(n-1,n)$, если $m = 2n-1$. Необходимо доказать, что такая система уравнений имеет не более одного решения при любой правой части, т. е. что ее ранг равен n в каждом из двух случаев. Выделим из этой системы n уравнений таких, что матрица полученной подсистемы невырождена. Если $m = 2n$, то выберем уравнения, соответствующие тройкам (p, q, r) вида $(m-2-k, k, 0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Если $m = 2n-1$, то выберем уравнения, соответствующие тройкам (p, q, r) вида $(m-2-k, k, 0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, и добавим к ним уравнение, соответствующее тройке $(m-4, 1, 1)$. Невырожденность соответствующих матриц проверяется непосредственно. $\square$

Поскольку функция ρ была определена с точностью до прибавления произвольной константы ко всем значениям $\rho(0, q)$ и одновременного вычитания той же константы из всех значений $\rho(p, 0)$, мы можем теперь выбрать нормировку функции ρ так, что

$$\rho(p, q) = \frac{\lambda(q-p)}{(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4)}$$

для всех $p, q \geqslant 0$.

Предложение 2.5.7. *Существует рациональная константа b_2 такая, что значение класса когомологий c на любом элементарном цикле, принадлежащем семейству, изображённому на рис. 2.3, е с параметрами (p, q), равно $\rho(0, p) + \rho(0, q) + b_2$ (константа b_2 не зависит от p и q).*

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma(L, \Delta, e)$ — элементарный цикл, принадлежащий семейству, изображённому на рис. 2.3, e с параметрами (p, q). Треугольник Δ и звезда ребра e имеют две общие вершины, которые мы обозначим через x_1 и x_2 так, что x_1 изображена на рис. 2.3, e ниже, чем x_2. Имеем, $\tilde{\gamma}(\operatorname{link}_L x_1, \Delta_{x_1}, e_{x_1}) = \gamma_{0,p}$; цикл $\tilde{\gamma}(\operatorname{link}_L x_2, \Delta_{x_2}, e_{x_2})$ равен циклу γ'_q, изображённому на рис. 2.10. Поэтому равенство (2.3) принимает вид $c(\gamma) = \rho(0, p) + c(\gamma'_q)$. Пусть теперь γ^* — цикл, получающийся из цикла γ, если одновременно обратить ориентации всех комбинаторных сфер и

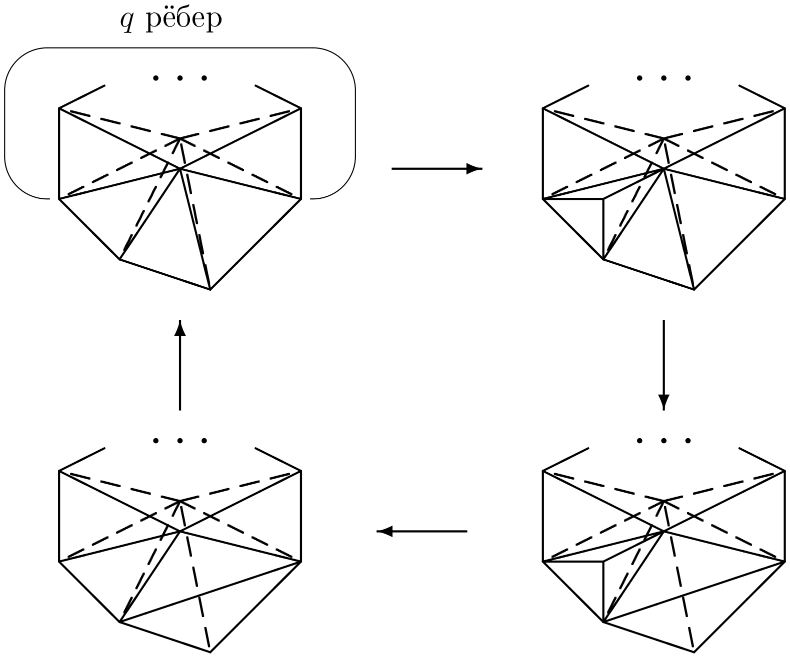


Рис. 2.10. Цикл γ'_q

направления всех бизвёздных преобразований. Тогда $c(\gamma^*) = c(\gamma)$. Однако цикл γ^* принадлежит семейству, изображённому на рис. 2.3, *в* с параметрами (q, p). Значит, $c(\gamma^*) = \rho(0, q) + c(\gamma'_p)$. Следовательно, для всех $p, q > 0$ имеет место равенство

$$\rho(0, p) + c(\gamma'_q) = \rho(0, q) + c(\gamma'_p),$$

откуда $c(\gamma'_q) = \rho(0, q) + b_2$ для некоторой рациональной константы b_2. $\square$

Предложение 2.5.8. *Значение класса когомологий c на любом элементарном цикле, принадлежащем семейству, изображённому на рис. 2.3, и с параметрами* (p, q), *равно* $\rho(0, q) - \rho(0, p)$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma(L, e_1, e_2)$ — элементарный цикл, принадлежащий семейству, изображённому на рис. 2.3, *и* с параметрами (p, q). Звёзды рёбер e_1 и e_2 имеют две общие вершины, которые мы обозначим через x_1 и x_2 так, что x_1 изображена на рис. 2.3, *и* ниже, чем x_2. Имеем,

$\tilde{\gamma}(\mathrm{link}_L\, x_1, (e_1)_{x_1}, (e_2)_{x_1}) = -\gamma'_p$ и $\tilde{\gamma}(\mathrm{link}_L\, x_2, (e_1)_{x_2}, (e_2)_{x_2}) = \gamma'_q$. Поэтому равенство (2.3) принимает вид $c(\gamma) = c(\gamma'_q) - c(\gamma'_p) = \rho(0,q) - \rho(0,p)$. $\square$

Мы практически закончили вычисление значений класса когомологий c на элементарных циклах первого типа: осталось только найти константу b_2. Теперь мы займёмся элементарными циклами второго типа.

Рассмотрим вначале следующую ситуацию. Предположим, что K — ориентированная трёхмерная комбинаторная сфера, содержащая 6 вершин $w_1, w_2, \ldots, w_6$ таких, что полный подкомплекс комплекса K натянутый на множество вершин $\{w_1, w_2, \ldots, w_6\}$, состоит из ориентированных тетраэдров $w_1w_2w_3w_4$, $w_2w_3w_4w_5$ и $w_3w_4w_5w_6$ и всех их граней. Произведём с комбинаторной сферой K следующие бизвёздные преобразования:

1) заменим тетраэдры $w_1w_2w_3w_4$ и $w_2w_3w_4w_5$ на тетраэдры $w_1w_2w_3w_5$, $w_1w_3w_4w_5$ и $w_1w_4w_2w_5$;

2) заменим тетраэдры $w_1w_3w_4w_5$ и $w_3w_4w_5w_6$ на тетраэдры $w_1w_3w_4w_6$, $w_1w_4w_5w_6$ и $w_1w_5w_3w_6$;

3) заменим тетраэдры $w_1w_2w_3w_5$ и $w_1w_5w_3w_6$ на тетраэдры $w_2w_3w_1w_6$, $w_2w_1w_5w_6$ и $w_2w_5w_3w_6$;

4) заменим тетраэдры $w_1w_4w_2w_5$, $w_1w_6w_4w_5$ и $w_1w_2w_6w_5$ на тетраэдры $w_1w_2w_6w_4$ и $w_2w_6w_4w_5$;

5) заменим тетраэдры $w_1w_2w_3w_6$, $w_1w_3w_4w_6$ и $w_1w_4w_2w_6$ на тетраэдры $w_1w_2w_3w_4$ и $w_2w_3w_4w_6$;

6) заменим тетраэдры $w_2w_3w_4w_6$, $w_2w_4w_5w_6$ и $w_2w_5w_3w_6$ на тетраэдры $w_2w_3w_4w_5$ и $w_3w_4w_5w_6$.

В результате мы снова получим симплициальный комплекс K. Полученный цикл в графе Γ_3 обозначим через $\gamma(K, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$. Обозначим через $L_1, L_2, \ldots, L_6$ линки вершин $w_1, w_2, \ldots, w_6$ соответственно в комбинаторной сфере K; обозначим через L_1^* и L_6^* комбинаторные сферы, полученные из сфер L_1 и L_6 соответственно при помощи звёздных подразделений треугольников $w_2w_3w_4$ и $w_3w_4w_5$ соответственно. Тогда циклы в графе Γ_2, индуцированные циклом $\gamma(K, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$ в линках вершин w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 и w_6 суть циклы

$$\gamma_1 = -\gamma(L_1^*, w_3, w_4, w_2);$$

$$\gamma_2 = -\gamma(L_2, w_3, w_1, w_4, w_5);$$

$$\gamma_3 = \gamma(L_3, w_4, w_1, w_2, w_5, w_6);$$

$$\gamma_4 = -\gamma(L_4, w_3, w_6, w_5, w_2, w_1);$$

$$\gamma_5 = \gamma(L_5, w_4, w_6, w_3, w_2);$$

$$\gamma_6 = \gamma(L_6^*, w_4, w_3, w_5)$$

соответственно. Линки остальных вершин комбинаторной сферы K не претерпевают изменений при бизвёздных преобразованиях, составляющих цикл $\gamma(K, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{6} c(\gamma_i) = 0. \qquad (2.5)$$

Предложение 2.5.9. *Значения класса когомологий c на элементарных циклах второго типа, принадлежащих семействам, изображённым на рис. 2.4, а, б и в, зависят лишь от наборов параметров (p, q, r), (p, q, r, k) и (p, q, r, k, l) соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим вначале элементарный цикл $\gamma(L, x, y, z)$ из семейства, изображённого на рис. 2.4, *а* с тройкой параметров (p, q, r). Очевидно, возможны два случая: либо $p = q = r = 1$, либо $p, q, r \geqslant 2$.

Первый из этих случаев тривиален, так как при таких параметрах в рассматриваемом семействе есть только один цикл, поэтому мы можем считать, что $p, q, r \geqslant 2$. В этом случае мы можем заменить три треугольника комбинаторной сферы L, изображённые на рисунке, на один треугольник xyz и при этом вновь получим двумерную комбинаторную сферу, которую мы обозначим через L_1. Рассмотрим конус $\operatorname{cone} L_1$, обозначим вершину конуса через w_1 и переобозначим вершины x, y и z через w_3, w_4 и w_2 соответственно. Добавим к симплициальному комплексу $\operatorname{cone} L_1$ две дополнительные вершины w_5 и w_6, трёхмерные симплексы $w_2w_3w_4w_5$ и $w_3w_4w_5w_6$ и все их грани. В результате мы получим ориентированный двумерный комбинаторный шар; обозначим его через J; пусть K — ориентированная двумерная комбинаторная сфера, полученная из комбинаторного шара J путём приклеивания конуса над его границей. Подкомплекс комбинаторной сферы K, состоящий из симплексов $w_1w_2w_3w_4$, $w_2w_3w_4w_5$ и $w_3w_4w_5w_6$ и всех их граней, является полным, значит, определён цикл $\gamma(K, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$; при этом $\gamma_1 = -\gamma(L, x, y, z)$. Заметим теперь, что линки $L_2, L_3, \ldots, L_6$ вершин $w_2, w_3, \ldots, w_6$ в комбинаторной сфере K определяются лишь тройкой параметров (p, q, r) и не зависят от строения комбинаторной сферы L вдали от вершин x, y, z, значит, циклы $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_6$ зависят лишь от тройки параметров (p, q, r). Теперь из равенства (2.5) следует, что значение $c(\gamma(L, x, y, z)) = -c(\gamma_1)$ зависит лишь от тройки параметров (p, q, r).

Совершенно аналогично для элементарного цикла $\gamma(L, x, y, z, u)$ (соответственно, $\gamma(L, x, y, z, u, v)$), принадлежащего семейству, изображённому на рис. 2.4, *б* (соответственно на рис. 2.4, *в*), комбинаторную сферу L можно реализовать в виде линка вершины w_2 (соответственно, w_3) комбинаторной сферы K таким образом, что $\gamma_2 = -\gamma(L, x, y, z, u)$ (соответственно, $\gamma_3 = \gamma(L, x, y, z, u, v)$), а все остальные циклы γ_i зависят лишь от четвёрки параметров (p, q, r, k) (соответственно, от пятёрки параметров (p, q, r, k, l)). Тогда из равенства (2.5) будет следовать, что значение $c(\gamma(L, x, y, z, u))$ зависит лишь от четвёрки параметров (p, q, r, k), а значение $c(\gamma(L, x, y, z, u, v))$ — лишь от пятёрки параметров (p, q, r, k, l). □

Значения класса когомологий c на элементарных циклах, принадлежащих семействам, изображённым на рис. 2.4, *а*, *б* и *в*, с наборами параметров (p, q, r), (p, q, r, k) и (p, q, r, k, l) соответственно, мы обозначим через $\eta(p, q, r)$, $\zeta(p, q, r, k)$ и $\theta(p, q, r, k, l)$ соответственно. Очевидно, что функция θ инвариантна относительно циклических перестановок аргументов, кроме того,

$$\eta(r, q, p) = \eta(p, q, r);$$
$$\zeta(k, r, q, p) = \zeta(p, q, r, k);$$
$$\theta(l, k, r, q, p) = \theta(p, q, r, k, l).$$

Предложение 2.5.10. *Существует рациональная константа b_5 такая, что для любых натуральных $p, q, r, k, l \geqslant 3$ выполнено равенство*

$$\theta(p, q, r, k, l) = \frac{\lambda}{(p+2)(p+3)} + \frac{\lambda}{(q+2)(q+3)} + \frac{\lambda}{(r+2)(r+3)} + \\ + \frac{\lambda}{(k+2)(k+3)} + \frac{\lambda}{(l+2)(l+3)} + b_5. \quad (2.6)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный элементарный цикл $\gamma(L, x, y, z, u, v)$ из семейства, изображённого на рис. 2.4, *в*, с параметрами (p, q, r, k, l). Так как $p \geqslant 3$, существует треугольник $\Delta \in L$ такой, что x – вершина Δ, а y, z, u и v — не вершины Δ. Пусть при обходе вокруг вершины x по часовой стрелке мы проходим по порядку через треугольник Δ, через $p' > 0$ других треугольников, через треугольники xyz, xzu, xuv, через $p'' > 0$ других треугольников, после чего снова попадаем в треугольник Δ. Тогда $p' + p'' = p - 1$. Обозначим через L_j, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, комбинаторную сферу, полученную из L после j первых бизвездных преобразований цикла $\gamma(L, x, y, z, u, v)$ (в частности, $L_0 = L$). Обозначим через L_j^* комбинаторную сферу, полученную из L_j в результате бизвездного преобразования, ассоциированного с треугольником Δ, т. е., в результате звёздного подразделения треугольника Δ. Рассмотрим граф G с множеством вершин $\{L_0, \ldots, L_4, L_0^*, \ldots, L_4^*\}$: для любого j соединим вершины L_j и L_j^* ребром, соответствующим бизвездному преобразованию, ассоциированному с треугольником Δ, для любого j соединим вершину L_j с вершиной L_{j+1} (или L_0, если $j = 4$) ребром, соответствующим $(j+1)$-му бизвездному преобразованию в цикле $\gamma(L_0, x, y, z, u, v)$, аналогично соединим ребром вершину L_j^* с вершиной L_{j+1}^* (или L_0^*, если $j = 4$) ребром, соответствующим $(j+1)$-му бизвездному преобразованию в цикле $\gamma(L_0^*, x, y, z, u, v)$. Граф G естественным образом отображается в граф Γ_2 (но это отображение не обязательно является вложением). При этом граф G изоморфен 1-остову пятиугольной призмы. Обход вокруг каждой грани этой призмы даёт элементарный цикл в графе Γ_2. Таким образом получаются циклы $\gamma(L, x, y, z, u, v)$, $-\gamma(L_0^*, x, y, z, u, v)$, отвечающие обходам вокруг оснований призмы, и циклы $\gamma_0 = \gamma(L_0, \Delta, xz)$, $\gamma_1 = \gamma(L_1, \Delta, ux)$, $\gamma_2 = \gamma(L_2, \Delta, yu)$, $\gamma_3 = \gamma(L_3, \Delta, vy)$ и $\gamma_4 = \gamma(L_4, \Delta, zv)$, отвечающие обходам вокруг боковых граней призмы. Сумма всех этих циклов равна нулю. Цикл γ_2 принадлежит семейству циклов, изображённому на рис. 2.3, *г*; циклы $-\gamma_0$, $-\gamma_1$, γ_3 и γ_4 принадлежит семейству циклов, изображённому на рис. 2.3, *д*, с параметрами $(p', p''+1)$, (p', p''), (p', p'') и $(p'+1, p'')$ соответственно. Следовательно,

$$\theta(p,q,r,k,l) - \theta(p+1,q,r,k,l) - \rho(p', p''+1) + \rho(p'+1, p'') = 0.$$

Значит,

$$\theta(p+1,q,r,k,l) - \theta(p,q,r,k,l) = -\frac{2\lambda}{(p+2)(p+3)(p+4)}\,. \tag{2.7}$$

Кроме того, функция θ симметрична относительно циклических перестановок переменных. Для доказательства предложения осталось заметить, что для любого натурального j верно равенство

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(j+1)(j+2)}\,.$$

$\square$

Предложение 2.5.11. *Константа b_2 из предложения 3.11 равна нулю.*

Предложение 2.5.12. *Равенство (2.6) имеет место для любых p, q, r, k и l, для которых соответствующее семейство элементарных циклов, изображённых на рис. 2.4, в, непусто.*

Доказательство. Мы будем доказывать предложения 2.5.11 и 2.5.12 одновременно. Рассмотрим произвольный элементарный цикл $\gamma(L,x,y,z,u,v)$ из семейства, изображённого на рис. 2.4, *в*, с параметрами (p,q,r,k,l). Обозначим через Δ примыкающий к ребру xy треугольник, отличный от треугольника xyz. Определим граф G и элементарные циклы $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_4$

так же, как в доказательстве предложения 2.5.10. Циклы $-\gamma_2$ и γ_4 принадлежит семейству циклов, изображённому на рис. 2.3, *д*, с параметрами $(q-1,1)$ и $(1,p-1)$ соответственно; циклы $-\gamma_0$, $-\gamma_1$, и γ_3 принадлежат семейству циклов, изображённому на рис. 2.3, *е*, с параметрами $(p,q-1)$, $(p-1,q)$, и $(p-1,q-1)$ соответственно. В результате вместо равенства (2.7) мы получим равенство

$$\theta(p+1,q+1,r,k,l)-\theta(p,q,r,k,l)= \\ =-\frac{2\lambda}{(p+2)(p+3)(p+4)}-\frac{2\lambda}{(q+2)(q+3)(q+4)}-b_2. \quad (2.8)$$

Подставляя в это равенство произвольные $p,q,r,k,l\geqslant 3$, мы в силу формулы (2.6) получим, что $b_2=0$. Теперь из формулы (2.8) следует, что равенство (2.6) верно не только при $p,q,r,k,l\geqslant 3$, но и при всех p,q,r,k,l таких, что семейство циклов, изображённых на рис. 2.4, *в*, непусто. □

Предложение 2.5.13. *Существует рациональная константа b_3 такая, что для любых p,q,r, для которых соответствующее семейство элементарных циклов, изображённых на рис. 2.4, а, непусто, выполнено равенство*

$$\eta(p,q,r)=\frac{\lambda}{(p+2)(p+3)}-\frac{\lambda}{(q+2)(q+3)}+\frac{\lambda}{(r+2)(r+3)}+b_3.$$

Предложение 2.5.14. *Существует рациональная константа b_4 такая, что для любых p,q,r,k, для которых соответствующее семейство элементарных циклов, изображённых на рис. 2.4, б, непусто, выполнено равенство*

$$\zeta(p,q,r,k)=\frac{\lambda}{(p+2)(p+3)}-\frac{\lambda}{(q+2)(q+3)}- \\ -\frac{\lambda}{(r+2)(r+3)}+\frac{\lambda}{(k+2)(k+3)}+b_4.$$

Эти два предложения доказываются совершенно аналогично предложению 2.5.12. Единственное отличие состоит в том, что функции η и ζ не инвариантны относительно циклических перестановок аргументов, поэтому аналоги формул (2.7) и (2.8) приходится писать отдельно для приращения каждого из аргументов p, q, r, k и каждой пары соседних по циклу аргументов соответственно. Нам осталось вычислить константы b_3, b_4 и b_5. При $p = q = r = 1$ цикл, изображённый на рис. 2.4, *а*, нулевой, так как он состоит из несущественных бизвёздных преобразований. Точно так же, при $p = q = r = k = 2$ цикл, изображённый на рис. 2.4, *б*, состоит из несущественных бизвёздных преобразований и, значит, равен нулю. Значит, $\eta(1,1,1) = 0$ и $\zeta(2,2,2,2) = 0$, откуда $b_3 = -\frac{\lambda}{12}$ и $b_4 = 0$. При $p = q = r = 2$ цикл, изображённый на рис. 2.4, *а*, состоит из двух несущественных бизвёздных преобразований и одного существенного, которое мы обозначим через β. При $p = q = r = k = l = 2$ цикл, изображённый на рис. 2.4, *в*, состоит из 5 бизвёздных преобразований, каждое из которых эквивалентно бизвёздному преобразованию β^{-1}. Значит, $\theta(2,2,2,2,2) = -5\eta(2,2,2) = \frac{\lambda}{6}$, откуда $b_5 = -\frac{\lambda}{12}$. Это вычисление завершает доказательство предложения 2.5.1.

2.6 Знаменатели коэффициентов универсальных локальных формул

Формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика [13] для первого рационального класса Понтрягина обладает следующим свойством: в получаемом цикле знаменатель коэффициента при каждом симплексе делит число 48. Однако эта формула применима только для комбинаторных многообразий с заданным сглаживанием и нелокальна. Процедура усреднения, предложенная в [14] даёт локальную формулу с неограниченными коэффициентами. В этом разделе мы докажем, что знаменатели значений универсальной локальной формулы для первого класса Понтрягина не могут быть ограниченными на множестве классов изоморфизма всех ориентированных трёхмерных сфер. (Отметим, что значения универсальной локальной формулы — это в точности коэффициенты при симплексах в получающихся с помощью неё циклах.) Более точно, мы докажем следующую оценку на рост знаменателей значений локальной формулы для первого класса Понтрягина.

Для любого гомоморфизма $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ Обозначим через $\mathrm{den}_l(f)$ наименьшее общее кратное знаменателей всех значений $f(\langle L\rangle)$, где L пробегает множество представителей всех классов изоморфизма $(n-1)$-мерных ориентированных комбинаторных сфер с не более, чем l вершинами.

Теорема 2.6.1. *Пусть $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ — произвольная универсальная локальная формула для первого рационального класса Понтрягина. Тогда число* $\mathrm{den}_l(f)$ *делится на наименьшее общее кратное чисел* $1, 2, \ldots, l-3$ *для любого четного* $l \geqslant 12$.

Доказательство. Пусть $l = 2k$, $k \geqslant 5$. Рассмотрим выпуклый $(l-5)$-угольник с вершинами $v_1, \ldots, v_{l-5}$. Пусть L_0 — произвольная триангуляция этого $(l-5)$-угольника, множество вершин которой совпадает с множеством $\{v_1, \ldots, v_{l-5}\}$. Добавим к триангуляции L_0 вершину v_0 и треугольники $v_0v_1v_2$, $v_0v_2v_3, \ldots, v_0v_{l-5}v_1$. Получим двумерную комбинаторную сферу L. Ориентируем ее так, чтобы треугольник $v_0v_1v_2$ был положительно ориентированным. Пусть $\gamma = \gamma(L, v_0v_1v_2, v_0v_{k-2}v_{k-1})$. Тогда γ — цикл в графе Γ_2, принадлежащий семейству циклов, изображённому на рис. 2.3, *б*, с параметрами $(k-4, k-3)$. Значит,

$$c_0(\gamma) = \frac{1}{(l-5)(l-4)(l-3)}\,.$$

Пусть $h = s(f)$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ — бизвездные преобразования, составляющие цикл γ. Так как коцикл h представляет класс когомологий c_0, получаем

$$\sum_{i=1}^{4} f(\langle L_{\beta_i}\rangle) = -\sum_{i=1}^{4} h(\{\beta_i\}) = -c_0(\gamma).$$

Значит, наименьшее общее кратное знаменателей чисел $f(\langle L_{\beta_i}\rangle)$ делится на $(l-5)(l-4)(l-3)$. Легко проверить, что каждая из комбинаторных сфер L_{β_i} имеет не более l вершин. Следовательно, число $\mathrm{den}_l(f)$ делится на $(l-5)(l-4)(l-3)$ для любого четного $l \geqslant 10$. Очевидно, что $\mathrm{den}_l(f)$ делится на $\mathrm{den}_m(f)$ для любого $m < l$. Значит, $\mathrm{den}_l(f)$ делится на наименьшее общее кратное чисел $2, 3, \ldots, l-3$ для любого четного $l \geqslant 12$. $\square$

Следствие 2.6.2. *Для любой собственной подгруппы $G \subset \mathbb{Q}$ имеет место равенство $H^4(\mathcal{T}^*(G)) = 0$.*

Доказательство. Из теорем 1.2.2 и 2.6.1 следует, что если $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ — коцикл, не являющийся кограницей, то для любого натурального числа q найдется натуральное число l такое, что $\mathrm{den}_l(f)$ делится на q. Следовательно, если $f \in \mathcal{T}^4(G)$ – локальная формула, то $f = \delta g$ для некоторой функции $g \in \mathcal{T}^3(\mathbb{Q})$. Осталось доказать, что $g \in \mathcal{T}^3(G)$. Имеем $s(f) = dg \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathbb{Q})$. Поскольку $f \in \mathcal{T}^4(G)$, значение коцепи $s(f) = dg$ на любом ребре графа Γ_2 является элементом группы G. Следовательно, $g \in \mathcal{T}^3(G)$. $\square$

Замечание 2.6.3. Теорема Левитта–Рурка о существовании локальных комбинаторных формул для полиномов рациональных классов Понтрягина (см. теорему 1.2.1) является следствием другой теоремы о существовании комбинаторных формул, доказанной в [98]: для любого натурального числа m *целочисленного* характеристического класса m-мерных блочных расслоений (см. раздел 3.3) существует функция, сопоставляющая каждому ориентированному m-мерному комбинаторному многообразию K с упорядоченными вершинами *целочисленный* цикл, представляющий класс гомологий, двойственный по Пуанкаре интересующему нас характеристическому классу касательного блочного расслоения многообразия K, такой, что коэффициент при каждом симплексе в этом цикле определяется лишь комбинаторным строением звезды этого симплекса *вместе с упорядочением её вершин*. Теорема 1.2.1 получается из этого результата с помощью усреднения по всем упорядочениям вершин. Из этих результатов Левитта-Рурка легко извлекается следующая верхняя оценка на рост знаменателей значений универсальных локальных формул.

Предложение 2.6.4. *Пусть $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ — произвольный класс когомологий. Тогда существуют коцикл $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$, представляющий класс ψ, и натуральная константа b такие, что число $\mathrm{den}_l(f)$ делит число $b(l+1)!$ для любого натурального l.*

Глава 3

Формулы для классов Понтрягина расслоений в терминах триангуляций их тотальных пространств

В этой главе мы всё время работаем в кусочно линейной категории. В терминологии мы в основном следуем книге [44]. Все многообразия, триангуляции, вложения и т. п. предполагаются кусочно линейными; многообразия предполагаются компактными, но, возможно, с краем.

3.1 Простые клетки и многообразия с углами

Дадим следующее определение.

Определение 3.1.1. *Простой клеткой* размерности n называется кусочно линейный шар Q размерности n, в крае которого выделены покрывающие его связные замкнутые кусочно линейные подмножества $F_1, \ldots, F_m$ такие, что пересечение любых k из подмножеств $F_1, \ldots, F_m$ либо пусто, либо кусочно линейно гомеоморфно $(n-k)$-мерному шару (при $k > n$ — обязательно пусто). Подмножества $F_1, \ldots, F_m$ называются *гипергранями* простой клетки Q, а их непустые пересечения — *гранями*. (Сама клетка Q также считается своей гранью.) Две простые клетки называются *изоморфными*, если существует кусочно линейный гомеоморфизм первой клетки на вторую, отображающий каждую гипергрань первой клетки на некоторую гипергрань второй.

Из этого определения следует, что каждая грань простой клетки $F = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}$ сама является простой клеткой, гипергранями которой являются все подмножества $F \cap F_j$ такие, что j не совпадает ни с одним из i_l и $F \cap F_j \neq \varnothing$.

Основным примером простой клетки является простой выпуклый многогранник. Тем не менее, как мы увидим чуть ниже, не любая простая клетка изоморфна простому многограннику.

Иногда нам будет удобно работать с несколько более общим определением.

Определение 3.1.2. *Квазипростой клеткой* размерности n называется кусочно линейный шар Q размерности n, в крае которого выделены покрывающие его связные замкнутые кусочно линейные подмножества $F_1, \ldots, F_m$ такие, что пересечение любых k из подмножеств $F_1, \ldots, F_m$ либо пусто, либо состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых кусочно линейно гомеоморфна $(n-k)$-мерному шару (при $k > n$ — обязательно пусто). Подмножества $F_1, \ldots, F_m$ называются *гипергранями* квазипростой клетки Q, а компоненты связности их непустых пересечений — её *гранями*. (Сама клетка Q также считается своей гранью.)

Изоморфизм квазипростых клеток определяется так же, как для простых клеток; грани квазипростой клетки сами являются квазипростыми клетками; каждая простая клетка является квазипростой. Отметим, что из определения квазипростой клетки легко следует, что относительные внутренности её граней не пересекаются и покрывают её.

Конструкция 3.1.3. Пусть L — $(n-1)$-мерная симплициально клеточная комбинаторная сфера с m вершинами $v_1, \ldots, v_m$. Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathrm{cone}(L')$ и обозначим его геометрическую реализацию через Q_L. Пусть F_i — геометрическая реализация подкомплекса $\mathrm{star}_{L'} v_i$. Тогда Q_L есть n-мерная квазипростая клетка с гипергранями $F_1, \ldots, F_m$. Пересечение гиперграней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ непусто тогда и только тогда, когда в комплексе L существует симплекс τ с вершинами $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$; при каждому такому симплексу τ соответствует компонента связности F_τ множества $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}$, являющаяся геометрической реализацией комбинаторного шара $b(\tau) * \mathrm{link}_{L'} \sigma$, где σ — произвольный симплекс комплекса L', содержащийся в τ и такой, что $\dim \sigma = \dim \tau$ (симплициальная комбинаторная сфера $\mathrm{link}_{L'} \sigma$ не зависит от выбора такого симплекса σ). Таким образом, частично упорядоченное множество граней квазипростой клетки Q_L (включая саму клетку Q) изоморфно с обращением отношения порядка частично упорядоченному множеству симплексов симплициаьно клеточной комбинаторной сферы L. Отсюда сразу вытекает, что квазипростая клетка Q_L является простой тогда и только тогда, когда L — симплициальная комбинаторная сфера. Кроме того, квазипростые клетки Q_{L_1} и Q_{L_2} изоморфны тогда и только тогда, когда комбинаторные сферы L_1 и L_2 изоморфны. Простая клетка Q_L изоморфна некоторому простому выпуклому многограннику тогда и только тогда, когда комбинаторная сфера L реализуется в виде границы выпуклого симплициального многогранника.

В действительности, такая конструкция исчерпывает все возможные квазипростые клетки с точностью до изоморфизма.

Предложение 3.1.4. *Для любой n-мерной квазипростой клетки Q существует $(n-1)$-мерная симплициально клеточная комбинаторная сфера L такая, что простая клетка Q изоморфна простой клетке Q_L.*

Доказательство. Из определения квазипростой клетки сразу следует, что частично упорядоченное множество её граней после обращения отношения порядка реализуется в виде частично упорядоченного множества симплексов некоторого симплициально клеточного комплекса L; обозначим через $v_1, \ldots, v_m$ вершины симплициально клеточного комплекса L, соответствующие гиперграням $F_1, \ldots, F_m$ квазипростой клетки Q.

Каждая грань F простой клетки Q является кусочно линейным шаром и, следовательно, кусочно линейна гомеоморфна конусу над своей границей. Поэтому, если J — кусочно линейная триангуляция границы грани F, мы можем продолжить её до кусочно линейной триангуляции грани F, изоморфной $\mathrm{cone}(J)$. Последовательно триангулируем все грани клетки Q, начиная с одномерных и заканчивая самой клеткой Q, как конусы над уже построенными кусочно линейными триангуляциями их границ. В результате мы получим кусочно линейную триангуляцию K клетки Q, изоморфную конусу над барицентрическим подразделением симплициально клеточного комплекса L. Граница комплекса Q кусочно линейно триангулирована при помощи симплициального комплекса L'. Значит, симплициальный комплекс L' является $(n-1)$-мерной симплициальной комбинаторной сферой, следовательно, L является $(n-1)$-мерной симплициально клеточной комбинаторной сферой. При этом гиперграни клетки Q являются геометрическими реализациями подкомплексов комплекса K, соответствующих подкомплексам $\operatorname{star}_{L'} v_i$ при изоморфизме $K \cong \operatorname{cone}(L')$. Значит, простые клетки Q и Q_L изоморфны. $\square$

Триангуляция K, построенная в этом доказательстве, будет называться *барицентрическим подразделением* квазипростой клетки Q и обозначаться через Q'.

Если Q — простая клетка, комплекс L, построенный в доказательстве предложения 3.1.4, будет симплициальной комбинаторной сферой. Таким образом, классы изоморфизма n-мерных квазипростых клеток находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изоморфизма $(n-1)$-мерных симплициально клеточных комбинаторных сфер, а классы изоморфизма n-мерных простых клеток — с классами изоморфизма $(n-1)$-мерных симплициальных комбинаторных сфер.

Нам будет удобно пользоваться следующим определением многообразия с углами.

Определение 3.1.5. *Многообразием с углами* размерности n называется связное n-мерное кусочно линейное многообразие M, в крае которого выделены покрывающие его связные замкнутые кусочно линейные подмножества $F_1, \ldots, F_m$ такие, что для любой точки $p \in M$, содержащейся в k подмножествах $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ и не содержащийся ни в каких других подмножествах F_j, существуют её замкнутая кусочно линейная окрестность U в M и кусочно линейное вложение $h : U \to \mathbb{R}^k_{\geqslant} \times \mathbb{R}^{n-k}$ такие, что $h(p) = (0, \ldots, 0)$ и множество $h(F_{i_l} \cap U)$ есть пересечение множества $h(U)$ с прямым произведением подортанта в $\mathbb{R}^k_{\geqslant}$, задаваемого обращением в нуль l-ой координаты, на $\mathbb{R}^{n-k}$ для каждого $l = 1, \ldots, k$. Подмножества $F_1, \ldots, F_m$ называются *гипергранями* многообразия с углами M, а компоненты связности их непустых пересечений — его *гранями*. (Само многообразие с углами M также считается своей гранью.) Нам будет удобно считать замкнутые кусочно линейные многообразия частным случаем многообразий с углами (при $m = 0$). Изоморфизм многообразий с углами определяется так же, как для простых клеток; грани многообразия с углами сами являются многообразиями с углами.

Из данных определений сразу следует, что многообразие с углами, все грани которого (включая его само) кусочно линейно гомеоморфны шарам, является квазипростой клеткой. С другой стороны, непосредственно проверяется, что квазипростые клетки Q_L являются многообразиями с углами. Следовательно, по предложению 3.1.4, любая квазипростая клетка является многообразием с углами. Таким образом, квазипростые клетки — это в точности многообразия с углами, все грани которых кусочно линейно гомеоморфны шарам.

3.2 Разбиения на простые клетки и многообразия с углами

Определение 3.2.1. *Конечным комплексом, склееным из многообразий с углами,* называется факторпространство несвязного объединения конечного количества многообразий с углами $M_1, M_2, \dots, M_q$ по отношению эквивалентности $\sim$, такому что

1) $\sim$ не отождествляет никакие две различные точки одного многообразия с углами M_i;

2) если отношение эквивалентности $\sim$ отождествляет точку $x_1 \in M_i$ с точкой $x_2 \in M_j$, оно отождествляет некоторую грань F_1 многообразия с углами M_i, содержащую точку x_1, с некоторой гранью F_2 многообразия с углами M_j, содержащей точку x_2, вдоль некоторого изоморфизма.

Образы граней многообразий с углами M_i при такой факторизации называются *гранями* этого комплекса. Изоморфизмом комплексов, склеенных из многообразий с углами, называется кусочно линейный гомеоморфизм, отображающий каждую грань первого комплекса на некоторую грань второго.

Разбиением полиэдра P на многообразия с углами называется комплекс Y, склеенный из многообразий с углами, с заданным кусочно линейным гомеоморфизмом $Y \to P$ (обычно полиэдр P будет отождествляться с Y). Два разбиения полиэдра P на многообразия с углами называются *изоморфными*, если они отличаются на изоморфизм комплекса Y. В дальнейшем мы не будем различать изоморфные разбиения.

Если все многообразия с углами M_i являются простыми (соответственно, квазипростыми) клетками, мы получим определения комплекса, склеенного из простых (соответственно, квазипростых) клеток, и разбиения на простые (соответственно, квазипростые) клетки.

Пусть P – полиэдр, Y – его разбиение на простые клетки. Если подмножество $R \subset P$ является объединением нескольких клеток разбиения Y, то соответствующее разбиение полиэдра R на простые клетки будем называть *ограничением разбиения Y на подмножество R*.

Определение 3.2.2. Два разбиения Y_0 и Y_1 полиэдра P на простые клетки называются *конкордантными*, если существует разбиение X полиэдра

$P \times [0, 1]$ на простые клетки, ограничение которого на полиэдр $P \times 0$ изоморфно разбиению Y_0, а на полиэдр $P \times 1$ — разбиению Y_1. Мы будем обозначать через $D_{SC}(P)$ множество разбиений полиэдра P на простые клетки, через $\mathcal{D}_{SC}(P)$ — множество их классов конкордантности. Класс конкордантности разбиений полиэдра P на простые клетки будем называть $\mathcal{D}_{SC}$-*структурой* на полиэдре P.

Если в этом определении везде рассматривать вместо простых клеток квазипростые клетки или многообразия с углами мы получим определения конкордантности разбиений на квазипростые клетки и разбиений на многообразия с углами. Мы будем обоначать через $D_{QSC}(P)$ и $D_{MC}(P)$ множества разбиений полиэдра P на квазипростые клетки и на многообразия с углами соответственно, через $\mathcal{D}_{QSC}(P)$ и $\mathcal{D}_{MC}(P)$ — соответствующие множества классов конкордантности. Классы конкордантности разбиений полиэдра P на квазипростые клетки и на многообразия с углами будем называть $\mathcal{D}_{QSC}$-*структурами* и $\mathcal{D}_{MC}$-*структурами* на полиэдре P соответственно.

Отметим, что вообще говоря могло бы оказаться, что два разбиения на простые или квазипростые клетки не конкордантны как разбиения на (квази)простые клетки, но становятся конкордантными, если их рассматривать как разбиения на многообразия с углами. В действительности такого не бывает; это будет доказано в разделе 3.5.

Так как каждая простая клетка является квазипростой, а каждая квазипростая клетка — многообразием с углами, мы получаем для любого компактного полиэдра P естественные отображения множеств

$$\mathcal{D}_{SC}(P) \to \mathcal{D}_{QSC}(P) \to \mathcal{D}_{MC}(P).$$

Как мы докажем в разделе 3.5, эти отображения являются биекциями для любого P; таким образом, понятия $\mathcal{D}_{SC}$-, $\mathcal{D}_{QSC}$- и $\mathcal{D}_{MC}$-структур на полиэдрах совпадают. После того, как мы это докажем, мы будем называть их просто $\mathcal{D}$-структурами и обозначать множество $\mathcal{D}$-структур на полиэдре P через $\mathcal{D}(P)$. Для разных целей нам будет удобно представлять $\mathcal{D}$-структуры разбиениями на простые или квазипростые клетки или на многообразия с углами, например, язык простых клеток наиболее удобен для введения на множестве $\mathcal{D}(P)$ структуры полугруппы, а разбиения на квазипростые клетки наиболее удобны для определения двойственного разбиения многообразия и естественным образом возникают в задаче о комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина блочных расслоений.

Пусть Y — разбиение полиэдра P на многообразия с углами, F — какая-нибудь грань этого разбиения. Рассмотрим частично упорядоченное множество $\mathcal{B}(F)$, элементами которого являются грани разбиения Y, содержащие грань F, упорядоченные по включению. Легко проверить, что частично упорядоченное множество $\mathcal{B}(F)$ изоморфно частично упорядоченному множеству симплексов (включая $\varnothing$) некоторого симплициально клеточного комплекса, который естественно называть линком грани F в разбиении Y и обозначать через $\operatorname{link} F$ или $\operatorname{link}_Y F$. Если Y — триангуляция полиэдра P, такое определение линка совпадает со стандартным. Если P — многообразие, то $\operatorname{link} F$ есть $(\dim P - \dim F - 1)$-мерная комбинаторная сфера, когда грань F не содержится в крае многообразия P, и $(\dim P - \dim F - 1)$-мерный комбинаторный шар, когда F содержится в крае P. Мы будем говорить, что разбиение полиэдра на многообразия с углами является *хо-*

рошим, если линк любой его грани является симплициальным комплексом (а не только симплициально клеточным). Отметим, что если все грани разбиения на многообразия с углами являются симплексами, мы приходим к понятию (кусочно линейного) симплициально клеточного разбиения полиэдра; если при этом разбиение является хорошим, мы получаем кусочно линейное симплициальное разбиение, т. е. триангуляцию.

3.3 Необходимые сведения о блочных расслоениях

Блочные расслоения были определены независимо несколькими авторами [115], [108], [92] в конце 1960х годов. По-видимому, они являются наиболее правильными аналогами векторных расслоений с точки зрения изучения нормальных расслоений кусочно линейных подмногообразий и кусочно линейной теории трансверсальности. Это связано с тем, что всякое локально плоское кусочно линейное подмногообразие кусочно линейного многообразия имеет единственное с точности до эквивалентности нормальное блочное расслоения, а также с наличием как абсолютной, так и относительной теорем трансверсальности. Изложим здесь некоторые необходимые нам сведения о блочных расслоениях, следуя серии работ [117]–[119].

Пусть Z — разбиение полиэдра P на замкнутые клетки σ_k, $k = 1, \ldots, t$, такое, что граница каждой клетки и пересечение любых двух клеток разбиения Z являются объединениями клеток разбиения Z. Блочное расслоение ξ^q/Z размерности q над разбиением Z — это полиэдр $E(\xi)$, покрытый замкнутыми шарами β_k, $k = 1, 2, \ldots, t$, такой, что $P \subset E(\xi)$ и выполнены следующие условия:

1) β_k – это $(\dim \sigma_k + q)$-мерный шар, содержащий клетку σ_k, причем

$\partial\sigma_k = \sigma_k \cap \partial\beta_k$ и (β_k, σ_k) – незаузленная пара шаров; шар β_k называется *блоком* над клеткой σ_k;

2) $E(\xi)$ — объединение блоков β_k;

3) относительные внутренности блоков не пересекаются;

4) $\beta_k \cap \beta_l$ — объединение блоков над клетками подкомплекса $\sigma_k \cap \sigma_l$ разбиения Z.

Два блочных расслоения ξ_1 и ξ_2 над разбиением Z называются *изоморфными*, если существует тождественный на P кусочно линейный гомеоморфизм $h : E(\xi_1) \to E(\xi_2)$, переводящий блоки расслоения ξ_1 в блоки расслоения ξ_2. Каждому подразделению Z_1 разбиения Z соответствует подразделение ξ_1/Z_1 блочного расслоения ξ/Z, единственное с точностью до изоморфизма (мы не будем приводить строго определения подразделения блочного расслоения; см. [117]). Пусть Z_1 и Z_2 — два клеточных разбиения полиэдра P; блочные расслоения ξ_1/Z_1 и ξ_2/Z_2 называются *эквивалентными*, если некоторые их подразделения изоморфны. Стандартным образом вводятся понятия индуцированного класса эквивалентности блочных расслоений, прямого произведения и суммы Уитни классов эквивалентности блочных расслоений. Тривиальное блочное расслоение размерности q над полиэдром P мы будем обозначать через ε^q_P. Блочные расслоения ξ_1 и ξ_2 над полиэдром P называются *стабильно эквивалентными*, если блочные расслоения $\xi_1 \oplus \varepsilon^{q_1}_P$ и $\xi_2 \oplus \varepsilon^{q_2}_P$ эквивалентны для некоторых q_1 и q_2. Для любого полиэдра P множество классов стабильной эквивалентности блочных расслоений над P является является группой относительно операции суммы Уитни; мы будем обозначать её через $I(P)$. Стабильная теория блочных расслоений совпадает со стабильной теорией микрорасслоений

Милнора (см. [106]); таким образом, группа $I(P)$ совпадает с введённой Милнором группой $\mathbf{k}_{\mathrm{PL}}(P)$ классов стабильной эквивалентности микро-расслоений над полиэдром P. Имеется естественный изоморфизм абелевых групп

$$I(P) \cong \mathbf{k}_{\mathrm{PL}}(P) \cong [P, \mathbb{Z} \times \mathrm{BPL}],$$

где через $[P, Q]$ обозначено множество классов гомотопии отображений, переводящих отмеченную точку пространства P в отмеченную точку пространства Q. Нам будет удобнее работать не с группой $I(P)$, а с её фактор-группой $\hat{I}(P)$ по подгруппе, состоящей из классов стабильной эквивалентности блочных расслоений, ограничения которых на каждую из компонент связности полиэдра P тривиальны. Тогда $\hat{I}(P) \cong [P, \mathrm{BPL}]$.

Если $N \subset M$ — локально плоское подмногообразие такое, что $N \cap \partial M = \partial N$, то существует единственное с точностью до эквивалентности нормальное блочное расслоение подмногообразия $N \subset M$, т. е. блочное расслоение ν над N такое, что $E(\nu) \subset M$. Нормальное блочное расслоение диагонали $M \subset M \times M$ называется *касательным блочным расслоением* многообразия M.

Если ξ – блочное расслоение над многообразием M, то $E(\xi)$ – тоже многообразие.

3.4 Формулы для классов Понтрягина блочных расслоений

Нам хочется получить формулы для рациональных классов Понтрягина блочного расслоения в терминах пересечения базы блочного расслоения с триангуляцией тотального пространства. Пусть ξ — блочное расслоение над разбиением Z полиэдра P. Нестрого говоря, идея заключается в том, что если K — достаточно мелкая триангуляция полиэдра $E(\xi)$ «трансверсальная» к P, то было бы естественно предположить, что триангуляция K высекает на полиэдре P разбиение на простые (или квазипростые) клетки, которое уже является комбинаторным объектом и в терминах которого можно пытаться писать формулы для рациональных классов Понтрягина. (Слово «трансверсальна» взято в кавычки, так как тотальное пространства блочного расслоения над произвольным полиэдром конечно же не является многообразием и поэтому нам нужно уточнять, что именно мы подразумеваем под трансверсальностью.) В действительности, гораздо удобнее не подбирать «достаточно хорошую» триангуляцию K, а взять какую-нибудь триангуляцию K полиэдра $E(\xi)$, являющуюся измельчением разбиения на блоки, и заменить вложение $P \subset E(\xi)$ на гомотопное ему кусочно линейное отображение $g : P \to E(\xi)$, расположенное «достаточно хорошо» по отношению к триангуляции K. При этом триангуляция K не обязана быть мелкой. Сформулируем точно, какие именно условия мы хотим наложить на кусочно линейное отображение g, чтобы иметь возможность написать формулы для рациональных классов Понтрягина.

