Математический институт им. В. А. Стеклова

Российская Академия Наук

На правах рукописи
УДК 515.16

Гайфуллин Александр Александрович

Проблема комбинаторного вычисления рациональных классов Понтрягина

Специальность:
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный консультант:
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
профессор Виктор Матвеевич Бухштабер.

Официальные оппоненты:
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
профессор Сергей Владимирович Матвеев;
доктор физико-математических наук,
профессор Сергей Миронович Натанзон;
доктор физико-математических наук,
профессор Аскольд Георгиевич Хованский.

Ведущая организация:
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.

Защита диссертации состоится 23 декабря 2010 г. в $14^{\underline{00}}$ на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Учреждении Российской академии наук Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 119991, Москва, ГСП, ул. Губкина, дом 8 (9 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан ____ ноября 2010г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 002.022.03 при
МИ РАН им. В. А. Стеклова
доктор физико-математических наук, Н. П. Долбилин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория характеристических классов первоначально возникла из задачи об особенностях векторных полей на гладких многообразиях. Задача об изучении особенностей векторного поля на многообразии восходит к работам Пуанкаре по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Первым замечательным результатом теории характеристических классов стала теорема Х. Хопфа[1], который показал, что классический инвариант многообразий — эйлерова характеристика — выражается как сумма индексов особых точек касательного векторного поля с изолированными особыми точками. Е. Штифель[2] изучил циклы особенностей наборов из k касательных векторных полей $v_1, \ldots, v_k$ общего положения; под циклом особенностей он понимал подмножество, на котором векторные поля $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы. Такие циклы особенностей являются циклами с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. В дальнейшем их изучение было продолжено Х. Уитни[3,4]; в настоящее время они носят название *классов Штифеля–Уитни*. Наконец, в 1940х годах Л. С. Понтрягин[5,6,7] поставил и полностью решил гораздо более общую задачу о циклах особенностей наборов векторных полей $v_1, \ldots, v_k$, рассмотрев циклы особенностей, определяемые несколькими условиями вида $\operatorname{rank}(v_1, \ldots, v_{l_j}) \leqslant m_j$. Наряду с циклами Е. Штифеля, Л. С. Понтрягин получил таким образом новые, целочисленные характеристические циклы; двойственные целочисленные классы когомологий называются в настоящее время *классами Понтрягина*.

Другой, дифференциально геометрический, подход к определению характеристических классов многообразий также принадлежит Л. С. Понтрягину[8,9]: он показал, что определённые свёртки степеней тензора кривизны Римана риманова многообразия являются замкнутыми дифференциальны-

[1] Hopf H., *Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten*, Math. Zeitschr., v. 29 (1929), p. 494–524.

[2] Stiefel E., *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv., v. 8 (1936), p. 305–353.

[3] Whitney H., *On the Theory of Sphere Bundles*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 26 (1940), № 2, p. 148–153.

[4] Whitney H., *Lectures in Topology*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1941, p. 101–141.

[5] Понтрягин Л. С., *Характеристические циклы многообразий*, ДАН СССР, т. 35, №2 (1942), с. 35–39.

[6] Понтрягин Л. С., *Характеристические циклы дифференцируемых многообразий*, Матем. сб., т. 21(63), №2 (1947), с. 233–284.

[7] Понтрягин Л. С., *Векторные поля на многообразиях*, Матем. сб., т. 24(66), №2 (1949), с. 129–162.

[8] Понтрягин Л. С., *Некоторые топологические инварианты римановых многообразий*, ДАН СССР, т. 43, №3 (1944), с. 95–98.

[9] Понтрягин Л. С., *Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 13 (1949), №2, с. 125–162.

ми формами, классы которых в группах когомологий де Рама не зависят от выбора римановой структуры. В отличие от первого подхода, такой дифференциально геометрический подход даёт только *вещественные* классы Понтрягина, лежащие в группах $H^{4i}(M;\mathbb{R})$. В действительности, эти классы являются *рациональными*, то есть лежат в образах естественных гомоморфизмов $H^{4i}(M;\mathbb{Q}) \to H^{4i}(M;\mathbb{R})$; тем не менее, они несут гораздо меньше информации, чем *целочисленные* классы Понтрягина $p_i \in H^{4i}(M;\mathbb{Z})$, определяемые через особенности векторных полей.

Важнейшим шагом в развитии теории характеристических классов стало открытие В. А. Рохлиным[10] связи между числом Понтрягина и сигнатурой ориентированного замкнутого гладкого 4-мерного многообразия:

$$\operatorname{sign}\bigl(M^4\bigr) = \frac{1}{3}\bigl\langle p_1\bigl(M^4\bigr), \bigl[M^4\bigr]\bigr\rangle.$$

Обобщением этой формулы для многообразий размерности $4k$ является знаменитая формула Хирцебруха[11]

$$\operatorname{sign}\bigl(M^{4k}\bigr) = \bigl\langle L_k\bigl(p_1\bigl(M^{4k}\bigr), p_2\bigl(M^{4k}\bigr), \ldots, p_k\bigl(M^{4k}\bigr)\bigr), \bigl[M^{4k}\bigr]\bigr\rangle.$$

Здесь $L_k \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots, p_k]$ — однородные полиномы степеней $4k$ (где $\deg p_i = 4i$) такие, что

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} L_k(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{t_j}}{\operatorname{th}(\sqrt{t_j})}, \tag{1}$$

где σ_i есть i-ый элементарный симметрический полином от переменных t_j.