1. Образ $g(\sigma_i)$ каждой клетки σ_i разбиения Z лежит в соответствующем ей блоке β_i.

2. Отображение g *транссимплициально* к триангуляции K, что означает, что для каждой точки $p \in P$, выполнено следующее условие:

   - Пусть τ — симплекс триангуляции K, содержащий точку $g(p)$ в своей относительной внутренности, $k = \dim \tau$. Тогда существуют замкнутая кусочно линейная окрестность U точки p в P, замкнутая кусочно линейная окрестность V точки $g(p)$ в $E(\xi) = |K|$, замкнутая кусочно линейная окрестность W вершины конуса в $|\operatorname{cone}\operatorname{link}\tau|$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{\subset} & |\operatorname{star}\tau| & \xrightarrow{s} & |\operatorname{cone}\operatorname{link}\tau| \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \| \\ D^{k-q} \times W & \xrightarrow{\subset} & D^k \times W & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & W & \xrightarrow{\subset} & |\operatorname{cone}\operatorname{link}\tau|, \end{array}$$

в которой вертикальные отображения являются кусочно линейными гомеоморфизмами, (D^k, D^{k-q}) — незаузленная пара шаров и s — линейное на симплексах звезды $\operatorname{star}\tau$ отображение, переводящее симплекс τ в вершину конуса $\operatorname{cone}\operatorname{link}\tau$ и тождественное на подкомплексе $\operatorname{link}\tau \subset \operatorname{star}\tau$.

Если отображение g удовлетворяет сформулированным двум условиям, мы автоматически получаем разбиение полиэдра P на многообразия с углами, гранями которого являются замыкания компонент связности прообразов открытых симплексов триангуляции K при отображении g. Это разбиение на многообразия с углами мы будем обозначать через $g^! K$. Третье условие, накладываемое на отображение g, будет следующим:

3. Разбиение $g^! K$ является разбиением на квазипростые клетки.

Отметим, что из условия 1 следует, что отображение g гомотопно тождественному вложению $P \subset E(\xi)$.

Замечание 3.4.1. Понятие *транссимплициальности* к триангуляции было введено М. Армстронгом и Е. Зиманом [51] для случая отображений многообразий. В условии 2 мы дословно повторяем их определение. В действительности, мы по сути находимся в случае отображения многообразий, так как мы можем отдельно изучать отображения $\sigma_i \to \beta_i$.

Нам нужно ответить на два вопроса:

- Как вычислять рациональные классы Понтрягина блочного расслоения ξ в терминах разбиения на квазипростые клетки $g^! K$, построенного по какому-нибудь отображению g, удовлетворяющему сформулированным условиям 1–3?
- Существует ли для данной триангуляции K отображение g, удовлетворяющее условиям 1–3, и если да, как его построить?

В этом разделе дадим ответ на первый вопрос. В разделе 3.8 мы приведём явную процедуру для построения отображения g, удовлетворяющего условиям 1–3 в случае, когда K — триангуляция $E(\xi)$ такая, что каждый блок триангулирован как конус над своей границей.

Напомним, что согласно предложению 3.1.4 каждая квазипростая клетка Q изоморфна квазипростой клетке Q_L для некоторой симплициально клеточной комбинаторной сферы L; при этом L легко восстанавливается по частично упорядоченному множеству граней клетки Q. Мы будем обозначать симплициально клеточную комбинаторную сферу L через L_Q. Отметим, что выбор ориентации клетки Q индуцирует выбор ориентации комбинаторной сферы L_Q.

В градуированном кольце $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ имеется канонический автоморфизм w, переводящий каждую образующую p_k в такой полином

$\widetilde{p}_k \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$, что

$$\widetilde{p}_k + \widetilde{p}_{k-1}p_1 + \widetilde{p}_{k-2}p_2 + \ldots + p_k = 0$$

для всех k. Мы будем обозначать образ полинома F при автоморфизме w через $\widetilde{F}$. Автоморфизм w характеризуется тем свойством, что

$$F(p_1(\xi), p_2(\xi), \ldots) = \widetilde{F}(p_1(\eta), p_2(\eta), \ldots)$$

для любых двух расслоений ξ и η с тривиальной суммой Уитни $\xi \oplus \eta$.

Теорема 3.4.2. *Пусть ξ — q-мерное блочное расслоение над клеточным разбиением Z компактного полиэдра P, K — триангуляция тотального пространства $E(\xi)$, являющаяся измельчением разбиения на блоки, $g : P \to E(\xi)$ — кусочно линейное отображение, удовлетворяющее сформулированным выше свойствам 1–3, и $Y = g^! K$ — высекаемое на P разбиение на квазипростые клетки. Пусть $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ — однородный полином степени $4k$ и $f \in \mathcal{T}^{4k}(\mathbb{Q})$ — универсальная локальная формула для полинома $\widetilde{F} = w(F)$. Рассмотрим $4k$-мерную клеточную коцепь $f^\sharp_{(1)}(Y) \in C^{4k}(Y; \mathbb{Q})$, значение которой на каждой $4k$-мерной клетке Q разбиения Y равно $f(\langle L'_Q \rangle)$. Тогда $f^\sharp_{(1)}(Y)$ — коцикл, представляющий класс когомологий $F(p_1(\xi), p_2(\xi), \ldots)$.*

Замечание 3.4.3. Если бы разбиение $g^! K$ было разбиением на простые (а не только квазипростые) клетки, мы могли бы вместо коцепи $f^\sharp_{(1)}(Y)$ взять коцепь $f^\sharp(Y)$, значение которой на каждой $4k$-мерной клетке Q разбиения $g^! K$ равно $f(\langle L_Q \rangle)$, а не $f(\langle L'_Q \rangle)$; полученная коцепь всё равно представляла бы тот же полином от рациональных классов Понтрягина блочного расслоения ξ. В общем случае это невозможно, так как симплициально клеточная комбинаторная сфера L_Q, в отличие от L'_Q, не обязана быть симплициальной и, значит, значение $f(\langle L_Q \rangle)$ может быть неопределено.

Замечание 3.4.4. В этой главе мы не обсуждаем вопроса о явном вычислении значений $f(\langle L \rangle)$. Этот вопрос обсуждается в главе 2 для первого класса Понтрягина и в разделе 4.7 для произвольных полиномов от рациональных классов Понтрягина. Теорема 3.4.2 показывает, что все наши результаты о явных формулах для полиномов от рациональных классов Понтрягина комбинаторных многообразий автоматически переносятся на случай произвольных блочных расслоений; при этом формула для вычисления полинома F от рациональных классов Понтрягина блочных расслоений будет настолько же явной и эффективной, насколько таковой является формула для вычисления полинома $\widetilde{F}$ от рациональных классов Понтрягина комбинаторных многообразий.

3.5 Совпадение понятий $\mathcal{D}_{SC}$-, $\mathcal{D}_{QSC}$- и $\mathcal{D}_{MC}$-структур

Вначале рассмотрим следующую полезную конструкцию. Пусть M — n-мерное многообразие с углами с гипергранями $F_1, \ldots, F_m$; Y — разбиение M на квазипростые клетки такое, что все грани многообразия с углами M являются подкомплексами этого разбиения.

Звёзды вершин v разбиения Y в его барицентрическом подразделении Y' образуют покрытие многообразия с углами M замкнутыми кусочно линейными n-мерными шарами. Покажем, что это разбиение имеет естественную структуру разбиения на квазипростые клетки. Для каждой клетки σ разбиения Y обозначим через Q_σ полный подкомплекс триангуляции Y', натянутый на множество барицентров всех клеток комплекса Y, содержащих клетку σ. В частности, $Q_v = \mathrm{star}_{Y'} v$, если v — вершина разбиения Y. Тогда Q_σ — комбинаторный шар размерности $n - \dim\sigma$. Пусть теперь F — какая-нибудь грань многообразия с углами M. Если клетка σ не содержится в F, то $Q_\sigma \cap F = \varnothing$. Если σ содержится в F, то $Q_\sigma \cap F$ есть полный подкомплекс триангуляции Y', натянутый на множество барицентров всех клеток комплекса Y, содержащих клетку σ и содержащихся в грани F. Значит, $Q_\sigma \cap F$ — комбинаторный шар размерности $n - \dim\sigma - \mathrm{codim}\, F$. Следовательно, каждый из n-мерных комбинаторных шаров Q_v имеет естественную структуру квазипростой клетки с гипергранями Q_e, где e — всевозможные выходящие из v рёбра разбиения Y, и $Q_v \cap F_i$, где F_i — всевозможные гиперграни многообразия M, содержащие вершину v. Гранями квазипростой клетки Q_v являются всевозможные клетки $Q_\sigma \cap F$, где σ — грань разбиения Y, содержащая вершину v и F — грань многообразия с углами M, содержащая клетку σ. Так как пересечение любых двух квазипростых клеток Q_{v_1} и Q_{v_2} является подкомплексом границы каждой из них, мы заключаем, что квазипростые клетки $Q_\sigma \cap F$ образуют разбиение многообразия с углами M на квазипростые клетки, которое мы будем обозначать через Y^* и называть *разбиением, двойственным разбиению* Y. Непосредственно проверяется, что имеет место следующее простое предложение.

Предложение 3.5.1. *Если Y — хорошее разбиение, то Y^* — разбиение на простые клетки; если Y — разбиение на простые клетки, то Y_* — хорошее разбиение.*

Грани многообразия с углами M являются подкомплексами разбиения Y^*. При этом ограничение разбиения Y^* на грань F совпадает с разбиением многообразия с углами F, двойственным к разбиению $Y|_F$. Пусть теперь X — разбиение компактного полиэдра P на многообразия с углами и Y — разбиение P на квазипростые клетки, являющееся измельчением разбиения X. Тогда для каждой грани M разбиения X мы можем взять ограничение $Y|_M$ и перейти к двойственному разбиению на квазипростые клетки, которое мы обозначим через Y^*_M. Такие разбиения для разных граней M согласованы и все вместе дают разбиение полиэдра P на квазипростые клетки, которое мы будем обозначать через Y^*_X. Из предложения 3.5.1 следует, что, если Y — хорошее разбиение, разбиение Y^*_X является разбиением на простые клетки.

Нас будет особенно интересовать случай, когда разбиение $Y = K$ есть триангуляция многообразия с углами M такая, что все грани многообразия M являются подкомплексами. Так как триангуляция является хорошим разбиением на простые клетки, предложение 3.5.1 утверждает, что K^* — хорошее разбиение на простые клетки.

Предложение 3.5.2. *Полиэдр $M \times [0,1]$ имеет структуру $(n+1)$-мерного многообразия с углами с гипергранями $M \times 0$, $F_i \times [0,1]$, где F_i — гиперграни многообразия с углами M, и $Q_v \times 1$, где v — вершины триангуляции K.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для любой точки $p \in M \times [0,1]$, лежащей ровно в k из указанных гиперграней, существует её замкнутая кусочно линейная окрестность U в $M \times [0,1]$ и кусочно линейное вложение $h : U \hookrightarrow \mathbb{R}^k_{\geqslant} \times \mathbb{R}^{n+1-k}$, удовлетворяющий свойствам, описанным в определении 3.1.5. Если $p \notin M \times 1$, это утверждение очевидно следует из того, что M — многообразие с углами. Пусть $p \in M \times 1$. Рассмотрим клетку $(Q_\sigma \cap F) \times 1$ разбиения $K^* \times 1$, в относительной внутренности которой лежит точка p. Пусть σ — симплекс с вершинами $v_1, \ldots, v_l$ и F — компонента связности множества $F_1 \cap \ldots \cap F_r$, где F_i — различные гиперграни многообразия с углами M. Тогда точка p лежит ровно в $k = l + r$ гипергранях $Q_{v_1} \times 1$, …, $Q_{v_l} \times 1$, $F_1 \times [0,1]$, …, $F_r \times [0,1]$. Обозначим через $J \subset K'$ $(n-l-r)$-мерную комбинаторную сферу, являющуюся полным подкомплексом, натянутым на барицентры всех симплексов триангуляции $K|_F$, строго содержащих симплекс σ (мы будем помещать триангуляцию J в $M \times 1$, т. е. будем отождествлять J и $J \times [0,1]$). Тогда замкнутая окрестность V точки p в $F \times [0,1]$ может быть триангулирована как $p * q * J * \partial\sigma$, где q точка, являющаяся проекцией точки p на $M \times 0$ вдоль отрезка $[0,1]$. Построим вложение $h_1 : V \hookrightarrow \mathbb{R}^l_\geqslant \times \mathbb{R}^{n+1-l-r}$. Для этого отобразим точку p в начало координат, точки v_j — в концы базисных векторов $\mathbf{e}_i$ ортанта $\mathbb{R}^l_\geqslant$, точку q — в конец вектора $\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_l$; отобразим комбинаторную сферу J при помощи какого-нибудь кусочно линейного гомеоморфизма на границу какого-нибудь выпуклого симплекса $\Delta^{n+1-l-r} \subset \mathbb{R}^{n+1-l-r}$ и продолжим отображение на джойн по линейности. Вложение h_1 отображает каждое из множеств $((Q_{v_j} \cap F) \times 1) \cap V$ на пересечение подмножества $h_1(V)$ с прямым произведением ортанта в $\mathbb{R}^l_\geqslant$, натянутого на вектора $\mathbf{e}_i$, $i \neq j$, на $\mathbb{R}^{n+1-l-r}$. Теперь из того, что M — многообразие с углами, легко следует, что для достаточно маленькой замкнутой кусочно линейной окрестности U точки p в $M \times [0,1]$ существует кусочно линейное вложение $h_2 : U \hookrightarrow \mathbb{R}^r_\geqslant \times V$, переводящее каждое из множеств $(Q_{v_j} \times 1) \cap U$ на множество $((Q_{v_j} \cap F) \times 1) \cap V$ и каждое из множеств F_i на пересечение множества $h_2(U)$ с произведением на V подортанта в $\mathbb{R}^r_{\geqslant}$, задаваемого равенством нулю i-ой координаты. Тогда сквозное вложение

$$U \xrightarrow{h_2} \mathbb{R}^r_{\geqslant} \times V \xrightarrow{\mathrm{id}\times h_1} \mathbb{R}^r_{\geqslant} \times \mathbb{R}^l_{\geqslant} \times \mathbb{R}^{n+1-l-r}$$

является искомым вложением h. $\square$

Полиэдр $M \times [0,1]$ с описанной структурой многообразия с углами мы будем обозначать через $\widetilde{M}_K$. Непосредственно проверяется, что $\widetilde{M}_K$ — простая клетка, если M — простая клетка и $\widetilde{M}_K$ — квазипростая клетка, если M — квазипростая клетка.

Отметим, что для любой грани F многообразия с углами M структура многообразия с углами на $F \times [0,1]$ как на грани многообразия с углами $\widetilde{M}_K$ совпадает со структурой многообразия с углами $\widetilde{F}_{K|_F}$. Пусть теперь X — разбиение компактного полиэдра P на многообразия с углами и K — триангуляция полиэдра P, являющаяся измельчением разбиения X. Для каждой грани M разбиения X наделим $M \times [0,1]$ структурой многообразия с углами $\widetilde{M}_{K|_M}$. Все вместе многообразия с углами $\widetilde{M}_{K|_M}$ образуют разбиение полиэдра $P \times [0,1]$ на многообразия с углами; мы обозначим это разбиение через $\widetilde{X}_K$. Ограничение разбиения $\widetilde{X}_K$ на $P \times 0$ совпадает с разбиением X, а на $P \times 1$ — с разбиением на простые клетки K^*_X. Если X — разбиение на квазипростые клетки, то $\widetilde{X}_K$ — тоже разбиение на квазипростые клетки. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 3.5.3. *Любое разбиение компактного полиэдра на многообразия с углами конкордантно разбиению на простые клетки. Если исходное разбиение является разбиением на квазипростые клетки, оно конкордантно разбиению на простые клетки в смысле конкордантности* *разбиений на квазипростые клетки.*

Таким образом, оба естественных отображения $\mathcal{D}_{SC}(P) \to \mathcal{D}_{QSC}(P)$ и $\mathcal{D}_{QSC}(P) \to \mathcal{D}_{MC}(P)$ являются сюръекциями. Докажем теперь, что они являются инъекциями. Это равносильно следующему утверждению.

Предложение 3.5.4. *Два разбиения компактного полиэдра на простые клетки, конкордантные как разбиения на многообразия с углами, конкордантны и как разбиения на простые клетки. Два разбиения компактного полиэдра на квазипростые клетки, конкордантные как разбиения на многообразия с углами, конкордантны и как разбиения на квазипростые клетки.*

Доказательство. Мы докажем первое из требуемых утверждений; доказательство второго полностью аналогично. Пусть Y_0 и Y_1 — два разбиения полиэдра P на простые клетки; X — разбиение полиэдра $P \times [0,1]$ на многообразия с углами, ограничения которого на $P \times 0$ и $P \times 1$ суть разбиения Y_0 и Y_1 соответственно. Пусть K — произвольная триангуляция полиэдра $P \times [0,1]$, являющаяся измельчением разбиения X; K_0 и K_1 — её ограничения на $P \times 0$ и $P \times 1$ соответственно. Тогда K^*_X есть разбиение полиэдра $P \times [0,1]$ на простые клетки, ограничения которого на $P \times 0$ и $P \times 1$ суть разбиения $(K_0)^*_{Y_0}$ и $(K_1)^*_{Y_1}$ соответственно. Значит, разбиения $(K_0)^*_{Y_0}$ и $(K_1)^*_{Y_1}$ конкордантны как разбиения на простые клетки. Осталось заметить, что разбиение $\widetilde{(Y_i)}_{K_i} \in D_{SC}(P \times [0,1])$, $i = 0,1$, осуществляет конкордантность разбиений Y_i и $(K_i)^*_{Y_i}$ как разбиений на простые клетки. $\square$

Итак, $\mathcal{D}_{SC}(P) = \mathcal{D}_{QSC}(P) = \mathcal{D}_{MC}(P)$ для любого компактного полиэдра P. В дальнейшем мы будем обозначать это множество просто через $\mathcal{D}(P)$, называть его элементы $\mathcal{D}$-структурами на P и использовать по необходимости разбиения на простые клетки, квазипростые клетки и многообразия с углами в качестве представителей $\mathcal{D}$-структур.

Отметим, что попутно мы можем доказать, что среди представителей каждой $\mathcal{D}$-структуры есть сколь угодно мелкие разбиения на простые клетки.

Предложение 3.5.5. *Пусть $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$ и K — триангуляция полиэдра P. Тогда среди разбиений на простые клетки, представляющих $\mathcal{D}$-структуру $\mathcal{Y}$, найдётся такое, которое является измельчением триангуляции K.*

Доказательство. Пусть Y — какое-нибудь разбиение полиэдра P на простые клетки, представляющее $\mathcal{D}$-структуру P. Выберем произвольную триангуляцию L полиэдра P, являющуюся общим измельчением триангуляции K и разбиения Y. Тогда L_Y^* — искомое разбиение на простые клетки. □

3.6 Операции над $\mathcal{D}$-структурами

В этом разделе мы практически всё время будем работать с разбиениями на простые клетки. Будем обозначать через $\dim_x P$ локальную размерность полиэдра P в точке x. Далее нам понадобится следующее предложение, доказательство которого мы отложим до раздела 3.7.

Предложение 3.6.1. *Пусть P_1, P_2 — компактные полиэдры такие, что $\dim_y P_2 \geqslant \dim P_1$ для любой точки $y \in P_2$, $R \subset P_1$ — замкнутое кусочно* *линейное подмножество, X и Y_2 — разбиения на простые клетки полиэдров R и P_2 соответственно. Пусть $h : P_1 \to P_2$ — непрерывное отображение, переводящее каждую клетку разбиения X изоморфно на некоторую клетку разбиения Y_2. Тогда существуют разбиение $Y_1 \in D_{SC}(P_1)$ и кусочно линейное отображение $g : P_1 \to P_2$ такие, что:*

1) разбиение X является ограничением разбиения Y_1;

2) отображение g гомотопно h, при этом гомотопия тождественна на R;

3) g отображает каждую клетку разбиения Y_1 изоморфно на некоторую клетку разбиения Y_2.

Пусть Y_1 и Y_2 — разбиения на простые клетки полиэдров P_1 и P_2 соответственно. Назовем *прямым произведением* разбиений Y_1 и Y_2 разбиение $Y_1 \times Y_2 \in D_{SC}(P_1 \times P_2)$, клетками которого являются произведения клеток разбиения Y_1 на клетки разбиения Y_2. Очевидно, что если заменить разбиения Y_1 и Y_2 на конкордантные, то разбиение $Y_1 \times Y_2$ тоже заменится на конкордантное. Значит, корректно определено прямое произведение $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_1 \times P_2)$ двух $\mathcal{D}$-структур $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{D}(P_1)$ и $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_2)$.

Пусть $h : P_1 \to P_2$ – непрерывное отображение. Определим отображение индуцирования $h^* : \mathcal{D}(P_2) \to \mathcal{D}(P_1)$ следующим образом. Рассмотрим $\mathcal{D}$-структуру $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_2)$. Пусть n – произвольное натуральное число такое, что $\dim_y(P_2 \times \Delta^n) \geqslant \dim P_1$ для любой точки $y \in P_2 \times \Delta^n$. Выберем произвольное разбиение на простые клетки Y_2 в классе конкордантности $\mathcal{Y}_2$. Из предложения 3.6.1 следует, что существуют разбиение $Y_1 \in D_{SC}(P_1)$ и отображение $g : P_1 \to P_2 \times \Delta^n$, гомотопное отображению $h \times \mathrm{pt} : P_1 \to P_2 \times \Delta^n$, такие, что g отображает каждую клетку разбиения Y_1

изоморфно на некоторую клетку разбиения $Y_2 \times \Delta^n$. Обозначим класс конкордантности разбиения Y_1 через $h^*\mathcal{Y}_2$ и назовем его *$\mathcal{D}$-структурой, индуцированной $\mathcal{D}$-структурой $\mathcal{Y}_2$ при отображении h.*

Предложение 3.6.2. *$\mathcal{D}$-структура $h^*\mathcal{Y}_2$ зависит только от $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y}_2$ и гомотопического класса отображения h и не зависит от выбора разбиения Y_2, числа n и отображения g.*

Доказательство. Пусть, выбирая вместо разбиения Y_2, числа n и отображения g соответственно разбиение $\widetilde{Y}_2$, число $\widetilde{n}$ и отображение $\widetilde{g}$, мы получим разбиение $\widetilde{Y}_1 \in D_{SC}(P_1)$. Докажем, что разбиения Y_1 и $\widetilde{Y}_1$ конкордантны. Прежде всего, всегда можно вложить стандартным образом полиэдр $P_2 \times \Delta^n$ в полиэдр $P_2 \times \Delta^m$, где $m > n$. При этом построенное разбиение Y_1 не изменится. Поэтому можно считать, что $n = \widetilde{n} \geqslant \dim P_1 + 1$.

Разбиения Y_2 и $\widetilde{Y}_2$ эквивалентны. Значит, существует разбиение X_2 полиэдра $P_2 \times \Delta^n \times [0,1]$, ограничения которого на подмножества $P_2 \times \Delta^n \times 0$ и $P_2 \times \Delta^n \times 1$ изоморфны соответственно разбиениям $Y_2 \times \Delta^n$ и $\widetilde{Y}_2 \times \Delta^n$. Пусть $G : P_1 \times [0,1] \to P_2 \times \Delta^n$ – гомотопия между отображениями g и $\widetilde{g}$. Определим отображение $\widehat{G} : P_1 \times [0,1] \to P_2 \times \Delta^n \times [0,1]$ по формуле $\widehat{G}(x,t) = (G(x,t),t)$. Разобьем множество $P_1 \times 0$ с помощью разбиения Y_1 и множество $P_1 \times 1$ с помощью разбиения $\widetilde{Y}_1$. Применив предложение 3.6.1 к полиэдру $P_1 \times [0,1]$, его подмножеству $(P_1 \times 0) \cup (P_1 \times 1)$ и отображению $\widehat{G}$, получим, что существует разбиение $X_1 \in D_{SC}(P_1 \times [0,1])$, ограничения которого на подмножества $P_1 \times 0$ и $P_1 \times 1$ изоморфны соответственно разбиениям Y_1 и $\widetilde{Y}_1$. Следовательно, разбиения Y_1 и $\widetilde{Y}_1$ эквивалентны. $\square$

Легко проверить, что если $h_1 : P_1 \to P_2$ и $h_2 : P_2 \to P_3$ – непрерывные отображения, то $(h_2 \circ h_1)^* = h_1^* \circ h_2^*$.

Определим сумму $\mathcal{D}$-структур $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P)$ по формуле

$$\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 = d^*(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2),$$

где $d : P \hookrightarrow P \times P$ — диагональное вложение. Очевидно, что эта операция сложения коммутативна и ассоциативна.

Имеет место следующее очевидное предложение.

Предложение 3.6.3. *Пусть P_1, P_2, R_1 и R_2 — полиэдры, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — $\mathcal{D}$-структуры на полиэдрах P_2 и R_2 соответственно и $g : P_1 \to P_2$ и $h : R_1 \to R_2$ — непрерывные отображения. Тогда*

$$(g \times h)^*(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = (g^*\mathcal{X}) \times (h^*\mathcal{Y}).$$

Следствие 3.6.4. *Если $h : P_1 \to P_2$ — непрерывное отображение, то $h^* : \mathcal{D}(P_2) \to \mathcal{D}(P_1)$ — гомоморфизм полугрупп.*

Следствие 3.6.5. *Полугруппа $\mathcal{D}(P)$ является гомотопическим инвариантом полиэдра P.*

Триангуляция полиэдра является частным случаем разбиения на простые клетки. Любые две триангуляции полиэдра P конкордантны, так как любая триангуляция полиэдра $(P \times 0) \cup (P \times 1)$ продолжается до триангуляции полиэдра $P \times [0, 1]$. Таким образом, в множестве $\mathcal{D}(P)$ есть выделенный элемент $\mathcal{E}_P$, отвечающий триангуляциям полиэдра P. Очевидно, что $h^*\mathcal{E}_{P_2} = \mathcal{E}_{P_1}$ для любого непрерывного отображения $h : P_1 \to P_2$.

Предложение 3.6.6. *Элемент $\mathcal{E}_P$ является нулём полугруппы $\mathcal{D}(P)$, то есть $\mathcal{Y} + \mathcal{E}_P = \mathcal{Y}$ для любой $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$.*

Доказательство. Пусть pt — точка. Полугруппа $\mathcal{D}(\mathrm{pt})$ конечно же состоит из единственного элемента $\mathcal{E}_{\mathrm{pt}}$. Пусть h — отображение полиэдра P в точку pt; тогда $h^*\mathcal{E}_{\mathrm{pt}} = \mathcal{E}_P$, значит, $\mathcal{Y} + \mathcal{E}_P = \mathcal{Y} \times \mathcal{E}_{\mathrm{pt}} = \mathcal{Y}$. $\square$

Мы будем называть разбиение полиэдра P на простые клетки *тривиальным*, если оно конкордантно триангуляции.

Пусть теперь M — многообразие с углами. Если разбиения Y_1 и Y_2 многообразия M на квазипростые клетки конкордантны посредством разбиения X, то разбиения Y_1^* и Y_2^* конкордантны посредством разбиения X^*. Таким образом, мы получаем корректно определённое отображение (не гомоморфизм!) $* : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}^*$.

Предложение 3.6.7. *Отображение $*$ является инволюцией и не зависит от структуры многообразия с углами на многообразии M.*

Доказательство. Если M – многообразие без края, то $Y^{**} = Y$ для любого разбиения $Y \in D_{QSC}(M)$ и утверждение предложения очевидно. Если M — многообразие с краем, то «вдали» от края многообразия M строение разбиения Y^* не зависит от выбора структуры многообразия с углами на M и разбиения Y^{**} и Y совпадают. Слово «вдали» имеет смысл «вне объединения клеток разбиения Y, пересекающихся с краем многообразия M». Выбирая с помощью предложения 3.5.5 в качестве Y достаточно мелкое разбиение, мы можем добиться того, чтобы разбиение Y^* не зависело от выбора структуры многообразия с углами на M и разбиения Y^{**} и Y совпадали вне любой наперёд заданной окрестности U края многообразия M. Утверждение предложения теперь легко следует из того, что имеется отображение $h : M \to M$, гомотопное тождественному, образ которого лежит вне некоторой окрестности края U, и, значит, $\mathcal{D}$-структура, представляемая разбиением в группе $\mathcal{D}(M)$, полностью определяется ограничением этого разбиения на дополнение к окрестности U. $\square$

3.7 Доказательство предложения 3.6.1

Рассмотрим сначала случай $(P_1, R) \cong (D^n, S^{n-1})$. Из того, что $\dim_y P_2 \geqslant \dim P_1$ для любой точки $y \in P_2$, следует, что отображение h можно заменить на кусочно линейное отображение h_1 такое, что:

1) h_1 гомотопно h, причем гомотопия постоянна на R;

2) $h_1(P_1)$ лежит в n-мерном остове разбиения Y_2;

3) h_1 является локальным кусочно линейным гомеоморфизмом с образом на открытом всюду плотном подмножестве полиэдра P_1.

Выберем триангуляции J_1 и J_2 полиэдров P_1 и P_2 соответственно так, чтобы отображение h_1 было симплициальным. Выберем триангуляцию K_2 полиэдра P_2, являющуюся общим прямолинейным подразделением триангуляций J_2 и Y_2', такую, что ее ограничение на каждую n-мерную клетку Q разбиения Y_2 является симплициальным комплексом K_Q, изоморфным некоторому прямолинейному подразделению симплекса Δ^n. Перейдем к подразделению K_1 триангуляции J_1 такому, чтобы отображение h_1 было симплициальным по отношению к паре триангуляций (K_1, K_2). Тогда h_1 отображает каждый симплекс триангуляции K_1 линейно на некоторый симплекс триангуляции K_2 той же размерности.

Для каждой n-мерной клетки Q разбиения Y_2 обозначим $(n-1)$-мерный остов комплекса K_Q через K_Q^{n-1}. Реализуем клетку Q в виде выпуклого симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ так, что все симплексы триангуляции K_Q будут реализованы в виде выпуклых симплексов. Выберем точку o, лежащую во внутренности симплекса Δ^n, такую, что o не лежит ни в одной из плоскостей, содержащих симплексы триангуляции K_Q^{n-1}. Обозначим через $\pi : |K_Q^{n-1}| \to \partial\Delta^n$ центральную проекцию из точки o. Пусть $\widetilde{K}_Q^{n-1}$ — такое подразделение триангуляции K_Q^{n-1}, что образ каждого симплекса триангуляции $\widetilde{K}_Q^{n-1}$ при отображении π лежит в некоторой гиперграни симплекса Δ^n. Обозначим через $\widetilde{\pi} : |\widetilde{K}_Q^{n-1}| \to \partial\Delta^n$ псевдорадиальную проекцию из точки o (определение см. в [44]). Тогда, в отличие от отображения π, отображение $\widetilde{\pi}$ будет кусочно линейным.

Определим кусочно линейное отображение $t : \Delta^n \to \Delta^n$ такое, что $t|_{|K_Q^{n-1}|} = \widetilde{\pi}$, следующим образом. Пусть τ_0 – n-мерный симплекс триангуляции K_Q, во внутренности которого лежит точка o. В качестве ограничения отображения t на симплекс τ_0 возьмем какое-нибудь продолжение кусочно линейного гомеоморфизма $\widetilde{\pi}|_{\partial\tau_0} : \partial\tau_0 \to \partial\Delta^n$ до кусочно линейного гомеоморфизма $\tau_0 \to \Delta^n$. Пусть теперь τ – произвольный n-мерный симплекс триангуляции K_Q, отличный от τ_0. Тогда граница симплекса τ делится на две части: $(\partial\tau)_-$ – замыкание множества всех точек $x \in \partial\tau$ таких, что отрезок с концами x и o не пересекает внутренности симплекса τ, и $(\partial\tau)_+$ – замыкание множества всех точек $x \in \partial\tau$ таких, что отрезок с концами x и o пересекает внутренность симплекса τ. Четверка $(\partial\tau, (\partial\tau)_-, (\partial\tau)_+, (\partial\tau)_- \cap (\partial\tau)_+)$ кусочно линейно гомеоморфна стандартной четверке $(S^{n-1}, D_-^{n-1}, D_+^{n-1}, S^{n-2})$. Кусочно линейное отображение $\widetilde{\pi}$ переводит каждое из множеств $(\partial\tau)_-$ и $(\partial\tau)_+$ гомеоморфно на некоторый замкнутый шар $B^n \subset \partial\Delta^n$. Пусть b_τ – барицентр симплекса τ. Обозначим через τ_- и τ_+ конусы с вершиной b_τ над множествами $(\partial\tau)_-$ и $(\partial\tau)_+$ соответственно. Полагаем $\tau_m = \tau_+ \cap \tau_-$. В качестве ограничения отображения t на подмножество τ_m выберем произвольный кусочно линейный гомеоморфизм $\tau_m \to \overline{\partial\Delta^n \backslash B}$, совпадающий с $\widetilde{\pi}$ на $\partial\tau_m = (\partial\tau)_- \cap (\partial\tau)_+$. Тогда ограничение отображения t на каждое из множеств $\partial\tau_-$ и $\partial\tau_+$ является кусочно линейным гомеоморфизмом этого множества на $\partial\Delta^n$. Возьмем в качестве ограничений отображения t на множества τ_- и τ_+ произвольные продолжения этих гомеоморфизмов до кусочно линейных гомеоморфизмов $\tau_- \to \Delta^n$ и $\tau_+ \to \Delta^n$ соответственно.

Таким образом, мы получили кусочно линейное отображение $t : Q \to Q$, тождественное на ∂Q, которое отображает симплекс τ_0, а также каждое из множеств τ_- и τ_+ (для любого симплекса τ) гомеоморфно на всю клетку Q. Рассматривая такие отображения для всех клеток Q, получим отображение $t : \mathrm{Sk}^n\, Y_2 \to \mathrm{Sk}^n\, Y_2$, гомотопное тождественному и тождественное на $(n-1)$-мерном остове разбиения Y_2. Пусть ρ – произвольный n-мерный симплекс триангуляции K_1. Тогда h_1 отображает симплекс ρ на некоторый n-мерный симплекс τ триангуляции K_2, лежащий в некоторой клетке Q разбиения Y_2. Если $\tau \neq \tau_0$, то разбиение симплекса τ на две клетки τ_- и τ_+ индуцирует разбиение симплекса ρ на две клетки ρ_- и ρ_+. Произведя такое подразделение для всех симплексов $\rho \in K_1$, получим клеточное разбиение Y_1 полиэдра P_1. Композиция $g = t \circ h_1$ отображает каждую клетку этого разбиения гомеоморфно на некоторую клетку разбиения Y_2. Следовательно, разбиение Y_1 получает структуру разбиения на простые клетки. Легко проверить, что разбиение Y_1 и отображение g удовлетворяют всем требованиям предложения 3.6.1.

Если (P_1, R) – произвольная полиэдральная пара, то предложение легко доказывается индукцией по остовам полиэдра P_1.

3.8 Построение отображения базы, транссимплициального к триангуляции тотального пространства блочного расслоения

Обратимся теперь к вопросу о существовании отображения g, удовлетворяющего условиям 1–3, сформулированным в начале раздела 3.4. В работе [51] была доказана следующая теорема.

Теорема 3.8.1 (М. Армстронг, Е. Зиман)**.** *Пусть $f : M \hookrightarrow Q$ — кусочно линейное вложение замкнутых кусочно линейных многообразий и K — триангуляция Q. Тогда сущесвует сколь угодно малая объемлемая кусочно линейная изотопия, переводящая вложение f в вложение g, транссимплициальное к триангуляции K.*

Также в работе [51] был доказан относительный вариант этой теоремы для многообразий с краем, требующий однако специального выбора триангуляции K в зависимости от данного вложения. Некоторые дальнейшие результаты были получены М. Армстронгом [50].

К сожалению, мы не сможем использовать указанные теоремы Армстронга–Зимана и Армстронга для доказательства существования отображения g, удовлетворяющего условиям 1–3. Дело в том, что, с одной стороны, нам нужно более сильное утверждение, так как мы хотим, чтобы разбиение $g^! K$ было разбиением на квазипростые клетки, а не только на многообразия с углами, а с другой стороны, — более слабое, так как нам достаточно, чтобы отображение g получалось из тождественного вложения $P \subset E(\xi)$ при помощи гомотопии, а не объемлемой изотопии, и мы собираемся работать только с триангуляциями K довольно специального вида.

Замечание 3.8.2. Как указал автору С. А. Мелихов, из результатов С. Буонкристиано, К. Рурка и Б. Сандерсона [65] можно вывести существование для любого блочного расслоения ξ триангуляции K его тотального пространство, по отношению к которой тождественное вложение $P \subset E(\xi)$ будет удовлетворять условиям 1–3 из раздела 3.4. Мы однако предпочитаем не использовать результаты работы [65] в связи с тем, что, во-первых, эта работа не содержит полных доказательств (и автору неизвестно, имеется ли аккуратное доказательство где-нибудь ещё), а во-вторых, применение теоремы Буонкристиано–Рурка–Сандерсона требует перехода к очень мелкому подразделению исходного клеточного разбиения базы, в то время как ниже мы дадим доказательство существования разбиения g, удовлетворяющего условиям 1–3, для любой триангуляции K полиэдра $E(\xi)$ такой, что каждый блок триангулирован как конус над своей границей.

Нам будет удобно заменить условия 1–3 условиями, формулируемыми в более комбинаторных терминах.

Определение 3.8.3. Пусть P_1 и P_2 — полиэдры, Y — хорошее разбиение полиэдра P_1 на квазипростые клетки и K — триангуляция полиэдра P_2. Мы будем называть отображение $g : P_1 \to P_2$ *q-отображением по отношению к паре разбиений* (Y, K), если выполнены следующие условия.

- Барицентр каждой k-мерной клетки разбиения Y переходит при отображении g в барицентр некоторого $(k+q)$-мерного симплекса триангуляции K.

- Если Q_1 и Q_2 — две различные пересекающиеся клетки разбиения Y, то образы барицентров клеток Q_1 и Q_2 при отображении g не совпадают.

- Отображение g линейно на симплексах триангуляции Y'.

Следующее предложение показывает, что вместо отображений g, удовлетворяющих условиям 1–3, мы можем использовать отображения $g : P \to E(\xi)$ такие, что $g(\sigma_i) \subset \beta_i$ для каждой клетки σ_i разбиения Z и g является q-отображением по отношению к какому-нибудь хорошему разбиению Y полиэдра P на квазипростые клетки и триангуляции K, где q — размерность блочного расслоения ξ.

Предложение 3.8.4. *Пусть Y — хорошее разбиение полиэдра P на квазипростые клетки, являющееся измельчением разбиения Z, и $g : P \to E(\xi)$ — q-отображение по отношению к паре разбиений (Y, K) такое, что $g(\sigma_i) \subset \beta_i$ для всех клеток σ_i разбиения Z. Тогда отображение g удовлетворяет условиям 1–3 из раздела 3.4, и $g^! K = Y$. Обратно, предположим, что $g : P \to E(\xi)$ — отображение, удовлетворяющее условиям 1–3, и $Y = g^! K$. Тогда существует кусочно линейная гомотопия отображения g в некоторое отображение g_1 такая, что в процессе гомотопии образ каждой точки полиэдра P всё время остаётся в относительной внутренности одного и того же симплекса триангуляции K и результирующее отображение g_1 является q-отображением по отношению к паре (Y, K) таким, что $g_1(\sigma_i) \subset \beta_i$ для всех клеток σ_i и $g_1^! K = Y$.*

Доказательство. Пусть $g : P \to E(\xi)$ — q-отображение по отношению к паре разбиений (Y, K) такое, что $g(\sigma_i) \subset \beta_i$ для всех клеток σ_i. Пусть x — барицентр какой-нибудь клетки Q разбиения Y, $k = \dim Q$. Тогда звезда $\mathrm{star}_{Y'} x$ является джойном $Q' * L$, где $L \subset Y'$ — подкомплекс, изоморфный $(\mathrm{link}_Y Q)'$; множество вершин комплекса L совпадает с множеством барицентров клеток, строго содержащих клетку Q. Обозначим через $L_i \subset L$ подкомплекс, являющийся пересечением комплекса L с клеткой σ_i. (Напомним, что все клетки σ_i являются подкомплексами разбиения Y и, значит, подкомплексами триангуляции Y'.) Комплекс L_i изоморфен комплексу $(\mathrm{link}_{Y|_{\sigma_i}} Q)'$, поэтому он пуст, если точка x не лежит в клетке σ_i, он является $(\dim \sigma_i - k - 1)$-мерной комбинаторной сферой, если точка x лежит в клетке σ_i, но не в её крае, и $(\dim \sigma_i - k - 1)$-мерным комбинаторным шаром, если точка y лежит в крае клетки σ_i.

Пусть $g(x) = y$ — барицентр симплекса τ триангуляции K; тогда $\dim \tau = k + q$. Звезда $\mathrm{star}_{K'} y$ является джойном $\tau' * J$, где $J \subset K'$ — подкомплекс, изоморфный $(\mathrm{link}_K \tau)'$; множество вершин комплекса J совпадает с множеством барицентров симплексов, строго содержащих симплекс τ. Обозначим через $J_i \subset J$ подкомплекс, являющийся пересечением комплекса J с блоком β_i. Комплекс J_i изоморфен комплексу $(\mathrm{link}_{K|_{\beta_i}} \tau)'$, поэтому он пуст, если точка y не лежит в блоке β_i, он является $(\dim \beta_i - k - q - 1)$-мерной комбинаторной сферой, если точка y лежит в блоке β_i, но не в его крае, и $(\dim \beta_i - k - q - 1)$-мерным комбинаторным шаром, если точка y лежит в крае блока β_i. Однако $\dim \beta_i = \dim \sigma_i + q$ для всех i. Значит, если оба комплекса L_i и J_i непусты, они имеют одинаковую размерность.

Из того, что отображение g является q-отображением, легко следует, что оно отображает комплекс L симплициально в комплекс J. При этом ограничение отображения g на комплекс L является инъективным, так как образы при отображении g барицентров двух разных клеток комплекса Y, содержащих клетку Q, не могут совпадать. Кроме того, $g(\sigma_i) \subset \beta_i$, значит, $g(L_i) \subset J_i$ для всех i. Так как край клетки σ_i является объединением клеток σ_s меньшей размерности, отсюда также следует, что $g(\partial L_i) \subset \partial J_i$.

Пусть теперь σ_j — клетка, содержащая точку x в своей относительной внутренности; тогда L_j — сфера. Сфера не может инъективно отображаться в шар той же размерности. Значит, J_j — тоже сфера, следовательно, точка y лежит в относительной внутренности блока β_j. Значит, точка x лежит в клетке σ_i тогда и только тогда, когда точка y лежит в блоке β_i; при этом, если $i \neq j$, точки x и y лежат в краях клетки σ_i и блока β_i соответственно. Таким образом, комплекс L_i непуст тогда и только тогда, когда комплекс J_i непуст и либо оба комплекса L_i и J_i являются сферами (при $i = j$), либо оба они являются шарами (при $i \neq j$). Значит, g отображает каждый комплекс L_i изоморфно на комплекс J_i и, следовательно, комплекс L изоморфно на комплекс J. Таким образом, ограничение отображения g на звезду $\mathrm{star}_{Y'}\, x = Q' * L$ есть симплициальное отображение в звезду $\mathrm{star}_{K'}\, y = \tau' * J$, отображающее подкомплекс Q' в подкомплекс τ' и подкомплекс L изоморфно на подкомплекс J. Отсюда сразу следует, что отображение g транссимплициально триангуляции K во всех внутренних точках клетки Q. Так как всё вышеизложенное верно для произвольной клетки Q разбиения Y, мы получаем, что g транссимплициально к K. Очевидно, что $g^! K = Y$.

Обратно, предположим, что $g : P \to E(\xi)$ — отображение, удовлетворяющее условиям 1–3, и $g^! K = Y$. Построим отображение g_1 следующим образом: барицентр $b(Q)$ каждой клетки Q отобразим в барицентр того симплекса τ триангуляции K, в относительной внутренности которого лежит точка $g(b(Q))$; тогда $\dim \tau = \dim Q + q$. Из того, что отображение g транссимплициально к K следует, что оно переводит относительные внутренности клеток разбиения Y в относительные внутренности симплексов триангуляции K так, что индуцирует изоморфизм частично упорядоченных множеств симплексов комплексов $\mathrm{link}_Y Q$ и $\mathrm{link}_K \tau$. Значит, относительные внутренности двух разных клеток разбиения Y, содержащих клетку Q, отображаются в относительные внутренности разных симплексов триангуляции K, содержащих симплекс τ. Таким образом, отображение g_1 является q-отображением таким, что $g_1(\sigma_i) \subset \beta_i$ для всех i. В качестве искомой гомотопии между отображениями g и g_1 можно взять линейную интерполяцию. $\square$

Сформулируем теперь требуемое утверждение о существовании и продолжении q-отображений.

Предложение 3.8.5. *Пусть ξ — q-мерное блочное расслоение над клеточным разбиением Z полиэдра P, Z_1 — подкомплекс разбиения Z, $P_1 = |Z_1|$, K — триангуляция тотального пространства $E(\xi)$, являющаяся измельчением разбиения на блоки, такая, что блок β_i над каждой клеткой σ_i разбиения Z, не лежащей в подкомплексе Z_1, триангулирован как конус над триангуляцией своей границы. Предположим, что Y_1 — хорошее разбиение полиэдра P_1 на квазипростые клетки, являющееся измельчением разбиения Z_1, и $g_1 : P_1 \to E(\xi|_{P_1})$ — q-отображение по отношению к паре $(Y_1, K|_{E(\xi|_{P_1})})$, такое, что $g_1(\sigma_i) \subset \beta_i$ для каждой* *клетки σ_i разбиения Z_1. Тогда существуют хорошее разбиение Y полиэдра P на квазипростые клетки и q-отображение $g: P \to E(\xi)$ такие, что $Y|_{P_1} = Y_1$, $g|_{P_1} = g_1$ и $g(\sigma_i) \subset \beta_i$ для каждой клетки σ_i разбиения Z.*

Это предложение получается при помощи индукции по клеткам разбиения Z из следующего предложения.

Предложение 3.8.6. *Пусть J — триангуляция сферы S^{n+q-1} и $K = \mathrm{cone}(J)$ — триангуляция шара D^{n+q} в виде конуса, Y — хорошее разбиение сферы S^{n-1} на квазипростые клетки и $h: S^{n-1} \to S^{n+q-1}$ — q-отображение по отношению к паре разбиений (Y, J). Тогда существуют хорошее разбиение X шара D^n с краем S^{n-1} на квазипростые клетки и q-отображение $g: D^n \to D^{n+q}$ по отношению к паре разбиений (X, K) такие, что $X|_{S^{n-1}} = Y$ и $g|_{S^{n-1}} = h$.*

Доказательство. Рассмотрим разбиения K^*, J^* и Y^* шара D^{n+q}, сферы S^{n+q-1} и сферы S^{n-1} соответственно. (шар D^{n+q} рассматривается как многообразие с углами с единственной гипергранью S^{n+q-1}.) Разбиения K, J и Y хорошие, поэтому разбиения K^*, J^* и Y^* являются разбиениями на простые клетки. Разбиение J^* естественным образом отождествляется с границей простой клетки $Q_J = \mathrm{star}_{K'}\, u$, где u — вершина конуса $K = \mathrm{cone}(J)$. При этом разбиение K^* получается из клетки Q_J приклеиванием к её границе цилиндра $S^{n-1} \times [0,1]$, разбитого как $J^* \times [0,1]$. (Мы считаем, что к границе клетки Q_J приклеивается основание цилиндра $S^{n-1} \times 1$.)

Отображение $h: S^{n-1} \to S^{n+q-1}$ является q-отображением, значит, оно переводит барицентр каждой k-мерной клетки разбиения Y в барицентр какого-нибудь $(k+q)$-мерного симплекса триангуляции J. Значит, отображение h переводит барицентр каждой l-мерной клетки разбиения Y^* в барицентр некоторой l-мерной клетки разбиения J^*. Из того, что барицентры пересекающихся клеток разбиения Y переходят в барицентры разных симплексов, следует, что барицентры всех граней каждой клетки разбиения Y^* переходят при отображении h в барицентры попарно различных клеток разбиения J^*. Таким образом, h отображает каждую клетку разбиения Y^* изоморфно на некоторую клетку разбиения J^*.

Согласно предложению 3.6.1 существуют разбиение Z шара D^n на простые клетки и кусочно линейное отображение $f : D^n \to Q_J$ такие, что ограничения разбиения Z и отображения f на сферу S^{n-1} совпадают с разбиением Y^* и отображением $h \times 1 : S^{n-1} \to S^{n+q-1} \times 1 = \partial Q_J$ соответственно и отображение f отображает каждую клетку разбиения Z изоморфно на некоторую грань клетки Q_J. Рассмотрим двойственное разбиение $X = Z^*$ шара D^n. Имеем, $X|_{S^{n-1}} = Y$. Так как D^n — многообразие с краем, в разбиении $X = Z^*$ есть клетки двух типов: клетки Q_τ, где τ — клетки разбиения Z, и клетки $R_\tau = Q_\tau \cap \partial D^n$, где τ — клетки разбиения $Z|_{\partial D^n} = Y^*$; при этом R_τ есть в точности клетка разбиения Y, двойственная клетке τ разбиения Y^*. Имеем, $\dim Q_\tau = n - \dim \tau$, $\dim R_\tau = n - \dim \tau - 1$.

Определим симплициальное отображение $g : X' \to K'$, задав его на вершинах триангуляции X' (то есть на барицентрах клеток разбиения X) следующим образом:

- Ограничение отображения g на сферу S^{n-1} совпадает с отображением h, то есть $g(b(R_\tau)) = h(b(R_\tau))$ для всех клеток τ разбиения Y^*.

- Барицентр каждой клетки Q_τ, где τ — клетка разбиения Z, переходит в барицентр клетки $f(\tau)$.

Первое, что нам нужно проверить — что барицентры вложенных друг в друга клеток разбиения X переходят в барицентры вложенных друг в друга симплексов триангуляции K — тогда симплициальное отображение g будет корректно определено. Единственным нетривиальным случаем является пара клеток $R_\tau \subset Q_\tau$, где τ — клетка разбиения Y^*. В этом случае барицентр клетки R_τ переходит при отображении g в барицентр некоторого симплекса η триангуляции J; непосредственно проверяется, что барицентр клетки Q_τ переходит в барицентр симплекса $u * \eta$, где u — вершина конуса K. Легко проверить, что при отображении g барицентр каждой k-мерной клетки разбиения X переходит в барицентр некоторого $(k+q)$-мерного симплекса триангуляции K. Из того, что барицентры граней каждой клетки разбиения Z при отображении f все различны, легко следует, что барицентры различных пересекающихся граней разбиения X при отображении g все различны. Таким образом отображение g является q-отображением по отношению к паре разбиений (X, K). $\square$

3.9 Гомоморфизм $\mathcal{X} : \hat{I}(P) \to \mathcal{D}(P)$

Для блочного расслоения ξ над полиэдром P мы будем обозначать через $[\xi]$ соответствующий элемент группы $\hat{I}(P)$.

Теорема 3.9.1. *Для любого компактного полиэдра P имеется гомоморфизм полугрупп $\mathcal{X} : \hat{I}(P) \to \mathcal{D}(P)$, естественный по отношению к непре-*

рывным отображениям полиэдров, то есть такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{I}(P_2) & \xrightarrow{\mathcal{X}} & \mathcal{D}(P_2) \\ {\scriptstyle h^*}\Big\downarrow & & {\scriptstyle h^*}\Big\downarrow \\ \hat{I}(P_1) & \xrightarrow{\mathcal{X}} & \mathcal{D}(P_1) \end{array} \tag{3.1}$$

коммутативна для любого непрерывного отображения $h : P_1 \to P_2$ *компактных полиэдров. Отображение* $\mathcal{X}$ *определяется следующим образом: пусть* ξ *— q-мерное блочное расслоение над клеточным разбиением* Z *полиэдра* P, K *— триангуляция* $E(\xi)$, *являющаяся измельчением разбиения на блоки,* Y *— хорошее разбиение* P *на квазипростые клетки и* $g : P \to E(\xi)$ *— q-отображение по отношению к паре разбиений* (Y, K) *такое, что образ каждой клетки* σ_i *разбиения* Z *при отображении* g *содержится в блоке* β_i *над ней; тогда* $\mathcal{X}([\xi])$ *есть класс конкордантности разбиения* Y.

В дальнейшем для упрощения обозначений мы часто будем писать $\mathcal{X}(\xi)$ вместо $\mathcal{X}([\xi])$. Сейчас мы покажем, что из предложения 3.8.5 следует, что конструкция, описанная в теореме 3.9.1, задаёт корректно определённое естественное отображение $\mathcal{X} : I_q(P) \to \mathcal{D}(P)$, где $I_q(P)$ — множество классов эквивалентности q-мерных блочных расслоений над P. К сожалению, нам не удастся напрямую доказать формулу $\mathcal{X}(\xi_1 \times \xi_2) = \mathcal{X}(\xi_1) \times \mathcal{X}(\xi_2)$, из которой следовало бы, что отображение $\mathcal{X}$ пропускается через группу $\hat{I}(P)$ и является гомоморфизмом полугрупп. Это связано с тем, что прямое произведение двух триангуляций не является триангуляцией. Для доказательства этой формулы нам придётся получить другое, более удобное с алгебраической точки зрение, описание отображения $\mathcal{X}$ в терминах инволюций $*$.

Корректная определённость и естественность отображения $\mathcal{X}$. Во-первых, отметим, что по предложению 3.8.5 для любого блочного расслоения ξ существуют триангуляция K, хорошее разбиение на квазипростые клетки Y и q-отображение g, удовлетворяющие условиям теоремы 3.9.1. Нам нужно доказать, что класс конкордантности разбиения Y не зависит от выбора такой тройки (K, Y, g), и не меняется при замене блочного расслоения ξ на эквивалентное. Пусть $\widetilde{\xi}$ — эквивалентное ξ блочное расслоение над каким-нибудь клеточным разбиением $\widetilde{Z}$ полиэдра P и $\bigl(\widetilde{K}, \widetilde{Y}, \widetilde{g}\bigr)$ — тройка, удовлетворяющая условиям теоремы 3.9.1 для блочного расслоения $\widetilde{\xi}$. Из результатов работы [117] легко следует, что эквивалентные блочные расслоения ξ и $\widetilde{\xi}$ конкордантны, то есть существует q-мерное блочное расслоение η над каким-нибудь клеточным разбиением W полиэдра $P \times [0, 1]$ такое, что ограничения клеточного разбиения W и блочного расслоения η на подполиэдр $P \times 0$ суть клеточное разбиение Z и блочное расслоение ξ соответственно, а на подполиэдр $P \times 1$ — клеточное разбиение $\widetilde{Z}$ и блочное расслоение $\widetilde{\xi}$ соответственно. Согласно предложению 3.8.5 существуют триангуляция J полиэдра $E(\eta)$, хорошее разбиение на квазипростые клетки X полиэдра $P \times [0, 1]$ и q-отображение $f : P \times [0, 1] \to E(\eta)$ по отношению к паре разбиений (X, J), удовлетворяющие условиям теоремы 3.9.1 для блочного расслоения η, такие, что ограничения триангуляции J на $E(\xi)$ и $E\bigl(\widetilde{\xi}\bigr)$ суть триангуляции K и $\widetilde{K}$ соответственно и ограничения разбиения X и отображения f на $P \times 0$ и $P \times 1$ суть разбиения Y и $\widetilde{Y}$ и отображения g и $\widetilde{g}$ соответственно. Тогда разбиение X обеспечивает конкордантность разбиений Y и $\widetilde{Y}$. Значит, отображение $\mathcal{X} : I_q(P) \to \mathcal{D}(P)$ корректно определено.

Коммутативность диаграммы (3.1) очевидна, если $h : P_1 \to P_2$ — кусочно линейное вложение. В общем случае без ограничения общности мы можем считать, что h — кусочно линейное отображение. Тогда для достаточно большого числа k отображение h представляется в виде

$$P_1 \xrightarrow{h_1} P_2 \times D^k \xrightarrow{p} P_2,$$

где h_1 — кусочно линейное вложение и p — проекция на первый сомножитель. Так как множества $I_q(P)$ и $\mathcal{D}(P)$ являются гомотопическими инвариантами полиэдра P, отображение p^* является для каждого из двух функторов $I_q(\cdot)$ и $\mathcal{D}(\cdot)$ биекцией, обратной к отображению i^*, где $i : P_2 \to P_2 \times D^k$ — стандартное вложение. Коммутативность диаграммы (3.1) для отображения h следует из её коммутативности для вложений h_1 и i. $\square$

Далее нам придётся работать с инволюциями $* : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ для разных кусочно линейных многообразий M; чтобы избежать путаницы, мы будем обозначать отображение $*$ для многообразия M через $*_M$. (Напомним, что, по предложению 3.6.7, инволюция $*_M$ не зависит от структуры многообразия с углами на M.) Пусть ξ – блочное расслоение над многообразием M. Обозначим через $i : M \to E(\xi)$ тождественное вложение, через $r : E(\xi) \to M$ какую-нибудь ретракцию. Обозначим через $*_\xi$ инволюцию

$$i^* *_{E(\xi)} r^* : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M).$$

Обозначим через λ_ξ отображение $*_M *_\xi : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$.

Предложение 3.9.2. *Если M — кусочно линейное многообразие и ξ — блочное расслоение над ним, то*

$$\mathcal{X}(\xi) = \lambda_\xi(\mathcal{E}_M) = *_M i^* *_{E(\xi)} \left(\mathcal{E}_{E(\xi)}\right).$$

Доказательство. Пусть $g : M \to E(\xi)$ — q-отображение по отношению к некоторому хорошему разбиению Y многообразия M на квазипростые клетки и некоторой триангуляции K тотального пространства $E(\xi)$, где $q = \dim \xi$. Тогда g отображает каждую клетку разбиения на простые клетки Y^* изоморфно на некоторую клетку разбиения на простые клетки K^*, откуда сразу следует искомое равенство. $\square$

Если Y_1 и Y_2 — разбиения на простые клетки кусочно линейных многообразий M_1 и M_2, то $(Y_1 \times Y_2)^* = Y_1^* \times Y_2^*$. (Здесь, если M_1 и M_2 — многообразия с краями, многообразие $M_1 \times M_2$ наделяется естественной структурой многообразия с углами, гипергранями которого являются компоненты связности многообразий $\partial M_1 \times M_2$ и $M_1 \times \partial M_2$). Поэтому если ξ_1 и ξ_2 — блочные расслоения над многообразиями M_1 и M_2 соответственно, $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{D}(M_1)$ и $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(M_2)$, то

$$*_{\xi_1 \times \xi_2}(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2) = *_{\xi_1}(\mathcal{Y}_1) \times *_{\xi_2}(\mathcal{Y}_2). \tag{3.2}$$

Поскольку $\xi \oplus \varepsilon^n_M = \xi \times \varepsilon^n_{\mathrm{pt}}$ для любого блочного расслоения ξ над многообразием M, инволюция $*_\xi$ зависит только от класса стабильной эквивалентности блочного расслоения ξ. Значит, отображение $\mathcal{X} : I_q(M) \to \mathcal{D}(M)$ пропускается через группу $\hat{I}(M)$. В частности, $\mathcal{X}(\varepsilon^n_M) = \mathcal{E}_M$. Так как любой компактный полиэдр является деформационным ретрактом некоторого компактного кусочно линейного многообразия, а группы $\hat{I}(P)$ и полугруппы $\mathcal{D}(P)$ являются гомотопическими инвариантами, те же результаты верны и для блочных расслоений над произвольным компактным полиэдром.

Доказательство следующего предложения завершает доказательство теоремы 3.9.1.

Предложение 3.9.3. *Для блочных расслоений над компактными полиэдрами верны формулы*

$$\mathcal{X}(\xi_1 \times \xi_2) = \mathcal{X}(\xi_1) \times \mathcal{X}(\xi_2), \qquad \mathcal{X}(\xi_1 \oplus \xi_2) = \mathcal{X}(\xi_1) + \mathcal{X}(\xi_2).$$

Доказательство. Первая из доказываемых формул для блочных расслоений над кусочно линейными многообразиями является непосредственным следствием формулы (3.2). Так как любой компактный полиэдр является деформационным ретрактом некоторого компактного кусочно линейного многообразия, а группы $\hat{I}(P)$ и полугруппы $\mathcal{D}(P)$ являются гомотопическими инвариантами, эта формула распространяется на блочные расслоения над произвольными компактными полиэдрами. Вторая из доказываемых формул является непосредственным следствием первой формулы и естественности отображения $\mathcal{X}$. $\square$

Каждое кусочно линейное многообразие M может быть кусочно линейно локально плоско вложено в кусочно линейный шар D^q достаточно большой размерности так, чтобы его край вкладывался в край шара, а внутренность — во внутренность. Как доказали К. Рурк и Б. Сандерсон [117], в такой ситуации всегда существует и единственно с точностью до эквивалентности нормальное блочное расслоение ν многообразия M в D^q, класс стабильной эквивалентности которого не зависит от выбора числа q и вложения и равен $[\nu] = -[\tau]$, где τ — касательное блочное расслоение многообразия M.

Предложение 3.9.4. $\mathcal{X}(\nu) = \mathcal{E}^*_M$.

Прежде, чем доказывать это предложение, сформулируем одно вспомогательное утверждение, доказательство которого полностью аналогично доказательству предложения 3.6.7.

Предложение 3.9.5. *Пусть M_1, M_2 – многообразия одинаковой размерности, $i : M_1 \hookrightarrow M_2$ – кусочно линейное вложение. Тогда*

$$i^* *_{M_2} = *_{M_1} i^*.$$

Следствие 3.9.6. *Пусть выполнены условия предыдущего предложения и ξ — блочное расслоение над M_2. Тогда*

$$i^* *_\xi = *_{i^*\xi} i^*.$$

Доказательство предложения 3.9.4. Пусть $i : M \hookrightarrow D^q$ — локально плоское вложение такое, что $i(M) \cap \partial D^q = i(\partial M)$. Вложение i разлагается в композицию двух вложений $i_1 : M \hookrightarrow E(\nu)$ и $i_2 : E(\nu) \hookrightarrow D^q$. Значит,

$$\mathcal{X}(\nu) = *_M *_\nu \mathcal{E}_M = *_M i_1^* *_{E(\nu)} \mathcal{E}_{E(\nu)} = *_M i^* *_{D^q} \mathcal{E}_{D^q} = *_M i^* \mathcal{E}_{D^q} = \mathcal{E}_M^*.$$

Здесь использовано равенство $\mathcal{E}_{D^q}^* = \mathcal{E}_{D^q}$. Оно верно, так как шар D^q стягиваем и, следовательно, полугруппа $\mathcal{D}(D^q)$ состоит из единственного элемента $\mathcal{E}_{D^q}$. □

3.10 Рациональные классы Понтрягина разбиений на простые клетки

До сих пор мы использовали теорию универсальных локальных формул для того, чтобы вычислять рациональные классы Понтрягина для тех объектов, для которых эти классы уже были определены ранее: для комбинаторных многообразий и блочных расслоений. Теперь мы покажем, что теория универсальных локальных формул позволяет определять рациональные классы Понтрягина для довольно неожиданного класса объектов — для разбиений на простые клетки. Естественно, мы хотим дать такое определение, чтобы получаемые классы когомологий были инвариантны относительно конкордантности разбиений на простые клетки, функториальны по отношению к операции индуцирования $\mathcal{D}$-структур, удовлетворяли формуле Уитни относительно суммы $\mathcal{D}$-структур и переходили в классы Понтрягина блочных расслоений при естественном отображении $\mathcal{X}$, то есть, чтобы для любого блочного расслоения ξ были выполнены равенства $p_i(\mathcal{X}(\xi)) = p_i(\xi)$. Именно такое определение и будет дано в этом разделе.

Пусть $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ и Y — разбиение компактного полиэдра P на простые клетки. Рассмотрим клеточную коцепь $f^\sharp(Y) \in C^n(Y;\mathbb{Q})$, значение которой на каждой ориентированной n-мерной клетке Q разбиения Y равно $f(\langle L_Q\rangle)$.

Предложение 3.10.1. *Если f — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, коцепь $f^\sharp(Y)$ является коциклом; класс когомологий коцикла $f^\sharp(Y)$ не изменяется при прибавлении к f кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.*

Доказательство. Из определения клеточной коцепи $f^\sharp(Y)$ сразу следует, что

$$(\delta f)^\sharp(Y) = \delta\left(f^\sharp(Y)\right), \tag{3.3}$$

где в левой части равенства δ — дифференциал комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$), а в правой — дифференциал коцепного комплекса $C^*(Y;\mathbb{Q})$. Утверждение предложения непосредственно вытекает из этой формулы. □

Предложение 3.10.2. *Пусть f — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, Y_0 и Y_1 —*

конкордантные разбиения компактного полиэдра P на простые клетки; тогда классы когомологий коциклов $f^\sharp(Y_0)$ и $f^\sharp(Y_1)$ совпадают.

Доказательство. Пусть X — разбиение полиэдра $P \times [0,1]$ на простые клетки, ограничения которого на основания $P \times 0$ и $P \times 1$ совпадают с разбиениями Y_0 и Y_1 соответственно. Утверждение предложения сразу следует из того, что коциклы $f^\sharp(Y_0)$ и $f^\sharp(Y_1)$ являются ограничениями коцикла $f^\sharp(X)$ на основания $P \times 0$ и $P \times 1$ соответственно. $\square$

Пусть теперь $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ и $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$. Из предложений 3.10.1 и 3.10.2 следует, что класс когомологий коцикла $f^\sharp(Y)$ не зависит от выбора коцикла f, представляющего класс когомологий ψ, и разбиения на простые клетки Y, представляющего $\mathcal{D}$-структуру $\mathcal{Y}$; мы будем обозначать этот класс когомологий через $\psi^\sharp(\mathcal{Y})$.

Определим теперь рациональные классы Понтрягина $\mathcal{D}$-структур по формуле $p_i(\mathcal{Y}) = \psi_i^\sharp(\mathcal{Y})$, где ψ_i — класс когомологий, представляемый универсальными локальными формулами для полинома $\widetilde{p}_i \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$. Основные свойства рациональных классов Понтрягина $\mathcal{D}$-структур сформулированы в следующих предложениях.

Предложение 3.10.3. *Пусть $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$, $h : P_1 \to P_2$ — непрерывное отображение компактных полиэдров и $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P_2)$. Тогда $\psi^\sharp(h^*\mathcal{Y}) = h^*\psi^\sharp(\mathcal{Y})$; в частности, $p_i(h^*\mathcal{Y}) = h^*p_i(\mathcal{Y})$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ — коцикл, представляющий класс когомологий ψ. Утверждение предложения легко следует из того, что если Y_1 и Y_2 — разбиения на простые клетки полиэдров P_1 и P_2 соответственно и h отображает каждую клетку разбиения Y_1 на некоторую клетку разбиения Y_2, то обратный образ коцикла $f^\sharp(Y_2)$ при отображении h совпадает с коциклом $f^\sharp(Y_1)$. $\square$

Предложение 3.10.4. *Пусть P — компактный полиэдр и $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$. Если $\psi_1, \psi_2, \psi \in H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ — классы когомологий, представляемые универсальными локальными формулами для полиномов $F_1, F_2 \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ и их произведения F_1F_2 соответственно, то $\psi_1^\sharp(\mathcal{Y})\psi_2^\sharp(\mathcal{Y}) = \psi^\sharp(\mathcal{Y})$.*

Следствие 3.10.5. *Если $\psi \in H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ — класс когомологий, представляемый универсальными локальными формулами для полинома $\widetilde{F} \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$, то $\psi^\sharp(\mathcal{Y}) = F(p_1(\mathcal{Y}), p_1(\mathcal{Y}), \ldots)$.*

Предложение 3.10.6. *Рациональные классы Понтрягина $\mathcal{D}$-структур удовлетворяют формуле Уитни, то есть*

$$p_k(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2) = \sum_{i=0}^{k} p_i(\mathcal{Y}_1)p_{k-i}(\mathcal{Y}_2)$$

для любых $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P)$.

Предложение 3.10.7. *Для любого блочного расслоения ξ над полиэдром P имеет место равенство $p_i(\mathcal{X}(\xi)) = p_i(\xi)$.*

Доказательства предложений 3.10.4–3.10.7 будут даны в следующем разделе.

Если Y — разбиение на простые клетки из класса конкордантности $\mathcal{Y}$; тогда класс когомологий $\psi^\sharp(\mathcal{Y})$ представляется коциклом $f^\sharp(Y)$, где f — коцикл, представляющий класс когомологий ψ. Для доказательства теоремы 3.4.2 нам нужно научиться предъявлять коцикл, представляющий класс когомологий $\psi^\sharp(\mathcal{Y})$ по заданному разбиению на квазипростые клетки из класса конкордантности $\mathcal{Y}$.

Предложение 3.10.8. *Пусть* $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ *— коцикл, представляющий класс когомологий* $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$, $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$ *и* Y *— разбиение на квазипростые клетки из класса конкордантности* $\mathcal{Y}$. *Пусть* $f^{\sharp}_{(1)}(Y) \in C^n(Y;\mathbb{Q})$ *— клеточная коцепь, значение которой на каждой* n*-мерной ориентированной клетке* Q *разбиения* Y *равно* $f(\langle L'_Q \rangle)$. *Тогда коцепь* $f^{\sharp}_{(1)}(Y) \in C^n(Y;\mathbb{Q})$ *является коциклом, представляющим класс когомологий* $\psi^{\sharp}(\mathcal{Y})$.

Доказательство. Аналогично формуле (3.3) имеет место формула

$$(\delta f)^{\sharp}_{(1)}(Y) = \delta\left(f^{\sharp}_{(1)}(Y)\right).$$

(Здесь важно, что линки всех вершин комбинаторной сферы L', являющихся барицентрами симплексов положительной размерности комбинаторной сферы L, обладают обращающими ориентацию автоморфизмами.) Теперь полностью аналогично прдложению 3.10.2 доказывается, что коцепь $f^{\sharp}_{(1)}(Y)$ является коциклом и её класс когомологий не изменяется при замене разбиения Y на конкордантное. Согласно предложению 3.5.3 класс конкордантности каждого разбиения на квазипростые клетки содержит разбиение на простые клетки. Поэтому утверждение предложения достаточно доказать для случая, когда Y — разбиение на простые клетки. В этом случае $f^{\sharp}_{(1)}(Y) = (\beta^* f)^{\sharp}(Y)$, где $\beta^* : \mathcal{T}^*(\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ — цепное отображение, индуцированное оператором барицентрического подразделения (см. раздел 1.2). Осталось заметить, что по предложению 1.2.5 цепное отображение β^* цепно гомотопно тождественному, значит, коциклы f и $\beta^* f$ комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ когомологичны, следовательно, класс когомологий коцикла $(\beta^* f)^{\sharp}(Y)$ равен $\psi^{\sharp}(\mathcal{Y})$. □

3.11 Классифицирующее пространство $\mathcal{Z}$

Нумерацией вершин простой клетки Q будем называть инъекцию из множества вершин клетки Q в $\mathbb{Z}$. *Нумерацией вершин разбиения* Y *на простые клетки* будем называть отображение из множества вершин разбиения Y в $\mathbb{Z}$, ограничение которого на множество вершин любой клетки Q разбиения Y является инъекцией. *Изоморфизмом двух простых клеток с пронумерованными вершинами* будем называть их изоморфизм, сохраняющий нумерацию вершин.

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех классов изоморфизма n-мерных простых клеток с пронумерованными вершинами (здесь простые клетки не предполагаются ориентированными). Будем строить пространство $\mathcal{Z}$ последовательно по остовам. Нульмерный остов пространства $\mathcal{Z}$ – множество $\mathbb{Z}$. Множество n-мерных клеток пространства $\mathcal{Z}$ совпадает с множеством $\mathcal{P}_n$. При этом каждая простая клетка $Q \in \mathcal{P}_n$ приклеивается к $(n-1)$-мерному остову пространства $\mathcal{Z}$ так, что каждая ее гипергрань отображается изоморфно на соответствующую $(n-1)$-мерную клетку пространства $\mathcal{Z}$. Построенное разбиение пространства $\mathcal{Z}$ на простые клетки мы будем также обозначать через $\mathcal{Z}$.

Заметим, что при определении индуцированной $\mathcal{D}$-структуры в разделе 3.6 условие, что P_2 является компактным полиэдром, несущественно. Поэтому для любого непрерывного отображения $h : P \to \mathcal{Z}$ корректно определена $\mathcal{D}$-структура $h^*\mathcal{Z} \in \mathcal{D}(P)$, не меняющаяся при гомотопии отображения h. Таким образом, определено естественное отображение $i_P : [P, \mathcal{Z}] \to \mathcal{D}(P)$.

Теорема 3.11.1. *Естественное отображение i_P является биекцией.*

Доказательство. Пусть $Y \in D_{SC}(P)$ – произвольное разбиение. Пронумеруем его вершины произвольным образом. Полученное разбиение с пронумерованными вершинами обозначим через $\overline{Y}$. Рассмотрим отображение $g_{\overline{Y}} : P \to \mathcal{Z}$, переводящее каждую клетку разбиения $\overline{Y}$ изоморфно на соответствующую клетку пространства $\mathcal{Z}$. Тогда $g_{\overline{Y}}^* \mathcal{Z}$ – класс конкордантности, содержащий разбиение Y. Значит, i_P – сюръекция.

Пусть $h_0, h_1 : P \to \mathcal{Z}$ – два отображения такие, что $h_0^*\mathcal{Z} = h_1^*\mathcal{Z} = \mathcal{Y}$. Из предложения 3.6.1 следует, что в классе конкордантности $\mathcal{Y}$ существуют разбиения $\overline{Y}_0$ и $\overline{Y}_1$ на простые клетки с пронумерованными вершинами такие, что h_0 гомотопно $g_{\overline{Y}_0}$ и h_1 гомотопно $g_{\overline{Y}_1}$. Предположим, что множество номеров вершин разбиения $\overline{Y}_0$ не пересекается с множеством номеров вершин разбиения $\overline{Y}_1$. Пусть X — разбиение полиэдра $P \times [0, 1]$ на простые клетки, ограничения которого на основания $P \times 0$ и $P \times 1$ изоморфны разбиениям $\overline{Y}_0$ и $\overline{Y}_1$ соответственно. Пронумеруем все вершины разбиения X, лежащие в основаниях $P \times 0$ и $P \times 1$, так же, как они пронумерованы в разбиениях $\overline{Y}_0$ и $\overline{Y}_1$; пронумеруем вершины разбиения X, не лежащие в основаниях $P \times 0$ и $P \times 1$ произвольными попарно различными номерами, не совпадающими ни с одним из номеров вершин разбиений $\overline{Y}_0$ и $\overline{Y}_1$. Обозначим разбиение X с такой нумерацией вершин через $\overline{X}$. Тогда отображение $g_{\overline{X}} : P \times [0, 1] \to \mathcal{Z}$ является гомотопией между отображениями $g_{\overline{Y}_0}$ и $g_{\overline{Y}_1}$. Пусть теперь номер какой-нибудь вершины разбиения $\overline{Y}_0$ совпадает с номером какой-нибудь вершины разбиения $\overline{Y}_1$. Выберем другую нумерацию вершин разбиения $\overline{Y}_0$ такую, что номер каждой вершины в этой нумерации не совпадает ни с одним из номеров вершин разбиений $\overline{Y}_0$

и $\overline{Y}_1$; обозначим разбиение $\overline{Y}_0$ с такой изменённой нумерацией через $\overline{Y}_2$. Согласно уже разобранному случаю устанавливаем, что отображение $g_{\overline{Y}_2}$ гомотопно каждому из отображений $g_{\overline{Y}_0}$ и $g_{\overline{Y}_1}$. Значит, отображения h_0 и h_1 гомотопны. Следовательно, i_P — мономорфизм. $\square$

Для каждой $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$ обозначим через $g_{\mathcal{Y}}$ произвольное отображение из гомотопического класса $i_P^{-1}(\mathcal{Y})$. Очевидно, что для любого полиэдра P отображение $g_{\mathcal{E}_P}$ гомотопно отображению в точку.

Пусть $\varkappa \in H^*(\mathcal{Z}; G)$. Каждой $\mathcal{D}$-структуре $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$ сопоставим класс когомологий $\varkappa(\mathcal{Y}) = g_{\mathcal{Y}}^*(\varkappa) \in H^*(P; G)$. Будем называть классы когомологий пространства $\mathcal{Z}$ *универсальными характеристическими классами* разбиений на простые клетки. Классы и $\varkappa(\mathcal{Y}) \in H^*(P; G)$ мы будем называть *характеристическими классами* $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y}$.

Пусть $\chi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – произвольная инъекция; $\mu : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ – отображение, при котором номера вершин преобразуются с помощью функции χ и клетки разбиения $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ отображаются изоморфно на клетки разбиения $\mathcal{Z}$. Легко проверить, что слабый гомотопический класс отображения μ не зависит от функции χ. (Следуя работе Дж. Ф. Адамса [48], мы говорим, что два отображения $g_0, g_1 : A \to B$ клеточных комплексов *слабо гомотопны*, если отображения $h \circ g_0$ и $h \circ g_1$ гомотопны для любого конечного клеточного комплекса C и любого отображения $h : C \to A$.) Отображение μ является слабо гомотопически коммутативным слабо гомотопически ассоциативным умножением в пространстве $\mathcal{Z}$. Отображение $\mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$, переводящее всё пространство $\mathcal{Z}$ в одну точку, является слабой гомотопической единицей. Однако автору неизвестно, существует ли для этого умножения слабо гомотопическая операция обращения, то есть может ли введённое гомотопическое умножение быть продолжено до структуры слабого H-пространства на $\mathcal{Z}$. Введённое гомотопическое умножение в пространстве $\mathcal{Z}$ превращает множество $[P, \mathcal{Z}]$ в абелеву полугруппу с нулём, а кольцо когомологий $H^*(\mathcal{Z};\mathbb{Q})$ — в алгебру Хопфа с коассоциативным кокоммутативным коумножением.

Очевидно, что если $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{D}(P_1)$ и $\mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P_2)$, то

$$g_{\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_2} \simeq \mu \circ (g_{\mathcal{Y}_1} \times g_{\mathcal{Y}_2}).$$

Значит, если $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{D}(P)$, то

$$g_{\mathcal{Y}_1+\mathcal{Y}_2} \simeq \mu \circ (g_{\mathcal{Y}_1} \times g_{\mathcal{Y}_2}) \circ d,$$

где $d : P \to P\times P$ — диагональ. Таким образом, биекция $i_P : [P, \mathcal{Z}] \to \mathcal{D}(P)$ является изоморфизмом полугрупп.

Отображение $\mathcal{X}$ является естественным преобразованием функтора $\hat{I}(\,\cdot\,)$ в функтор $\mathcal{D}(\,\cdot\,)$, т. е. функтора $[\,\cdot\,, \mathrm{BPL}]$ в функтор $[\,\cdot\,, \mathcal{Z}]$. (Все эти функторы рассматриваются на категории компактных полиэдров.) По варианту Адамса [48] теоремы реализуемости Брауна [57], существует единственное с точностью до слабой гомотопии непрерывное отображение $\mathcal{X} : \mathrm{BPL} \to \mathcal{Z}$, индуцирующее естественное преобразование $\mathcal{X}$. Из того, что естественное отображение $\mathcal{X} : \hat{I}(P) \to \mathcal{D}(P)$ является гомоморфизмом полугрупп, следует, что отображение $\mathcal{X} : \mathrm{BPL} \to \mathcal{Z}$ слабо гомотопически коммутирует со слабо гомотопическими умножениями в пространствах BPL и $\mathcal{Z}$. Следовательно, индуцированное отображение колец когомологий

$$\mathcal{X}^* : H^*(\mathcal{Z};\mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q})$$

является гомоморфизмом алгебр Хопфа. Напомним, что

$$H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$$

есть алгебра Хопфа с коумножением, определяемым на образующих по формуле

$$\Delta(p_k) = \sum_{i=0}^{k} p_i \otimes p_{k-i}.$$

Очевидно, что в доказательстве предложения 3.10.1 условие, что Y — разбиение компактного полиэдра, несущественно. Таким образом, для любого класса когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ корректно определён класс когомологий $\psi^\sharp(\mathcal{Z}) \in H^n(\mathcal{Z};\mathbb{Q})$. Соответствие $\psi \mapsto \psi^\sharp(\mathcal{Z})$ задаёт гомоморфизм градуированных групп

$$\varkappa : H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to H^*(\mathcal{Z};\mathbb{Q}).$$

Напомним, что в разделе 1.2 был построен изоморфизм коалгебр

$$\delta^* : H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] \cong H^*(\mathrm{BPL};\mathbb{Q}).$$

Предложение 3.11.2. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\delta^*"', "\cong"] & H^*(\mathcal{Z};\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathcal{X}^*"'] \\ \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] \arrow[r, "w", "\cong"'] & \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots] \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть M — многообразие без края, τ — его касательное блочное расслоение, K — триангуляция многообразия M, $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ – класс когомологий, f — представляющий его коцикл. Из предложения 3.9.4 следует, что

$$\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))(-[\tau]) = \varkappa(\psi)(\mathcal{E}_M^*).$$

Поэтому класс когомологий $\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))(-[\tau]) \in H^n(M;\mathbb{Q})$ может быть представлен коциклом c, значение которого на любой ориентированной n-мерной простой клетке Q разбиения K^* равно $f(\langle L_Q\rangle)$. С другой стороны, класс гомологий, двойственный классу когомологий $\delta^*(\psi)(\tau)$, представляется коориентированным циклом $f_\sharp(K)$, значение которого на каждом коориентированном симплексе $\sigma \in K$ коразмерности n, равно $f(\langle \operatorname{link}\sigma\rangle)$. Заметим теперь, что клетка разбиения K^*, двойственная симплексу σ изоморфна простой клетке $Q_{\operatorname{link}\sigma}$. Значит, класс когомологий $\delta^*(\psi)(\tau)$ представляется той же коцепью c. Следовательно, $\delta^*(\psi)(\tau) = \mathcal{X}^*(\varkappa(\psi))(-[\tau])$, то есть $\delta^*(\psi)(\tau) = w(\mathcal{X}^*(\varkappa(\psi)))(\tau)$. Осталось заметить, что полином от рациональных классов Понтрягина полностью определяется своими значениями на касательных расслоениях к замкнутым многообразиям. $\square$

Предложение 3.11.3. *Гомоморфизмы $\varkappa$ и $\mathcal{X}^*$ являются изоморфизмами.*

Доказательство. Из предложения 3.11.2 сразу следует, что $\mathcal{X}^* \circ \varkappa$ — изоморфизм, значит, $\varkappa$ — мономорфизм и $\mathcal{X}^*$ — эпиморфизм. Следовательно, нам достаточно доказать, что $\varkappa$ — эпиморфизм.

Разложением клетки $Q \in \mathcal{P}_n$ назовем ее представление в виде $Q = Q_1 \times \Delta^k$, где Q_1 – простая клетка размерности $n-k$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{P}}_n$ множество всех классов изоморфизма n-мерных простых клеток с фиксированными нумерацией вершин и разложением, где под изоморфизмом понимается изоморфизм, сохраняющий нумерацию вершин и разложение. *Рангом* клетки $Q \in \widehat{\mathcal{P}}_n$ назовем размерность соответствующей клетки Q_1. Так же, как по множеству $\mathcal{P}_*$ было построено пространство $\mathcal{Z}$, по множеству $\widehat{\mathcal{P}}_*$ можно построить пространство $\widehat{\mathcal{Z}}$. При этом существуют вложение $i : \mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{Z}}$, сопоставляющее каждой клетке Q разложение $Q = Q \times \Delta^0$, и ретракция $r : \widehat{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z}$, состоящая в забывании разложения.

Обозначим через Z^p объединение всех клеток $Q \in \widehat{\mathcal{P}}_*$, ранги которых не превосходят p. Множества Z^p задают фильтрацию пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$. Пусть $E_*^{*,*}$ – когомологическая спектральная последовательность этой фильтрации с коэффициентами в $\mathbb{Q}$.

Множество $Z^p \backslash Z^{p-1}$ не содержит клеток размерности меньше, чем p. Поэтому $E_1^{p,q} = 0$ при $q < 0$. Множество p-мерных клеток множества $Z^p \backslash Z^{p-1}$ состоит из всех клеток $Q \in \widehat{\mathcal{P}}_p$ с разложением $Q = Q \times \Delta^0$. Каждая такая ориентированная клетка является относительным циклом в $C_*(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$. Легко проверить, что два такие цикла представляют одинаковый класс гомологий в группе $H_*(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда соответствующие клетки изоморфны с сохранением ориентации, но, возможно, с изменением нумерации вершин. Следовательно, существует естественный изоморфизм $E_1^{p,0} = \mathcal{T}^p(\mathbb{Q})$. При этом дифференциал d_1 спектральной последовательности $E_*^{*,*}$ совпадает с дифференциалом δ комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Значит, $E_2^{p,0} = H^p(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$.

Пусть $\alpha \in C_{p+q}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$, $q > 0$ – относительный цикл. Докажем, что существует целое число $m \neq 0$ такое, что $m\alpha$ – относительная граница. Цикл α представим в виде

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} l_j (Q_j \times \Delta_j^q),$$

где $l_j \in \mathbb{Z}$, $Q_j \times \Delta_j^q$ – ориентированные клетки пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$, имеющие ранг p. Если мы выберем в этой сумме все слагаемые, для которых клетки Q_j имеют одинаковый комбинаторный тип, то полученная цепь тоже будет относительным циклом. Поэтому можно считать, что все клетки Q_j имеют одинаковый комбинаторный тип. Пусть $Q = Q \times \Delta^0$ – какая-нибудь клетка пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$ с тем же комбинаторным типом, которая не пересекается ни с одной из клеток $Q_j \times \Delta^q_j$. Пусть m – порядок группы всех (в том числе изменяющих ориентацию и нумерацию вершин) автоморфизмов клетки Q. Каждому изоморфизму $h : Q_j \cong Q$ соответствует способ натянуть на клетки $Q_j \times \Delta^q_j$ и Q клетку $\widetilde{Q}_{j,h} \cong Q \times \Delta^{q+1}$ ранга p. При этом ориентация клетки $\widetilde{Q}_{j,h}$ выбрана так, чтобы коэффициент инцидентности клеток $\widetilde{Q}_{j,h}$ и $Q_j \times \Delta^q_j$ был равен $+1$. Обозначим через $\gamma \in C_{p+q+1}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$ цепь, задаваемую по формуле

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h} l_j \widetilde{Q}_{j,h},$$

где внутренняя сумма берется по всем изоморфизмам $h : Q_j \cong Q$. Легко проверить, что $\partial\gamma = m\alpha$. Таким образом, $H_{p+q}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Z})$ — группа кручения при $q > 0$. Следовательно, по теореме об универсальных коэффициентах, $E_1^{p,q} = H^{p+q}(Z^p, Z^{p-1}; \mathbb{Q}) = 0$ при $q > 0$.

Таким образом, спектральная последовательность $E_*^{*,*}$ стабилизируется во втором члене. Значит, $H^*(\widehat{\mathcal{Z}}; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \xrightarrow{\varkappa} H^*(\mathcal{Z}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{r^*} H^*(\widehat{\mathcal{Z}}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^*(\mathcal{Z}; \mathbb{Q}).$$

Из доказанного выше следует, что $r^* \circ \varkappa$ – изоморфизм. Осталось заметить, что $i^* \circ r^*$ – тождественное отображение. $\square$

Замечание 3.11.4. Пусть Q – простая клетка. Если точка $x \in Q$ лежит во внутренности симплекса триангуляции Q', вершинами которого являются барицентры клеток $Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_k$, то будем говорить, что точка x имеет особенность, соответствующую комбинаторному типу клетки Q_1. Зададим разбиение пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$ на страты: будем считать, что точка $(x, y) \in Q \times \Delta^l$ имеет тот же тип особенности, что и точка $x \in Q$. Легко проверить, что страт, соответствующий комбинаторному типу простой клетки Q, гомотопически эквивалентен пространству $K(\mathrm{Sym}(Q), 1)$, где $\mathrm{Sym}(Q)$ – группа автоморфизмов клетки Q. Обычно в теории особенностей пространство, склеенное из пространств $K(G, 1)$, где G – группы симметрий особенностей, является классифицирующим пространством для соответствующей классификации особенностей (см., например, [28], [29]). С другой стороны пространство $\mathcal{Z}$ является классифицирующим не для всех пространств, разбитых на страты, соответствующие комбинаторным типам простых клеток, а только для тех из них, которые получаются из разбиений на простые клетки. Поэтому неудивительно, что оно немного отличается от пространства $\widehat{\mathcal{Z}}$.

Изначально гомоморфизм $\varkappa$ был построен лишь как изоморфизм градуированных абелевых групп. Однако гомоморфизмы $\mathcal{X}^*$, δ^* и w являются изоморфизмами алгебр Хопфа, значит, $\varkappa$ — тоже изоморфизм алгебр Хопфа. Предложение 3.10.4 следует из того, что $\varkappa$ — гомоморфизм алгебр; предложение 3.10.6 — из того, что $\varkappa$ — гомоморфизм коалгебр; предложение 3.10.7 следует из коммутативности диаграммы (3.4).

Доказательство теоремы 3.4.2. Согласно конструкции естественного преобразования $\mathcal{X}$ разбиение $Y = g^! K$ принадлежит классу конкордантности $\mathcal{X}(\xi)$. Пусть $\psi \in H^{4k}(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ — класс когомологий коцикла f. Тогда $\delta^*(\psi) = \widetilde{F}$. Значит, по предложению 3.11.2, $\varkappa(\psi) = \mathcal{X}^*(F)$. Следовательно, $\psi^\sharp(\mathcal{X}(\xi)) = F(p_1(\xi), p_2(\xi), \ldots)$. Теперь доказываемой утверждение сразу следует из предложения 3.10.8. $\square$

Предложение 3.11.5. *Клеточный комплекс $\mathcal{Z}$ двусвязен, то есть группы $\pi_1(\mathcal{Z})$ и $\pi_2(\mathcal{Z})$ тривиальны.*

Следствие 3.11.6. $\mathcal{D}(P) = 0$, *если* $\dim P \leqslant 2$.

Рассмотрим немного подробнее случай $P = S^1$. С точностью до стабильной эквивалентности над окружностью имеется два блочных расслоения: ориентируемое и неориентируемое (для одномерных полиэдров классы эквивалентности блочных расслоений находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности векторных расслоений). Значит, $\hat{I}(S^1) \cong \mathbb{Z}_2$, причём изоморфизм устанавливается первым классом Штифеля–Уитни. Однако $\mathcal{D}(S^1) = 0$ и, значит, гомоморфизм $\mathcal{X} : \hat{I}(S^1) \to \mathcal{D}(S^1)$ не является мономорфизмом. Таким образом, мы видим, что, в отличие от рациональных классов Понтрягина, первый класс Штифеля–Уитни $w_1 : \hat{I}(P) \to H^1(P; \mathbb{Z}_2)$ не пропускается через полугруппу $\mathcal{D}(P)$.

Комплекс $\mathcal{Z}$ содержит стягиваемый симплициальный подкомплекс, являющийся объединением всех конечномерных симплексов, натянутых на подмножества множества $\mathbb{Z}$. Односвязность комплекса $\mathcal{Z}$ сразу следует из того, что его одномерный остов лежит в этом стягиваемом подкомплексе. Таким образом, для доказательства двусвязности комплекса $\mathcal{Z}$ нам достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 3.11.7. $H_2(\mathcal{Z}; \mathbb{Z}) = 0$.

Доказательство. Пусть

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k} l_i Q_i, \qquad l_i \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

двумерный клеточный цикл комплекса $\mathcal{Z}$. Наша задача заключается в том, чтобы доказать, что цикл γ гомологичен нулю.

Для любого $m \geqslant 6$ существует трёхмерный простой выпуклый многогранник P_m, среди граней которого есть ровно одна m-угольная, а все остальные имеют строго меньшее число сторон. Для любой нумерации вершин этого многогранника в комплексе $\mathbb{Z}$ имеется соответствующая трёхмерная клетка. Прибавляя границы таких клеток к циклу γ, мы можем легко получить, что цикл γ гомологичен циклу, являющемуся суммой только 3-, 4- и 5-угольных клеток комплекса $\mathbb{Z}$.

Таким образом, мы можем считать, что в сумме (3.5) все клетки Q_i являются 3-, 4- или 5-угольниками. Для каждой клетки Q_i, являющейся 5-угольником с номерами вершин $a_1, a_2, \ldots, a_5$ (по порядку), выберем какие-нибудь попарно различные и отличные от чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$ целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_5$ и добавим к циклу γ разность границ двух трёхмерных клеток комплекса $\mathcal{Z}$, изображённых на рис. 3.1, умноженную на коэффициент l_i. В результате мы получим цикл, гомологичный циклу γ и являющийся суммой только 3- и 4-угольных клеток комплекса $\mathbb{Z}$.

Таким образом, мы можем считать, что в сумме (3.5) все клетки Q_i являются треугольниками или четырёхугольниками. Добавив, если нужно, к циклу γ границу какой-нибудь клетки, изоморфной треугольной призме, мы можем считать, что сумма всех коэффициентов l_i при четырёхугольных клетках чётна. Так как мы можем заменить любую клетку Q

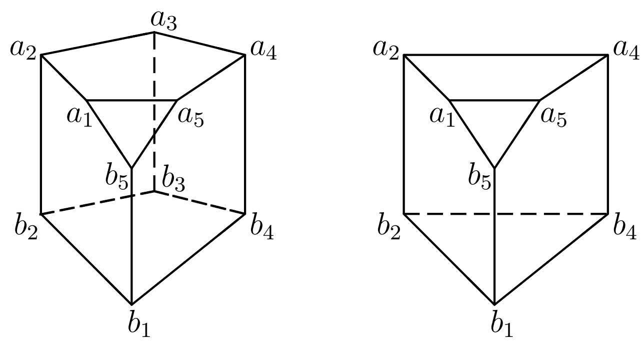


Рис. 3.1. Уничтожение пятиугольных граней в цикле γ

на клетку Q с обращённой ориентацией и коэффициентом -1, мы можем в действительности считать, что сумма всех коэффициентов l_i при четырёхугольных клетках в сумме (3.5) равна нулю. Пусть b_1, b_2, b_3, b_4 — какие-нибудь попарно различные целые числа, не встречающиеся среди номеров вершин клеток Q_i. Пусть $\underline{Q}$ — четырёхугольная клетка комплекса Q с номерами вершин b_1, b_2, b_3, b_4 (по порядку). Для любой четырёхугольной клетки Q_i с номерами вершин a_1, a_2, a_3, a_4 (по порядку) прибавим к циклу γ с коэффициентом l_i разность между границей куба с вершинами $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ и суммой границ треугольных призм с вершинами $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ и $a_1, a_3, a_4, b_1, b_2, b_4$. (Везде считается, что боковые рёбра куба и призм имеют вид $a_j b_j$.) В результате мы получим цикл, в который не входит ни одна четырёхугольная клетка, кроме клетки $\underline{Q}$, а коэффициент при клетке $\underline{Q}$ равен сумме всех коэффициентов l_i при четырёхугольных клетках Q_i в сумме (3.5), то есть тоже нулю.

Итак мы доказали, что любой двумерный цикл в комплексе $\mathcal{Z}$ гомологичен циклу, являющемуся суммой только треугольных клеток комплекса $\mathcal{Z}$. Осталось заметить, что всякий такой цикл гомологичен нулю, так как он лежит в стягиваемом подкомплексе комплекса $\mathcal{Z}$, состоящем из всех симплексов, натянутых на подмножества множества $\mathbb{Z}$. $\square$

3.12 Некоторые открытые вопросы

В предыдущем разделе было доказано, что $\mathcal{D}(P) = 0$ для любого двумерного комплекса P. К сожалению, автору неизвестно, как вычислять полугруппу $\mathcal{D}(P)$ хотя бы для какого-нибудь полиэдра, не гомотопически эквивалентного двумерному. Мы знаем, что полугруппа $\mathcal{D}(S^4)$ нетривиальна, так как имеется нетривиальный гомоморфизм $\mathcal{D}(S^4) \to \mathbb{Q}$, задаваемый первым классом Понтрягина.

Вопрос 3.12.1. Является ли комплекс $\mathcal{Z}$ трёхсвязным, то есть верно ли, что $\pi_3(\mathcal{Z}) = \mathcal{D}(S^3) = 0$? Верно ли, что $\mathcal{D}(S^4) \cong \mathbb{Z}$?

Обсудим следующий естественный вопрос.

Вопрос 3.12.2. Верно ли, что полугруппа $\mathcal{D}(P)$ является группой для любого компактного полиэдра P?

Абелева полугруппа $\mathcal{D}(P)$ является группой в том и только в том случае, когда каждый элемент $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(P)$ обратим. Отметим, что, так как $\hat{I}(P)$ — группа, любая $\mathcal{D}$-структура вида $\mathcal{X}(\xi)$, где ξ — блочное расслоение над полиэдром P, обратима в полугруппе $\mathcal{D}(P)$. Поэтому положительный ответ на вопрос 3.12.2 следовал бы из положительного ответа на следующий вопрос.

Вопрос 3.12.3. Верно ли, что гомоморфизм $\mathcal{X} : \hat{I}(P) \to \mathcal{D}(P)$ является эпиморфизмом для любого компактного полиэдра P?

Ответы на вопросы 3.12.2 и 3.12.3 достаточно найти для случая, когда $P = M$ — многообразие, так как полугруппа $\mathcal{D}(P)$ — гомотопический инвариант. Пусть M — многообразие и $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(M)$. Несложно проверить, что класс конкордантности $(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^*)^*$ содержит кубическое разбиение, клетками которого являются пересечения клеток разбиения $Y \in \mathcal{Y}$ с клетками разбиения Y^*. В связи с этим возникает следующий вопрос.

Вопрос 3.12.4. Верно ли, что любое кубическое разбиение тривиально?

Если ответ на вопрос 3.12.4 утвердительный, то $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^* \oplus \mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}_M$ для любой $\mathcal{D}$-структуры $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}(M)$ и, следовательно, ответ на вопрос 3.12.2 также утвердительный.

Глава 4

Задача о построении триангулированного многообразия с заданным набором линков вершин

И этой и следующей главах мы будем обозначать множество вершин клеточного комплекса X через $\mathrm{Vert}(X)$, а не через $V(X)$, так как буквой V нам будет удобно обозначать другой объект; так же для обозначения комбинаторных сфер мы теперь как правило будем использовать букву Y вместо L, чтобы избежать путаницы с обозначениями для L-полиномов Хирцебруха.

4.1 Постановки задач и основные результаты

В этой главе мы изучаем преобразование $\mathcal{L}$, сопоставляющее каждому ориентированному (симплициальному или кубическому) комбинаторному многообразию K неупорядоченный набор классов изоморфизма ориентированных комбинаторных сфер — линков вершин многообразия K, и задачу о его обращении:

Вопрос 4.1.1. Для каких наборов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер существует симплициальное (кубическое) ориентированное n-мерное комбинаторное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$?

Ввиду наличия групповой структуры в множестве $\mathcal{T}_n$ нам будет иногда удобнее работать не с преобразование $\mathcal{L}$, а с преобразованием $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, сопоставляющим каждому ориентированному n-мерному комбинаторному многообразию сумму линков его вершин в группе $\mathcal{T}_n$. Задача об обращении преобразования $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ эквивалентна следующему вопросу:

Вопрос 4.1.2. Для каких наборов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер существует симплициальное (кубическое) ориентированное n-мерное комбинаторное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Z_1, Z_2 \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2 \ldots, -Z_l$$

для некоторого набора $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер?

Часто нас будут интересовать версии вопросов 4.1.1 и 4.1.2, в которых вместо симплициальных и кубических комбинаторных многообразий рассматриваются симплициально клеточные и кубически клеточные.

Преобразование $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ есть не что иное, как дифференциал ∂ цепного комплекса $\widetilde{\mathcal{T}}_*$ (см. определение в разделе 1.1). Из равенства $\partial^2 = 0$ следует, что $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(K)$ — цикл комплекса $\mathcal{T}_*$. Таким образом, мы получаем следующее необходимое условие.

Необходимое условие 4.1.3. *Ответ на вопрос 4.1.2 (и, тем более, на вопрос 4.1.1) может быть утвердительным, только если элемент* $\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ *является циклом цепного комплекса* $\mathcal{T}_*$, *то есть если вершины комбинаторного многообразия* $Y = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \ldots \sqcup Y_k$ *могут быть разбиты на пары так, что линки вершин в каждой паре изоморфны с обращением ориентации.*

Нашими основными результатами будут следующие частичные положительные результаты по вопросами 4.1.1 и 4.1.2.

Теорема 4.1.4. *Пусть* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ *— набор ориентированных* $(n-1)$*-мерных комбинаторных сфер такой, что элемент* $\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ *является циклом цепного комплекса* $\mathcal{T}_*$. *Тогда существует ориентированное* n*-мерное кубически клеточное комбинаторное многообразие* $\mathbf{Q}$, *набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором*

$$\underbrace{Y_1', \ldots, Y_1'}_{q}, \underbrace{Y_2', \ldots, Y_2'}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k', \ldots, Y_k'}_{q}$$

для некоторого натурального числа q.

Теорема 4.1.5. *Пусть* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ *— набор ориентированных* $(n-1)$*-мерных комбинаторных сфер такой, что элемент* $\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ *является циклом цепного комплекса* $\mathcal{T}_*$. *Тогда существует ориентированное* n*-мерное симплициальное комбинаторное многообразие* $\mathbf{K}$, *набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором*

$$\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{q}, \underbrace{Y_2, \ldots, Y_2}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k, \ldots, Y_k}_{q}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_l$$

для некоторого натурального числа q и некоторых ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$.

Сформулируем аналоги теорем 4.1.4 и 4.1.5 для нормальных псевдомногообразий и многообразий с особенностями в смысле раздела 1.4.

Теорема 4.1.6. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — набор ориентированных связных $(n-1)$-мерных нормальных симплициальных псевдомногообразий такой, что элемент $\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ является циклом цепного комплекса $\mathcal{T}_*^{\mathrm{NPM}}$. Тогда существует ориентированное n-мерное нормальное кубически клеточное псевдомногообразие $\mathbf{Q}$, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором*

$$\underbrace{Y_1', \ldots, Y_1'}_{q}, \underbrace{Y_2', \ldots, Y_2'}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k', \ldots, Y_k'}_{q}$$

для некоторого натурального числа q.

Теорема 4.1.7. *Пусть* C *— класс ориентированных псевдомногообразий, удовлетворяющий свойствам I–IV и содержащийся в классе* NPM*. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — набор ориентированных $(n-1)$-мерных симплициальных псевдомногообразий из класса* C *такой, что элемент $\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ является циклом цепного комплекса $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$. Тогда существует ориентированное n-мерное симплициальное многообразие $\mathbf{K}$ с особенностями из класса* C*, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором*

$$\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{q}, \underbrace{Y_2, \ldots, Y_2}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k, \ldots, Y_k}_{q}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_l$$

для некоторого натурального числа q и некоторых ориентированных

$(n-1)$*-мерных симплициальных псевдомногообразий* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$ *из класса* C.

Мы могли бы сформулировать аналог теорем 4.1.4 и 4.1.6 для произвольного класса многообразий C, однако это не представляет интереса, так как все такие теоремы являются прямыми следствиями теоремы 4.1.6. Совсем иная ситуация с теоремами вида 4.1.7: эти теоремы для разных классов C не вытекают друг из друга. Дело в том, что чем меньше класс C, тем более ограничительные условия накладываются на псевдомногообразия $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$.

Наша главная задача в этом параграфе — дать явные конструкции псевдомногообразий $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{K}$, удовлетворяющих требованиям теорем 4.1.6 и 4.1.7 соответственно. Явная конструкция псевдомногообразия $\mathbf{Q}$ будет дана в разделе 4.5. В разделе 4.6 будет дана явная конструкция, которая по данному псевдомногообразию $\mathbf{Q}$ строит псевдомногообразие $\mathbf{K}$. Отметим, что основная сложность заключена в построении комплекса $\mathbf{Q}$; комплекс $\mathbf{K}$ строится по комплексу $\mathbf{Q}$ довольно легко.

Пусть X — симплициально клеточное или кубически клеточное псевдомногообразие. Введем обозначение

$$\mathcal{L}(X) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{Vert}(X)} \operatorname{link} x.$$

Вершины псевдомногообразия $\mathcal{L}(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с ориентированными ребрами псевдомногообразия X. Операция изменения ориентации ребра задает инволюцию $\lambda_X : z \mapsto \tilde{z}$ на множестве вершин псевдомногообразия $\mathcal{L}(X)$ и набор обращающих ориентацию изоморфизмов

$$\chi_{X,z} : \operatorname{star} z \to \operatorname{star} \tilde{z}, \qquad z \in \operatorname{Vert}(\mathcal{L}(X))$$

такой, что $\chi_{X,\tilde{z}} = \chi_{X,z}^{-1}$.

С другой стороны, пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — набор $(n-1)$-мерных связных нормальных симплициальных псевдомногообразий такой, что элемент $\langle Y_1 \rangle + \langle Y_2 \rangle + \ldots + \langle Y_k \rangle$ является циклом цепного комплекса $\mathcal{T}_*^{\mathrm{NPM}}$. Тогда вершины псевдомногообразия $Y = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \ldots \sqcup Y_k$ могут быть разбиты на пары так, что звёзды вершин в каждой паре изоморфны с обращением ориентации. Значит, существует инволюция $\lambda : y \mapsto \tilde{y}$ на множестве $\operatorname{Vert}(Y)$ и набор обращающих ориентацию изоморфизмов

$$\chi_y : \operatorname{star} y \to \operatorname{star} \tilde{y}, \qquad y \in \operatorname{Vert}(Y)$$

такой, что $\chi_{\tilde{y}} = \chi_y^{-1}$. Очевидно, что инволюция λ и изоморфизмы χ_y могут быть определены неоднозначно. Фиксируем какой-нибудь выбор инволюции λ и изоморфизмов χ_y. Рассмотрим множество вершин псевдомногообразия Y'. Его можно представить в виде

$$\operatorname{Vert}(Y') = \bigsqcup_{j=1}^{n} W_j(Y),$$

где $W_j(Y)$ — множество барицентров $(j-1)$-мерных симплексов комплекса Y (в частности, $W_1(Y) = \operatorname{Vert}(Y)$).

Конструкция, описанная в разделе 4.5, даст нам более сильное утверждение, чем теорема 4.1.6: в построенном псевдомногообразии $\mathbf{Q}$ инволюция $\lambda_{\mathbf{Q}}$ и набор изоморфизмов $\chi_{\mathbf{Q},z}$ будут согласованы с инволюцией λ и набором изоморфизмов χ_y. Более точно, мы получим следующее утверждение.

Теорема 4.1.8. *Пусть Y — ориентированное $(n-1)$-мерное нормальное симплициальное псевдомногообразие, $\lambda: y \mapsto \tilde{y}$ — инволюция на множестве $\mathrm{Vert}(Y)$, $\chi_y : \mathrm{star}\, y \to \mathrm{star}\, \tilde{y}$ — обращающие ориентацию изоморфизмы такие, что $\chi_{\tilde{y}} = \chi_y^{-1}$. Тогда существуют ориентированное n-мерное нормальное кубически клеточное псевдомногообразие $\mathbf{Q}$ и сохраняющий ориентацию изоморфизм $\mathcal{L}(\mathbf{Q}) \cong Y' \times S$, где S — конечное множество, такие, что*

1) подмножества $W_j(Y) \times S \subset \mathrm{Vert}(Y') \times S = \mathrm{Vert}(\mathcal{L}(\mathbf{Q}))$ инвариантны относительно инволюции $\lambda_{\mathbf{Q}}$;

2) если $y \in \mathrm{Vert}(Y)$, $s \in S$, то $\lambda_{\mathbf{Q}}(y,s) = (\lambda(y), s_1)$ для некоторого элемента $s_1 \in S$ (зависящего от y и s);

3) если $y \in \mathrm{Vert}(Y)$, $s \in S$, то изоморфизм

$$\chi_{\mathbf{Q},(y,s)} : \mathrm{star}_{Y' \times S}(y,s) \to \mathrm{star}_{Y' \times S}(\lambda(y), s_1)$$

индуцирован изоморфизмом $\chi_y : \mathrm{star}_Y\, y \to \mathrm{star}_Y\, \lambda(y)$.

Заметим, что эта теорема является содержательной, даже если все компоненты связности псевдомногообразия Y изоморфны границе n-мерного симплекса. Именно в этом случае она будет использоваться в главе 5.

В разделе 4.2 мы излагаем на удобном нам языке конструкцию Пеццана–Ферри, устанавливающую соответствие между псевдомноогообразиями с правильными раскрасками вершин и однородными графами с правильными раскрасками рёбер. В разделах 4.3 и 4.4 мы обобщаем эту конструкцию на случай псевдомногообразий, склеенных из произвольных простых многогранников. Конструкция Пеццана–Ферри и это её обобщение играют важную роль в конструкции псевдомногообразия $\mathbf{Q}$.

В конце раздела 4.6 мы докажем теорему 1.4.3, частным случаем которой является теорема 1.1.7.

В разделе 4.7 мы используем конструкцию псевдомногообразия $\mathbf{Q}$ для того, чтобы описать явно все универсальные локальные формулы для L-полиномов Хирцебруха от рациональных классов Понтрягина. Вместе с результатами раздела 1.5 это даёт явные локальные формулы для всех полиномов от рациональных классов Понтрягина.

В дальнейшем в этой главе мы всегда работаем только с нормальными псевдомногообразиями, как правило не оговаривая это особо.

4.2 Конструкция Пеццана-Ферри

Под графом мы будем понимать конечный граф с неориентированными рёбрами, который может содержать кратные ребра, но не содержит петель. Граф называется *однородным*, если степени всех его вершин одинаковы. Пусть Γ — однородный граф степени m. Будем говорить, что рёбра графа Γ раскрашены *правильным образом* в цвета из некоторого m-элементного множества A, если каждому ребру графа Γ поставлен в соответствие цвет — элемент множества A — так, что из каждой вершины выходит m рёбер попарно различных цветов.

Пусть V — множество вершин графа Γ. Каждому цвету $a \in A$ поставим в соответствие отображение $\Phi_a : V \to V$, переводящее вершину $v \in V$ в вершину, соединенную с v ребром цвета a. Тогда Φ_a — инволюция без неподвижных точек. Обратно, если нам задано произвольное конечное множество V и набор инволюций без неподвижных точек $\Phi_a : V \to V,\ a \in A$, то мы можем построить однородный граф Γ на множестве вершин V с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества A. Для этого нужно для любой вершины $v \in V$ и любого элемента $a \in A$ соединить вершины v и $\Phi_a(v)$ ребром цвета a.

Пусть K есть n-мерное симплициально клеточное псевдомногообразие. Раскраска вершин псевдомногообразия K в цвета из $(n+1)$-элементного множества A называется *правильной*, если вершины каждого симплекса раскрашены в попарно различные цвета. Есть один важный случай, когда вершины псевдомногообразия K могут быть естественным образом раскрашены в $n+1$ цвет. Это случай, когда псевдомногообразие K является барицентрическим подразделением некоторого симплициально клеточного псевдомногообразия L. Раскраска получается следующим образом: вершину, являющуюся барицентром j-мерного симплекса комплекса L, красим в цвет $j+1$.

Оказывается, что n-мерные нормальные симплициально клеточные псевдомногообразия с правильной раскраской вершин находятся во взаимно однозначном соответствии с однородными графами степени $n+1$ с правильной раскраской рёбер. Конструкция, устанавливающая это соответствие, принадлежит М. Пеццана [113] в размерности 3 и М. Ферри [79] в общем случае (см. также [80]). (М. Пеццана и М. Ферри не рассматривали условие нормальности, поэтому у них соответствие не было взаимно однозначным.) В оставшейся части этого раздела мы изложим в удобном для нас виде результаты М. Пеццана и М. Ферри. Без ограничения общности можно считать, что $A = [n+1]$.

Построение графа по псевдомногообразию. Пусть K есть n-мерное симплициально клеточное псевдомногообразие с правильной раскраской вершин. Каждому n-мерному симплексу σ комплекса K поставим в соответствие вершину v_σ. Каждому $(n-1)$-мерному симплексу τ комплекса K поставим в соответствие ребро e_τ, соединяющее вершины v_{σ_1} и v_{σ_2}, где σ_1 и σ_2 — два n-мерных симплекса, содержащих симплекс τ. Покрасим ребро e_τ в цвет j, если симплекс τ не содержит вершины цвета j.

Построение псевдомногообразия по графу. Пусть V — множество вершин графа Γ и $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1}$ — соответствующие инволюции. Пусть

$$\Delta^n = \{(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1} = 1,$$
$$t_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

стандартный n-мерный симплекс. Положим,

$$\mathbf{K}(\Gamma) = (V \times \Delta^n)/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями

$$(v, t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \equiv (\Phi_j(v), t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}),\ \text{если } t_j = 0. \tag{4.1}$$

Замечание 4.2.1. Фраза «отношение эквивалентности порождено отождествлениями» здесь и далее в аналогичных ситуациях понимается в следующем смысле. Отождествления (4.1) задают на множестве $V \times \Delta^n$ симметричное отношение $\equiv$, которое не является однако ни рефлексивным, ни транзитивным. Отношение $\sim$ есть слабейшее отношение эквивалентности, содержащее отношение $\equiv$, то есть такое, что $(v, x) \sim (v', x')$ всякий раз, когда $(v, x) \equiv (v', x')$.

Непосредственно проверяется, что $\mathbf{K}(\Gamma)$ — нормальное псевдомногообразие. Раскраска вершин комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$ индуцируется стандартной раскраской вершин симплекса Δ^n. Несложно проверить, что приведенные конструкции являются взаимно обратными.

Частично упорядоченное множество симплексов комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$. Для любого подмножества $B \subset [n+1]$ обозначим через Γ_B граф, получаемый из Γ при удалении всех рёбер, цвета которых не принадлежат множеству B. Тогда Γ_B — однородный граф степени, равной количеству элементов в множестве B. Обозначим через $\mathcal{K}(\Gamma)$ множество, элементами которого являются символ $\varnothing$ и всевозможные пары (B, Υ), где B — подмножество множества $[n+1]$, $B \neq [n+1]$, Υ — компонента связности графа Γ_B. Введём упорядочение в множестве $\mathcal{K}(\Gamma)$, положив $\varnothing < (B, \Upsilon)$ и $(B_1, \Upsilon_1) \leqslant (B_2, \Upsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $B_2 \subset B_1$ и $\Upsilon_2 \subset \Upsilon_1$.

Через Δ_v мы будем обозначать n-мерный симплекс комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$, соответствующий вершине $v \in V$; через Δ_e мы будем обозначать $(n-1)$-мерный симплекс комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$, соответствующий ребру e графа Γ.

Предложение 4.2.2. *Частично упорядоченное множество симплексов комплекса* $\mathbf{K}(\Gamma)$ *изоморфно частично упорядоченному множеству* $\mathcal{K}(\Gamma)$. *При этом изоморфизме каждому симплексу* σ *комплекса* $\mathbf{K}(\Gamma)$ *соответствует пара* (B, Υ), *где* $B \subset [n+1]$ — *подмножество, состоящее из всех цветов, не являющихся цветами вершин симплекса* σ.

Доказательство. Для каждого подмножества $B \subsetneq [n+1]$ обозначим через $\Delta_{B,v}$ грань симплекса Δ_v, натянутую на множество вершин, цвета которых не принадлежат подмножеству B. Тогда $\Delta_{B,v}$ — симплекс размерности $n-k$, где k — количество элементов в множестве B. Очевидно, что каждый симплекс комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$ имеет вид $\Delta_{B,v}$ для некоторых B и v. Рассматривая отождествления, производимые при склейке комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$, мы получаем, что $\Delta_{B,v_1} = \Delta_{B,v_2}$, если вершины v_1 и v_2 соединены ребром, цвет которого принадлежит множеству B. Значит, $\Delta_{B,v_1} = \Delta_{B,v_2}$, если вершины

v_1 и v_2 лежат в одной компоненте связности графа Γ_B. Несложно также проверить, что симплексы Δ_{B,v_1} и Δ_{B,v_2} различны, если вершины v_1 и v_2 лежат в разных компонентах связности графа Γ_B. $\square$

Симплекс комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$, соответствующий паре (B,Υ), мы будем обозначать через $\Delta_{B,\Upsilon}$. В частности, $\Delta_{\varnothing,v} = \Delta_v$ и $\Delta_{\{j\},e} = \Delta_e$, где e — ребро цвета j.

Предложение 4.2.3. *Линк симплекса $\Delta_{B,\Upsilon}$ в симплициально клеточном комплексе $\mathbf{K}(\Gamma)$ изоморфен симплициально клеточному комплексу $\mathbf{K}(\Upsilon)$.*

Доказательство. Несложно проверить, что частично упорядоченное множество $\mathcal{K}(\Upsilon)$ изоморфно полуинтервалу

$$[(B,\Upsilon),+\infty) = \{\xi \in \mathcal{K}(\Gamma) \mid \xi \geqslant (B,\Upsilon)\}\,.$$

Значит, оно изоморфно частично упорядоченному множеству симплексов комплекса $\mathbf{K}(\Gamma)$, содержащих симплекс $\Delta_{B,\Upsilon}$. Таким образом, частично упорядоченное множество симплексов комплекса $\mathbf{K}(\Upsilon)$ изоморфно частично упорядоченному множеству симплексов комплекса $\operatorname{link}\Delta_{B,\Upsilon}$. $\square$

Ориентация. Несложно проверить, что псевдомногообразие $\mathbf{K}(\Gamma)$ является ориентируемым тогда и только тогда, когда граф Γ не содержит циклов нечетной длины, то есть является двудольным. Предположим, что задано разбиение множества V на два непересекающихся подмножества V_+ и V_-, такое что граф Γ является двудольным по отношению к этому разбиению. Если $v \in V_+$, зададим на симплексе Δ_v ориентацию, индуцированную канонической ориентацией стандартного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Если $v \in V_-$, зададим на симплексе Δ_v ориентацию, противоположную ориентации, индуцированной канонической ориентацией стандартного симплекса

$\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Легко проверить, что введенные ориентации на симплексах Δ_v согласованны. Таким образом, разбиение $V = V_+ \sqcup V_-$ задает ориентацию псевдомногообразия $\mathbf{K}(\Gamma)$. Обратно, ориентация псевдомногообразия $\mathbf{K}(\Gamma)$ задает разбиение множества V, относительно которого граф Γ является двудольным.

4.3 Построение по графам псевдомногообразий, склеенных из простых многогранников

В этом разделе мы обобщим конструкцию Пеццана–Ферри на случай псевдомногообразий, склеенных из простых многогранников. Нас будет интересовать только та часть конструкции Пеццана–Ферри, которая сопоставляет псевдомногообразие каждому однородному графу. Мы будем склеивать псевдомногообразия из одинаковых клеток, то есть из нескольких экземпляров некоторого выпуклого многогранника P^n. При этом каждую гипергрань многогранника P^n мы будем склеивать вдоль тождественного изоморфизма с той же гипергранью какого-нибудь другого экземпляра многогранника P^n. Дадим теперь строгое описание конструкции.

Пусть P^n — простой многогранник размерности n, $\mathcal{F}$ — множество его гиперграней, $m = |\mathcal{F}|$. Пусть Γ — конечный однородный граф степени m с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества $\mathcal{F}$, и V — множество вершин графа Γ. Пусть $\Phi_F : V \to V$, $F \in \mathcal{F}$, — инволюции, задающие граф Γ.

Положим

$$M^n(P^n, \Gamma) = (V \times P^n)/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями

$$(v, x) \equiv (\Phi_F(v), x), \text{ если } x \in F.$$

Точку полиэдра $M^n(P^n, \Gamma)$, являющуюся классом эквивалентности пары (v, x), мы будем обозначать через $[v, x]$. Гиперграни стандартного симплекса находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $[n + 1]$. Таким образом, конструкции, описанная в разделе 4.2, является частным случаем рассматриваемой общей конструкции, то есть $M^n(\Delta^n, \Gamma) = \mathbf{K}(\Gamma)$.

Комплекс $M^n(P^n, \Gamma)$ является нормальным псевдомногообразием. Псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ является ориентируемым тогда и только тогда, когда граф Γ является двудольным. Ориентации псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями $V = V_+ \sqcup V_-$, относительно которых граф Γ является двудольным.

Получим теперь аналоги предложений 4.2.2, и 4.2.3 в рассматриваемом нами общем случае.

Обозначим через $\mathcal{M}(P^n, \Gamma)$ множество, элементами которого являются символ $\varnothing$ и всевозможные пары (B, Υ), где B — подмножество множества $\mathcal{F}$, такого что пересечение гиперграней из множества B непусто, и Υ — компонента связности графа Γ_B. Упорядочение в множестве $\mathcal{M}(P^n, \Gamma)$ вводится точно так же, как упорядочение в множестве $\mathcal{K}(\Gamma)$ (см. раздел 4.2).

Из конструкции псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$ сразу следует, что его n-мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами графа Γ (грань, соответствующую вершине v, мы будем обозначать через Q_v), а его $(n - 1)$-мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с рёбрами графа Γ (грань, соответствующую ребру e, мы будем обозначать через Q_e). Информацию о строении остальных граней даёт следующее предложение.

Предложение 4.3.1. *Частично упорядоченное множество граней псевдомногообразия $M^n(P^n,\Gamma)$ изоморфно частично упорядоченному множеству $\mathcal{M}(P^n,\Gamma)$.*

Грань комплекса $M^n(P^n,\Gamma)$, соответствующую паре (B,Υ), мы будем обозначать через $Q_{B,\Upsilon}$. В частности, $Q_{\varnothing,v}=Q_v$ и $Q_{\{F\},e}=Q_e$, где e — ребро цвета F.

Предложение 4.3.2. *Линк грани $Q_{B,\Upsilon}$ в комплексе $M^n(P^n,\Gamma)$ изоморфен симплициально клеточному комплексу $\mathbf{K}(\Upsilon)$.*

Доказательства предложений 4.3.1 и 4.3.2 полностью аналогичны доказательствам предложений 4.2.2 и 4.2.3.

Отметим одно очевидное, следствие предложения 4.3.2, которое будет очень важным для нас в главе 5.

Следствие 4.3.3. *Предположим, что*

1. *инволюции Φ_{F_1} и Φ_{F_2} коммутируют для любых двух гиперграней F_1,F_2 многогранника P^n с непустым пересечением;*
2. *отображение $\Phi_{F_1}\circ\Phi_{F_2}\circ\ldots\circ\Phi_{F_k}$ не имеет неподвижных точек для любых попарно различных гиперграней $F_1,F_2,\ldots,F_k$ с непустым пересечением.*

Тогда линк каждой вершины псевдомногообразия $M^n(P^n,\Gamma)$ изоморфен границе n-мерного кросс-политопа (правильного многогранника, являющегося многомерным аналогом октаэдра). В частности, псевдомногообразие $M^n(P^n,\Gamma)$ является кусочно линейным многообразием.

Замечание 4.3.4. Если условие 2 не выполнено, в псевдомногообразии $M^n(P^n, \Gamma)$ будут вершины, линки которых не изоморфны границе n-мерного кросс-политопа. Например, в нём могут встретиться вершины, линки которых изоморфны симплициально клеточному комплексу, полученному при склейке двух $(n-1)$-мерных симплексов по их целым границам.

Случай произвольного простого многогранника P^n встретится нам только в следующей главе. В этой главе кроме случая $P^n = \Delta^n$ нас будет интересовать только случай куба $P^n = I^n = [0,1]^n$. В этом случае нам будет удобно отождествить множество $\mathcal{F}$ гиперграней куба I^n с множеством

$$A = \left\{1^0, 2^0, \ldots, n^0, 1^1, 2^1, \ldots, n^1\right\},$$

сопоставив гиперграни, на которой j-ая координата равна 0 символ j^0, а гиперграни, на которой j-ая координата равна 1 — символ j^1. Инволюцию, соответствующую цвету j^e, мы будем обозначать через Φ_j^e. Многообразие $M^n(I^n, \Gamma)$ мы будем обозначать через $\mathbf{Q}(\Gamma)$.

Типом вершины x куба $v \times I^n$ будем называть набор координат соответствующей вершины стандартного куба I^n. Заметим, что отношение эквивалентности $\sim$ отождествляет вершины кубов, только если они имеют одинаковый тип. Поэтому для каждой вершины комплекса $\mathbf{Q}(\Gamma)$ корректно определен ее тип — n-мерный вектор, каждая координата которого равна 0 или 1. Пусть $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — вектор, каждая координата которого равна 0 или 1. Введем обозначения

$$A_{\mathbf{e}} = \{1^{e_1}, 2^{e_2}, \ldots, n^{e_n}\}; \qquad \Gamma_{\mathbf{e}} = \Gamma_{A_{\mathbf{e}}}.$$

Подмножество $B \subset A$ мы будем называть *правильным*, если для любого j

подмножеству B принадлежит не более, чем один из элементов j^0 и j^1.

Частично упорядоченное множество $\mathcal{M}(I^n, \Gamma)$ мы будем обозначать через $\mathcal{Q}(\Gamma)$. Тогда элементами множества $\mathcal{Q}(\Gamma)$ являются всевозможные пары (B, Υ), где B — правильное подмножество множества A и Υ — компонента связности графа Γ_B. Упорядочение в множестве $\mathcal{Q}(\Gamma)$ устроено точно так же, как в $\mathcal{K}(\Gamma)$. Куб комплекса $\mathbf{Q}(\Gamma)$, соответствующий паре (B, Υ), мы будем обозначать через $\square_{B,\Upsilon}$. Для n-мерных кубов мы как правило вместо обозначения $\square_{\varnothing,v}$ будем использовать обозначение $\square_v$.

Разбиение множества V на два непересекающихся подмножества V_+ и V_-, относительно которого граф Γ является двудольным, задает ориентацию псевдомногообразия $\mathbf{Q}(\Gamma)$. Пусть $x = \square_{A_{\mathbf{e}},\Upsilon}$ — произвольная вершина типа $\mathbf{e}$. Из предложения 4.3.2 следует, что линк вершины x изоморфен комплексу $\mathbf{K}(\Upsilon)$. Ориентация псевдомногообразия $\mathbf{Q}(\Gamma)$ индуцирует ориентацию комплекса $\operatorname{link} x$. С другой стороны, забывая о верхних индексах у цветов, мы можем считать, что ребра графа $\Gamma_{\mathbf{e}}$ раскрашены правильным образом в цвета $1, 2, \ldots, n$. Разбиение графа Γ на две доли задает разбиение графа $\Gamma_{\mathbf{e}}$ на две доли. Следовательно, граф $\Gamma_{\mathbf{e}}$ и его связная компонента Υ — двудольные графы с ребрами, раскрашенными правильным образом в цвета $1, 2, \ldots, n$. Таким образом, симплициально клеточное псевдомногообразие $\mathbf{K}(\Upsilon)$ получает выделенную ориентацию. Сохраняет ли ориентацию изоморфизм комплексов $\operatorname{link} x$ и $\mathbf{K}(\Upsilon)$? Непосредственно проверяется, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.3.5. *Изоморфизм между комплексами* $\operatorname{link} x$ *и* $\mathbf{K}(\Upsilon)$ *сохраняет ориентацию тогда и только тогда, когда число* $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ *четно.*

4.4 Переход к большим кубам

Рассмотрим куб $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Разобьем его на 2^n кубов гиперплоскостями $t_j = \frac{1}{2}$. Полученное разбиение мы будем называть *каноническим подразделением* стандартного куба. Пусть теперь X — произвольный кубически клеточный комплекс. Подразделим каждый его куб каноническим образом. Полученный кубически клеточный комплекс мы будем называть *каноническим подразделением* комплекса X.

В этом пункте мы покажем, что если граф Γ удовлетворяет некоторым специальным условиям, то комплекс $\mathbf{Q}(\Gamma)$ является каноническим подразделением некоторого кубически клеточного комплекса $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$.

Предложение 4.4.1. *Предположим, что граф Γ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\Phi_i^1 \circ \Phi_j^1 = \Phi_j^1 \circ \Phi_i^1$ для любых i и j;

2) $\Phi_i^0 \circ \Phi_j^1 = \Phi_j^1 \circ \Phi_i^0$, если $i \neq j$;

3) Существует отображение $h : V \to \mathbb{Z}_2^n$, такое что

$h(\Phi_i^0(v)) = h(v)$, $i = 1, 2, \dots, n$;

$h(\Phi_i^1(v)) = r_i h(v)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $r_1, \dots, r_n)$ — стандартные порождающие группы $\mathbf{Z}_2^n$.

Тогда псевдомногообразие $\mathbf{Q}(\Gamma)$ является каноническим подразделением некоторого кубически клеточного псевдомногообразия $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$.

Доказательство. Из свойства 1) следует, что инволюции $\Phi_j^1 : V \to V$ задают действие группы $\mathbf{Z}_2^n$ на множестве V. Кроме того, из свойства 3) вытекает, что это действие свободное. Введем обозначение $\widetilde{V} = V/\mathbf{Z}_2^n$. Пусть $p : V \to \widetilde{V}$ — отображение факторизации. Из свойства 3) легко выводится, что отображение $p \times h : V \to \widetilde{V} \times \mathbf{Z}_2^n$ является биекцией. Поэтому мы можем рассматривать инволюции Φ_j^e как инволюции на множестве $\widetilde{V} \times \mathbf{Z}_2^n$. Определим отображения $\widetilde{\Phi}_j^e : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ по формулам

$$\widetilde{\Phi}_j^e(u) = p\left(\Phi_j^0(u, r_j^e)\right).$$

Тогда $\Phi_j^0(u, r_j^e) = \left(\widetilde{\Phi}_j^e(u), r_j^e\right)$. Следовательно, $\widetilde{\Phi}_j^e\left(\widetilde{\Phi}_j^e(u)\right) = u$. Кроме того, из равенства $\widetilde{\Phi}_j^e(u) = u$ следовало бы равенство $\Phi_j^0(u, r_j^e) = (u, r_j^e)$, что невозможно. Таким образом, отображения $\widetilde{\Phi}_j^e$ — инволюции без неподвижных точек. Эти инволюции задают однородный граф степени $2n$ на множестве $\widetilde{V}$ с ребрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества A. Обозначим этот граф через $\widetilde{\Gamma}$. Положим, $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma) = \mathbf{Q}(\widetilde{\Gamma})$. Несложно проверить, что каноническое подразделение комплекса $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ изоморфно комплексу $\mathbf{Q}(\Gamma)$. $\square$

Отметим, что кубически клеточное псевдомногообразие $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ может быть задано следующим образом:

$$\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma) = V \times I^n / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями

$$(v, t_1, t_2, \ldots, t_n) \sim (\Phi_j^0(v), t_1, t_2, \ldots, t_n), \text{ если } t_j = 0;$$
$$(v, t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1} \ldots, t_n) \sim (\Phi_j^1(v), t_1, \ldots, t_{j-1}, 1 - t_j, t_{j+1} \ldots, t_n).$$

Вершины комплекса $\mathbf{Q}(\Gamma)$ — это в точности барицентры граней комплекса $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$. При этом вершины комплекса $\mathbf{Q}(\Gamma)$, имеющие тип $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, — это в точности вершины комплекса $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$. Очевидно, что для любой вершины комплекса $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ ее линки в комплексах $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ и $\mathbf{Q}(\Gamma)$ изоморфны.

4.5 Конструкция псевдомногообразия $\mathbf{Q}$

В этом пункте мы дадим явную конструкцию кубически клеточного псевдомногообразия $\mathbf{Q}$, удовлетворяет требованиям теоремы 4.1.8.

Покрасим барицентр каждого j-мерного симплекса комплекса Y в цвет $j+1$. Таким образом, Y' — симплициальное псевдомногообразие с вершинами, раскрашенными правильным образом в n цветов. Обозначим через Υ однородный граф степени n, соответствующий этому псевдомногообразию. Наша цель — построить однородный граф Γ степени $2n$ с правильной раскраской ребер в цвета $1^0, 2^0, \ldots, n^0$, $1^1, 2^1, \ldots, n^1$ такой, что $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ — искомое псевдомногообразие $\mathbf{Q}$.

Пусть U — множество вершин графа Υ. Ориентация псевдомногообразия Y задает разбиение $U = U_+ \sqcup U_-$, относительно которого граф Υ является двудольным. Обозначим через $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ инволюции, задающие граф Υ. Пусть S — произвольное конечное множество из q элементов. Введем обозначения

$$V = U \times S, \qquad V_+ = U_+ \times S, \qquad V_- = U_- \times S.$$

Определим инволюции $\Phi_j^0 : V \to V$ по формулам $\Phi_j^0(u,s) = (\Phi_j(u), s)$.

Предложение 4.5.1. *Предположим, что $\Phi_j^1 : V \to V$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — инволюции такие, что $\Phi_j^1(V_+) = V_-$, $\Phi_j^1(V_-) = V_+$ и инволюции Φ_j^0, Φ_j^1 удовлетворяют условиям 1)–3) из предложения 4.4.1. Пусть Γ — граф, заданный инволюциями Φ_j^0, Φ_j^1. Тогда $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ — ориентированное кубически клеточное псевдомногообразие с qk вершинами, которые могут быть разбиты на k групп по q вершин в каждой так, что линк каждой вершины в l-ой группе изоморфен псевдомногообразию Y_l'.*

Доказательство. Из предложения 4.4.1 следует, что псевдомногообразие $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ корректно определено. Граф Γ двудольный по отношению к разбиению $V = V_+ \sqcup V_-$. Поэтому псевдомногообразие $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ ориентированно.

Обозначим через Υ_l граф, соответствующий псевдомногообразию Y_l'. Графы Υ_l связны и

$$\Upsilon = \Upsilon_1 \sqcup \Upsilon_2 \sqcup \ldots \sqcup \Upsilon_k.$$

Вершины псевдомногообразия $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ — это вершины псевдомногообразия $\mathbf{Q}(\Gamma)$, имеющие тип $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Следовательно, они находятся во взаимно однозначном соответствии с компонентами связности графа $\Gamma_{\mathbf{0}}$. Граф $\Gamma_{\mathbf{0}}$ получается из графа Γ после удаления всех ребер цветов $1^1, 2^1, \ldots, n^1$. Поэтому

$$\Gamma_{\mathbf{0}} \cong \Upsilon^{\sqcup r} = (\Upsilon_1 \sqcup \Upsilon_2 \sqcup \ldots \sqcup \Upsilon_k)^{\sqcup r}.$$

Из предложений 4.3.2 и 4.3.5 следует, что псевдомногообразие $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ имеет qk вершин, которые могут быть разбиты на k групп по q вершин в каждой так, что линк каждой вершины в l-ой группе изоморфен комплексу $\mathbf{K}(\Upsilon_l) \cong Y_l'$. $\square$

Таким образом, наша цель — найти конечное множество S и инволюции Φ_j^1, удовлетворяющие условиям предложения 4.5.1. Сначала мы проведем построение в следующем частном случае.

Предположение 4.5.2. Каждой вершине симплициального псевдомногообразия Y сопоставлена метка из некоторого конечного множества $\mathcal{C}$ так, что выполнены следующие условия:

1) для любой вершины $y \in Y$ вершины подкомплекса $\operatorname{star} y \subset Y$ имеют попарно различные метки;

2) для любой вершины $y \in Y$ обращающий ориентацию изоморфизм $\chi_y : \operatorname{star} y \to \operatorname{star} \tilde{y}$ сохраняет метки вершин.

Обозначим через W множество всех непустых симплексов комплекса Y. Вершины графа Υ находятся во взаимно однозначном соответствии с последовательностями

$$\sigma^0 \subset \sigma^1 \subset \ldots \subset \sigma^{n-1},\ \sigma^j \in W.$$

Вершину, соответствующую такой последовательности, мы будем обозначать через $u(\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{n-1})$. Изоморфизмом симплициальных комплексов с помеченными вершинами мы будем в дальнейшем называть изоморфизм, сохраняющий метки вершин. Для любого симплекса $\sigma \in W$ все вершины звезды симплекса σ имеют разные метки. Поэтому звезда симплекса σ не имеет обращающих ориентацию автоморфизмов и для произвольных симплексов $\sigma_1, \sigma_2 \in W$ существует не более одного обращающего ориентацию изоморфизма $\operatorname{star} \sigma_1 \to \operatorname{star} \sigma_2$.

Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ построим конечный граф G_j. Множество вершин графа G_j совпадает с множеством $(j-1)$-мерных симплексов комплекса Y. Из каждой вершины σ графа G_j выходит ровно j ребер: для каждой вершины y симплекса σ вершина σ соединяется ребром с вершиной $\chi_y(\sigma)$. (Граф G_j может содержать кратные ребра.)

Предложение 4.5.3. *Все циклы в графе G_j имеют четную длину.*

Доказательство. Если два $(j-1)$-мерных симплекса комплекса Y соединены ребром в графе G_j, то их звезды изоморфны с обращением ориентации. Поэтому из существования цикла нечетной длины следовало бы наличие обращающего ориентацию автоморфизма у звезды одного из симплексов комплекса Y, что невозможно. $\square$

Следствие 4.5.4. *Каждая компонента связности графа G_j является двудольным графом с одинаковыми количествами вершин в обеих долях.*

Обозначим через G несвязное объединение графов $G_1, G_2, \dots, G_n$. Множество вершин графа G совпадает с множеством W. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех инволюций $\Lambda : W \to W$ таких, что для любого $\sigma \in W$ вершины σ и $\Lambda(\sigma)$ графа G лежат в одной его компоненте связности, но в разных ее долях. Из следствия 4.5.4 вытекает, что множество $\mathcal{P}$ непусто. Из определения графа G непосредственно следует, что звезды симплексов σ и $\Lambda(\sigma)$ изоморфны с обращением ориентации для любых $\Lambda \in \mathcal{P}$, $\sigma \in W$. Заметим также, что $\Lambda(y) = \tilde{y}$ для любой инволюции $\Lambda \in \mathcal{P}$ и любой вершины y комплекса Y. Положим,

$$S = \mathcal{P} \times \mathbf{Z}_2^n, \qquad V = U \times S, \qquad V_\pm = U_\pm \times S.$$

Для того, чтобы определить инволюции Φ_j^1, нам будут нужны некоторые дополнительные конструкции.

Для каждого симплекса $\sigma \in W$ обозначим через $c(\sigma)$ множество всех меток его вершин. Множество $c(\sigma)$ мы будем называть *меткой* симплекса σ. Так как все вершины симплекса σ имеют различные метки, то множество $c(\sigma)$ содержит ровно $\dim \sigma + 1$ элементов. Отображение c можно интерпретировать как симплициальное отображение $Y \to \Delta^{|\mathcal{C}|-1}$. Пусть $c \subset \mathcal{C}$ — произвольное подмножество. Обозначим через $W_c \subset W$ множество, состоящее из всех симплексов σ таких, что в комплексе $\operatorname{star} \sigma$ есть (единственный) симплекс ρ, для которого $c(\rho) = c$. Пусть $\Lambda \in \mathcal{P}$. Определим инволюцию $\Lambda_c : W_c \to W_c$ следующим образом. Для каждого симплекса $\sigma \in W_c$ в качестве $\Lambda_c(\sigma)$ возьмем образ симплекса σ при (единственном) обращающем ориентацию изоморфизме $\operatorname{star}\rho \to \operatorname{star}\Lambda(\rho)$, где ρ — симплекс в $\operatorname{star}\sigma$ такой, что $c(\rho) = c$.

Для каждого подмножества $c \subset \mathcal{C}$ определим отображение $\Theta_c : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ по формуле

$$\Theta_c(\Lambda)(\sigma) = \begin{cases} (\Lambda_c \circ \Lambda \circ \Lambda_c)(\sigma), & \text{если } c(\sigma) \supset c; \\ \Lambda(\sigma), & \text{если } c(\sigma) \not\supset c. \end{cases}$$

Несложно проверить, что $\Theta_c(\Lambda) \in \mathcal{P}$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить отображения

$$\Phi^1_j : U \times \mathcal{P} \times \mathbf{Z}_2^n \to U \times \mathcal{P} \times \mathbf{Z}_2^n.$$

Положим,

$$\Phi^1_j\left(u\left(\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{n-1}\right), \Lambda, g\right) = \\ = \left(u\left(\Lambda_c(\sigma^0), \Lambda_c(\sigma^1), \ldots, \Lambda_c(\sigma^{n-1})\right), \Theta_c(\Lambda), r_j g\right),$$

где $c = c(\sigma^{j-1})$.

Предложение 4.5.5. *Отображения Φ^1_j суть корректно определенные инволюции, меняющие местами множества V_+ и V_- и удовлетворяющие условиям 1), 2) и 3) из предложения 4.4.1.*

Доказательство. Очевидно, что для любых $\Lambda \in \mathcal{P}$, $c \subset \mathcal{C}$ отображение $\Lambda_c : W_c \to W_c$ сохраняет размерности и метки симплексов и отношение включения. (Заметим, что само отображение $\Lambda : W \to W$ не сохраняет отношение включения.) Из этого сразу следует, что отображения Φ^1_j корректно определены. Условие 2) и равенства $\Phi^1_j(V_+) = V_-$ и $\Phi^1_j(V_-) = V_+$

сразу следуют из того, что симплекс $\Lambda_c(\sigma^l)$ является образом симплекса σ^l при обращающем ориентацию изоморфизме $\operatorname{star}\sigma^{j-1} \to \operatorname{star}\Lambda(\sigma^{j-1})$. В качестве отображения h, удовлетворяющего условию 3), можно взять проекцию на последний сомножитель $U \times P \times \mathbf{Z}_2^n \to \mathbf{Z}_2^n$.

Если $c_1 \subset c_2 \subset \mathcal{C}$, то $W_{c_2} \subset W_{c_1}$. Поэтому для любой инволюции $\Lambda \in \mathcal{P}$ корректно определено отображение $\Lambda_{c_1} \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda_{c_1} : W_{c_2} \to W_{c_2}$. Для того,чтобы доказать, что отображения Φ_j^1 являются инволюциями и коммутируют, нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 4.5.6. *Пусть* $c_1 \subset c_2 \subset \mathcal{C}$, $\Lambda \in \mathcal{P}$. *Тогда*

$$\left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)_{c_1} = \Lambda_{c_1};$$

$$\left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)_{c_2} = \Lambda_{c_1} \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda_{c_1};$$

$$\left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)_{c_2} \circ \Lambda_{c_1} = \left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)_{c_1} \circ \Lambda_{c_2}.$$

Доказательство. Из того, что отображение Λ_c сохраняет метки симплексов и отношение включения, следует, что первое равенство достаточно проверить для симплексов σ таких, что $c(\sigma) = c_1$, а второе — для симплексов σ таких, что $c(\sigma) = c_2$. Если $c(\sigma) = c_1$, то

$$\left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)_{c_1}(\sigma) = \Theta_{c_2}(\Lambda)(\sigma) = \Lambda(\sigma) = \Lambda_{c_1}(\sigma).$$

Если $c(\sigma) = c_2$, то

$$\left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)_{c_2}(\sigma) = \Theta_{c_1}(\Lambda)(\sigma) = \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda \circ \Lambda_{c_1}\right)(\sigma) = \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda_{c_1}\right)(\sigma).$$

Третье равенство следует из двух первых. $\square$

Предложение 4.5.7. *Если* $c_1 \subset c_2$, *то* $\Theta_{c_1} \circ \Theta_{c_2} = \Theta_{c_2} \circ \Theta_{c_1}$.

Доказательство. Пусть $\Lambda \in \mathcal{P}$, $\sigma \in W$. Если $c(\sigma) \not\supset c_1$, то

$$\Theta_{c_2}\left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)(\sigma) = \Lambda(\sigma) = \Theta_{c_1}\left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)(\sigma).$$

Если $c(\sigma) \supset c_1$ и $c(\sigma) \not\supset c_2$, то

$$\Theta_{c_1}\left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)(\sigma) = \left(\left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)_{c_1} \circ \Theta_{c_2}(\Lambda) \circ \left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)_{c_1}\right)(\sigma) =$$
$$= \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda \circ \Lambda_{c_1}\right)(\sigma);$$
$$\Theta_{c_2}\left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)(\sigma) = \Theta_{c_1}(\Lambda)(\sigma) = \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda \circ \Lambda_{c_1}\right)(\sigma).$$

Если $c(\sigma) \supset c_2$, то

$$\Theta_{c_1}\left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)(\sigma) = \left(\left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)_{c_1} \circ \Theta_{c_2}(\Lambda) \circ \left(\Theta_{c_2}(\Lambda)\right)_{c_1}\right)(\sigma) =$$
$$= \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda_{c_1}\right)(\sigma);$$
$$\Theta_{c_2}\left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)(\sigma) = \left(\left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)_{c_2} \circ \Theta_{c_1}(\Lambda) \circ \left(\Theta_{c_1}(\Lambda)\right)_{c_2}\right)(\sigma) =$$
$$= \left(\left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda_{c_1}\right) \circ \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda \circ \Lambda_{c_1}\right) \circ \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda_{c_1}\right)\right)(\sigma) =$$
$$= \left(\Lambda_{c_1} \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda \circ \Lambda_{c_2} \circ \Lambda_{c_1}\right)(\sigma).$$

□

Из равенства $\left(\Theta_c(\Lambda)\right)_c = \Lambda_c$ следует, что отображения Φ_j^1 являются инволюциями. Из третьего равенства предложения 4.5.6 и предложения 4.5.7 следует, что эти инволюции коммутируют. □

Таким образом, множество S и инволюции Φ_j^1 удовлетворяют условиям предложения 4.5.1. Значит, $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ — искомое кубически клеточное псевдомногообразие. Условия согласования 1)–3) из теоремы 4.1.8 сразу следуют из конструкции.

Рассмотрим теперь общий случай и сведем его к уже рассмотренному нами частному случаю. Пусть псевдомногообразие Y имеет

q вершин. Положим, $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, q\}$. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество биекций $\mathrm{Vert}(Y) \to \mathcal{C}$. Для каждой вершины y псевдомногообразия Y обращающий ориентацию изоморфизм χ_y индуцирует биекцию $\mathrm{Vert}(\mathrm{star}\, y) \to \mathrm{Vert}(\mathrm{star}\, \tilde{y})$. Продолжим произвольным образом эти биекции до биекций $\varkappa_y : \mathrm{Vert}(Y) \to \mathrm{Vert}(Y)$ так, чтобы были выполнены условия $\varkappa_{\tilde{y}} = \varkappa_y^{-1}$. Положим, $\overline{Y} = Y \times \mathcal{B}$. Каждую вершину $(y, \nu) \in \mathrm{Vert}(Y) \times \mathcal{B}$ мы пометим меткой $\nu(y) \in \mathcal{C}$. Определим инволюцию

$$\overline{\lambda} : \mathrm{Vert}(\overline{Y}) \to \mathrm{Vert}(\overline{Y})$$

по формуле

$$\overline{\lambda}(y, \nu) = (\tilde{y}, \nu \circ \varkappa_y^{-1}).$$

Пусть $\overline{\chi}_{(y,\nu)} : \mathrm{star}(y, \nu) \to \mathrm{star}\, \overline{\lambda}(y, \nu)$ — обращающий ориентацию изоморфизм, индуцированный обращающим ориентацию изоморфизмом χ_y. Тогда псевдомногообразие $\overline{Y}$ удовлетворяет предположения 4.5.2. Чтобы получить искомое псевдомногообразие $\mathbf{Q}$, нам осталось применить описанную выше конструкцию к полученному псевдомногообразию $\overline{Y}$.

Пример 4.5.8. Пусть $Y_1 = Y_2$ — граница треугольника. Рассмотрим множество меток $\mathcal{C} = \{1, 2, 3\}$ и пометим вершины комплекса Y_1 метками $1, 2, 3$ по часовой стрелке, а вершины комплекса Y_2 — метками $1, 2, 3$ против часовой стрелки. Псевдомногообразие $Y = Y_1 \sqcup Y_2$ удовлетворяет предположению 4.5.2. Наша конструкция даёт кубически клеточный комплекс, являющийся несвязным объединением двух экземпляров кубически клеточного разбиения кренделя, изображенного на рис. 4.1. На этом рисунке отрезки с одинаковыми номерами склеены так, чтобы получилась ориентированная поверхность.

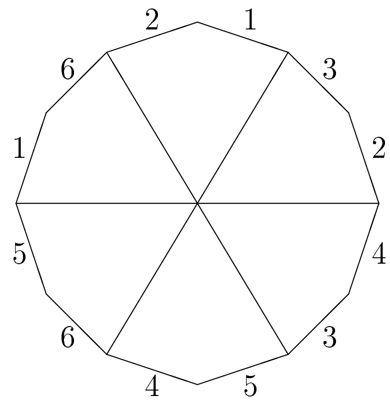


Рис. 4.1. Разбиение кренделя на 6 четырёхугольников

4.6 Конструкция псевдомногообразия K

В этом разделе мы, опираясь на конструкцию кубически клеточного псевдомногообразия $\mathbf{Q}$, данную в предыдущем разделе, даём явную конструкцию псевдомногообразия $\mathbf{K}$, удовлетворяющего требованиям теоремы 4.1.7.

Пусть $\mathbf{Q}$ — ориентированное кубически клеточное псевдомногообразие, полученное по набору $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ при помощи конструкции из предыдущего раздела. Рассмотрим симплициальное псевдомногообразие $\mathbf{Q}'$. Линк каждой вершины псевдомногообразия $\mathbf{Q}'$, являющейся вершиной псевдомногообразия $\mathbf{Q}$, изоморфен с сохранением ориентации одному из псевдомногообразий Y_i', причём каждое из многообразий Y_i' встречается среди таких линков ровно q раз. Линк каждой вершины $b(\sigma)$ псевдомногообразия $\mathbf{Q}'$, являющейся барицентром куба σ положительной размерности, изоморфен джойну барицентрического подразделения псевдомногообразия $\operatorname{link}_{\mathbf{Q}} \sigma$ и барицентрического подразделения границы куба σ. Очевидно, что псевдомногообразие $\operatorname{link}_{\mathbf{Q}} \sigma$ изоморфно линку одного из симплексов одного из псевдомногообразий Y_i', а граница куба σ обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Следовательно, псевдомногообразие $\mathrm{link}_{\mathbf{Q}'}(b(\sigma))$, во-первых, принадлежит классу C, во-вторых, обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Таким образом, набор линков вершин симплициального псевдомногообразия $\mathbf{Q}'$ состоит из набора $Y_1'', Y_2'', \ldots, Y_k''$, взятого q раз, и некоторого количества псевдомногообразий из класса C, каждое из которых обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Значит,

$$\partial\langle\mathbf{Q}'\rangle = q\sum_{i=1}^{k}\langle Y_i''\rangle + [\text{элементы порядка } 2].$$

В разделе 1.1 была приведена конструкция, сопоставляющая каждой ориентированной $(n-1)$-мерной сфере L ориентированную n-мерную сферу $\widehat{L}$ такую, что отображение $D : \langle L\rangle \mapsto \langle\widehat{L}\rangle$ является цепной гомотопией между оператором барицентрического подразделения и тождественным отображением комплекса $\mathcal{T}_*$ в себя по модулю элементов порядка 2 (см. предложение 1.1.5). Эта конструкция непосредственно переносится на случай класса псевдомногообразий C.

Цепь $\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ является циклом в комплексе $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$. Поэтому из аналогов предложений 1.1.4 и 1.1.5 для произвольного класса псевдомногообразий C следует, что

$$\partial\sum_{i=1}^{k}\bigl\langle\widehat{Y}_i\bigr\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle Y_i'\rangle - \sum_{i=1}^{k}\langle Y_i\rangle + [\text{элементы порядка } 2];$$

$$\partial\sum_{i=1}^{k}\bigl\langle\widehat{(Y_i')}\bigr\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle Y_i''\rangle - \sum_{i=1}^{k}\langle Y_i'\rangle + [\text{элементы порядка } 2].$$

Положим,

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}'\sqcup\mathbf{Q}'\sqcup\left(\left(-\widehat{Y}_1\right)\sqcup\ldots\sqcup\left(-\widehat{Y}_k\right)\sqcup\left(-\widehat{(Y_1')}\right)\sqcup\ldots\sqcup\left(-\widehat{(Y_k')}\right)\right)^{\sqcup 2q}.$$

Тогда $\mathbf{K}$ — ориентированное симплициальное многообразие с особенностями из класса C и

$$\partial\langle\mathbf{K}\rangle = 2q\sum_{i=1}^{k}\langle Y_i\rangle.$$

Значит, $\mathbf{K}$ — искомое псевдомногообразие.

Доказательство теоремы 1.4.3. Из теоремы 4.1.7 сразу следует, что ядро гомоморфизма $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{C}} \to H_*\big(\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}\big)$ является группой кручения: действительно, для любого цикла $\eta = \langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ существует ориентированное симплициальное многообразие $\mathbf{K}$ с особенностями из класса C такое, что цикл $\partial\langle\mathbf{K}\rangle$ кратен циклу η.

Докажем теперь, что коядро гомоморфизма ∂_* является группой кручения. Пусть J — ориентированное n-мерное симплициальное многообразие с особенностями из класса C такое, что $\partial\langle J\rangle = 0$. Нам нужно доказать, что класс кобордизмов $[J]$ имеет конечный порядок в группе Ω_n^{C}. Напомним, что через $\widetilde{\mathrm{C}}$ мы обозначаем класс всех многообразий с особенностями из класса C. Мы не можем применить теорему 4.1.7 для класса $\widetilde{\mathrm{C}}$, так как он не содержится в классе NPM, однако мы можем применить её для класса $\widetilde{\mathrm{C}}\cap\mathrm{NPM}$. Пусть $J = J_1\sqcup J_2\sqcup\ldots\sqcup J_k$, где J_i — связные псевдомногообразия; тогда $J_i \in \widetilde{\mathrm{C}}\cap\mathrm{NPM}$ и элемент $\langle J_1\rangle+\langle J_2\rangle+\ldots+\langle J_k\rangle$ является циклом в цепном комплексе $\mathcal{T}_*^{\widetilde{\mathrm{C}}\cap\mathrm{NPM}}$. Применим теорему 4.1.7 к набору $J_1, J_2, \ldots, J_k$. Мы получим ориентированное $(n+1)$-мерное многообразие $\mathbf{K}$ с особенностями из класса $\widetilde{\mathrm{C}}\cap\mathrm{NPM}$, среди линков вершин которого имеется по q линков, изоморфных каждому из псевдомногообразий J_i, а все остальные линки вершин разбиваются на пары изоморфных друг другу с обращением ориентации. Следовательно, $q[J] = 0$ в группе Ω_n^{C}. $\square$

4.7 Локальные формулы для L-классов Хирцебруха

В этом пункте мы опишем явно все универсальные локальные формулы для L-полиномов Хирцебруха от классов Понтрягина. Напомним, что $L_l(p_1, p_2, \ldots, p_l)$ есть однородный полином степени $4l$ (где степень переменной p_i считается равной $4i$), задаваемый по формуле

$$1 + \sum_{l=1}^{\infty} L_l(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{t_j}}{\mathrm{th}(\sqrt{t_j})},$$

где σ_i есть i-ый элементарный симметрический полином от переменных t_j. Для любого $4l$-мерного ориентированного замкнутого многообразия M имеется классическая формула Хирцебруха

$$\operatorname{sign} M = \langle L_l(p_1(M), p_2(M), \ldots, p_l(M)), [M] \rangle .$$

Теорема 4.7.1. *Пусть $f \in \mathcal{T}^{4l}(\mathbb{Q})$ — универсальная локальная формула для полинома Хирцебруха L_l. Тогда для любого набора $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(4l-1)$-мерных комбинаторных сфер такого, что $\langle Y_1 \rangle + \langle Y_2 \rangle + \ldots + \langle Y_k \rangle$ — цикл цепного комплекса $\mathcal{T}_*$, функция f удовлетворяет уравнению*

$$f(Y_1) + f(Y_2) + \ldots + f(Y_k) = \frac{\operatorname{sign} \mathbf{Q}}{q}, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{Q}$ и q — соответственно ориентированное кубически клеточное комбинаторное многообразие и натуральное число из теоремы 4.1.4. Обратно, всякая функция $f \in \mathcal{T}^{4l}(\mathbb{Q})$, удовлетворяющая системе уравнений (4.2), является универсальной локальной формулой для полинома L_l.

Доказательство. Пусть f — локальная формула для полинома L_l. Тогда

$$\operatorname{sign}\mathbf{Q} = \langle L_l(p_1(\mathbf{Q}), p_2(\mathbf{Q}), \ldots, p_l(\mathbf{Q}), [\mathbf{Q}]\rangle = \varepsilon\big(f_\sharp(\mathbf{Q}')\big) =$$
$$= q\left(f\big(\langle Y_1'\rangle\big) + f\big(\langle Y_2'\rangle\big) + \ldots + f\big(\langle Y_k'\rangle\big)\right) =$$
$$= q\left(f(\langle Y_1\rangle) + f(\langle Y_2\rangle) + \ldots + f(\langle Y_k\rangle)\right),$$

где $\varepsilon : C_0\big(\mathbf{Q}';\mathbb{Q}\big) \to \mathbb{Q}$ — аугментация. Последнее равенство вытекает из предложения 1.1.5, так как функция f является коциклом, а сумма $\langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle + \ldots + \langle Y_k\rangle$ — циклом.

Универсальная локальная формула для полинома L_l определена однозначно с точностью до кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. С другой стороны, решение $f \in \mathcal{T}^{4l}(\mathbb{Q})$ системы уравнений (4.2) также определено однозначно с точностью до кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Таким образом, решения системы (4.2) — это в точности локальные формулы для полинома L_l. $\square$

Система уравнений (4.2) дает явное комбинаторное описание всех локальных формул для полинома Хирцебруха L_l, так как правые части уравнений (4.2) допускают явное комбинаторное вычисление. Действительно, кубически клеточное комбинаторное многообразие $\mathbf{Q}$ строится с помощью явной комбинаторной конструкции, описанной в разделе 4.5. Его сигнатура может быть вычислена либо непосредственно по определению, либо с помощью явной (нелокальной) комбинаторной формулы, полученной А. Раницким и Д. Сулливаном в 1976 году [114]. Так как $\mathbf{Q}$ — кубически клеточное (а не симплициальное) комбинаторное многообразие, необходимо использовать следующую модификацию формулы Раницкого–Сулливана.

Предложение 4.7.2. *Пусть X — ориентированное $4l$-мерное кубически клеточное комбинаторное многообразие. Обозначим через C_i группу i-*

мерных клеточных цепей комплекса X с фиксированным базисом, состоящим из i-мерных кубов комплекса X. Тогда

$$\operatorname{sign} X = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix},$$

где B — матрица граничного оператора $\partial : C_{2l+1} \to C_{2l}$ и A — матрица симметрической билинейной формы α на пространстве C_{2l}, такой что

$$\alpha(\sigma, \tau) = \sum \gamma(\sigma, \tau, \eta),$$

где сумма ведется по всем $4l$-мерным кубам η комплекса X; $\gamma(\sigma, \tau, \eta) = \pm 1$, если $\dim(\sigma \cap \tau) = 0$ и $\sigma, \tau \subset \eta$ (знак $\gamma(\sigma, \tau, \eta)$ положителен, если ориентация куба σ, умноженная на ориентацию куба τ, дает ориентацию куба η, совпадающую с заданной ориентацией многообразия X, и отрицательный в противном случае), и $\gamma(\sigma, \tau, \eta) = 0$ во всех остальных случаях.

К сожалению, полученное явное описание всех локальных формул для полиномов Хирцебруха является очень неэффективным. Конструкция многообразия X довольно сложна, поэтому необходимо вычислять сигнатуры матриц очень большого размера. Поэтому описанные формулы вряд ли пригодны для конкретных вычислений.

Чтобы выбрать какую-нибудь каноническую универсальную локальную формулу для полинома L_l нам надо выбрать каноническое решение f_0 системы (4.2). Это может быть сделано с помощью следующего стандартного приема, который очень похож на приёмы, применённые в аналогичных ситуациях в разделах 1.5 и 2.4.

Обозначим через $T_{4l}^{(m)}$ множество классов изоморфизмов ориентированных $(4l-1)$-мерных комбинаторных сфер, которые могут быть получены из границы $4l$-мерного симплекса с помощью последовательности из не более, чем m бизвездных преобразований. Заметим, что множество $T_{4l}^{(m)}$ допускает алгоритмическое описание, то есть мы можем проверить, принадлежит ли ему класс изоморфизма данного симплициального комплекса или нет. Будем последовательно выбирать ограничения функции f_0 на множества $T_{4l}^{(m)}$. Пусть уже выбрано ограничение функции f_0 на множество $T_{4l}^{(m-1)}$. Из всех функций $f : T_{4l}^{(m)} \to \mathbb{Q}$, которые совпадают на $T_{4l}^{(m-1)}$ с уже выбранным ограничением функции f_0, удовлетворяют уравнениям $f(\langle -Y \rangle) = -f(\langle Y \rangle)$ и уравнениям (4.2) для всех наборов комбинаторных сфер $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k \in T_{4l}^{(m)}$ таких, что $\partial(\langle Y_1 \rangle + \langle Y_2 \rangle + \ldots + \langle Y_k \rangle) = 0$, в качестве ограничения функции f_0 выберем ту, для которой величина

$$\sum_{Y \in T_{4l}^{(m)}} (f(\langle Y \rangle))^2$$

принимает наименьшее значение. Такая функция существует, единственна, задача ее нахождения сводится к решению системы линейных уравнений и, следовательно, может быть решена алгоритмически.

Замечание 4.7.3. Вместо множеств $T_{4l}^{(m)}$ нельзя было бы рассматривать множества классов изоморфизмов комбинаторных сфер $T_{4l,m}$, имеющих не более m вершин, так как такие множества не допускают алгоритмического описания. Уточним, что мы имеем в виду. Каждое из множеств $T_{4l,m}$ конечно и поэтому является алгоритмически разрешимым. Однако для использования множеств $T_{4l,m}$ вместо множеств $T_{4l}^{(m)}$ нам был бы нужен алгоритм, который по заданным числу m и конечному симплициальному комплексу Y определял бы, лежит ли класс изоморфизма комплекса Y в множестве $T_{4l,m}$ или нет. Из теоремы С. П. Новикова [11] об алгоритмической нераспознаваемости сферы следует, что при $l > 1$ такого алгоритма не существует.

Вместо комбинаторных многообразий мы можем работать с симплициальными гомологическими многообразиями; тогда все результаты остаются в силе и вместо множеств $T_{4l}^{(m)}$ можно рассматривать множества симплициальных гомологических сфер, имеющих не более m вершин.

Замечание 4.7.4. Описанная выше процедура выбора канонического решения системы (4.2) совершенно не нужна для того, чтобы получить симплициальный цикл, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре L-классу Хирцебруха конкретного комбинаторного многообразия K. Действительно, чтобы получить такой цикл, нам достаточно знать значения $f(\langle Y\rangle)$ только для тех $(4l-1)$-мерных комбинаторных сфер $\langle Y\rangle$, которые встречаются среди линков симплексов многообразия K. Поэтому мы должны рассмотреть только те уравнения (4.2), которые соответствуют наборам $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, таким что каждая из комбинаторных сфер Y_i изоморфна линку некоторого симплекса многообразия K. Среди таких уравнений есть лишь конечное число линейно независимых. Таким образом, мы получаем конечную систему линейных уравнений и нам достаточно взять произвольное ее решение.

В разделе 1.5 описана явная процедура, которая по известным универсальным локальным формулам f_1 и f_2 для двух однородных полиномов F_1 и F_2 от рациональных классов Понтрягина, строит универсальную локальную формулу $f_1 \diamond f_2$ для их произведения F_1F_2. Хорошо известно, что в полиноме Хирцебруха L_l коэффициент при p_l ненулевой, значит, полиномы Хирцебруха L_l порождают всё кольцо $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$. Таким образом построение енные явные локальные формулы для полиномов Хирцебруха L_l вместе с результатами раздела 1.5 дают явные, хотя, конечно же, очень неэффективные, локальные формулы для всех однородных полиномов от рациональных классов Понтрягина.

Глава 5

Комбинаторный подход к проблеме Стинрода о реализации циклов

5.1 Реализация циклов и разрешение особенностей

Подход к проблеме Стинрода, основанный на разрешении особенностей циклов, был предложен Д. Сулливаном [125]. Пусть Z — псевдомногообразие, $\Sigma \subset Z$ — подмножество, такое что $Z \setminus \Sigma$ — ориентированное многообразие. По Сулливану, разрешение особенностей псевдомногообразия Z — это отображение $g : N \to Z$, где N — ориентированное замкнутое многообразие такое, что ограничение

$$g|_{g^{-1}(Z \setminus \Sigma)} : g^{-1}(Z \setminus \Sigma) \to Z \setminus \Sigma$$

является диффеоморфизмом (или кусочно гладким гомеоморфизмом — в зависимости от рассматриваемой категории многообразий). Первым примером псевдомногообразия, не допускающего разрешения особенностей, является 7-мерный цикл, представляющий построенный Р. Томом [126] 7-мерный целочисленный класс гомологий, не реализуемый по Стинроду.

Раздутием пары (Z,Σ) Сулливан называет отображение

$$g:\big(\widetilde{Z},\widetilde{\Sigma}\big)\to(Z,\Sigma)$$

такое, что $\widetilde{Z}\setminus\widetilde{\Sigma}$ — многообразие и $g|_{g^{-1}(Z\setminus\Sigma)}$ есть диффеоморфизм (соответственно, кусочно гладкий гомеоморфизм). В [125] он построил полное препятствие $\mathfrak{v}_s\in H_s(Z;\Omega_{n-s-1})$ к существованию раздутия $(\widetilde{Z},\widetilde{\Sigma})$ пары (Z,Σ), такого что $\dim\widetilde{\Sigma}<\dim\Sigma$ (см. также [93]). Здесь $s=\dim\Sigma$, $n=\dim Z$, Ω_q — группа кобордизмов гладких (соответственно, кусочно линейных) ориентированных q-мерных многообразий. Если все препятствия Сулливана последовательно оказываются нулевыми, мы можем, уменьшая размерность множества Σ, последовательно разрешить особенности псевдомногообразия Z. Сулливан заметил, что его препятствия дают геометрическую интерпретацию дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха в теории гладких (соответственно, кусочно линейных) бордизмов. Действительно, фундаментальный класс $[Z]\in H_n(Z;\mathbb{Z})=H_n(Z;\Omega_0)$ является циклом дифференциалов $d_2,\dots,d_{s-1}$ и $d_s([Z])=\mathfrak{v}_s$. Следовательно, препятствия Сулливана являются элементами конечного порядка. Неулучшаемые оценки порядков дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха в теории гладких ориентированных бордизмов были получены В. М. Бухштабером [2]. В [63] С. Буонкристиано и М. Дедо непосредственно геометрически оценили порядки препятствий Сулливана. Эти оценки гораздо слабее, чем оценки В. М. Бухштабера. Отметим, что в случае, когда препятствия к разрешению особенностей равны нулю, результаты работ [125], [93], [63] не дают явной конструкции многообразия N и отображения $g:N\to Z$, разрешающего особенности.

Мы работаем с более общим понятием разрешения особенностей, которое можно назвать разрешением особенностей с кратностями. Разрешением особенностей псевдомногообразия Z с кратностью q мы будем называть кусочно гладкое отображение $g : N \to Z$, где N — кусочно линейное многообразие, такое что ограничение

$$g|_{g^{-1}(Z\setminus\Sigma)} : g^{-1}(Z \setminus \Sigma) \to Z \setminus \Sigma$$

является q-листным накрытием. Из конечности порядков препятствий Сулливана несложно выводится, что разрешение особенностью с некоторой кратностью возможно всегда. Одним из основных результатов этой главы является явная комбинаторная конструкция, сопоставляющая каждому ориентированному псевдомногообразию Z, разбитому на простые клетки, комбинаторное многообразие N и отображение $g : N \to Z$, являющееся разрешением особенностей с некоторой кратностью q. При этом в качестве множества Σ берется остов коразмерности 2 разбиения Z. (Определение разбиения на простые клетки см. в разделе 3.2.)

Пусть теперь X — топологическое пространство, $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ — произвольный класс гомологий.

Предложение 5.1.1. *Для каждого n-мерного целочисленного класса сингулярных гомологий z произвольного топологического пространства X существуют ориентированное симплициальное псевдомногообразие Z и непрерывное отображение $h : Z \to X$ такие, что $h_*[Z] = z$.*

Доказательство этого предложения стандартным образом следует из определения сингулярных симплициальных гомологий. Оно позволяет нам свести задачу о реализации произвольного целочисленного класса гомологий к задаче о реализации фундаментального класса ориентированного симплициального псевдомногообразия. Применив к псевдомногообразию Z нашу конструкцию разрешения особенностей с кратностью q, мы получим ориентированное кусочно линейное многообразие N и отображение

$$\varphi : N \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X, \tag{5.1}$$

реализующее класс гомологий qz.

Таким образом, мы получаем комбинаторное конструктивное доказательство того, что каждый целочисленный класс гомологий $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$ с некоторой кратностью q может быть реализован образом фундаментального класса кусочно линейного многообразия. (В действительности, как мы увидим ниже, это многообразие обладает каноническим сглаживанием.) Это доказательство не использует теорем трансверсальности и каких бы то ни было алгебро-топологических результатов. К сожалению, при таком комбинаторном подходе нам не удается проследить за числом q: оно у нас будет существенно зависеть от комбинаторики псевдомногообразия Z, реализующего класс гомологий z, и может быть сколь угодно большим при фиксированном n.

В этой главе мы также исследуем задачу о нахождении набора $\mathcal{M}_n$ гладких n-мерных многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью всех целочисленных n-мерных классов гомологий любого пространства X. Хорошо известно, например, что существуют классы гомологий, ни с какой кратностью не реализуемые образом сферы. В 2009 году Д. Котщик и К. Лёх [95] доказали, что для большого класса многообразий, включающего в себя, в частности, все замкнутые многообразия, допускающие риманову метрику строго отрицательной кривизны, их фундаментальные классы не реализуются ни с какой кратностью никаким произведением двух многообразий положительных размерностей.

Пусть M и N — замкнутые ориентированные многообразия одной размерности. Говорят, что многообразие M *доминирует* многообразие N, если существует отображение $M \to N$ ненулевой степени; в этом случае мы будем писать $M \geqslant N$; иногда говорят, что многообразие M *виртуально доминирует* многообразие N, если некоторое конечнолистное накрытие над M доминирует N. Частичное упорядочение доминирования на множестве гомотопических классов ориентированных многообразий восходит к работам Дж. Милнора и У. Тёрстона [107] и М. Громова [86]. Из теоремы Р. Тома следует, что задача о нахождении набора $\mathcal{M}_n$, достаточного для реализации с некоторой кратностью всех n-мерных классов гомологий, эквивалентна поставленной в 1989 году Дж. Карлсоном и Д. Толедо [67] задаче о нахождении *максимального класса* многообразий относительно отношения доминирования, то есть такого класса n-мерных ориентированных многообразий, что любое n-мерное ориентированное многообразие доминируется каким-нибудь многообразием из рассматриваемого класса.

До сих пор по сути единственным результатом по задаче об отыскании максимального класса многообразий в смысле отношения доминирования при $n \geqslant 4$ являлась конструкция гиперболизации М. Дэвиса и Т. Янушкевича [75]. Эта конструкция позволяет для каждого полиэдра P строить асферический полиэдр $\widehat{P}$ и непрерывное отображение $\widehat{P} \to P$, индуцирующее эпиморфизм в гомологиях; при этом, если исходный полиэдр P был многообразием, полиэдр $\widehat{P}$ оказывается многообразием той же размерности. Из конструкции Дэвиса–Янушкевича сразу следует, что в качестве максимального класса многообразий в смысле отношения доминирования и, значит, в качестве класса $\mathcal{M}_n$, можно взять класс всех асферических многообразий. Однако этот класс слишком обширен и естественно представляет интерес задача о его уменьшении.

В центре нашей конструкции находится многообразие M^n изоспектральных вещественных симметрических трёхдиагональных $(n+1)\times(n+1)$ матриц, то есть многообразие вещественных симметрических трёхдиагональных матриц с фиксированным простым спектром $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n+1}$. К. Томеи [128] доказал, что многообразие M^n асферично и его класс диффеоморфизма не зависит от чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$. Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 5.1.2. *Пусть X — произвольное топологическое пространство и $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$ — произвольный класс его сингулярных гомологий; тогда существуют конечнолистное накрытие $\widehat{M}^n$ над многообразием изоспектральных симметрических вещественных трёхдиагональных матриц M^n и непрерывное отображение $\varphi : \widehat{M}^n \to X$ такие, что $\varphi_*\big[\widehat{M}^n\big] = qz$ для некоторого положительного целого числа q. Если пространство X линейно связно, многообразие $\widehat{M}^n$ может быть выбрано связным.*

Следствие 5.1.3. *Любое замкнутое ориентированное n-мерное многообразие доминируется некоторым конечнолистным накрытием над многообразием изоспектральных симметрических вещественных трёхдиагональных матриц M^n; таким образом, любое замкнутое ориентированное n-мерное многообразие виртуально доминируется многообразием M^n.*

Следствие 5.1.4. *Пусть Q^m — связное замкнутое гладкое многообразие, $z \in H_n(Q^m;\mathbb{Z})$, $n < \frac{m}{2}$. Тогда существует связное ориентированное* *подмногообразие* $\widehat{M}^n \subset Q^m$*, диффеоморфное конечнолистному накрытию над многообразием* M^n*, реализующее с некоторой ненулевой кратностью класс гомологий* z*.*

Теорема 5.1.2 получается практически сразу из нашей явной конструкции разрешения особенностей псевдомногообразия, склеенного из простых клеток: дело в том, что в случае, когда исходное псевдомногообразие является симплициальным, наша конструкция автоматически даёт многообразие, являющееся конечнолистным накрытием над многообразием M^n. Эта глава организована следующим образом. В разделе 5.2 мы приводим общую конструкцию разрешения особенностей (с кратностью) псевдомногообразия, склеенного из простых клеток. Разделы 5.5–5.7 содержат необходимую информацию о многообразии изоспектральных симметрических вещественных трёхдиагональных матриц M^n и его конечнолистных накрытиях. В разделах 5.8–5.10 мы в случае симплициального псевдомногообразия переизлагаем нашу конструкцию разрешения особенностей на другом, более удобном языке, в результате чего построенное многообразие автоматически оказывается конечнолистным накрытием над многообразием M^n. Слово «переизлагаем» не означает, что конструкции из раздела 5.2 и раздела 5.8 дают одно и то же многообразие. На самом деле, переизлагая конструкцию на другом языке, мы попутно упрощаем её. Таким образом, многообразие, построенное в разделе 5.2 является конечнолистным накрытием над многообразием, построенном в разделе 5.8.

Отметим одно существенное отличие нашей конструкции от конструкции гиперболизации Дэвиса–Янушкевича. В конструкции Дэвиса–Янушкевича асферический полиэдр $\widehat{P}$ становится многообразием только в том случае, когда исходный полиэдр P являлся многообразием. Наша конструкция даёт асферическое многообразие $\widehat{M}^n$ для любого исходного псевдомногообразия Z^n. Мы склеиваем многообразие $\widehat{M}^n$ из специальных простых многогранников — пермутоэдров и именно борьба за то, чтобы получившийся комплекс был многообразием, является наиболее сложным местом нашей конструкции.

При разрешении особенностей одного и того же ориентированного n-мерного псевдомногообразия могут получаться комбинаторные многообразия, представляющие разные классы в группе ориентированных кусочно линейных кобордизмов Ω_n^{SPL}. Подобное явление имеет место при разрешении особенностей алгебраических многообразий по Хиронаке. Тем не менее, в разделе 5.4 мы выясним, что наша конструкция, приводит к вполне определенному классу

$$\frac{[N]}{q} \in \Omega_n^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q} = \Omega_n^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q},$$

зависящему лишь от разбиения псевдомногообразия Z на простые клетки. Также в разделе 5.4 исследуется вопрос о классе бордизмов

$$\frac{[\varphi]}{q} \in \mathrm{SPL}_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{SO}_*(X) \otimes \mathbb{Q},$$

возникающем в результате нашей конструкции реализации циклов (5.1). Здесь через $\mathrm{SPL}_*(X)$ и $\mathrm{SO}_*(X)$ обозначены группы ориентированных кусочно линейных и гладких бордизмов пространства X соответственно.

Как мы докажем в разделе 5.4, если Z — симплициальное или кубическое разбиение, многообразие N будет представлять нулевой класс в группе $\Omega_n^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q}$, то есть его числа Понтрягина будут нулевыми. Поэтому класс

$\frac{[\varphi]}{q}$ является образом класса гомологий z при отображении

$$H_*(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta} H_*(X;\Omega_*^{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q}) \xrightarrow{\left(\mathrm{ch}^{\mathrm{SPL}}\right)^{-1}} \mathrm{SPL}_*(X)\otimes\mathbb{Q},$$

где η — гомоморфизм, индуцированный вложением $\mathbb{Z}=\Omega_0^{\mathrm{SPL}}\subset\Omega_0^{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q}$, и $\mathrm{ch}^{\mathrm{SPL}}$ — характер Чженя–Дольда в теории ориентированных кусочно линейных бордизмов.

Более интересный результат получается в следующей ситуации. Пусть $X = K$ — ориентированное m-мерное симплициальное комбинаторное многообразие и $a \in H^k(K;\mathbb{Z})$ — класс его когомологий. Предположим, что мы хотим построить многообразие N и отображение $\varphi : N \to K$, реализующее с некоторой кратностью двойственный класс гомологий $z = D(a) \in H_{m-k}(K;\mathbb{Z})$. Если класс a задан в виде симплициального коцикла, класс z автоматически представляется клеточным циклом в двойственном клеточном разбиении K^*. Таким образом, мы естественным образом получаем, что класс z представлен отображением $h : Z \to K$, где Z — ориентированное $(m-k)$-мерное псевдомногообразие, склеенное из простых клеток, и h отображает каждую простую клетку псевдомногообразия Z изоморфно на некоторую простую клетку разбиения K^*. Применив к псевдомногообразию Z нашу конструкцию разрешения особенностей с кратностью, мы получим многообразие N и отображение $\varphi : N \to K$ такие, что рациональные классы Понтрягина многообразия N совпадают с образами рациональных классов Понтрягина многообразия K при отображении φ^*. Поэтому класс $\frac{[\varphi]}{q}$ будет образом класса гомологий z при отображении

$$H_*(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{D} H^*(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta} H^*(X;\Omega^*_{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}_{\mathrm{SPL}}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}_{\mathrm{SPL}}} \mathrm{SPL}^*(X)\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow{D^{-1}_{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q}} \mathrm{SPL}_*(X)\otimes\mathbb{Q},$$

где η — гомоморфизм, индуцированный вложением $\mathbb{Z} = \Omega^0_{\mathrm{SPL}} \subset \Omega^0_{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q}$, D и D_{SPL} — операторы двойственности Пуанкаре в когомологиях и в ориентированных кусочно линейных кобордизмах соответственно и $\mathrm{ch}_{\mathrm{SPL}}$ — характер Чженя–Дольда в теории ориентированных кусочно линейных кобордизмов.

5.2 Разрешение особенностей псевдомногообразия

В этом пункте мы для каждого ориентированного n-мерного псевдомногообразия Z, разбитого на простые клетки, явно построим кубически клеточное комбинаторное многообразие N и кусочно гладкое отображение $g : N \to Z$, такие что

1) ограничение отображения g на множество $g^{-1}(Z\setminus\Sigma)$ есть конечнолистное накрытие

$$g^{-1}(Z\setminus\Sigma) \to Z\setminus\Sigma,$$

где Σ — остов коразмерности 2 разбиения Z;

2) $\dim g^{-1}(\Sigma) = n-1$.

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — все n-мерные клетки псевдомногообразия Z. Рассмотрим двойственные им ориентированные $(n-1)$-мерные комбинаторные сферы $Y_i = L_{P_i}$. Обозначим через f_i вложение

$$\mathrm{cone}(Y_i') = P_i \subset Z;$$

Для каждого симплекса σ комплекса Y_i положим $z(\sigma) = f_i(b(\sigma))$, где $b(\sigma)$ — барицентр симплекса σ. Положим,

$$Y = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \ldots \sqcup Y_k.$$

Так же, как в главе 4, мы будем обозначать через U множество $(n-1)$-мерных симплексов комбинаторного многообразия Y'. Симплексы $u \in U$ находятся во взаимно однозначном соответствии с последовательностями $\sigma^0 \subset \sigma^1 \subset \ldots \subset \sigma^{n-1}$ симплексов комплекса Y. Пусть u — симплекс комбинаторной сферы Y_i', соответствующий последовательности $\sigma^0 \subset \sigma^1 \subset \ldots \subset \sigma^{n-1}$. Введем обозначения

$$b_j(u) = b(\sigma^{j-1}), \qquad z_j(u) = z(\sigma^{j-1}) = f_i(b_j(u)), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда $b_1(u), b_2(u), \ldots, b_n(u)$ — вершины симплекса u. Обозначим через $z_0(u)$ барицентр простой клетки $P_i \subset Z$. Несложно проверить, что каждая точка $z_j(u)$ является барицентром $(n-j)$-мерной клетки $F_j(u)$ разбиения Z, причем

$$F_n(u) \subset F_{n-1}(u) \subset \ldots \subset F_0(u) = P_i.$$

Рассмотрим процесс склейки псевдомногообразия Z из простых клеток P_i. Он выглядит следующим образом: гиперграни клеток $P_1, P_2, \ldots, P_k$ разбиваются на пары и в каждой паре склеиваются вдоль некоторого обращающего ориентацию изоморфизма. Переходя к двойственным объектам, мы получаем инволюцию $\lambda : y \mapsto \tilde{y}$ на множестве $\mathrm{Vert}(Y)$ и набор обращающих ориентацию изоморфизмов $\chi_y : \operatorname{star} y \to \operatorname{star} \tilde{y}$, таких что $\chi_{\tilde{y}} = \chi_y^{-1}$. Применим к комбинаторному многообразию Y конструкцию из раздела 4.5. Эта конструкция дает нам однородный граф Γ степени $2n$, такой что $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ — кубически клеточное комбинаторное многообразие, удовлетворяющее требованиям теоремы 4.1.8. (Псевдомногообразие $\mathbf{Q}$ является комбинаторным многообразием, так как линки всех его вершин являются комбинаторными сферами.) Сейчас нам будет удобно не переходить к большим кубам и работать с кубически клеточным комбинаторным многообразием $N = \mathbf{Q}(\Gamma)$. Напомним, что многообразие N имеет вид

$$N = (U \times \mathcal{B} \times S \times [0,1]^n)/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями

$$(u, \nu, s, \mathbf{t}) \sim (\Phi_j^0(u, \nu, s), \mathbf{t}), \text{ если } t_j = 0;$$
$$(u, \nu, s, \mathbf{t}) \sim (\Phi_j^1(u, \nu, s), \mathbf{t}), \text{ если } t_j = 1.$$

Здесь $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — точка куба $[0,1]^n$.

Конечные множества $\mathcal{B}$ и S и инволюции

$$\Phi_j^e : U \times \mathcal{B} \times S \to U \times \mathcal{B} \times S$$

были описаны в разделе 4.5. Инволюции Φ_j^0 имеют вид

$$\Phi_j^0(u, \nu, s) = (\Phi_j(u), \nu, s).$$

Непосредственно из определения инволюций Φ_j следует, что $b_l(\Phi_j(u)) = b_l(u)$ при $l \neq j$. Кроме того, симплексы u и $\Phi_j(u)$ лежат в одной компоненте связности комбинаторного многообразия Y'. Следовательно, $z_l(\Phi_j(u)) = z_l(u)$ при $0 \leqslant l \leqslant n,\ l \neq j$. Нам понадобится следующее свойство инволюций Φ_j^1. Его доказательство мы отложим до раздела 5.3.

Предложение 5.2.1. *Если* $\Phi_j^1(u_1, \nu_1, s_1) = (u_2, \nu_2, s_2)$, *то* $z_l(u_1) = z_l(u_2)$ *при* $l \geqslant j$.

Если $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — вершины некоторого симплекса ρ комплекса Z' и $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — неотрицательные вещественные числа, такие что $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, мы будем использовать обозначение

$$\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n$$

для точки симплекса ρ с барицентрическими координатами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\mathbf{t}) &= (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)\ldots(1-t_n);\\
\alpha_1(\mathbf{t}) &= t_1(1-t_2)(1-t_3)\ldots(1-t_n);\\
\alpha_2(\mathbf{t}) &= t_2(1-t_3)\ldots(1-t_n);\\
&\ldots\\
\alpha_{n-1}(\mathbf{t}) &= t_{n-1}(1-t_n);\\
\alpha_n(\mathbf{t}) &= t_n.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\alpha_0(\mathbf{t}) + \alpha_1(\mathbf{t}) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{t}) = 1.$$

Определим отображение

$$\underline{g} : U \times \mathcal{B} \times S \times [0,1]^n \to Z$$

по формуле

$$\underline{g}(u, \nu, s, \mathbf{t}) = \alpha_0(\mathbf{t}) z_0(u) + \alpha_1(\mathbf{t}) z_1(u) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{t}) z_n(u).$$

Предложение 5.2.2. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}
\underline{g}(u, \nu, s, \mathbf{t}) &= \underline{g}(\Phi_j^0(u, \nu, s), \mathbf{t}), \ \text{\textit{если}}\ t_j = 0;\\
\underline{g}(u, \nu, s, \mathbf{t}) &= \underline{g}(\Phi_j^1(u, \nu, s), \mathbf{t}), \ \text{\textit{если}}\ t_j = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\underline{g}$ индуцирует корректно определенное отображение $g : N \to Z$.

Доказательство. Первое равенство следует из того, что $z_l(\Phi_j(u)) = z_l(u)$ при $l \neq j$ и $\alpha_j(\mathbf{t}) = 0$, если $t_j = 0$. Второе равенство следует из предложения 5.2.1, потому что $\alpha_l(\mathbf{t}) = 0$, если $t_j = 1$ и $l < j$. □

Обозначим через H объединение гиперграней $\{t_j = 1\}$, $j = 2, 3, \ldots, n$, куба $[0,1]^n$; обозначим через $\Xi \subset N$ образ множества $U \times \mathcal{B} \times S \times H$ при отображении факторизации

$$U \times \mathcal{B} \times S \times [0,1]^n \to N.$$

Очевидно, что $\Xi = g^{-1}(\Sigma)$ и $\dim \Xi = n - 1$. То, что отображение

$$g|_{N \setminus \Xi} : N \setminus \Xi \to Z \setminus \Sigma$$

является накрытием, легко следует из того, что система уравнений

$$\alpha_j(\mathbf{t}) = \beta_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ — неотрицательные вещественные числа с суммой 1, однозначно разрешима, если $\beta_0 \neq 0$ или $\beta_1 \neq 0$.

Замечание 5.2.3. Комплекс N является каноническим подразделением кубически клеточного комбинаторного многообразия $\mathbf{Q}$ (см. раздел 4.4). Рассмотрим двойственное разбиение $\mathbf{Q}^*$. Клетка Q разбиения $\mathbf{Q}^*$, двойственная вершине x комплекса $\mathbf{Q}$, есть объединение всех замкнутых кубов разбиения N, содержащих вершину x. Если $\operatorname{link} x \cong Y_i'$, то Q — простая клетка, двойственная комбинаторной сфере Y_i'. Отображение g отображает простую клетку Q на простую клетку P_i. При этом g взаимно однозначно на внутренности клетки Q и на внутренностях гиперграней клетки Q, двойственных тем вершинам $y \in Y_i'$, которые являются вершинами комплекса Y_i. Остальные гиперграни простой клетки Q отображение g «схлопывает» на грани клетки P_i меньшей размерности. Пусть F — грань клетки Q, двойственная симплексу τ комбинаторной сферы Y_i'. Возможны два варианта.

1) Симплекс τ не содержится ни в каком симплексе σ комплекса Y_i таком, что $\dim\sigma = \dim\tau$. Тогда линк симплекса τ обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Значит, грань F тоже обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Несложно проверить, что каждую такую грань F отображение g переводит в грань меньшей размерности.

2) Симплекс τ содержится в некотором симплексе σ комплекса Y_i таком, что $\dim\sigma = \dim\tau$. Пусть E — грань клетки P_i, двойственная симплексу σ. Тогда g отображает клетку F на клетку E, так что внутренность клетки F отображается гомеоморфно на внутренность клетки E. Отметим, что комбинаторная сфера $\operatorname{link}_{Y_i'}\tau$, двойственная клетке F, изоморфна барицентрическому подразделению комбинаторной сферы $\operatorname{link}_{Y_i}\sigma$, двойственной клетке E.

5.3 Доказательство предложения 5.2.1

Мы будем пользоваться всеми обозначениями раздела 4.5. Единственным отличием будет то, что сейчас мы рассматриваем множество S и инволюции Φ_j^e, построенные по комбинаторному многообразию $\overline{Y} = Y \times \mathcal{B}$, а не по Y. В частности, граф G будет графом на множестве вершин $\overline{W} = W \times \mathcal{B}$, а не W. Мы будем использовать обозначение π для проекции $W \times \mathcal{B} \to W$. Положим, $\bar{z} = z \circ \pi$. Как было отмечено в 4.5, для двух симплексов ρ_1 и

ρ_2 комплекса $\overline{Y}$ может существовать не более одного обращающего ориентацию изоморфизма $\operatorname{star}\rho_1 \to \operatorname{star}\rho_2$, сохраняющего метки вершин. Если такой изоморфизм существует, мы будем обозначать его через ω_{ρ_1,ρ_2}. В частности, если $\bar{y} = (y, \nu)$ — вершина комплекса $\overline{Y}$, то $\omega_{\bar{y},\tilde{\bar{y}}} = \overline{\chi}_{\bar{y}}$ — обращающий ориентацию изоморфизм, индуцированный обращающим ориентацию изоморфизмом χ_y.

Из определения изоморфизмов χ_y сразу следует, что $z(\chi_y(\sigma)) = z(\sigma)$ для любого симплекса $\sigma \in W$, содержащего вершину y. Значит, $\bar{z}(\overline{\chi}_{\bar{y}}(\sigma)) = \bar{z}(\sigma)$ для любого симплекса $\sigma \in \overline{W}$, содержащего вершину $\bar{y}$. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \overline{W}$ — два симплекса, соединенных ребром в графе G. Тогда существует вершина $\bar{y} \in \rho_1$, такая что $\overline{\chi}_{\bar{y}}(\rho_1) = \rho_2$. Изоморфизм ω_{ρ_1,ρ_2} является ограничением изоморфизма $\overline{\chi}_{\bar{y}}$ на подкомплекс $\operatorname{star}\rho_1 \subset \operatorname{star}\bar{y}$. Поэтому $\bar{z}(\omega_{\rho_1,\rho_2}(\sigma)) = \bar{z}(\sigma)$ для любого симплекса $\sigma \supset \rho_1$. Следовательно, это же равенство $\bar{z}(\omega_{\rho_1,\rho_2}(\sigma)) = \bar{z}(\sigma)$ имеет место для любых симплексов ρ_1, ρ_2, лежащих в разных долях одной компоненты связности графа G, и любого симплекса $\sigma \supset \rho_1$. Значит, $\bar{z}(\Lambda_c(\sigma)) = \bar{z}(\sigma)$ для любых $\Lambda \in P$, $c \subset \mathcal{C}$, таких что $c(\sigma) \supset c$.

Пусть $\sigma_i^0 \subset \sigma_i^1 \subset \ldots \subset \sigma_i^{n-1}$, $i = 1, 2,$ — последовательности симплексов комплекса $\overline{Y}$, соответствующие симплексам (u_i, ν_i) комплекса $\overline{Y}'$. Положим, $c = c(\sigma_1^{j-1})$. Тогда $\sigma_2^{l-1} = \Lambda_c(\sigma_1^{l-1})$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, при $l \geqslant j$, получаем $\bar{z}(\sigma_2^{l-1}) = \bar{z}(\sigma_1^{l-1})$, что доказывает предложение 5.2.1.

5.4 Класс бордизмов реализующего многообразия

Теорема 5.4.1. *Пусть Z — ориентированное n-мерное псевдомногообразие, разбитое на простые клетки, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — все его n-мерные клетки; Y_i — ориентированная комбинаторная сфера, двойственная простой клетке P_i. Пусть N — многообразие, построенное в разделе 5.2, q — число листов накрытия $N \setminus \Xi \to Z \setminus \Sigma$. Тогда*

$$\frac{[N]}{q} = (\partial_* \otimes \mathbb{Q})^{-1}[\langle Y_1 \rangle + \langle Y_2 \rangle + \ldots + \langle Y_k \rangle],$$

где $\partial_* \otimes \mathbb{Q} : \Omega_n^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q} \to H_*(\mathcal{T}_*) \otimes \mathbb{Q}$ — изоморфизм из теоремы 1.1.7.

Доказательство. Рассмотрим симплициальное комбинаторное многообразие N'. Набор линков его вершин состоит из набора $Y_1'', Y_2'', \ldots, Y_k''$, взятого q раз, и некоторого набора комбинаторных сфер, каждая из которых обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Значит,

$$2\partial\langle N' \rangle = 2q \sum_{i=1}^{k} \langle Y_i'' \rangle$$

в группе $\mathcal{T}_n$. Из предложения 1.1.5 следует, что циклы

$$2\sum_{i=1}^{k} \langle Y_i'' \rangle \qquad \text{и} \qquad 2\sum_{i=1}^{k} \langle Y_i \rangle$$

представляют одинаковые классы гомологий в группе $H_n(\mathcal{T}_*)$. □

Следствие 5.4.2. *Если Z — симплициальное псевдомногообразие, то $[N] \in \Omega_n^{\mathrm{SPL}}$ — элемент конечного порядка, то есть все числа Понтрягина многообразия N тривиальны.*

В действительности, если Z — симплициальное псевдомногообразие, не только все числа Понтрягина, но и все рациональные классы Понтрягина многообразия N тривиальны. Из конструкции многообразия N следует, что линки всех симплексов симплициального комбинаторного многообразия N' обладают автоморфизмами, обращающими ориентацию. Из этого факта сразу следует тривиальность рациональных классов Понтрягина, так как они задаются универсальными локальными формулами (1.3). (Впервые утверждение о тривиальности рациональных классов Понтрягина симплициального комбинаторного многообразия, в котором линки всех симплексов обладают обращающими ориентацию автоморфизмами, было строго доказано Н. Левиттом и К. Рурком [98].)

Следствие 5.4.3. *Пусть X — топологическое пространство, z — целочисленный класс его гомологий, $h : Z \to X$ — непрерывное отображение ориентированного симплициального псевдомногообразия, реализующее класс z, $g : N \to Z$ — разрешение особенностей с кратностью q, построенное в разделе 5.2. Тогда для сквозного отображения $\varphi = h \circ g$ элемент $\frac{[\varphi]}{q} \in \mathrm{SPL}_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ равен образу класса z при сквозном отображении*

$$H_*(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(X;\Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\left(\mathrm{ch}^{\mathrm{SPL}}\right)^{-1}} \mathrm{SPL}_*(X) \otimes \mathbb{Q},$$

Пусть теперь K — ориентированное m-мерное симплициальное комбинаторное многообразие, $c \in C^{m-n}(K;\mathbb{Z})$ — симплициальный коцикл. Двойственный ему цикл ξ лежит в группе $C_n(K^*;\mathbb{Z})$ клеточных цепей разбиения K^*. Предположим, что мы хотим реализовать класс гомологий, кратный классу $[\xi]$, как образ фундаментального класса многообразия. Конечно, мы легко можем заменить цикл ξ на гомологичный ему симплициальный цикл в группе $C_n(K';\mathbb{Z})$ и таким образом свести задачу к реализации сингулярного симплициального цикла. Более интересные результаты получаются, если рассматривать цикл ξ как цикл, состоящий из простых клеток разбиения K^*.

Итак, цикл ξ может быть представлен как образ фундаментального цикла псевдомногообразия Z, разбитого на простые клетки, при отображении $h : Z \to K$, которое отображает каждую клетку разбиения Z изоморфно на некоторую клетку разбиения K^*. Разрешим особенности псевдомногообразия Z при помощи конструкции, описанной в разделе 5.2. Образ фундаментального класса многообразия N при сквозном отображении

$$\varphi : N \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} K$$

равен классу $q[\xi]$, где q — число листов накрытия $N \setminus \Xi \to Z \setminus \Sigma$.

Предложение 5.4.4. *Отображение φ^* переводит рациональные классы Понтрягина многообразия K в рациональные классы Понтрягина многообразия N.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{T}^{4i}(\mathbb{Q})$ — универсальная локальная формула для i-ого рационального класса Понтрягина. Из предложения 1.2.5 следует, что для любого натурального k коцикл $(\beta^*)^k(f)$ также является локальной формулой для i-ого класса Понтрягина. Нас будет интересовать случай $k = 2$. Мы получаем, что класс $p_i(K)$ можно представить клеточной коцепью $\alpha \in C^{4i}(K^*; \mathbb{Q})$, значение которой на каждой ориентированной $4i$-мерной простой клетке P разбиения K^* равно $f(\langle L''_P \rangle)$, где так же, как в главе 3, мы обозначаем через L_P комбинаторную сферу, двойственную клетке P.

Пусть $\mathbf{Q}$ — кубически клеточный комплекс, получаемый из N после перехода к большим кубам (см. раздел 4.4). Очевидно, что кубическая цепь, в которую каждый $(n-4i)$-мерный куб σ комплекса $\mathbf{Q}$ входит с коэффициентом $f((\operatorname{link}_{\mathbf{Q}}\sigma)')$ гомологична симплициальной цепи $f_\sharp(\mathbf{Q}')$ и, значит, представляет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре классу $p_i(N)$. Следовательно, класс $p_i(N)$ можно представить клеточной коцепью $\gamma\in C^{4i}(\mathbf{Q}^*;\mathbb{Q})$, значение которой на каждой ориентированной $4i$-мерной простой клетке Q разбиения $\mathbf{Q}^*$ равно $f(\langle L'_Q\rangle)$.

Рассмотрим $4i$-мерную клетку Q комплекса $\mathbf{Q}^*$. Возможны 2 случая (см. замечание 5.2.3).

1) $\dim\varphi(Q)<4l$ и клетка Q обладает обращающим ориентацию автоморфизмом; тогда $\gamma(Q)=0$ и $\alpha(\varphi(Q))=0$.

2) Отображение φ отображает клетку Q на некоторую $4i$-мерную клетку P разбиения K^* так, что внутренность клетки Q отображается гомеоморфно на внутренность клетки P; тогда $L_Q\cong L'_P$, значит, $\gamma(Q)=\alpha(P)$.

Таким образом, обратный образ коцепи α при отображении g равен γ. Значит, $\varphi^*(p_i(K))=p_i(N)$. □

Следствие 5.4.5. *Элемент* $\frac{[\varphi]}{q}\in\mathrm{SPL}_*(X)\otimes\mathbb{Q}$ *равен образу класса* z *при сквозном отображении*

$$H_*(X;\mathbb{Z})\xrightarrow{D}H^*(X;\mathbb{Z})\to H^*(X;\Omega^*_{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q})\xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}_{\mathrm{SPL}}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}_{\mathrm{SPL}}}\mathrm{SPL}^*(X)\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{D^{-1}_{\mathrm{SPL}}\otimes\mathbb{Q}}\mathrm{SPL}_*(X)\otimes\mathbb{Q}. \quad (5.2)$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что естественный гомоморфизм $\mathrm{SPL}^*(X)\otimes\mathbb{Q}\to\mathrm{SO}^*(X)\otimes\mathbb{Q}$ является изоморфизмом и при этом изоморфизме характер Чженя–Дольда $\mathrm{ch}_{\mathrm{SPL}}$ отождествляется с более привычным характером Чженя–Дольда $\mathrm{ch}_{\mathrm{SO}}$ в теории ориентированных гладких кобордизмов.

Рассмотрим стабильную когомотопическую группу

$$\pi^j(K) = \varinjlim \left[\Sigma^r K^+, S^{r+j}\right]$$

многообразия K. По теореме Ж.-П. Серра [121], имеется естественный изоморфизм $H^*(K;\mathbb{Q}) \cong \pi^*(K) \otimes \mathbb{Q}$. Согласно конструкции В. М. Бухштабера [3], отображение $\mathrm{ch}_{\mathrm{SO}}^{-1}$, обратное характеру Чженя–Дольда в теории ориентированных кобордизмов, представляется в виде композиции

$$H^*(K;\Omega^*_{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \pi^*(K) \otimes \Omega^*_{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{H\otimes\mathbb{Q}} \mathrm{SO}^*(K) \otimes \mathbb{Q},$$

где $H : \pi^*(K) \otimes \Omega^*_{\mathrm{SO}} \to \mathrm{SO}^*(K)$ — гомоморфизм Гуревича, переводящий элемент (a, α), $a \in \pi^j(K)$, $\alpha \in \Omega^{-l}_{\mathrm{SO}}$, в образ элемента α при гомоморфизме

$$\Omega^{-l}_{\mathrm{SO}} \cong \widetilde{\mathrm{SO}}^{r+j-l}(S^{r+j}) \xrightarrow{a^*} \widetilde{\mathrm{SO}}^{r+j-l}(\Sigma^r K^+) \cong \mathrm{SO}^{j-l}(K).$$

(То же верно с заменой SO на SPL.)

Пусть x — образ класса z при сквозном отображении (5.2). Тогда

$$x \in (D^{-1}_{\mathrm{SPL}} \circ H)(\pi^*(K) \otimes \mathbb{Q}).$$

Значит, для некоторого натурального l и некоторого $a \in \pi^{m-n}(K)$ имеем $lx = (D^{-1}_{\mathrm{SPL}} \circ H)(a, 1)$. Рассмотрим класс кобордизмов

$$\gamma \in \widetilde{\mathrm{SPL}}^{r+m-n}(\Sigma^r K^+) = \mathrm{SPL}^{r+m-n}(K \times D^r, K \times S^{r-1}),$$

являющийся образом фундаментального класса сферы S^{r+j} при отображении a^*, и двойственный ему по Пуанкаре-Лефшецу класс бордизмов $y \in \mathrm{SPL}_n(K \times D^r)$. Очевидно, что класс y переходит в класс lx при естественном изоморфизме $\mathrm{SPL}_n(K \times D^r) \to \mathrm{SPL}_n(K)$. Класс y представляется подмногообразием в $K \times D^r$ с тривиальным нормальным расслоением —

трансверсальным прообразом точки при отображении из гомотопического класса a. Таким образом, класс $lx \in \mathrm{SPL}_n(K)$ представляется отображением $\varkappa : R \to K$, таким что R — ориентированное замкнутое кусочно линейное многообразие и $\varkappa^*(p_i(K)) = p_i(R)$ для всех i; при этом $\varkappa_*[R] = lz$.

С другой стороны, класс $[\varphi] \in \mathrm{SPL}_n(K)$ представляется отображением $\varphi : N \to K$, таким что $\varphi^*(p_i(K)) = p_i(N)$ для всех i; при этом $\varphi_*[N] = qz$. Нам нужно доказать, что $\frac{[\varphi]}{q} = \frac{[\varkappa]}{l}$ в группе $\mathrm{SPL}_n(K) \otimes \mathbb{Q}$. Воспользуемся тем, что элемент группы $\mathrm{SPL}_n(K) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{SO}_n(K) \otimes \mathbb{Q}$ однозначно характеризуется своими числами Понтрягина (см. [30]). Напомним, что числа Понтрягина отображения $\varphi : N \to K$ нумеруются парами (ω, b), где ω — разбиение некоторого числа $m < \frac{n}{4}$ и $b \in H^{n-4m}(X;\mathbb{Z})$; при этом число Понтрягина, соответствующее паре (ω, b) равно $\langle p_\omega(N)\varphi^* b, [N]\rangle$. Имеем,

$$\frac{1}{q}\langle p_\omega(N)\varphi^* b, [N]\rangle = \langle p_\omega(K) b, z\rangle = \frac{1}{l}\langle p_\omega(R)\varkappa^* b, [R]\rangle,$$

значит, числа Понтрягина элементов $\frac{[\varphi]}{q}$ и $\frac{[\varkappa]}{l}$ совпадают, следовательно, $\frac{[\varphi]}{q} = \frac{[\varkappa]}{l} = x$. $\square$

5.5 Малые накрытия

Понятие *малого накрытия* над простым многогранником было введено в 1991 году М. Дэвисом и Т. Янушкевичем [74]. Малые накрытия являются вещественными аналогами так называемых квазиторических многообразий (см. [74], [8]). *Малым накрытием* над простым многогранником P^n называется гладкое многообразие M^n с локально стандартным действием группы $\mathbf{Z}_2^n$, такое что $M^n/\mathbf{Z}_2^n$ диффеоморфно многограннику P^n как гладкое многообразие с углами. (Действие называется *локально стандартным*, если локально оно моделируется стандартным действием группы $\mathbf{Z}_2^n$ отражениями на $\mathbb{R}^n$.) М. Дэвис и Т. Янушкевич [74] доказали, что каждое малое накрытие получается с помощью некоторой стандартной конструкции. В этом пункте мы изложим эту конструкцию Дэвиса–Янушкевича.

Рассмотрим n-мерный простой многогранник P^n с m гипергранями $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — образующие группы $\mathbf{Z}_2^m$. *Характеристической функцией* называется произвольный гомоморфизм $\lambda : \mathbf{Z}_2^m \to \mathbf{Z}_2^n$ такой, что элементы $\lambda(a_{i_1}), \lambda(a_{i_2}), \ldots, \lambda(a_{i_k})$ линейно независимы всякий раз, когда пересечение $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_k}$ непусто. Пусть F — грань многогранника P^n, являющаяся пересечением гиперграней $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_k}$. Обозначим через $G(F) \subset \mathbf{Z}_2^n$ подгруппу, порождённую элементами $\lambda(a_{i_1}), \lambda(a_{i_2}), \ldots, \lambda(a_{i_k})$. Для каждой точки $x \in P^n$ обозначим через $F(x)$ единственную грань многогранника P^n, содержащую точку x в своей относительной внутренности. Положим

$$M^n(P^n, \lambda) = (P^n \times \mathbf{Z}_2^n)/\sim, \tag{5.3}$$

где $(x, g) \sim (x', g')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $g^{-1}g' \in G(F(x))$. Будем обозначать класс эквивалентности пары (g, x) через $[g, x]$.

Определённое таким образом пространство $M^n(P^n, \lambda)$ действительно является многообразием, так как в окрестности точки $[g, x]$, такой что $\operatorname{codim} F(x) = k$ оно локально гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, разбитому стандартным образом на 2^k «углов» вида $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k_+$. Группа $\mathbf{Z}_2^n$ действует на многообразии $M^n(P^n, \lambda)$ по формуле $g'[g, x] = [g'g, x]$. При этом $M^n(P^n, \lambda)/\mathbf{Z}_2^n = P^n$. Многообразие $M^n(P^n, \lambda)$ обладает канонической (с точностью до изотопии) $\mathbf{Z}_2^n$-инвариантной гладкой структурой (см. [71], [74]).

Формула (5.3) задаёт клеточное разбиение многообразия $M^n(P^n, \lambda)$, все n-мерные клетки которого изоморфны многограннику P^n. Двойственное ему клеточное разбиение есть кубически клеточное комбинаторное многообразие, линк каждой вершины которого изоморфен комплексу L, где L — граница симплициального многогранника, двойственного многограннику P^n.

Важнейшим специальным случаем малых накрытий являются так называемые *малые накрытия, индуцированные из линейной модели*, также введённые М. Дэвисом и Т. Янушкевичем [74].

Пусть $\mathcal{F}$ — множество гиперграней многогранника P^n. Предположим, что нам задана *правильная раскраска* гиперграней многогранника P^n в цвета из множества $[n]$, то есть функция $c : \mathcal{F} \to [n]$, такая что для любой вершины v многогранника P^n значения $c(F_1), c(F_2), \ldots, c(F_n)$ попарно различны, где $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — гиперграни, сходящиеся в вершине v. Отметим, что если такая функция c существует, она единственна с точностью до перестановки цветов. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — стандартные образующие группы $\mathbf{Z}_2^n$. Правильная раскраска c задаёт характеристическую функцию λ_c по формуле $\lambda_c(a_i) = r_{c(F_i)}$. Малое накрытие $M^n(P^n, \lambda_c)$ называется *малым накрытием, индуцированным из линейной модели.* С точностью до диффеоморфизма оно не зависит от выбора правильной раскраски гиперграней многогранника P^n в n цветов. Мы будем обозначать его просто через $M^n(P^n)$. Отметим однако, что малые накрытия, индуцированные из линейной модели, существует только над теми многогранниками, которые допускают правильную раскраску гиперграней в n цветов.

Для каждого подмножества $C \subset [n]$, мы будем обозначать через $\mathbf{Z}_2^C$ подгруппу группы $\mathbf{Z}_2^n$, порождённую всеми образующими r_i, такими что $i \in C$. Тогда для характеристической функции λ_c мы имеем $G(F) = \mathbf{Z}_2^{C(F)}$ для любой грани F многогранника P^n. Здесь $C(F)$ — множество цветов гиперграней, содержащих грань F. Несложно проверить, что $|C(F)| = \operatorname{codim} F$. В частности, $C(v) = [n]$ для любой вершины v многогранника P^n и $C(P^n) = \varnothing$.

Для каждого элемента $g \in \mathbf{Z}_2^n$ определим вложение $\iota_g : P^n \to M^n(P^n)$ по формуле $\iota_g(x) = [g, x]$. Образы многогранника P^n и его граней при отображениях ι_g задают клеточное разбиение многообразия $M^n(P^n)$. В частности, n-мерными клетками этого разбиения являются клетки $Q_g = \iota_g(P^n)$. Число таких клеток равно 2^n. Многообразие $M^n(P^n)$ ориентируемо. Его ориентация задаётся следующим образом. Сначала фиксируем какую-либо ориентацию на многограннике P^n. Пусть $\eta : \mathbf{Z}_2^n \to \mathbf{Z}_2$ — гомоморфизм, переводящий каждую образующую r_i в образующую -1 группы $\mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$. Наделим n-мерную клетку Q_g ориентацией так, чтобы вложение ι_g сохраняло ориентацию, если $\eta(g) = 1$, и обращало ориентацию, если $\eta(g) = -1$. Несложно проверить, что введённые таким образом ориентации на n-мерных клетках разбиения многообразия $M^n(P^n)$ согласованны.

Грани разбиения $M^n(P^n)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (F, Y), такими что F — грань многогранника P^n и Y — смежный класс группы $\mathbf{Z}_2^n$ по подгруппе $\mathbf{Z}_2^{C(F)}$. Грань, соответствующая паре (F, Y), состоит из всех точек $[g, x]$, где $g \in Y$, $x \in F$. Мы будем обозначать эту грань через $Q_{F,Y}$ или $Q_{B,Y}$, где B — множество всех гиперграней многогранника P^n, содержащих грань F. В частности,

$Q_{P^n,\{g\}} = Q_{\varnothing,\{g\}} = Q_g.$

Замечание 5.5.1. Отметим, что отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями $(g, x) \equiv (r_i g, x)$, если существует гипергрань $F \in \mathcal{F}$ такая, что $x \in F$ и $c(F) = i$.

5.6 Многообразие изоспектральных трёхдиагональных матриц

Пермутоэдром размерности n названется выпуклая оболочка точек, получающихся при помощи всевозможных перестановок координат точки $(1, 2, \ldots, n+1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Это n-мерный простой выпуклый многогранник Π^n, лежащий в гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Описание граней пермутоэдра Π^n может быть найдено, например, в [128], [132]. Его гиперграни находятся во взаимно однозначном соответствии с непустыми собственными подмножествами множества $[n+1]$. Гипергрань F_ω, соответствующая подмножеству ω, задаётся уравнением

$$\sum_{i \in \omega} t_i = \frac{|\omega|(2n - |\omega| + 3)}{2}.$$

Правильная раскраска гиперграней пермутоэдра задаётся по формуле $c(F_\omega) = |\omega|$. Рассмотрим малое накрытие $M^n(\Pi^n)$ над пермутоэдром Π^n, индуцированное из линейной модели. Оно было исследовано К. Томеи [128] до появления работы [74] и, по-видимому, послужило одной из мотиваций для общей конструкции малых накрытий, описанной в предыдущем разделе. На самом деле К. Томеи изучал многообразие изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных матриц и построил его разбиение, изоморфное разбиению $M^n(\Pi^n)$. Сформулируем более детально этот результат.

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n+1}$ — произвольные действительные числа. Обозначим через $M^n_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}}$ множество всех симметрических трёхдиагональных вещественных матриц размера $(n+1)\times(n+1)$ с собственными значениями $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}$. Множество $M^n_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}}$ является гладким n-мерным подмногообразием в пространстве всех матриц. Для каждой последовательности $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n+1}$, $\sigma_i = \pm 1$, обозначим через $M^{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}} \subset M^n_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}}$ подмножество, состоящее из всех матриц $A = (a_{ij})$, таких что $\sigma_i a_{i,i+1} \geqslant 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. В работе [128] К. Томеи доказал следующие утверждения.

1. Каждое множество $M^{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}}$ диффеоморфно пермутоэдру как гладкое многообразие с углами. (К. Томеи не использовал термина «многообразие с углами», но его результат по сути означает именно это.)

2. Разбиение многообразия $M^n_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}}$ на 2^n множеств $M^{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}}$ изоморфно описанному выше разбиению многообразия $M^n(\Pi^n)$ на 2^n пермутоэдров Π^n. Этот изоморфизм задаёт диффеоморфизм
$$M^n_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}} \approx M^n(\Pi^n).$$

3. Для двух разных наборов вещественных чисел $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n+1}$ и $\lambda'_1 > \lambda'_2 > \ldots > \lambda'_{n+1}$ многообразия $M^n_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}}$ и $M^n_{\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_{n+1}}$ диффеоморфны.

Взяв каноническое кубическое подразделение всех пермутоэдров в разбиении многообразия $M^n(\Pi^n)$, можно получить кубическое разбиение этого многообразия. Его описание, приводимое ниже, принадлежит М. Дэвису [72]. Склеивая многообразие $M^n(\Pi^n)$ из кубов, получаем его представление в виде

$$M^n(\Pi^n) = (S_{n+1} \times \mathbf{Z}_2^n \times [0,1]^n)/\sim, \tag{5.4}$$

где S_{n+1} — симметрическая группа со стандартными образующими $s_1, \dots, s_n$, $\mathbf{Z}_2^n$ — прямое произведение циклических групп порядка 2 с образующими $r_1, \dots, r_n$ и отношение эквивалентности $\sim$ устроено следующим образом: $(\nu, g, x) \sim (\nu', g', x')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$, элемент $\nu^{-1}\nu'$ лежит в подгруппе группы S_{n+1}, порождённой элементами $s_i \in S(x)$, и $g^{-1}g' \in \mathbf{Z}_2^{R(x)}$. Здесь $R(x) \subset R$ есть подмножество, состоящее из всех образующих r_i, таких что точка x лежит в гиперграни $t_i = 0$, и $S(x) \subset S$ есть подмножество, состоящее из всех образующих s_i, таких что точка x лежит в гиперграни $t_i = 1$. Отметим, что для каждого i либо $r_i \notin R(x)$, либо $s_i \notin S(x)$.

Такое кубическое разбиение многообразия $M^n(\Pi^n)$ удобно для описания его универсальной накрывающей. Определим вначале одну вспомогательную бесконечную группу Кокстера W (определение групп Кокстера см., например, в [1]). Группа W задаётся образующими

$$s_1, s_2, \dots, s_n, r_1, r_2, \dots, r_n$$

и соотношениями

$$\begin{aligned}
&s_i^2 = 1, && i = 1, 2, \dots, n;\\
&s_i s_j = s_j s_i, && |i-j| \geqslant 2;\\
&s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, && i = 1, 2, \dots, n-1;\\
&r_i^2 = 1, && i = 1, 2, \dots, n;\\
&r_i r_j = r_j r_i, && i, j = 1, 2, \dots, n;\\
&s_i r_j = r_j s_i, && i, j = 1, 2, \dots, n,\ i \neq j.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Если к указанным соотношениям добавить соотношения $s_i r_i = r_i s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, мы получим стандартное задание образующими и соотношениями группы $S_{n+1} \times \mathbf{Z}_2^n$. Таким образом, мы получаем эпиморфизм $\varphi : W \to S_{n+1} \times \mathbf{Z}_2^n$. Известно, что группа $\ker\varphi$ свободна от кручения (см., например, [72]).

Универсальная накрывающая многообразия $M^n(\Pi^n)$ имеет вид

$$\widetilde{M}^n(\Pi^n) = (W \times [0,1]^n)/\sim, \tag{5.6}$$

где $(w, x) \sim (w', x')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и элемент $w^{-1}w'$ лежит в подгруппе $W_{S(x)\cup R(x)}$ группы W, порождённой образующими из множества $S(x) \cup R(x)$. Это кубическое разбиение было изучено М. Дэвисом в [71]. Основным полученным им результатом является стягиваемость многообразия $\widetilde{M}^n(\Pi^n)$. (Другое доказательство стягиваемости этого многообразия можно найти в [73].) Действие группы W на многообразии $\widetilde{M}^n(\Pi^n)$ задаётся по формуле $w'[w, x] = [w'w, x]$. При этом стабилизаторы всех точек многообразия $\widetilde{M}^n(\Pi^n)$ конечны. Поэтому свободная от кручения подгруппа $\ker\varphi \subset W$ действует на многообразии $\widetilde{M}^n(\Pi^n)$ свободно. Имеем,

$$\widetilde{M}^n(\Pi^n)/\ker\varphi = M^n(\Pi^n).$$

Таким образом, имеет место следующая теорема, принадлежащая К. Томеи [128] (без вычисления фундаментальной группы); вычисление фундаментальной группы принадлежит М. Дэвису [72].

Теорема 5.6.1 (К. Томеи [128], М. Дэвис [72]). *Многообразие $M^n(\Pi^n)$ асферическое и $\pi_1(M^n(\Pi^n)) \cong \ker\varphi$ есть свободная от кручения подгруппа конечного индекса в группе Кокстера W.*

Замечание 5.6.2. Конструкции (5.3), (5.4) и (5.6) являются частными случаями общей конструкции, принадлежащей Э. Б. Винбергу [10]. Пусть (W, S) — система Кокстера ранга n, K — топологическое пространство с отмеченными замкнутыми подмножествами $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Э. Б. Винберг определил *универсальное пространство* $\mathcal{U}(W, K)$ по формуле

$$\mathcal{U}(W, K) = (W \times K)/\sim,$$

где $(w, x) \sim (w', x')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $w^{-1}w' \in W_{S(x)}$. Здесь $S(x)$ есть множество всех s_i, таких что $x \in K_i$. В случае (5.3), группа Кокстера — это группа $\mathbf{Z}_2^n$, $K = P^n$, K_i — объединение гиперграней $F \subset P^n$, таких что $c(F) = i$. В случаях (5.4) и (5.6), группы Кокстера — группы $S_{n+1} \times \mathbf{Z}_2^n$ и W соответственно, $K = [0,1]^n$, K_{s_i} и K_{r_i} — гиперграни $t_i = 1$ и $t_i = 0$ соответственно.

5.7 Накрытия над многообразиями $M^n(P^n)$

В этом разделе мы будем пользоваться обозначениями и конструкциями из раздела 4.3. Предположим, что имеется правильная раскраска c гиперграней $F_1, F_2, \ldots, F_m$ многогранника P^n в цвета из множества $[n]$. Пусть Γ —

однородный граф степени m на множестве вершин V с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества $\mathcal{F}$, удовлетворяющий следующим двум условиям (где Φ_F — инволюции, задающие граф Γ):

1) инволюции Φ_{F_1} и Φ_{F_2} коммутируют для любых гиперграней F_1 и F_2 с непустым пересечением;

2) имеется отображение $\underline{p} : V \to \mathbf{Z}_2^n$, такое что $\underline{p}\,(\Phi_F(v)) = r_{c(F)}\underline{p}(v)$ для любых $v \in V$, $F \in \mathcal{F}$.

Тогда граф Γ удовлетворяет условиям следствия 4.3.3. Значит, псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ является кусочно линейным многообразием.

Пример 5.7.1. Простейшим графом, удовлетворяющим условиям 1 и 2, является граф Γ_0, который получается из 1-остова стандартного n-мерного куба после замены каждого ребра, параллельного i-ой оси координат, на m_i рёбер с теми же концами для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь m_i — количество гиперграней $F \in \mathcal{F}$, таких что $c(F) = i$. При этом полученные m_i рёбер будут окрашены во всевозможные цвета $F \in \mathcal{F}$, такие что $c(F) = i$. Для этого графа $V = \mathbf{Z}_2^n$ и $\Phi_F(g) = r_{c(F)}g$ для всех $g \in \mathbf{Z}_2^n$, $F \in \mathcal{F}$. Очевидно, что $M^n(P^n, \Gamma_0) = M^n(P^n)$ — малое накрытие, индуцированное из линейной модели, над многогранником P^n. Условие 2 можно теперь переформулировать так: граф Γ является конечнолистным накрытием над графом Γ_0, причём каждое ребро накрывается рёбрами того же цвета.

Отображение $\underline{p} : V \to \mathbf{Z}_2^n$ задаёт отображение $p : M^n(P^n, \Gamma) \to M^n(P^n)$ по формуле

$$p([v, x]) = \left[\,\underline{p}(v), x\right].$$

Предложение 5.7.2. *Отображение p корректно определено и является*

$\frac{|V|}{2^n}$*-листным накрытием. Таким образом, пространство* $M^n(P^n, \Gamma)$ *обладает естественной структурой гладкого многообразия.*

Доказательство. Пространства $M^n(P^n)$ и $M^n(P^n, \Gamma)$ — компакты, причём пространство $M^n(P^n)$ связно. Поэтому для того, чтобы доказать, что p — конечнолистное накрытие, нам достаточно проверить, что для любой точки $[v_0, x_0] \in M^n(P^n, \Gamma)$ отображение p осуществляет гомеоморфизм некоторой её окрестности на некоторую окрестность точки $p([v_0, x_0])$.

Пусть F — грань многогранника P^n, содержащая точку x_0 в своей относительной внутренности, и $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — все гиперграни многогранника P^n, содержащие грань F. Тогда инволюции $\Phi_{F_1}, \Phi_{F_2}, \ldots, \Phi_{F_k}$ попарно коммутируют и элементы $c(F_1), c(F_2), \ldots, c(F_k)$ попарно различны.

Обозначим через $\mathcal{U} \subset M^n(P^n, \Gamma)$ подмножество, состоящее из всех точек вида $[v, x]$, таких что x лежит в относительной внутренности какой-либо грани, содержащей грань F, и $v = \left(\Phi_{F_{i_1}} \circ \Phi_{F_{i_2}} \circ \ldots \circ \Phi_{F_{i_l}}\right)(v_0)$ для некоторых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k$. Тогда $\mathcal{U}$ — открытая окрестность точки $[v_0, x_0]$ в $M^n(P^n, \Gamma)$.

Обозначим через $\mathcal{V} \subset M^n(P^n)$ подмножество, состоящее из всех точек вида $[g, x]$, таких что x лежит в относительной внутренности какой-либо грани, содержащей грань F, и $g = r_{c(F_{i_1})} r_{c(F_{i_2})} \ldots r_{c(F_{i_l})} \underline{p}(v_0)$ для некоторых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k$. Тогда $\mathcal{V}$ — открытая окрестность точки $p([v_0, x_0])$ в $M^n(P^n)$.

Легко видеть, что $p(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Определим отображение $q : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ по формуле

$$q\left(r_{c(F_{i_1})} r_{c(F_{i_2})} \ldots r_{c(F_{i_l})} \underline{p}(v_0)\right) = \left(\Phi_{F_{i_1}} \circ \Phi_{F_{i_2}} \circ \ldots \circ \Phi_{F_{i_l}}\right)(v_0).$$

Отображение q корректно определено, так как инволюции $\Phi_{F_1}, \Phi_{F_2}, \ldots, \Phi_{F_k}$ попарно коммутируют. Непосредственно проверяется, что $p|_{\mathcal{U}} \circ q = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$ и $q \circ p|_{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$. Значит, $p|_{\mathcal{U}}$ — гомеоморфизм и, следовательно, p — конечнолистное накрытие.

Проекция p отображает каждую n-мерную грань разбиения $M^n(P^n, \Gamma)$ изоморфно на некоторую n-мерную грань разбиения $M^n(P^n)$. При этом количество n-мерных граней в разбиении $M^n(P^n, \Gamma)$ равно $|V|$, в то время как количество n-мерных граней в разбиении $M^n(P^n)$ равно 2^n. Значит, количество листов накрытия p равно $\frac{|V|}{2^n}$. $\square$

Для каждого элемента $v \in V$ определим вложение $\iota_v : P^n \to M^n(P^n, \Gamma)$ по формуле $\iota_v(x) = [v, x]$. Его образом является грань Q_v псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$. Ввиду наличия накрытия $p : M^n(P^n, \Gamma) \to M^n(P^n)$ ориентация многообразия $M^n(P^n)$, определённая в разделе 5.5, индуцирует ориентацию многообразия $M^n(P^n, \Gamma)$. При этом вложение ι_v сохраняет ориентацию, если $\eta(\underline{p}(v)) = 1$, и обращает ориентацию, если $\eta(\underline{p}(v)) = -1$. Легко проверить, что имеет место следующее предложение.

Предложение 5.7.3. *Каждое накрытие над многообразием $M^n(P^n)$ эквивалентно накрытию вида $p : M^n(P^n, \Gamma) \to M^n(P^n)$; два накрытия, соответствующие парам $\left(\Gamma_1, \underline{p}_1\right)$ и $\left(\Gamma_2, \underline{p}_2\right)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда графы Γ_1 и Γ_2 изоморфны, причём изоморфизм сохраняет цвета рёбер и переводит проекцию $\underline{p}_1$ в проекцию $\underline{p}_2$.*

Таким образом, описанная конструкция устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма пар $(\Gamma, \underline{p})$, удовлетворяющих свойствам 1 и 2, и классами эквивалентности конечнолистными накрытиями над многообразием $M^n(P^n)$.

Особый интерес представляет случай $P^n = \Pi^n$. В этом случае асферичность многообразия $M^n(\Pi^n)$ влечёт асферичность многообразия $M^n(\Pi^n, \Gamma)$. Гиперграни пермутоэдра Π^n нумеруются непустыми собственными подмножествами множества $[n+1]$ (см. раздел 5.6). При этом гиперграни F_{ω_1} и F_{ω_2} имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда либо $\omega_1 \subset \omega_2$, либо $\omega_2 \subset \omega_1$. Таким образом, граф Γ должен быть однородным графом степени $m = 2^{n+1} - 2$, рёбра которого раскрашены правильным образом в цвета из множества непустых собственных подмножеств множества $[n+1]$. Инволюцию Φ_{F_ω}, соответствующую гиперграни F_ω, мы будем обозначать через Φ_ω. Таким образом, инволюции Φ_{ω_1} и Φ_{ω_2} должны коммутировать, если одно из множеств ω_1 и ω_2 содержится во втором.

5.8 Построение многообразия $\widehat{M}^n$

Пусть Z^n — ориентированное псевдомногообразие с правильной раскраской вершин в цвета из множества $[n+1]$. Для каждого симплекса σ комплекса Z^n мы будем обозначать через $\mu(\sigma)$ подмножество множества $[n+1]$, состоящее из цветов всех вершин симплекса σ. Очевидно, что $|\mu(\sigma)| = \dim \sigma + 1$.

Обозначим через U множество n-мерных симплексов псевдомногообразия Z^n. Вершины псевдомногообразия Z^n раскрашены правильным образом в цвета из множества $[n+1]$. Поэтому ориентация псевдомногообразия Z^n задаёт разбиение $U = U_+ \sqcup U_-$, такое что из двух n-мерных симплексов, имеющих общую гипергрань, один всегда принадлежит множеству U_+, а другой — множеству U_-. Ориентация каждого симплекса $\sigma \in U_+$, заданная последовательностью цветов $1, 2, \ldots, n+1$, совпадает с ориентацией, индуцированной ориентацией псевдомногообразия Z^n; для симплексов $\sigma \in U_-$ эти две ориентации противоположны.

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество непустых собственных подмножеств множества $[n+1]$. Для любого подмножества $\omega \in \mathcal{S}$ обозначим через $\mathcal{P}_\omega$ множество инволюций $\Lambda : U \to U$, таких что

1) $\Lambda(U_+) = U_-$ и $\Lambda(U_-) = U_+$;

2) $\mu(\sigma \cap \Lambda(\sigma)) \supset \omega$ для любого симплекса $\sigma \in U$.

Из наличия правильной раскраски вершин псевдомногообразия Z^n следует, что для каждого симплекса τ, такого что $\mu(\tau) = \omega$, количество n-мерных симплексов σ, содержащих симплекс τ, чётно, причём ровно половина из них принадлежит множеству U_+ и ровно половина — множеству U_-. Следовательно, множество $\mathcal{P}_\omega$ непусто. Очевидно, что $\mathcal{P}_\gamma \supset \mathcal{P}_\omega$, если $\gamma \subset \omega$. Кроме того, очевидно, что композиция нечётного числа инволюций из множества $\mathcal{P}_\gamma$ снова принадлежит множеству $\mathcal{P}_\gamma$. В частности, если $\gamma \subset \omega$, $\Lambda_1 \in \mathcal{P}_\omega$ и $\Lambda_2 \in \mathcal{P}_\gamma$, то $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \in \mathcal{P}_\gamma$.

Напомним, что $\eta : \mathbf{Z}_2^n \to \mathbf{Z}_2$ есть гомоморфизм, переводящий каждую образующую r_i в образующую -1 группы $\mathbf{Z}_2$. Положим

$$V_+ = U_+ \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \eta^{-1}(1);$$

$$V_- = U_- \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \eta^{-1}(-1);$$

$$V = V_+ \cup V_- \subset U \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \mathbf{Z}_2^n.$$

Определим отображения $\Phi_\omega : V \to V$, $\omega \in \mathcal{S}$, по формуле

$$\Phi_\omega\left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{S}}, g\right) = \left(\Lambda_\omega(\sigma), \left(\widetilde{\Lambda}_\gamma\right)_{\gamma\in\mathcal{S}}, r_{|\omega|}g\right),$$

$$\widetilde{\Lambda}_\gamma = \begin{cases} \Lambda_\omega \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_\omega, & \text{если } \gamma \subset \omega; \\ \Lambda_\gamma, & \text{если } \gamma \not\subset \omega. \end{cases}$$

Здесь $(\Lambda_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{S}}$ — элемент произведения $\prod_{\gamma\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_\gamma$, являющийся набором инволюций $\Lambda_\gamma \in \mathcal{P}_\gamma$.

Предложение 5.8.1. *Отображения Φ_ω являются инволюциями без неподвижных точек, удовлетворяющими условиям 1 и 2 из раздела 5.7. Кроме того, $\Phi_\omega(V_+) = V_-$ и $\Phi_\omega(V_-) = V_+$.*

Доказательство. Очевидно, что Φ_ω — инволюция. То, что инволюция Φ_ω меняет местами множества V_+ и V_-, следует из того, что инволюция Λ_ω меняет местами множества U_+ и U_-. Значит, инволюция Φ_ω не может иметь неподвижных точек.

Докажем, что $\Phi_{\omega_1} \circ \Phi_{\omega_2} = \Phi_{\omega_2} \circ \Phi_{\omega_1}$, если $\omega_1 \subset \omega_2$. Пусть

$$\Phi_{\omega_1}\left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{S}}, g\right) = \left(\Lambda_{\omega_1}(\sigma), \left(\widetilde{\Lambda}_\gamma\right)_{\gamma\in\mathcal{S}}, r_{|\omega_1|}g\right);$$

$$(\Phi_{\omega_2} \circ \Phi_{\omega_1})\left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{S}}, g\right) = \left(\widetilde{\Lambda}_{\omega_2}\left(\Lambda_{\omega_1}(\sigma)\right), \left(\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_\gamma\right)_{\gamma\in\mathcal{S}}, r_{|\omega_2|}r_{|\omega_1|}g\right);$$

$$\Phi_{\omega_2}\left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{S}}, g\right) = \left(\Lambda_{\omega_2}(\sigma), \left(\widehat{\Lambda}_\gamma\right)_{\gamma\in\mathcal{S}}, r_{|\omega_2|}g\right);$$

$$(\Phi_{\omega_1} \circ \Phi_{\omega_2})\left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{S}}, g\right) = \left(\widehat{\Lambda}_{\omega_1}\left(\Lambda_{\omega_2}(\sigma)\right), \left(\widehat{\widehat{\Lambda}}_\gamma\right)_{\gamma\in\mathcal{S}}, r_{|\omega_1|}r_{|\omega_2|}g\right).$$

Нам нужно доказать, что $\widetilde{\Lambda}_{\omega_2}\left(\Lambda_{\omega_1}(\sigma)\right) = \widehat{\Lambda}_{\omega_1}\left(\Lambda_{\omega_2}(\sigma)\right)$ и $\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_\gamma = \widehat{\widehat{\Lambda}}_\gamma$ для любого $\gamma \in \mathcal{S}$. Первое равенство следует из того, что $\widetilde{\Lambda}_{\omega_2} = \Lambda_{\omega_2}$ и

$\widehat{\Lambda}_{\omega_1} = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}$. Если $\gamma \not\subset \omega_2$, то

$$\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_\gamma = \Lambda_\gamma = \widehat{\widehat{\Lambda}}_\gamma.$$

Если $\gamma \not\subset \omega_1$ и $\gamma \subset \omega_2$, то

$$\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_\gamma = \widetilde{\Lambda}_{\omega_2} \circ \widetilde{\Lambda}_\gamma \circ \widetilde{\Lambda}_{\omega_2} = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_2};$$
$$\widehat{\widehat{\Lambda}}_\gamma = \widehat{\Lambda}_\gamma = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_2}.$$

Если $\gamma \subset \omega_1$, то

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\widetilde{\Lambda}}_\gamma = \widetilde{\Lambda}_{\omega_2} \circ \widetilde{\Lambda}_\gamma \circ \widetilde{\Lambda}_{\omega_2} = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2};\\
&\widehat{\widehat{\Lambda}}_\gamma = \widehat{\Lambda}_{\omega_1} \circ \widehat{\Lambda}_\gamma \circ \widehat{\Lambda}_{\omega_1} =\\
&\qquad = (\Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}) \circ (\Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_2}) \circ (\Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}) =\\
&\qquad\qquad = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}.
\end{aligned}$$

В качестве отображения $\underline{p} : V \to \mathbf{Z}_2^n$ возьмём проекцию на последний сомножитель. $\square$

Обозначим через Γ однородный граф степени $2^{n+1} - 2$ на множестве вершин V с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества $\mathcal{S}$, заданный инволюциями Φ_ω. Тогда $\widehat{M}^n = M^n(\Pi^n, \Gamma)$ — искомое многообразие. Оно является $\left(\frac{1}{2}|U| \prod_{\omega \in \mathcal{S}} |\mathcal{P}_\omega|\right)$-листным накрытием над многообразием $M^n(\Pi^n)$.

Очевидно, что $\eta(\underline{p}(v)) = 1$ для всех $v \in V_+$ и $\eta(\underline{p}(v)) = -1$ для всех $v \in V_-$. Значит, вложение $\iota_v : \Pi^n \to M^n(\Pi^n, \Gamma)$ сохраняет ориентацию, если $v \in V_+$, и обращает ориентацию, если $v = V_-$.

5.9 Отображение пермутоэдра на симплекс

Напомним, что стандартный n-мерный симплекс Δ^n — это выпуклая оболочка точек $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Симплекс Δ^n лежит в n-мерной плоскости

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1.$$

Для любого непустого подмножества $\omega \subset [n+1]$ обозначим через $\Delta_\omega \subset \Delta^n$ грань с вершинами $\mathbf{e}_i$, $i \in \omega$. Имеем, $\dim \Delta_\omega = |\omega| - 1$. Барицентром грани Δ_ω является точка

$$b_\omega(\Delta^n) = b\left(\Delta_\omega\right) = \frac{1}{|\omega|} \sum_{i \in \omega} \mathbf{e}_i.$$

В частности, барицентром симплекса Δ^n является точка

$$b(\Delta^n) = b_{[n+1]}(\Delta^n) = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right).$$

Каждая грань коразмерности k многогранника Π^n имеет вид

$$F = F_{\omega_1} \cap F_{\omega_2} \cap \ldots \cap F_{\omega_k}, \qquad \varnothing \subsetneq \omega_1 \subsetneq \omega_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \omega_k \subsetneq [n+1].$$

Легко проверить, что все грани пермутоэдра центральносимметричны. Центр симметрии грани F мы будем обозначать через $b(F)$ или через $b_{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k}(\Pi^n)$. В частности,

$$b(\Pi^n) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right)$$

есть центр симметрии пермутоэдра Π^n. *Барицентрическим подразделением* пермутоэдра Π^n называется его триангуляция выпуклыми симплексами, n-мерными симплексами которой являются выпуклые оболочки наборов точек вида $b(F^0), b(F^1), \ldots, b(F^n)$, где $F^0 \subset F^1 \subset \ldots \subset F^n = \Pi^n$, $\dim F^i = i$, — грани пермутоэдра.

Зададим отображение $\psi : \Pi^n \to \Delta^n$ на вершинах барицентрического подразделения пермутоэдра по формулам

$$b(\Pi^n) \mapsto b(\Delta^n);$$

$$b_{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k}(\Pi^n) \mapsto b_{\omega_1}(\Delta^n), \qquad \varnothing \subsetneq \omega_1 \subsetneq \omega_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \omega_k \subsetneq [n+1].$$

Продолжим отображение ψ на весь пермутоэдр так, чтобы оно было линейно на каждом симплексе барицентрического подразделения пермутоэдра. Непосредственно проверяется, что имеет место следующее предложение.

Предложение 5.9.1. *Отображение ψ сюръективно. Оно отображает внутренность пермутоэдра Π^n на внутренность симплекса Δ^n и границу пермутоэдра Π^n на границу симплекса Δ^n. При этом степень отображения ψ равна единице, то есть гомоморфизм*

$$\psi_* : H_n(\Pi^n, \partial\Pi^n; \mathbb{Z}) \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом, переводящим образующую

$$[\Pi^n, \partial\Pi^n] \in H_n(\Pi^n, \partial\Pi^n; \mathbb{Z}),$$

соответствующую стандартной ориентации пермутоэдра Π^n, в образующую

$$[\Delta^n, \partial\Delta^n] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; \mathbb{Z}),$$

соответствующую стандартной ориентации симплекса Δ^n. Кроме того, $\psi(F_\omega) = \Delta_\omega$ для любого непустого подмножества $\omega \subset [n+1]$.

Пример 5.9.2. Для $n = 2$ и $n = 3$ отображение ψ изображено на рис. 5.1 и 5.2 соответственно. На рис. 5.1 заштрихованные треугольники отображаются на жирные отрезки. На рис. 5.2 заштрихованные шестиугольные

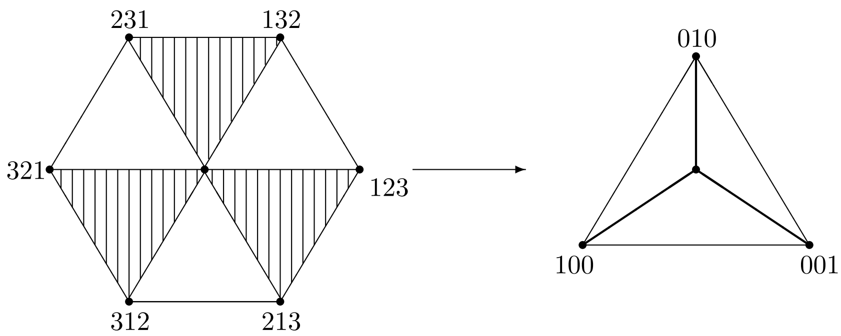


Рис. 5.1. Отображение ψ для $n = 2$

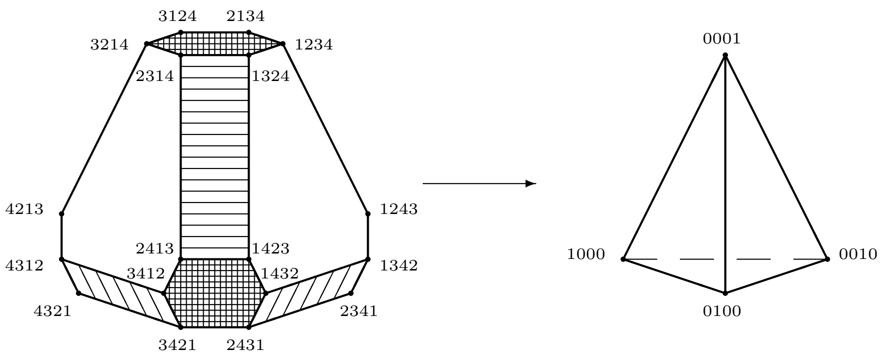


Рис. 5.2. Отображение ψ для $n = 3$

грани пермутоэдра Π^3 отображаются на соответствующие вершины тетраэдра. Четырехугольные грани отображаются на ребра тетраэдра, причем каждый отрезок, параллельный направлению штриховки, «схлопывается» в точку. Внутренности незаштрихованных шестиугольных граней отображаются на внутренности соответствующих граней тетраэдра при помощи отображений, изображённых на рис. 5.1.

5.10 Построение отображения $f : \widehat{M}^n \to Z^n$

Для любого симплекса $\sigma \in U$ обозначим через $\iota_\sigma : \Delta^n \to Z^n$ вложение, отображающее стандартный симплекс Δ^n изоморфно на симплекс σ

так, что вершина $\mathbf{e}_i$ переходит в вершину цвета i. Определим отображение $f : \widehat{M}^n \to Z^n$ по формуле

$$f\left(\left[\left(\sigma, (\Lambda_\omega)_{\omega\in\mathcal{S}}, g\right), x\right]\right) = \iota_\sigma(\psi(x)).$$

Предложение 5.10.1. *Отображение f корректно определено и*

$$f_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n], \qquad q = 2^{n-1}\prod_{\omega\in\mathcal{S}}|\mathcal{P}_\omega|.$$

Доказательство. Чтобы доказать, что f — корректно определённое отображение, мы должны показать, что $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x)) = \iota_\sigma(\psi(x))$, если $x \in F_\omega$ и $\Lambda \in \mathcal{P}_\omega$. Действительно, если $x \in F_\omega$, то $\psi(x) \in \Delta_\omega$. Значит, точка $\iota_\sigma(\psi(x))$ содержится в грани τ_1 симплекса σ, такой что $\mu(\tau_1) = \omega$. Аналогично, точка $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x))$ содержится в грани τ_2 симплекса $\Lambda(\sigma)$, такой что $\mu(\tau_2) = \omega$. Имеем, $\tau_1 = \tau_2$, так как $\mu\left(\sigma \cap \Lambda_\omega(\sigma)\right) \supset \omega$. Барицентрические координаты точки $\iota_\sigma(\psi(x))$ в симплексе τ_1 равны барицентрическим координатам точки $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x))$ в симплексе $\tau_2 = \tau_1$ и равны барицентрическим координатам точки $\psi(x)$ в симплексе Δ^n. Таким образом, точки $\iota_\sigma(\psi(x))$ и $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x))$ совпадают, что и требовалось проверить.

На каждый n-мерный симплекс σ псевдомногообразия Z^n отображается ровно q клеток Q_v, таких что $v = \left(\sigma, (\Lambda_\omega)_{\omega\in\mathcal{S}}, g\right)$. При этом, по предложению 5.9.1, каждая такая клетка Q_v отображается на симплекс σ со степенью ± 1. Осталось проверить, что ориентации клеток Q_v и симплекса σ согласованы так, что степень каждого такого отображения в действительности равна $+1$. Для каждого $v = \left(\sigma, (\Lambda_\omega)_{\omega\in\mathcal{S}}, g\right)$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\Pi^n & \xrightarrow{\iota_v} & Q_v \\
{\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f|_{Q_v}} \\
\Delta^n & \xrightarrow{\iota_\sigma} & \sigma
\end{array}$$

По предложению 5.9.1, отображение ψ имеет степень 1. Если $\sigma \in U_+$, то $v \in V_+$ и оба вложения ι_σ и ι_v сохраняют ориентацию. Если $\sigma \in U_-$, то $v \in V_-$ и оба вложения ι_σ и ι_v обращают ориентацию. Таким образом, в обоих случаях, отображение $f|_{Q_v}$ является отображением степени $+1$, что завершает доказательство предложения. $\square$

Построенное отображение $f : \widehat{M}^n \to Z^n$ реализует класс гомологий, кратный фундаментальному классу $[Z^n]$. Однако многообразие $\widehat{M}^n$ вообще говоря не будет связным. Предположим теперь, что исходное псевдомногообразие Z^n сильно связно. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \ldots \sqcup \Gamma_k$, где Γ_i — связные компоненты графа Γ. Имеем, $\widehat{M}^n = \widehat{M}^n_1 \sqcup \widehat{M}^n_2 \sqcup \ldots \sqcup \widehat{M}^n_k$, где $\widehat{M}^n_i = M^n(\Pi^n, \Gamma_i)$ — связные многообразия. Пусть $f_*[\widehat{M}^n_i] = q_i[Z^n]$. Тогда

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = q = 2^{n-1} \prod_{\omega \in \mathcal{S}} |\mathcal{P}_\omega| \neq 0.$$

Значит, какое-нибудь из чисел q_i не равно нулю. На самом деле из доказательства предложения 5.10.1 легко следует, что все числа q_i строго положительны. Таким образом, отображение $f|_{\widehat{M}^n_i}$ реализует класс гомологий, кратный классу $[Z^n]$.

Заметим теперь, что любой целочисленный класс гомологий z линейно связного пространства X можно реализовать в виде образа фундаментального класса некоторого сильно связного ориентированного псевдомногообразия Z^n. Значит, некоторый класс гомологий, кратный классу z, может быть реализован в виде образа фундаментального класса многообразия $\widehat{M}^n_i$. Это завершает доказательство теоремы 5.1.2.

Приложение A

Комплексы из простых многогранников

Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного числа точек в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$. *Размерностью* выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ называется размерность минимального аффинного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$, содержащего многогранник P. Пусть $H \subset V$ — гиперплоскость, такая что многогранник P содержится в одном из двух замкнутых полупространств в V, ограниченных гиперплоскостью H, и $\dim P \cap H = \dim P - 1$. Тогда подмножество $P \cap H \subset P$ называется *гипергранью* многогранника P. *Гранями* многогранника P называются пересечения его гиперграней. В дальнейшем под многогранником мы всегда понимаем выпуклый многогранник.

Основными примерами многогранников, возникающими в этой работе, являются симплекс, кросс-политоп, куб и пермутоэдр. *Симплексом* называется выпуклая оболочка нескольких аффинно независимых точек в $\mathbb{R}^n$. Размерность симплекса на единицу меньше количества этих точек. Любые два симплекса одной размерности аффинно эквивалентны. *Стандарт-*

ным n-мерным симплексом называется симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с вершинами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}$, где

$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{(единица на } i\text{-ом месте).}$$

Стандартным n-мерным кросс-политопом называется выпуклая оболочка $2n$ точек $\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2, \ldots, \pm\mathbf{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$. *Стандартным n-мерным кубом* называется многогранник $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ или многогранник $[-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Нам будет удобно называть кубами все многогранники, аффинно эквивалентные стандартному кубу. Определение n-мерного пермутоэдра и все его необходимые свойства даны в разделе 5.6.

Многогранник P размерности n называется *простым*, если каждая его вершина содержится ровно в n его гипергранях. Это условие эквивалентно тому, что гиперплоскости, содержащие гиперграни многогранника P, находятся в общем положении. Хорошо известно, что грани простого многогранника снова являются простыми многогранниками. Симплекс, куб и пермутоэдр являются простыми многогранниками, кросс-политоп размерности $\geqslant 3$— нет.

Определение A.2. *Конечным клеточным комплексом, склееным из многогранников* называется факторпространство несвязного объединения конечного количества выпуклых многогранников $P_1, P_2, \ldots, P_q$ по отношению эквивалентности $\sim$, такому что

1. отношение эквивалентности $\sim$ не отождествляет никакие две различные точки одного многогранника P_i;

2. если $x_1 \in P_i$, $x_2 \in P_j$ и $x_1 \sim x_2$, то отношение эквивалентности $\sim$ отождествляет некоторую грань $F_1 \subset P_i$, содержащую точку x_1, с

некоторой гранью $F_2 \subset P_j$, содержащей точку x_2, вдоль некоторого аффинно линейного изоморфизма.

Образы граней многогранников P_i при такой факторизации называются *клетками* или *гранями* полученного клеточного комплекса.

Все рассматриваемые клеточные комплексы считаются конечными. Нестрого говоря, клеточный комплекс, склеенный из многогранников, — это результат склейки нескольких выпуклых многогранников вдоль аффинно линейных изоморфизмов их граней. При этом два многогранника могут склеиваться по нескольким парам попарно изоморфных граней. В частности, примером комплекса, склеенного из многогранников, является *дубль* многогранника P, то есть результат склейки двух экземпляров многогранника P вдоль тождественного гомеоморфизма их границ. Тем не менее, определение комплекса, склеенного из простых многогранников, запрещает приклеивать какую-либо грань многогранника к другой грани того же многогранника. В частности, отрезок с отождествлёнными концами не является клеточным комплексом, склеенным из многогранников.

В настоящей работе мы будем рассматривать только клеточные комплексы, склеенные из простых многогранников.

Определение A.3. Клеточный комплекс, склеенный из многогранников, называется *симплициально клеточным комплексом*, если все многогранники P_i — симплексы. Клеточный комплекс, склеенный из многогранников, называется *кубически клеточным комплексом*, если все многогранники P_i — кубы.

Если мы наложим на симплициально или кубически клеточный комплекс дополнительное ограничение, запрещающее двум симплексам или кубам быть склеенными по нескольким парам граней, мы придём к более традиционным объектам: симплициальным и кубическим комплексам.

Определение A.4. Симплициально клеточный (соответственно, кубически клеточный) комплекс называется *симплициальным* (соответственно, *кубическим*) *комплексом*, если пересечение любых двух его граней само является его гранью (возможно, пустой).

Примером симплициально клеточного комплекса, не являющегося симплициальным комплексом, служит разбиение окружности на две дуги.

Часто нам будет удобно использовать язык абстрактных симплициальных комплексов. Напомним, что *абстрактным симплициальным комплексом* на конечном множестве вершин V называется множество K подмножеств множества V такое, что $\varnothing \in K$ и для любых подмножеств $\tau \subset \sigma \subset V$ из того, что $\sigma \in K$ следует, что $\tau \in K$. Вложив множество V в виде аффинно независимого подмножества в $\mathbb{R}^N$ и натянув выпуклый симплекс на множество элементов каждого абстрактного симплекса $\sigma \in K$, мы получим геометрический симплициальный комплекс.

Определение A.5. *Изоморфизмом* клеточных комплексов K_1 и K_2, склеенных из многогранников, называется гомеоморфизм $K_1 \to K_2$, ограничение которого на каждую грань комплекса K_1 является аффинно линейным изоморфизмом на некоторую грань комплекса K_2. Для обозначения изоморфности двух комплексов мы будем использовать символ $\cong$.

Каждому клеточному комплексу, склеенному из простых многогранников, можно сопоставить частично упорядоченное множество его граней.

Мы будем говорить, что два клеточных комплекса, склеенные из простых многогранников, *комбинаторно эквивалентны*, если частично упорядоченные множества их граней изоморфны. В частности, два простых многогранника комбинаторно эквивалентны, если частично упорядоченные множества их граней изоморфны. Легко видеть, что два симплициально клеточных комплекса изоморфны тогда и только тогда, когда они комбинаторно эквивалентны. Для произвольных клеточных комплексов, склеенных из простых многогранников, это не так, ввиду того что существуют комбинаторно эквивалентные, но аффинно неизоморфные простые многогранники.

Пусть K — клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников. Выберем по одной точке b_σ в относительной внутренности[1] каждой непустой грани σ комплекса K. Для каждой последовательности

$$\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_k \tag{A.1}$$

вложенных непустых граней комплекса K рассмотрим в грани σ_k выпуклый $(k-1)$-мерный симплекс $\Delta_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k}$ с вершинами $b_{\sigma_1}, b_{\sigma_2}, \ldots, b_{\sigma_k}$. Симплексы $\Delta_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k}$ образуют симплициальный комплекс, который называется *барицентрическим подразделением* комплекса K и обозначается через K'. Легко видеть, что с точностью до изоморфизма комплекс K' не зависит от произвола в выборЧасто нам будет удобно использовать язык абстрактных симплициальных комплексов. Напомним, что *абстрактным симплициальным комплексом* на конечном множестве вершин V называется множество K подмножеств множества V такое, что $\varnothing \in K$ и для любых подмножеств $\tau \subset \sigma \subset V$ из того, что $\sigma \in K$ следует, что $\tau \in K$.

[1]Относительной внутренностью вершины считается сама эта вершина

е точек b_σ. Кроме того, барицентрические подразделения комбинаторно эквивалентных клеточных комплексов, склеенных из простых многогранников, изоморфны. Значит, комбинаторно эквивалентные клеточные комплексы всегда линейно гомеоморфны. Укажем одно простое следствие этого факта.

Предложение A.6. *Пусть Q — клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников, комбинаторно эквивалентных кубам. Тогда существует кубически клеточный комплекс Q_1, комбинаторно эквивалентный и кусочно линейно гомеоморфный комплексу Q.*

Доказательство. Комплекс Q склеен из многогранников, комбинаторно эквивалентных кубам вдоль некоторых изоморфизмов их граней. Рассмотрим столько же аффинных кубов тех же размерностей и склеим их вдоль соответствующих изоморфизмов их граней. Пусть Q_1 — полученный кубически клеточный комплекс. Тогда комплекс Q комбинаторно эквивалентен и, следовательно, кусочно линейно гомеоморфен комплексу Q_1. □

Определим теперь *каноническое кубическое подразделение* симплициально клеточного комплекса. Рассмотрим стандартный симплекс Δ^n и обозначим через $P_i^n \subset \Delta^n$ подмножество, состоящее из всех точек $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})$, таких что $t_i \geqslant t_j$ для всех $j \in [n+1]$. Легко видеть, что P_i^n — выпуклый n-мерный многогранник, комбинаторно эквивалентный n-мерному кубу. Многогранники P_i^n, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, образуют клеточное разбиение симплекса Δ^n, которое мы будем называть *каноническим кубическим подразделением* симплекса Δ^n. Пусть теперь K — симплициально клеточный комплекс. Возьмём канонические кубические подразделения всех его симплексов. Полученное разбиение Q на многогранники, комбинаторно эквивалентные кубам, мы назовём *каноническим кубическим подразделением* комплекса K. Часто нам будет удобно считать каноническим кубическим подразделением комплекса K не построенное разбиение Q, а комбинаторно эквивалентное ему кубически клеточное разбиение Q_1. Из предложения A.6 следует, что комплекс Q_1 кусочно линейно гомеоморфен исходному комплексу K. В принципе, определение канонического кубического подразделения можно было бы дать для любого клеточного комплекса, склеенного из простых многогранников. Нам оно будет нужно только в случае симплициально клеточных, кубически клеточных комплексов и в случае комплексов, склеенных из пермутоэдров.

Замечание A.7. Термин «симплициально клеточный комплекс» использовался, например, в работах В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова (см. [8]). Другие авторы для обозначения того же понятия использовали различные термины, в частности, «псевдокомплекс», «псевдотриангуляция», «предсимплициальный комплекс». Термин «кубически клеточный комплекс» является естественным аналогом термина «симплициально клеточный комплекс».

Компактным полиэдром мы будем называть объединение конечного числа симплексов в некотором пространстве $\mathbb{R}^N$. Все рассматриваемые в этой работе полиэдры являются компактными; как правило мы будем рассматривать полиэдры с точностью до кусочно линейного гомеоморфизма. Каждый симплициальный комплекс можно вложить в некоторое пространство $\mathbb{R}^N$ линейно на симплексах; образ этого вложения является полиэдром, который мы будем обозначать через $|K|$. Кусочно линейным разбиением полиэдра P на многогранники мы будем называть клеточный комплекс K, склеенный из многогранников, вместе с кусочно линейным гомеоморфизмом $K \to P$. Кусочно линейное симплициальное разбиение называется кусочно линейной триангуляцией. В настоящей работе все разбиения и триангуляции предполагаются кусочно линейными и мы не оговариваем это особо.

Линком симплекса σ симплициального комплекса K называется подкомплекс комплекса K, состоящий из всех симплексов τ таких, что $\sigma \cap \tau = \varnothing$ и существует симплекс комплекса K, содержащий и σ и τ. При работе с произвольными клеточными комплексами, склеенными из простых многогранников, нам будет работать с другим определением, которое годится в таком более общем случае.

Определение A.8. Пусть K — клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников, σ — его грань размерности k. В относительной внутренности каждой $(k+1)$-мерной грани ρ, содержащей грань σ, выберем какую-нибудь точку b_ρ. Для каждой l-мерной грани $\tau \supsetneq \sigma$ существует ровно $l-k$ граней ρ, таких что $\dim\rho = k+1$ и $\sigma \subset \rho \subset \tau$. Выпуклая оболочка соответствующих точек b_ρ в грани τ является $(l-k-1)$-мерным симплексом, который мы обозначим через $\Delta_{\sigma,\tau}$. Объединив симплексы $\Delta_{\sigma,\tau}$ для всех граней $\tau \subsetneq \sigma$, мы получим симплициально клеточный комплекс, который мы будем называть *линком* грани σ в комплексе K и обозначать через $\operatorname{link}\sigma$ или $\operatorname{link}_K\sigma$.

Несложно проверить, что с точностью до изоморфизма линк грани σ не зависит от выбора точек b_ρ. Также легко проверяется, что для симплициального комплекса K два определения линка дают канонически изоморфные симплициальные комплексы. Частично упорядоченное множество симплексов комплекса $\operatorname{link}\sigma$ канонически изоморфно частично упорядоченному множеству граней комплекса K, содержащих грань σ.

Определение А.9. Симплициальный (соответственно, симплициально клеточный) комплекс называется *симплициальной* (соответственно, *симплициально клеточной*) $(n-1)$-*мерной комбинаторной сферой*, если он кусочно линейно эквивалентен границе n-мерного симплекса.

В главах 1, 2, 4 и 5 под комбинаторными сферами мы всегда подразумеваем симплициальные комбинаторные сферы; симплициально клеточные комбинаторные сферы встречаются нам лишь в главе 3.

Определение А.10. Клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников, называется n-*мерным комбинаторным многообразием*, если линки всех его вершин являются симплициально клеточными комбинаторными сферами. *Симплициальным* (соответственно, *симплициально клеточным*, *кубическим* или *кубически клеточным*) *комбинаторным многообразием* называется комбинаторное многообразие, которое является симплициальным (соответственно, симплициально клеточным, кубическим или кубически клеточным) комплексом.

Хорошо известно (см., например, [44]), что всякое комбинаторное многообразие имеет каноническую структуру кусочно линейного многообразия, то есть допускает атлас карт с кусочно линейными функциями перехода. Также хорошо известно, что линки всех k-мерных граней n-мерного комбинаторного многообразия являются $(n-k)$-мерными комбинаторными сферами. В [44] эти утверждения доказаны для симплициальных комбинаторных многообразий; общий случай полностью аналогичен.

Определение A.11. Клеточный комплекс K, склеенный из многогранников, называется *n-мерным псевдомногообразием*, если каждая грань комплекса K содержится в некоторой n-мерной грани, причём каждая $(n-1)$-мерная грань комплекса K содержится ровно в двух n-мерных гранях. *Симплициальным* (соответственно, *симплициально клеточным*, *кубическим*, *кубически клеточным*) *псевдомногообразием* называется псевдомногообразие, которое является симплициальным (соответственно, симплициально клеточным, кубическим, кубически клеточным) комплексом.

Часто в определении псевдомногообразия на комплекс K накладывают ещё условие *сильной связности* (см., например, [27]): для любых двух n-мерных граней τ_1 и τ_2 должна существовать последовательность n-мерных граней $\tau_1 = \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r = \tau_2$ такая, что для любого i грани ρ_i и ρ_{i+1} имеют общую $(n-1)$-мерную грань. Мы не будем накладывать на K это условие. Дело в том, что нам удобно, чтобы по крайней мере все комбинаторные многообразия были псевдомногообразиями. Часто мы будем работать только с так называемыми *нормальными* псевдомногообразиями (см. [85]). Приведём здесь два эквивалентных определения нормального псевдомногообразия.

Определение A.12. Псевдомногообразие K размерности n называется *нормальным*, если $H_n(K, K \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ для всех точек $x \in K$.

Определение A.13. Псевдомногообразие K размерности n, склеенное из простых многогранников, называется *нормальным*, если линк каждой его непустой грани σ связен при $\dim \sigma \leqslant n-2$.

Из определения A.13 сразу следует, что компоненты связности нормального псевдомногообразия являются сильно связными и при $\dim\sigma \leqslant n-2$ линк грани σ нормального псевдомногообразия является связным нормальным псевдомногообразием. Класс нормальных псевдомногообразий включает в себя все наиболее интересные примеры псевдомногообразий: комбинаторные многообразия, гомологические многообразия, многообразия с коническими особенностями. Для произвольного n-мерного псевдомногообразия K можно единственным образом построить его *нормализацию* [85] — нормальное псевдомногообразие K^{norm} с отображением $K^{\mathrm{norm}} \to K$, являющимся гомеоморфизмом на дополнениях к $(n-2)$-мерным остовам комплексов K^{norm} и K и отображающее каждую грань комплекса K^{norm} изоморфно на некоторую грань комплекса K.

Приложение В

Вычисления при помощи явной комбинаторной формулы для первого класса Понтрягина

В главе 2 доказано, что построенная там явная комбинаторная формула даёт первый класс Понтрягина комбинаторного многообразия K с точностью до умножения на некоторую универсальную, то есть, не зависящую от K константу. Чтобы показать, что эта константа в действительности равна 1 нам нужно подсчитать при помощи полученной формулы первый класс Понтрягина какого-нибудь многообразия с известным ненулевым классом Понтрягина и проверить, что она даёт правильный ответ. В качестве такого пробного комбинаторного многообразия мы возьмём 9-вершинную триангуляцию $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, построенную в работах [96], [97]. После этого мы проведём расчёт ещё и для 15-вершинной триангуляции $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, построенной автором [22].

Мы будем пользоваться всеми обозначения главы 2. Пусть $h \in C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$ произвольный коцикл, представляющий класс когомологий c_0; тогда

$f = d^{-1}\delta(h)$ — универсальная локальная формула для первого рационального класса Понтрягина, умноженного на некоторую константу, равенство которой 1 нам и нужно доказать.

Прежде чем переходить к конкретным расчётам, сделаем несколько общих замечаний. Пусть β — бизвёздное преобразование ориентированных двумерных комбинаторных сфер. Для упрощения обозначений мы будем обозначать значение коцикла h на ориентированном ребре $\{\beta\}$ графа Γ_2 просто через $h(\beta)$ вместо $h(\{\beta\})$. Напомним, что через β^{-1} мы обозначаем бизвёздное преобразование, обратное бизвёздному преобразованию β, а через $-\beta$ — бизвёздное преобразование, полученное из β при обращении ориентаций комбинаторных сфер. Тогда $h(-\beta) = h\bigl(\beta^{-1}\bigr) = -h(\beta)$. Напомним, что мы называли бизвёздное преобразование β несущественным, если оно эквивалентно преобразованию β^{-1}; такому преобразованию не соответствует никакого ребра графа Γ_2. Назовём бизвёздное преобразование β *неважным*, если если оно эквивалентно преобразованию β^{-1}; для любого такого преобразования $h(\beta) = 0$, поэтому в наших расчётах мы можем пренебрегать всеми неважными бизвёздными преобразованиями; на рисунках неважные преобразования обозначаются пунктирными стрелками.

В этом приложении нам будет удобно наряду с циклами, изображёнными на рис. 2.3 и 2.4, относить к элементарным циклам в графе Γ_2 циклы, изображённые на рис. 2.5. Из того, что такой цикл представляется в виде суммы двух циклов, изображённых на рис. 2.4, *б*, легко следует, что значение класса когомологий c_0 на нём равно

$$\frac{2}{(p+2)(p+3)} - \frac{2}{(q+2)(q+3)},$$

где p и q — количества треугольников в комбинаторной сфере, изображённой на рис. 2.5 вверху, примыкающих к левой нижней и правой верхней вершинам соответственно снаружи от изображённой на рис. 2.5 картинки.

Когда мы задаём симплекс ориентированной комбинаторной сферы набором его вершин мы всегда упорядочиваем вершины в соответствии с ориентацией.

Расчёт для 9-вершинной триангуляции $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$

В работах [96], [97] построена триангуляция K_9 комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ с девятью вершинами. Линки всех вершин триангуляции K_9 изоморфны одной и той же ориентированной 8-вершинной трёхмерной комбинаторной сфере $\mathcal{M}$, называемой сферой Брюкнера. Триангуляция $\mathcal{M}$ является одной из двух триангуляций 3-мерной сферы с восьмью вершинами, которые не могут быть реализованы в виде границы выпуклого симплициального многогранника (см. [87]). Вершины триангуляции $\mathcal{M}$ можно пронумеровать числами от 1 до 8 так, что ее максимальные симплексы будут задаваться следующими наборами вершин:

1243	3476	5386	7165
1237	3465	4285	1785
1276	4576	4875	1586
2354	2385	4817	1682
2376	2368	4371	1284

Рассмотрим следующую последовательность из 9 бизвездных преобразований $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_9$, переводящую триангуляцию $\mathcal{M}$ в границу четырехмерного симплекса:

1) заменим симплексы 1243, 1237 и 4371 на симплексы 1247 и 3274;

2) заменим симплексы 2354, 2385 и 4285 на симплексы 2384 и 3584;

3) заменим симплексы 7165, 1785 и 1586 на симплексы 1786 и 5687;

4) заменим симплексы 1786, 1682 и 1276 на симплексы 1278 и 6287;

5) заменим симплексы 1247, 1278, 1284 и 4817 на симплекс 2487;

6) заменим симплексы 3274, 2384 и 2487 на симплексы 2387 и 3487;

7) заменим симплексы 2387, 6287, 2376 и 2368 на симплекс 6387;

8) заменим симплексы 3465, 5386 и 3584 на симплексы 4386 и 5486;

9) заменим симплексы 4386, 6387, 3476 и 3487 на симплекс 6487.

В том случае, когда $j \in U(\beta_i)$ мы будем обозначать через $\beta_{i,j}$ бизвёздное преобразование линка вершины j, индуцированное бизвёздным преобразованием β_i. Тогда значение $f(\langle\mathcal{M}\rangle)$ равно сумме всех значений $h(\beta_{i,j})$.

Последовательности бизвёздных преобразований, которые индуцируются бизвёздными преобразованиями $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_9$ в линках вершин триангуляции $\mathcal{M}$, изображены на рис. B.1; номер вершины обозначен цифрой в кружочке слева от соответствующей последовательности бизвёздных преобразований; каждую из последовательностей мы изображаем только до того места, после которого идут лишь неважные бизвёздные преобразования (как именно устроены «хвосты» из неважных бизвёздных преобразований, не имеет значения, так как они всё равно дают нулевой вклад в $f(\langle\mathcal{M}\rangle)$.) Мы не стали изображать последовательности индуцированных бизвёздных преобразований для вершин 1 и 5: дело в том, что каждая из этих последовательностей содержит только по одному бизвёздному преобразованию, не являющемуся неважным — таковы бизвёздные преобразования $\beta_{1,1}$ и $\beta_{2,5}$. При этом бизвёздное преобразование $\beta_{2,5}$ эквивалентно бизвёздному преобразованию $-\beta_{1,1}$; таким образом, суммарный вклад бизвёздных преобразований линков вершин 1 и 5 в $f(\langle\mathcal{M}\rangle)$ равен нулю.

Непосредственно проверяется, что бизвёздное преобразование $\beta_{5,4}$ эквивалентно бизвёздному преобразованию $-\beta_{4,6}$, бизвёздные преобразования $\beta_{1,4}$, $\beta_{3,6}$, $-\beta_{1,2}^{-1}$ и $-\beta_{2,8}^{-1}$ попарно эквивалентны и бизвёздные преобразования $\beta_{2,3}$, $\beta_{6,3}$ и $\beta_{6,7}^{-1}$ попарно эквивалентны. Значит,

$$f(\langle\mathcal{M}\rangle) = 4h(\beta_{1,4}) + h(\beta_{2,3}) + h(\beta_{2,4}) + h(\beta_{1,7}) + h(\beta_{3,7}) + h(\beta_{1,3}). \tag{B.1}$$

Рассмотрим циклы в графе Γ_2, изображённые на рис. B.2, *а*–*в*. Каждый из изображённых циклов разбит на элементарные циклы первого типа; для каждого из этих элементарных циклов на рисунке указано значение класса когомологий c_0 на нём; таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} 2h(\beta_{1,4}) + h(\beta_{2,4}) - h(\beta_{2,3}) &= \frac{1}{10} \\ h(\beta_{1,4}) + h(\beta_{1,7}) + h(\beta_{3,7}) - h(\beta_{2,3}) &= \frac{1}{10} \\ h(\beta_{1,4}) + h(\beta_{1,3}) &= \frac{1}{30} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Рассмотрим теперь цикл, изображённый на рис. 2.4, *в*, с параметрами $(2,2,2,2,2)$. Этот цикл состоит из 5 бизвёздных преобразований, каждое из которых эквивалентно бизвёздному преобразованию $\beta_{2,3}$, значит,

$$h(\beta_{2,3}) = \frac{1}{5}\,\theta(2,2,2,2,2) = \frac{1}{30}$$

Сложив левые части равенств (B.2) и прибавив к результату $3h(\beta_{2,3})$, мы получим правую часть равенства (B.1). Следовательно,

$$f(\langle\mathcal{M}\rangle) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + 3\cdot\frac{1}{30} = \frac{1}{3}$$

Так как триангуляция K_9 имеет 9 вершин, линк каждой из которых изоморфен комбинаторной сфере $\mathcal{M}$, получаем

$$\sum_{v\in V(K_9)} f(\langle \operatorname{link} v\rangle) = 3 = p_1\left[\mathbb{C}\mathrm{P}^2\right].$$

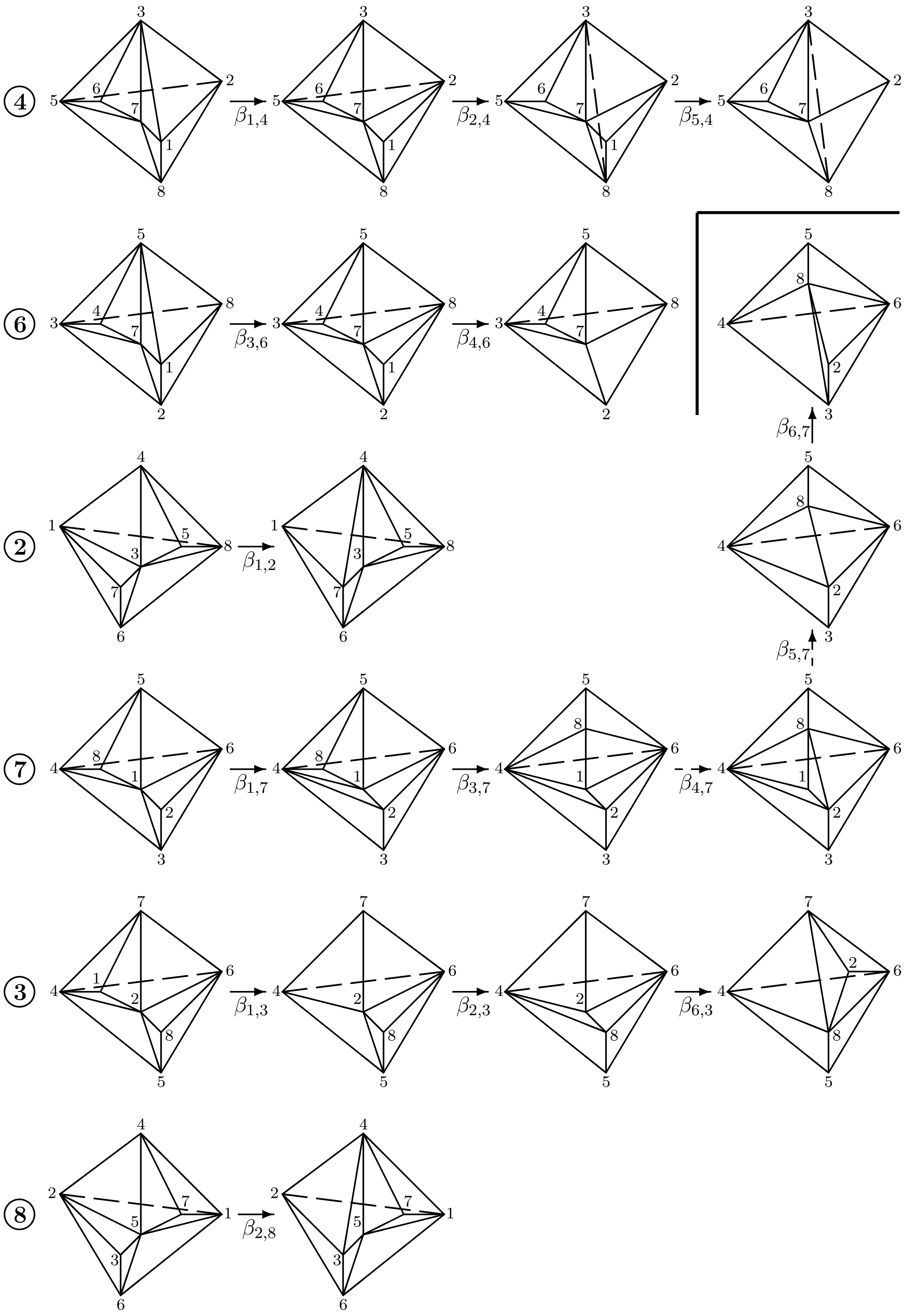
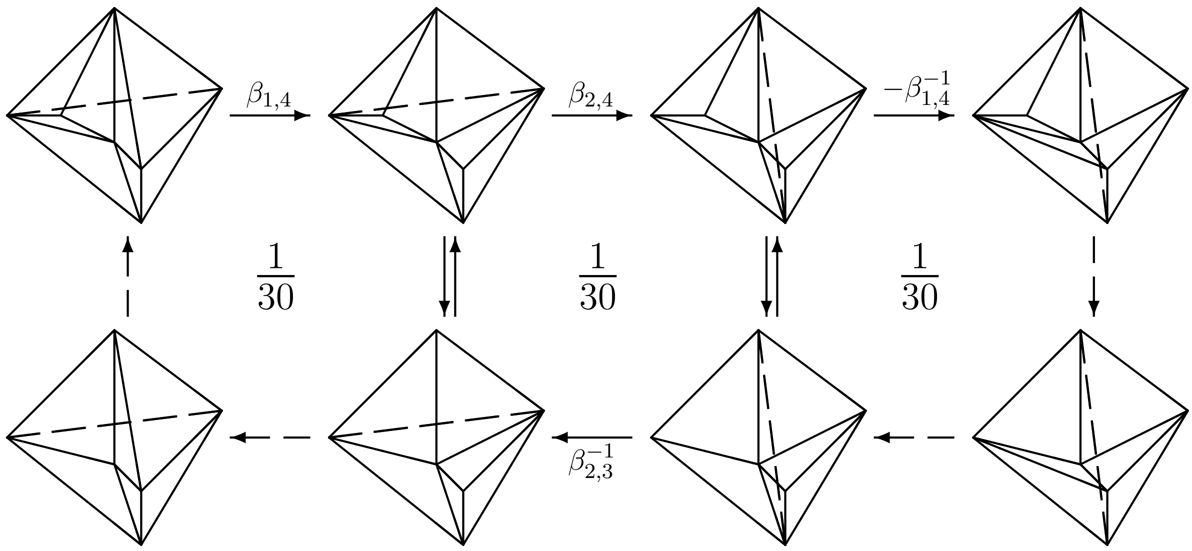
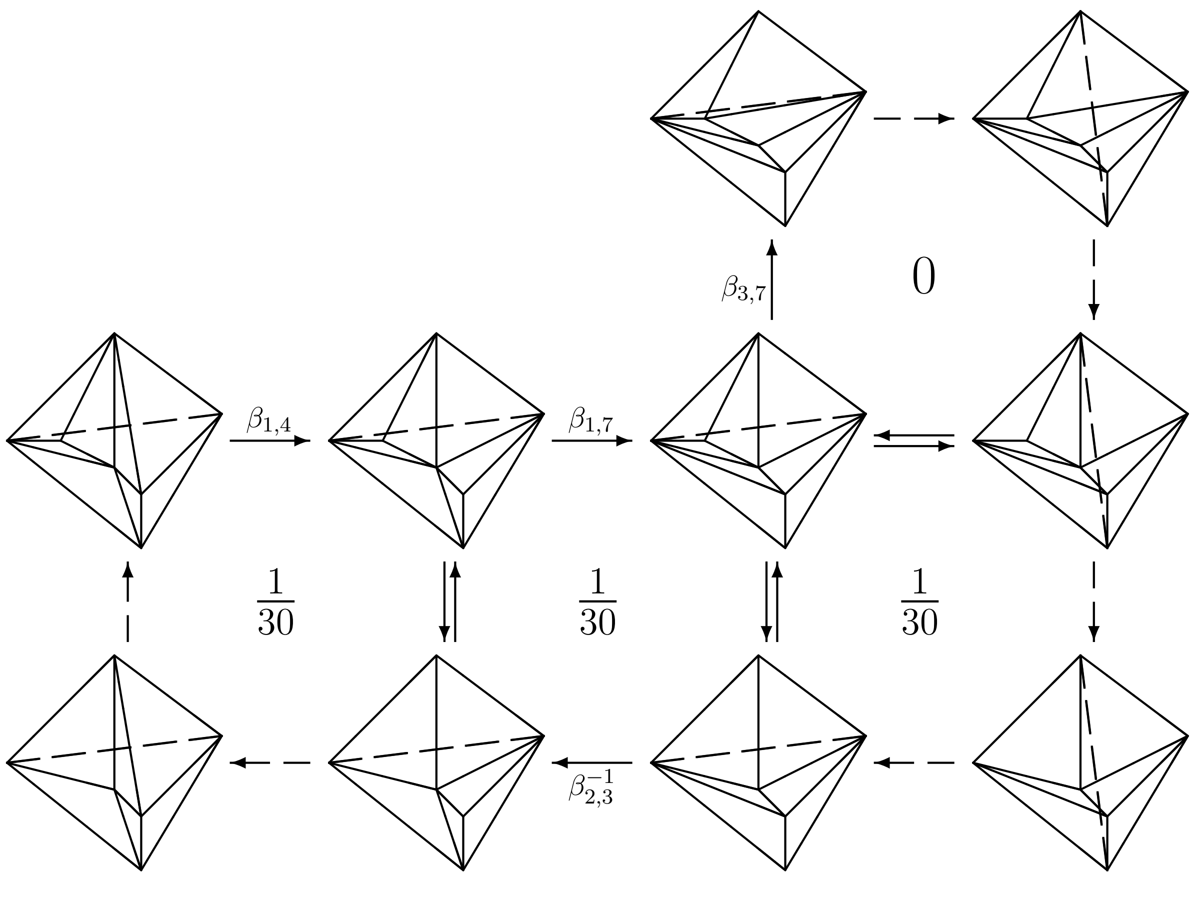


Рис. В.1. Бизвёздные преобразование $\beta_{i,j}$

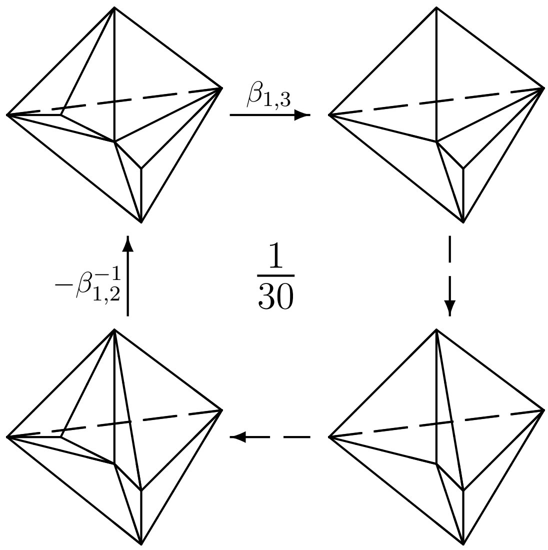


а



б

Рис. В.2 (*а*, *б*). Расчёт значения $f(\langle\mathcal{M}\rangle)$: циклы в графе Γ_2



в

Рис. В.2 (*в*). Расчёт значения $f(\langle\mathcal{M}\rangle)$: циклы в графе Γ_2

Таким образом, мы проверили, что полученная в главе 2 формула действительно даёт первый рациональный класс Понтрягина, а не какое-либо его кратное.

Расчёт для 15-вершинной триангуляции $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$

В [22] автором была построена 15-вершинная триангуляция K_{15} комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ с группой автоморфизмов $S_3 \times S_4$. Эта триангуляция интересна тем, что она является минимальной по количеству вершин среди триангуляций $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, вершины которых допускают правильную раскраску в 5 цветов, а четырёхмерные симплексы — шахматную раскраску, то есть раскраску в два цвета: белый и чёрный — такую, что любые два симплекса, имеющие общую гипергрань, окрашены в разные цвета. (Несложно доказать, что для триангуляций односвязных многообразий наличие правильной раскраски вершин равносильно наличию шахматной раскраски симплексов максимальной размерности.)

Конструкция В.14. Построим 15-вершинный абстрактный симплициальный комплекс K_{15} следующим образом. В качестве множества вершин комплекса K_{15} нам будет удобно взять 15-элементное множество

$$V = \bigl(V_4 \setminus \{e\}\bigr) \sqcup \bigl(\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3\}\bigr),$$

где $V_4 \subset S_4$ — четверная группа Клейна. Таким образом вершинами комплекса K_{15} будут перестановки (12)(34), (13)(24) и (14)(23) и всевозможные пары целых чисел (a,b), $1 \leqslant a \leqslant 4$, $1 \leqslant b \leqslant 3$. При этом четырёхмерные симплексы будут натянуты на все наборы вершин вида

$$\nu, (1,b_1), (2,b_2), (3,b_3), (4,b_4), \qquad \nu \in V_4 \setminus \{e\}, 1 \leqslant b_a \leqslant 3, a = 1,2,3,4,$$

такие, что $b_{\nu(a)} \neq b_a$ для всех $a = 1,2,3,4$, а симплексы меньших размерностей на всевозможные поднаборы наборов такого вида.

В работе [22] автором доказано, что K_{15} — кусочно линейная триангуляция $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. На множестве V определим действие группы $S_4 \times S_3$ по формулам

$$(\theta, \varkappa) \cdot \nu = \theta\nu\theta^{-1}, \qquad (\theta, \varkappa) \cdot (a,b) = (\theta(a), \varkappa(b)), \qquad \theta \in S_4,\ \varkappa \in S_3.$$

Очевидно, что это действие переводит симплексы комплекса K_{15} в симплексы комплекса K_{15}. Таким образом, группа $S_4 \times S_3$ действует автоморфизмами симплициального комплекса K_{15}. В действительности, можно показать, что группа $S_4 \times S_3$ исчерпывает все автоморфизмы триангуляции K_{15}. Множество V разбивается на две $(S_4 \times S_3)$-орбиты: первая орбита состоит из 3 вершин (12)(34), (13)(24) и (14)(23); вторая — из 12 вершин (a,b). Очевидно, что линки всех вершин каждой из этих орбит

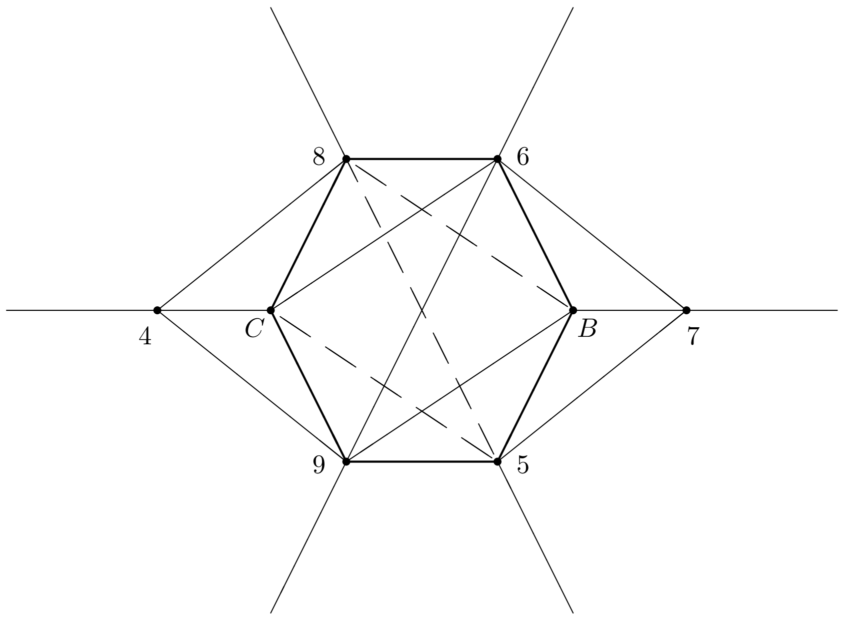


Рис. B.3. Подкомплекс J комбинаторной сферы $\mathcal{N}$

попарно изоморфны друг другу с сохранением ориентации. Значит,

$$p_1\big[\mathbb{C}\mathrm{P}^2\big] = 3f(\langle \mathrm{link}\,(12)(34)\rangle) + 12f(\langle \mathrm{link}\,(1,1)\rangle).$$

Легко проверить, что линк вершины (12)(34) изоморфен джойну двух границ шестиугольников и, значит, обладает обращающим ориентацию автоморфизмом. Обозначим линк вершины $(1,1)$ через $\mathcal{N}$; тогда $p_1\big[\mathbb{C}\mathrm{P}^2\big] = 12f(\langle\mathcal{N}\rangle)$. Таким образом, нам осталось вычислить при помощи формулы из главы 2 значение $f(\langle\mathcal{N}\rangle)$ (конечно же, так как певое число Понтрягина $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ равно 3 мы знаем, что в качестве ответа мы должны получить $\frac{1}{4}$).

Комбинаторная сфера $\mathcal{N}$ устроена следующим образом. Рассмотрим сначала в трёхмерной сфере S^3 двумерный комплекс J, изображённый на рис. B.3; на этом рисунке подразумевается, что ещё одна вершина A находится в бесконечно удалённой точке; комплекс J является объединением трёх двумерных дисков, общей границей которых является 6-звенная ломаная, выделенная толстыми линиями. Дополнение $S^3 \setminus J$ состоит из трёх открытых 3-мерных шаров: первый шар D_1 — внутренность октаэдра с вершинами B, C, 5, 6, 8, 9, второй шар D_2 расположен «над плоскостью рисунка», третий шар D_3 — «под плоскостью рисунка». Поместим вершины 1, 2, 3 внутри шаров D_1, D_2 и D_3 соответственно и триангулируем шари D_1, D_2 и D_3 как конусы над уже построенными триангуляциями их границ. В результате мы получим триангуляцию трёхмерной сферы, изоморфную комбинаторной сфере $\mathcal{N}$; этот изоморфизм соответствует следующей перенумерации вершин: $(12)(34) \to A$, $(13)(24) \to B$, $(14)(23) \to C$, $(a, b) \to 3a + b - 6$.

Произведём с комбинаторной сферой $\mathcal{N}$ следующие бизвездные преобразования $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8$:

1) заменим симплексы $1C85$ и $C853$ на симплексы 1385, $135C$ и $13C8$;

2) заменим симплексы $135C$, $395C$ и $915C$ на симплексы 1359 и $139C$;

3) заменим симплексы 1385, $B185$ и $3B85$ на симплексы $135B$ и $138B$;

4) заменим симплексы $138B$, $368B$ и $618B$ на симплексы 1386 и $136B$;

5) заменим симплексы $1B69$ и $B692$ на симплексы 1269, $129B$ и $12B6$;

6) заменим симплексы $129B$, $259B$ и $519B$ на симплексы 1295 и $125B$;

7) заменим симплексы 1269, $C169$ и $2C69$ на симплексы $129C$ и $126C$;

8) заменим симплексы $126C$, $286C$ и $816C$ на симплексы 1268 и $128C$.

В результате этих бизвёздных преобразований мы получаем не границу симплекса. Нам однако достаточно того, что полученная комбинаторная сфера обладает обращающим ориентацию автоморфизмом, что сразу следует из того, что она является надстройкой над двумерной комбинаторной сферой. Таким образом, значение $f(\langle \mathcal{N} \rangle)$ равно сумме всех значений $h(\beta_{i,j})$.

Бизвёздные преобразования $\beta_{i,j}$, индуцированные бизвёздными преобразованиями β_i в линках вершин j изображены на рис. B.4; так же, как для 9-вершинной триангуляции $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, мы отбрасываем «хвосты» из неважных преобразований, кроме того, не изображено неважное бизвёздное преобразование $\beta_{1,3}$. Линки вершин 4 и 7 не изменяются при бизвёздных преобразованиях β_i; все преобразования, индуцированные в линках вершин A, B и C, неважные. Отметим, что комбинаторная сфера $\mathcal{N}$ обладает сохраняющим ориентацию автоморфизмом, индуцированным перестановкой вершин $(BC)(23)(47)(59)(68)$; этот автоморфизм меняет местами части комплекса $\mathcal{N}$ изображённые под и над плоскостью рисунка на рис. B.3. При этом преобразования $\beta_1, \ldots, \beta_4$ изменяют только половину комплекса $\mathcal{N}$, расположенную под плоскостью рисунка, а преобразования $\beta_5, \ldots, \beta_8$ — только половину комплекса $\mathcal{N}$, расположенную над плоскостью рисунка. Линк вершины 2 не изменяется при бизвёздных преобразованиях $\beta_1, \ldots, \beta_4$, а линк вершины 3 — при бизвёздных преобразованиях $\beta_5, \ldots, \beta_8$; при этом бизвёздные преобразования $\beta_{i,3}$ и $\beta_{i+4,2}$ эквивалентны. Поэтому мы не изображаем на рис. B.4 преобразования $\beta_{i,2}$. Изображая на рис. B.4 бизвёздные преобразования $\beta_{i,3}$ мы всегда подразумеваем, что «невидимые части» рисунков устроены так, как показано на рис. B.5, *а*. Аналогично можно заметить, что преобразования $\beta_{i,9}$ и $\beta_{i,6}$ неважные при $i \leqslant 4$, а преобразования $\beta_{i,5}$ и $\beta_{i,8}$ — при $i > 4$. При этом бизвёздные преобразования $\beta_{i,5}$ и $\beta_{i+4,9}$, а также $\beta_{i,8}$ и $\beta_{i+4,6}$, «выглядят одинаково»; единственное отличие состоит в том, что к моменту выполнения бизвёздных преобразований $\beta_{i+4,j}$, где $j = 9$ или $j = 6$, преобразования $\beta_{1,j}, \dots \beta_{4,j}$ уже выполнены; поэтому «невидимые части» линков вершин 5 и 9, а также 8 и 6, устроены по-разному (см. рис. B.5, *б*, *в*). Таким образом,

$$f(\langle\mathcal{N}\rangle) = \sum_{i=3,4,5,7} h(\beta_{i,1}) + 2\sum_{i=2,3,4} h(\beta_{i,3}) + \sum_{i=2,3} \big(h(\beta_{i,5}) + h(\beta_{i+4,9})\big) + \\ + \sum_{i=1,3,4} \big(h(\beta_{i,8}) + h(\beta_{i+4,6})\big).$$

Чтобы вычислить вклад бизвёздных преобразований вершины 1, мы изобразим комбинаторные сферы, получающиеся из линка вершины 1 при рассматриваемой цепочке бизвёздных преобразований, несколькими разными способами (см. рис. B.6). Рассматривая элементарные циклы, изображённые на этом рисунке, заключаем, что $h(\beta_{3,1}) = 0$ и $h(\beta_{4,1}) + h(\beta_{5,1}) = h(\beta_{7,1}) = \frac{1}{30}$; таким образом, $\sum\limits_{i=3,4,5,7} h(\beta_{i,1}) = \frac{1}{15}$.

Рассмотрим 7 элементарных циклов, изображённых на рис. B.7, *а*; невидимые части комбинаторных сфер везде такие, как на рис. B.5, *а*; α_i, $i = 1, 2, \dots, 5,$ — вспомогательные бизвёздные преобразования. Возьмём линейную комбинацию значений класса когомологий c_0 на этих циклах такую, что коэффициенты при 6 циклах равны 1, а коэффициент при цикле, помеченном двумя окружностями, равен 2. В результате получим

$$2h(\beta_{4,3}) + 2h(\alpha_1) = 2\cdot\frac{1}{420} - \frac{1}{210} + 2\cdot\frac{11}{210} + 2\cdot\frac{1}{168} = \frac{7}{60}$$

Рассматривая цикл, изображённый на рис. B.7, *б*, получаем

$$h(\beta_{2,3}) + h(\beta_{3,3}) - h(\alpha_1) = -\frac{1}{420}$$

Значит, $\sum\limits_{i=2,3,4} h(\beta_{i,3}) = \frac{47}{840}$.

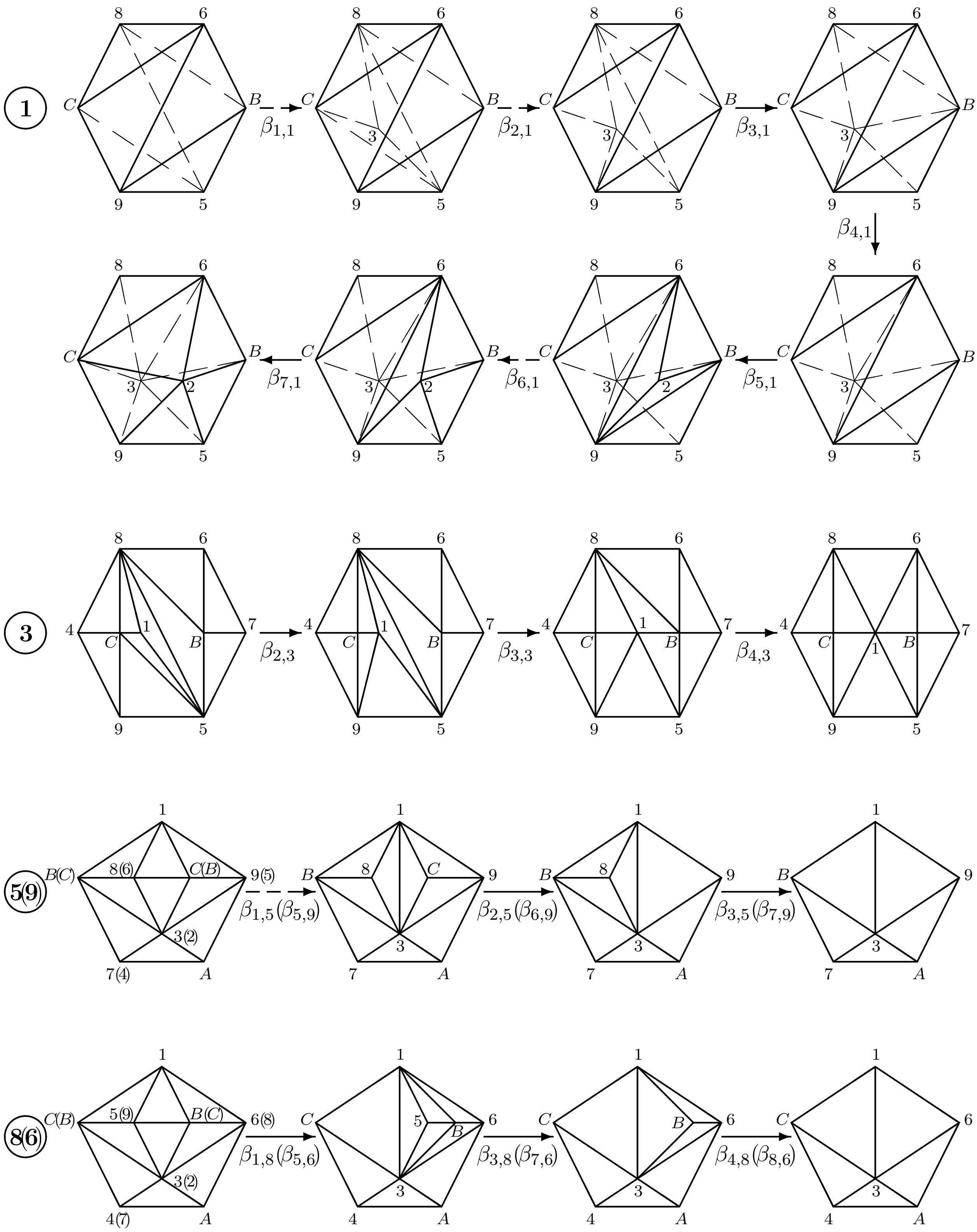


Рис. В.4. Бизвёздные преобразования $\beta_{i,j}$

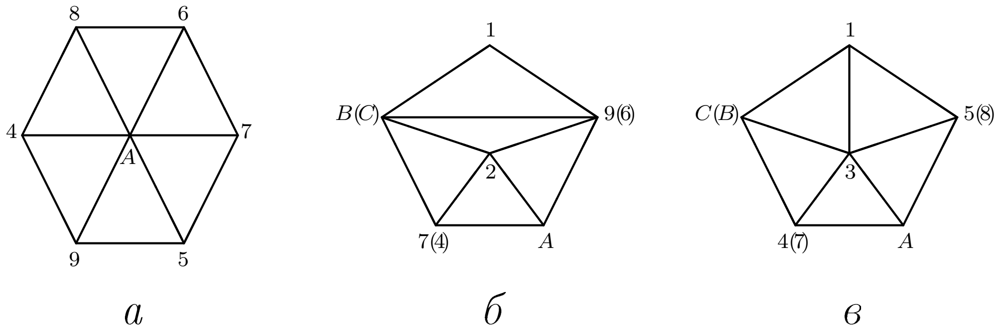


Рис. В.5. «Невидимые части» линков: (*а*) вершины 3; (*б*) вершин 5, 8; (*в*) вершин 9, 6

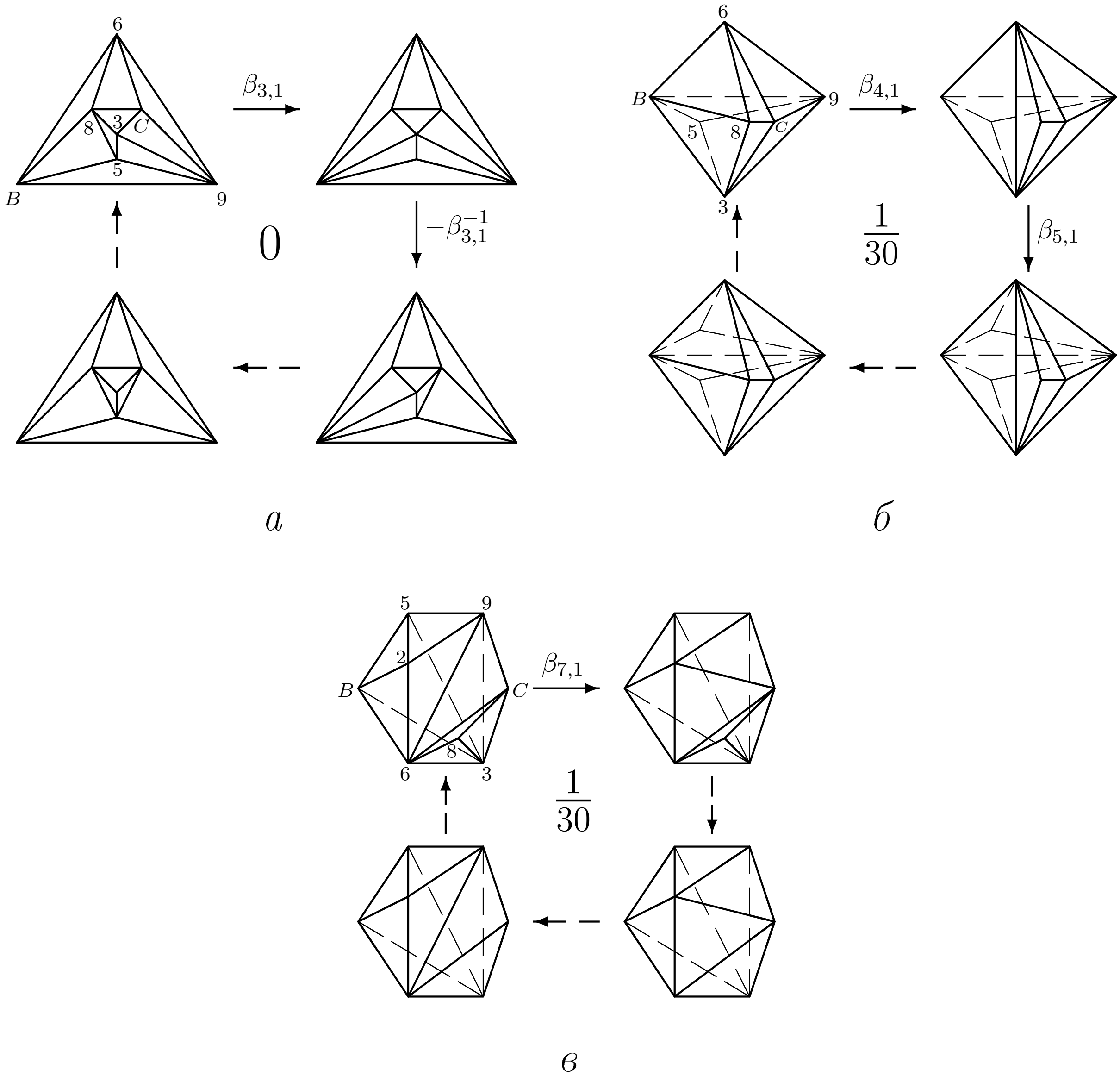


Рис. В.6. Вклад вершины 1

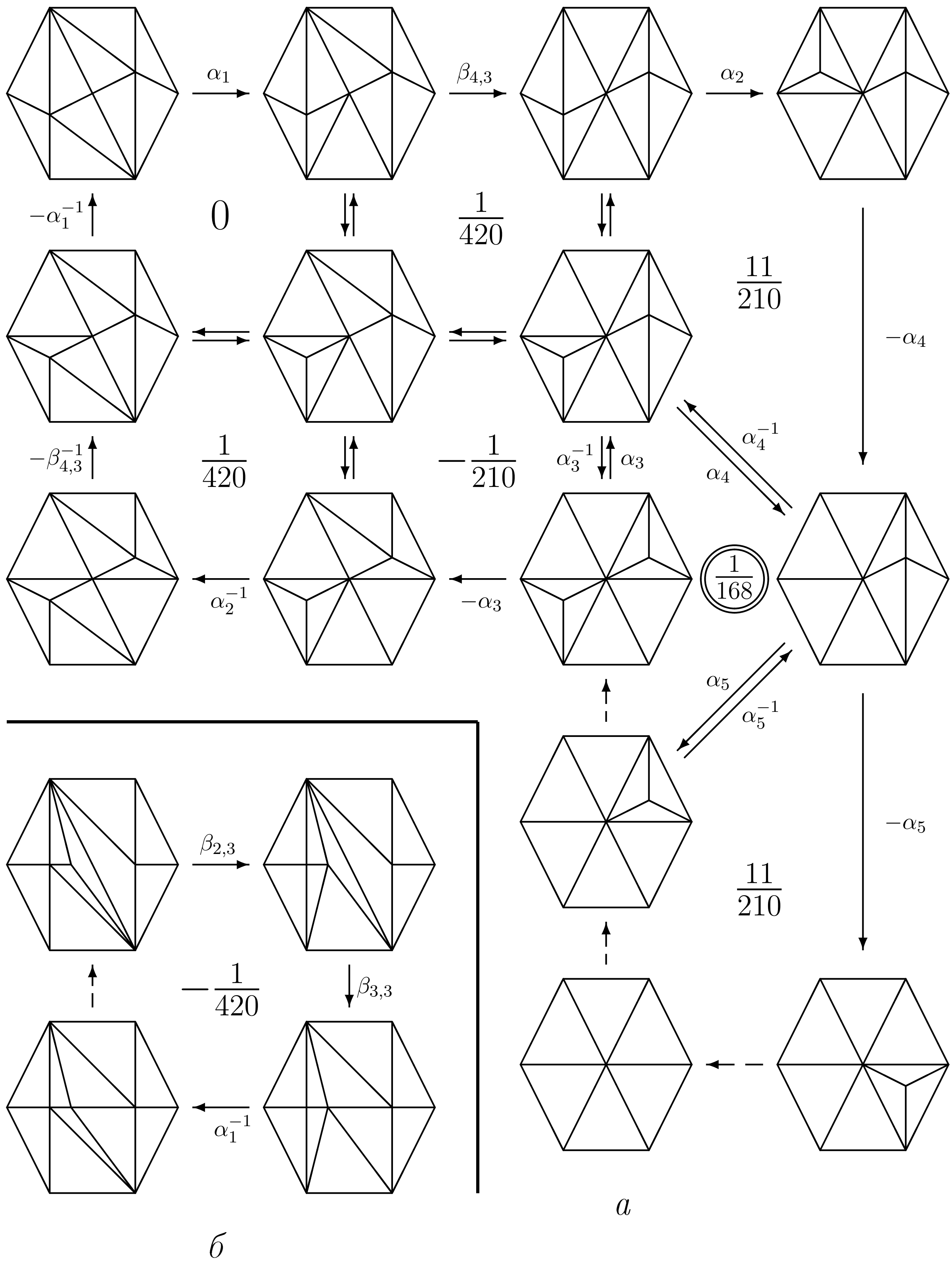


Рис. В.7. Вклад вершины 3

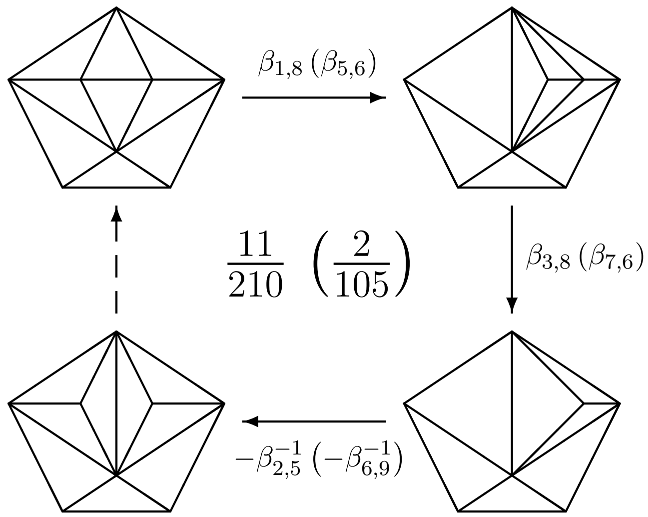


Рис. В.8. Вклад вершин 5, 6, 8, и 9

Преобразование $\beta_{3,5}$ эквивалентно преобразованию $-\beta_{4,8}$; преобразование $\beta_{7,9}$ — преобразованию $-\beta_{8,6}$. Поэтому, рассматривая два цикла, изображённые на рис. В.8 (они отличаются тем, что невидимые части комбинаторных сфер таковы как на рис. В.5, *б* и *в* соответственно), получим

$$\sum_{i=2,3} h(\beta_{i,5}) + \sum_{i=1,3,4} h(\beta_{i,8}) = \frac{11}{210}; \qquad \sum_{i=6,7} h(\beta_{i,9}) + \sum_{i=5,7,8} h(\beta_{i,6}) = \frac{2}{105}$$

Таким образом,

$$f(\langle\mathcal{N}\rangle) = \frac{1}{15} + 2\cdot\frac{47}{840} + \frac{11}{210} + \frac{2}{105} = \frac{1}{4}$$

Приложение C

Представления m-значных групп на триангуляциях многообразий

В 1971 году в работе В. М. Бухштабера и С. П. Новикова [7] возникла конструкция в теории характеристических классов векторных расслоений, в которой произведением двух элементов некоторого множества являлся набор (с кратностями) из m элементов того же множества. Эта конструкция привела к понятию m-значной группы. Теория m-значных групп развивалась в работах В. М. Бухштабера [4], [58] и В. М. Бухштабера и Е. Г. Риса [9], [59], [60]. С момента возникновения теории многозначных групп одними из основных её приложений являются её приложения в теории m-значных динамических систем с дискретным временем (m-значных динамик) [62], и в примыкающей к ней теории действий m-значных групп на графах [47].

В этом разделе мы покажем, как конструкция Пеццана-Ферри используется в задаче об интегрируемости многозначных динамик на триангуляциях многообразий при помощи многозначных групп. Результаты этого раздела получены автором совместно с В. М. Бухштабером (см. [6]).

Для произвольного множества X через $(X)^m$ мы обозначим его m-

ую симметрическую степень. Говорят, что на множестве X задана структура *m-значной группы*, если заданы m-значная операция умножения $\mu : X \times X \to (X)^m$, $\mu(x, y) = x * y$, единица $e \in X$ и операция взятия обратного элемента $\mathrm{inv} : X \to X$, удовлетворяющие естественным обобщениям аксиом ассоциативной группы (см. [58]). Для любых группы G и ее конечной подгруппы H из m элементов на множестве двойных смежных классов $H\backslash G/H$ существует структура *бикосетной* m-значной группы с умножением $(Hh_1H) * (Hh_2H) = [Hh_1hh_2H,\, h \in H]$.

Действием m-значной группы X на множестве U называется отображение $X \times U \to (U)^m$, $(x, u) \mapsto x \circ u$, такое что для любых $x_1, x_2 \in X$, $u \in U$ наборы $(x_1 * x_2) \circ u$ и $x_1 \circ (x_2 \circ u)$ из m^2 элементов совпадают, $e \circ u = [u, \ldots, u]$.

Отображение $T : U \to (U)^m$ называется *m-значной динамикой* на множестве U. Говорят, что m-значная динамика T интегрируема при помощи m-значной группы U с одной образующей a, если существует действие группы X на множестве U, такое что $T(u) = a \circ u$ для любого $u \in U$.

Для любого k структура m-значной группы на множестве X определяет на X структуру km-значной группы kX, называемой *диагональю* исходной группы. Аналогично определяется диагональ m-значной динамики (детали см. в [58]).

В качестве одного из интересных примеров многозначных динамик В. М. Бухштабер предложил рассматривать $(n + 1)$-значную динамику T на множестве U n-мерных симплексов n-мерного симплициально клеточного псевдомногообразия K, которая каждому симплексу σ сопоставляет набор всех n-мерных симплексов, не совпадающих с σ и имеющих с σ общую гипергрань (симплекс, имеющий с σ несколько общих гиперграней, входит в набор $T(\sigma)$ с соответствующей кратностью). Обозначим через K' барицентрическое подразделение комплекса K и через U' множество n-мерных симплексов комплекса K'.

Теорема C.15. *Для любого псевдомногообразия K динамика $n!T$ интегрируема при помощи некоторой бикосетной однопорождённой $(n+1)!$-значной группы $X = H\backslash G/H$. При этом в качестве группы G может быть выбрана некоторая подгруппа группы перестановок $S_{U'}$ множества U', а подгруппа H изоморфна группе S_{n+1}.*

Доказательство. Дадим явную конструкцию $(n+1)!$-значной группы X. Комплекс K' является симплициальным псевдомногообразием с вершинами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества $[n+1]$ (барицентр каждого j-мерного симплекса красим в цвет $j+1$). Конструкция Пеццана-Ферри сопоставляет ему однородный граф Γ степени $n+1$ на множестве вершин U'; пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — задающие его инволюции на множестве U'. Возьмем в качестве G подгруппу группы $S_{U'}$, порожденную инволюциями $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n+1}$; в качестве H — подгруппу, порожденную инволюциями $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Непосредственно проверяется, что имеет место следующее предложение.

Предложение C.16. *Перестановки Φ_i удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\Phi_i^2 = 1; \quad \Phi_i\Phi_j = \Phi_j\Phi_i, \ |i-j| > 1; \quad \Phi_i\Phi_{i+1}\Phi_i = \Phi_{i+1}\Phi_i\Phi_{i+1}, \ i < n.$$

Группа H изоморфна группе S_{n+1}.

Рассмотрим бикосетную $(n+1)!$-значную группу $X = H\backslash G/H$ с одной образующей $a = H\Phi_n H$. Группа G действует на множестве U' так, что $U'/H = U$. Следовательно, имеет место действие $(n+1)!$-значной группы X на множестве U. Несложно проверить, что это действие интегрирует $(n+1)!$-значную динамику $n!T$. $\square$

Обобщая описанную конструкцию, П. В. Ягодовский и автор [24] доказали довольно сильное достаточное условие интегрируемости m-значной динамики при помощи однопорождённой m-значной группы, из которого, в частности, следует, что в рассмотренном примере интегрируемой является сама динамика T, а не только её диагональ $n!T$. Этот результат не включены в диссертацию, так как он практически не связан с основной тематикой диссертации.

Литература

[1] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, главы 4–6. М.: Мир, 1972.

[2] Бухштабер В. М., *Модули дифференциалов спектральной последовательсти Атья-Хирцебруха I, II*, Матем. сб., т. 78 (1969), №2, с. 307–320; т. 83 (1970), № 1, с. 61–76.

[3] Бухштабер В. М., *Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп*, Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Соврем. пробл. мат., т. 10 (1978), с. 5–178.

[4] Бухштабер В. М., *Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы*, Успехи математических наук, т. 45 (1990), №3, с. 185–186.

[5] Бухштабер В. М., *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения*, Труды МИАН, т. 263 (2008), с. 18–43.

[6] Бухштабер В. М., Гайфуллин А. А., *Представления m-значных групп на триангуляциях многообразий*, Успехи математических наук, т. 61 (2006), №3, с. 171–172.

[7] Бухштабер В. М., Новиков С. П., *Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса*, Матем. сб., т. 84 (1971), №1, с. 81–118.

[8] Бухштабер В. М., Панов Т. Е., *Торические действия в топологии и комбинаторике*. М.: МЦНМО, 2004.

[9] Бухштабер В. М., Рис Е. Г., *Многозначные группы и n-алгебры Хопфа*, Успехи математических наук, т. 51 (1996), №4, с. 149–150.

[10] Винберг Э. Б., *Дискретные линейные группы, порождённые отражениями*, Известия АН СССР, сер. матем., т. 35 (1971), №5, с. 1072–1112.

[11] Володин И. А., Кузнецов В. Е., Фоменко А. Т., *О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы*, Успехи матем. наук, т. 29 (1974), № 5, с. 71–168.

[12] Габриэлов А. М., *Комбинаторные формулы для классов Понтрягина и GL-инвариантные цепи*, Функц. анализ и прил., т. 12 (1978), № 2, с. 1–7.

[13] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., *Комбинаторное вычисление характеристических классов*, Функц. анализ и прил., т. 9 (1975), № 2, с. 12–28, № 3, с. 5–26.

[14] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В. *Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина*, Функц. анализ и прил., т. 10 (1976), № 1, с. 14–17.

[15] Гайфуллин А. А., *О локальных формулах для комбинаторных классов Понтрягина многообразий*, Успехи математических наук, т. 59 (2004), № 2, с. 189–190.

[16] Гайфуллин А. А., *Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина*, Известия РАН, сер. матем., т. 68 (2004), № 5, с. 13–66.

[17] Гайфуллин А. А., *Вычисление характеристических классов многообразия по его триангуляции*, Успехи матем. наук, т. 64 (2005), № 4, с. 37–66.

[18] Гайфуллин А. А., *Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий*, Успехи математических наук, т. 62 (2007), № 6, с. 167–168.

[19] Гайфуллин А. А., *Реализация циклов асферичными многообразиями*, Успехи математических наук, т. 63 (2008), № 3, с. 173–174.

[20] Гайфуллин А. А., *Многообразие изоспектральных симметрических трехдиагональных матриц и реализация циклов асферичными многообразиями*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 263 (2008), с. 44–63.

[21] Гайфуллин А. А., *Построение комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин*, Известия РАН, сер. матем., т. 72 (2008), № 5, с. 3–62.

[22] Гайфуллин А. А., *Минимальная триангуляция комплексной проективной плоскости, допускающая шахматную раскраску четы-*

рехмерных симплексов, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 266 (2009), с. 33–53.

[23] Гайфуллин А. А., *Пространства конфигураций, бизвёздные преобразования и комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 268 (2010), с. 76–93.

[24] Гайфуллин А. А., Ягодовский П. В., *Об интегрируемости m-значных динамик при помощи однопорождённых m-значных групп*, Успехи математических наук, т. 62 (2007), №1, с. 201–202.

[25] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия: Методы и приложения. Т. 3: Теория гомологий*, М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[26] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., под ред. Новикова С. П., *Теория солитонов: Метод обратной задачи.* М.: Наука, 1980.

[27] Зейферт Г., Трельфалль В., *Топология.* М.–Л.: ГОНТИ, 1938; Ижевск: НИЦ РХД, 2001.

[28] Казарян М. Э., *Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей*, Успехи мат. наук, т. 50 (1995), № 4, с. 45–70.

[29] Казарян М. Э., *Характеристическая спектральная последовательность классов особенностей*, Дополнение к кн.: Васильев В. А., *Лагранжевы и лежандровы характеристические классы*, М.: МЦНМО, 2000.

[30] Коннер П., Флойд Э., *Гладкие периодические отображения*, М.: Мир, 1969.

[31] Матвеев С. В., *Алгоритмическая топология и классификация трёхмерных многообразий*, М.: МЦНМО, 2007.

[32] Милнор Дж., Сташеф Дж., *Характеристические классы*, М.: Мир, 1979.

[33] Мищенко А. С., *Локальная комбинаторная формула Хирцебруха*, Труды МИАН, т. 244 (1999), с. 249–263.

[34] Новиков С. П., *Гомотопические свойства комплексов Тома*, Матем. сб., т. 57 (1962), №4, с. 407–442.

[35] Новиков С. П., *Топологическая инвариантность рациональных классов Понтрягина*, ДАН СССР, т. 163 (1965), № 2, с. 298–301.

[36] Новиков С. П., *О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях (классы Понтрягина, гладкости, многомерные узлы)*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30 (1966), № 1, с. 71–96.

[37] Понтрягин Л. С., *Характеристические циклы многообразий*, ДАН СССР, т. 35, №2 (1942), с. 35–39.

[38] Понтрягин Л. С., *Некоторые топологические инварианты римановых многообразий*, ДАН СССР, т. 43, №3 (1944), с. 95–98.

[39] Понтрягин Л. С., *Характеристические циклы дифференцируемых многообразий*, Матем. сб., т. 21(63), №2 (1947), с. 233–284.

[40] Понтрягин Л. С., *Векторные поля на многообразиях*, Матем. сб., т. 24(66), №2 (1949), с. 129–162.

[41] Понтрягин Л. С., *Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 13 (1949), №2, с. 125–162.

[42] Рохлин В. А., *Внутренние гомологии*, ДАН СССР, т. 89 (1953), № 5, с. 789–792.

[43] Рохлин В. А., Шварц А. С., *О комбинаторной инвариантности классов Понтрягина*, ДАН СССР, т. 114 (1957), №3, с. 490–493.

[44] Рурк К., Сандерсон Б., *Введение в кусочно линейную топологию.* М.: Мир, 1974.

[45] Сулливан Д., *Геометрическая топология*, Новокузнецк: ИО НФМИ, 1999.

[46] Хирцебрух Ф., *Топологические методы в алгебраической геометрии*, М.: Мир, 1973.

[47] Ягодовский П. В., *Бикосетные группы и симметрические графы*, Записки науч. сем. ПОМИ, т. 292 (2002), с. 161–174.

[48] Adams J. F., *A variant of E. H. Brown's representability theorem*, Topology, v. 10 (1971), p. 185–198.

[49] Alexander J. W., *The combinatorial theory of complexes*, Ann. Math., v. 31 (1930), p. 292–320.

[50] Armstrong M. A., *Transversality for polyhedra*, Ann. of Math., v. 86 (1967), p. 172–191.

[51] Armstrong M. A., Zeeman E. C., *Transversality for piecewise-linear manifolds*, Topology, v. 8 (1967), p. 433–466.

[52] Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M., *Spectral asymmetry and riemannian geometry*, Bull. London Math. Soc., v. 5 (1973), № 2, p. 229–234.

[53] Baas N. A. *On bordism theory of manifolds with singularities*, Math. Scand., v. 33 (1973), № 2, p. 279–302.

[54] Björner A., Las Vergnas M., Sturmfels B., White N., Ziegler G., *Oriented matroids*, Encyclopedia Math. Appl., Cambridge Univ. Press, 1992.

[55] Björner A., Lutz F., *Simplicial manifolds, bistellar flips and* 16*-vertex triangulation of the Poincaré homology* 3*-sphere*, Experiment. Math., v. 9 (2000), № 2, p. 275–289.

[56] Brooks R., *On branched coverings of* 3*-manifolds which fiber over the circle*, J. Reine Angew. Math., v. 362 (1985), p. 87–101.

[57] Brown E. H., Jr., *Cohomology theories*, Ann. Math., v. 75 (1962), № 3, p. 467–484.

[58] Buchstaber V. M., *The n-valued groups: theory and applications*, Moscow Math. J., v. 6 (2006), №1, p. 57–84.

[59] Buchstaber V. M., Rees E. G., *Multivalued groups, their representations and Hopf algebras*, Transformation Groups, v. 2 (1997), №4, p. 325–349.

[60] Buchstaber V. M., Rees E. G., *Multivalued groups, n-Hopf algebras and n-ring homomorphisms.* In book: Lie Groups and Lie Algebras. Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 85–107.

[61] Buchstaber V. M., Veselov A. P., *On a remarkable functional equation in the theory of generalized Dunkl operators and transformations of elliptic genera*, Math. Z. 1996. V. 223. P. 595–607.

[62] Buchstaber V. M., Veselov A. P., *Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups*, Int. Math. Res. Not., v. 8 (1996), p. 381–400.

[63] Buoncristiano S., Dedò M., *On resolving singularities and relating bordisms to homology*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, v. 7 (1980), №4, p. 605–624.

[64] Buoncristiano S., Hacon D., *An elementary geometric proof of two theorems of Thom*, Topology, v. 20 (1981), p. 97–99.

[65] Buoncristiano S., Rourke C. P., Sanderson B. J., *A Geometric Approach to Homology Theory*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., v. 18, Cambridge Univ. Press, 1976.

[66] Cairnes S. S., *Isotopic deformations of geodesic complexes on the 2-sphere and on the plane*, Ann. Math., v. 45 (1944), № 2, p. 207–217.

[67] Carlson J. A., Toledo D., *Harmonic mapping of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Publ. Math. I.H.E.S., v. 69 (1989), p. 173–201.

[68] Cheeger J., *A combinatorial formula for Stiefel–Whitney classes*, Topology of Manifolds. Markham, 1970, p. 470–471.

[69] Cheeger J., *On the Hodge theory of riemannian pseudomanifolds*, Proc. Sympos. Pure Math., v. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, p. 91–145.

[70] Cheeger J., *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom., v. 18 (1983), № 4, p. 575–657.

[71] Davis M. W., *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. Math. (2), v. 117 (1983), № 2, p. 293–324.

[72] Davis M. W. *Some aspherical manifolds*, Duke Math. J., v. 55 (1987), №1, p. 105–139.

[73] Davis M. W., *Nonpositive Curvature and Reflection Groups*, in *Handbook of Geometric Topology*, edited by R. J. Daverman and R. B. Sher, Elsevier Science B. V., 2002, p. 373–422.

[74] Davis M. W., Januszkiewicz T., *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., v. 62 (1991), №2, p. 417–451.

[75] Davis M. W., Januszkiewicz T., *Hyperbolization of polyhedra*, J. Diff. Geom., v. 34 (1991), № 2, p. 347–388.

[76] Duan H., Wang S., *The degrees of maps between manifolds*, Math. Z., v. 244 (2003), p. 67–89.

[77] Duan H., Wang S., *Non-zero degree maps between $2n$-manifolds*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), v. 20 (2004), p. 1–14.

[78] Eilenberg S., *Problems in topology*, Ann. Math. (2), v. 50 (1949), p. 246–260.

[79] Ferri M., *Una rappresentazione delle n-varietà topologiche triangolabili mediante grafi* $(n+1)$*-colorati* Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 5, v. 13-B (1976), №1, p. 250–260.

[80] Ferri M., Gagliardi C., Grasselli L., *A graph-theoretical representation of PL-manifolds – A survey on crystallizations*, Aequationes Math., v. 31 (1986), №2–3, p. 121–141.

[81] Fried D., *The cohomology of an isospectral flow*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 98 (1986), p. 363–368.

[82] Furuta M., *Homology cobordism group of homology* 3*-spheres*, Invent. Math., v. 100 (1990), p. 339–355.

[83] Gelfand I. M., MacPherson R. D., *A combinatorial formula for the Pontrjagin classes*, Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 26. № 2. P. 304–309.

[84] Goldstein R. Z., Turner E. C., *A formula for Stiefel–Whitney homology classes*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 58 (1976), p. 339–342.

[85] Goresky M., MacPherson R., *Intersection homology theory*, Topology, v. 19 (1980), №2, p. 135–162.

[86] Gromov M., *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S., v. 56 (1982), p. 5–99.

[87] Grünbaum B., Sreedharan V. P., *An enumeration of simplicial 4-polytopes with 8 vertices*, J. Combin. Theory., Ser. A., v. 2 (1967), p. 437–465

[88] Halperin S., Toledo D., *Stiefel-Whitney homology classes*, Ann. Math., v. 86 (1972), № 3, p. 511–525.

[89] Hirsch M. W., *On tubular neighbourhoods of manifolds I and II*, Proc. Cam. Phil. Soc., v. 62 (1966), 177 and 183.

[90] Ho C.-W., *On certain homotopy properties of some spaces of linear and piecewise linear homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 181 (1973), p. 213–243.

[91] Hopf H., *Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten*, Math. Zeitschr., v. 29 (1929), p. 494–524.

[92] Kato M., *Combinatorial Prebundles, Part I*, Osaka J. Math., v. 4 (1967), p. 289–303.

[93] Kato M., *Topological resolution of singularities*, Topology, v. 12 (1973), №4, p. 355–372.

[94] Kazarian M. È., *The Chern–Euler Number of Circle Bundle via Singularity Theory*, Math. Scand., v. 82 (1998), p. 207–236.

[95] Kotschick D., Löh C., *Fundamental classes not representable by products*, J. London Math. Soc., v. 79 (2009), p. 545–561.

[96] Kühnel W., Banchoff T. F., *The 9-vertex complex projective plane*, Math. Intell., v. 5 (1983), № 3, p. 11–22.

[97] Kühnel W., Lassmann G., *The unique 3-neighborly 4-manifold with few vertices*, J. Combin. Theory., Ser. A., v. 35 (1983), № 2, p. 173–184.

[98] Levitt N., Rourke C., *The existence of combinatorial formulae for characteristic classes*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 239 (1978), p. 391–397.

[99] Lickorish W. B. R., *Simplicial moves on complexes and manifolds*, Geometry and Topology Monographs, v. 2 (1999), Proceedings of the Kirbyfest, p. 299–320.

[100] MacPherson R., *The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class*, Sèminaire Bourbaki No. 497. Lecture Notes in Math. V. 677. Heidelburg: Springer, 1977.

[101] Martin N., *On the difference between homology and piecewise-linear bundles*, J. London Math. Soc., v. 6 (1973), № 2, p. 197–204.

[102] Maunder C. R. F., *On the Pontrjagin classes of homology manifolds*, Topology, v. 10 (1971), № 2, p. 111–118.

[103] Milin L., *A combinatorial computation of the first Pontryagin class of the complex projective plane*, Geom. Dedicata, v. 49 (1994), p. 253–291.

[104] Milnor J., *On the cobordism ring and a complex analogue. I*, Amer. Math. J., v. 82 (1960), № 3, p. 505–521.

[105] Milnor J., *Topological manifolds and smooth manifolds*, Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962), 1963, pp. 132–138, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm.

[106] Milnor J., *Microbundles, part I*, Topology, v. 3 (1964), suppl. no. 1, p. 53–80.

[107] Milnor J. W., Thurston W. P., *Characteristic numbers of 3-manifolds*, Enseign. Math., v. 23 (1977), p. 249–254.

[108] Morlet C., *Les voisinages tubulaires des variétés semi-linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, v. 262 (1966), p. A740–A743.

[109] Morlet C., *Les méthodes de la topologie différentielle dans l'étude des variétés semi-linéaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), v. 1 (1968), p. 313–394.

[110] Moser J., *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system*, Lecture Notes in Physics, v. 38 (1975), Springer–Verlag, p. 467–497.

[111] Pachner U., *Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, v. 57 (1987), p. 69–86.

[112] Pachner U., *P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*, European J. Combin., v. 12 (1991), № 2, p. 129–145.

[113] Pezzana M., *Diagrammi di Heegaard e triangolazione contratta*, Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 4., v. 12 (1975), Suppl. al №3, p. 98–105.

[114] Ranicki A., Sullivan D., *A semi-local combinatorial formula for the signature of a 4k-manifold*, J. Differential Geom., v. 11 (1976), № 1, p. 23–29.

[115] Rourke C. P., Sanderson B. J., *Block bundles*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 72 (1966), p. 1036–1039.

[116] Rourke C. P., Sanderson D. J., *An Embedding Without a Normal Microbundle*, Inventiones Math., v. 3 (1967), p. 293–299.

[117] Rourke C. P., Sanderson D. J., *Block bundles: I*, Ann. of Math., v. 87 (1968), p. 1–28.

[118] Rourke C. P., Sanderson D. J., *Block bundles: II. Transversality*, Ann. of Math., v. 87 (1968), p. 255–277.

[119] Rourke C. P., Sanderson D. J., *Block bundles: III. Homotopy Theory*, Ann. of Math., v. 87 (1968).

[120] Sampson J. H., *Application of harmonic maps to Kähler geometry*, Contemp. Math., v. 49 (1986), p. 125–133.

[121] Serre J.-P., *Groupes d'homotopie et classes des groupes abeliens*, Ann. Math., v. 58 (1953), p. 258–294. Русский перевод: Серр Ж.-П., *Группы гомотопий и классы абелевых групп*, Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 124–162.

[122] Steinitz E., Rademacher H., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin: Springer-Verlag, 1934; Reprint: Springer-Verlag, 1976.

[123] Stiefel E., *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv., v. 8 (1936), p. 305–353.

[124] Sullivan D., *On the Hauptvermutung for manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 73 (1967), № 4, p. 598–600.

[125] Sullivan D., *Singularities in spaces*, Proc. of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture notes in Mathematics, v. 209 (1971), p. 196–206.

[126] Thom R., *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv., v. 28 (1954), p. 17–86. Русский перевод: Том Р., *Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий*, Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 291–348.

[127] Thom R., *Les classes charactéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico: La Universidad Nacional Autonoma de Mexico y la Unesco, 1958, p. 54–67.

[128] Tomei C., *The topology of the isospectral manifold of tridiagonal matrices*, Duke Math. J., v. 51 (1984), №4, p. 981–996.

[129] Wang S., *Non-zero degree maps between* 3-*manifolds*, Proc. of the ICM Beijin 2002, vol. II, p. 457–468, Higher Education Press, Beijin, 2002.

[130] Whitney H., *On the Theory of Sphere Bundles*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 26(1940), № 2, p. 148–153.

[131] Whitney H., *Lectures in Topology*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1941, p. 101–141.

[132] Ziegler G. M., *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Math., v. 152, Springer-Verlag, 1995.