Опираясь на формулу Хирцебруха, В. А. Рохлин и А. С. Шварц[12] и, независимо, Р. Том[13] доказали в конце 1950х годов, что рациональные классы Понтрягина инвариантны относительно кусочно линейных гомеоморфизмов и определены для всех кусочно линейных многообразий. Намного более сильным результатом является знаменитая теорема С. П. Новикова[14] о топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина. С другой стороны, Дж. Милнор и М. Кервер построили пример, показывающий, что целочисленные классы Понтрягина не являются комбинаторными инвариантами.

[10] Рохлин В. А., *Внутренние гомологии*, ДАН СССР, т. 89 (1953), № 5, с. 789–792.

[11] Хирцебрух Ф., *Топологические методы в алгебраической геометрии*, М.: Мир, 1973.

[12] Рохлин В. А., Шварц А. С., *О комбинаторной инвариантности классов Понтрягина*, ДАН СССР, т. 114 (1957), №3, с. 490–493.

[13] Thom R., *Les classes charactéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico: La Universidad Nacional Autonoma de Mexico y la Unesco, 1958, p. 54–67.

[14] Новиков С. П., *О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях (классы Понтрягина, гладкости, многомерные узлы)*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30 (1966), № 1, с. 71–96.

Подход Рохлина–Шварца–Тома к определению рациональных классов Понтрягина кусочно линейных многообразий является весьма неявным. В рамках этого подхода вначале определяются классы $l_k(M)$, в случае гладких многообразий совпадающие с полиномами Хирцебруха L_k от рациональных классов Понтрягина, а потом, используя то, что коэффициент при p_k в полиноме L_k ненулевой, по ним восстанавливаются классы $p_k(M)$. При этом класс $l_k(M)$ характеризуется (при $\dim M > 8k+1$) тем свойством, что его значения на фундаментальных классах всех $4k$-мерных подмногообразий $N \subset M$ с тривиальными нормальными расслоениями, равны сигнатурам этих подмногообразий. Поэтому для того, чтобы вычислить класс $l_k(M)$, необходимо реализовать элементы некоторого базиса группы $H_{4k}(M;\mathbb{Q})$ подмногообразиями с тривиальными нормальными расслоениями. Существование таких подмногообразий следует из теоремы Р. Тома[15], однако эта теорема не даёт явной комбинаторной конструкции таких подмногообразий.

Таким образом, возникает задача о прямом комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина. Отметим, что для классов Штифеля–Уитни аналогичная задача имеет очень простой ответ: в 1940 году Х. Уитни[3] доказал гипотезу Е. Штифеля[2], утверждающую, что для любого m-мерного комбинаторного многообразия K сумма по модулю 2 всех $(m-n)$-мерных симплексов первого барицентрического подразделения K' триангуляции K является циклом, представляющим класс гомологий, двойственный по Пуанкаре классу Штифеля–Уитни $w_n(K)$.

Впервые задача о прямом комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина возникла в работах А. М. Габриэлова, И. М. Гельфанда и М. В. Лосика[16,17]. Подход, развитый в этих работах и последующих работах Р. МакФерсона[18], А. М. Габриэлова[19] и И. М. Гельфанда и Р. МакФерсона[20], по сути представляет из себя попытку сымитировать для триангулированных многообразий один из первоначальных подходов Л. С. Понт-

[15] Том Р., *Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий*, Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 291–348.

[16] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., *Комбинаторное вычисление характеристических классов*, Функц. анализ и прил., т. 9 (1975), №2, с. 12–28, №3, с. 5–26.

[17] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В. *Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина*, Функц. анализ и прил., т. 10 (1976), №1, с. 14–17.

[18] MacPherson R., *The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class*, Sèminaire Bourbaki No. 497, Lecture Notes in Math., v. 677, Heidelburg: Springer, 1977.

[19] Габриэлов А. М., *Комбинаторные формулы для классов Понтрягина и GL-инвариантные цепи*, Функц. анализ и прил., т. 12 (1978), №2, с. 1–7.

[20] Gelfand I. M., MacPherson R. D., *A combinatorial formula for the Pontrjagin classes*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 26 (1992), №2, p. 304–309.

рягина к построению классов Понтрягина гладких многообразий. Главным недостатком такого подхода является неполный отказ от использования гладкой структуры на многообразии. В действительности, исходным объектом в формуле Габриэлова–Гельфанда–Лосика является не просто комбинаторное многообразие K, а комбинаторное многообразие K с заданным сглаживанием. Основным средством, при помощи которого производится перевод информации о сглаживании на комбинаторный язык, являются так называемые *пространства конфигураций*. Пространством конфигураций Σ_L $(n-1)$-мерной комбинаторной сферы L называется пространство всех линейных на симплексах вложений $\mathrm{cone}(L) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, профакторизованное по естественному действию группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Сглаживание комбинаторного многообразия K сопоставляет каждой точке каждого симплекса σ триангуляции K точку пространства конфигураций $\Sigma_{\mathrm{link}\,\sigma}$ линка симплекса σ. Таким образом, сглаживание комбинаторного многообразия задаёт набор согласованных отображений $|\sigma| \to \Sigma_{\mathrm{link}\,\sigma}$, пронумерованных симплексами σ триангуляции K. Именно комбинаторное многообразие с таким набором отображений выступает в качестве исходных комбинаторных данных для формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика.

При помощи специальных процедур усреднения по различным выборам локальных сглаживаний А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд и М. В. Лосик[17] всё-таки сумели получить формулу для первого рационального класса Понтрягина, зависящую только от комбинаторного строения триангуляции. Однако, во-первых, эта формула очень сложна, так как требует усреднения по различным точкам в пространствах Σ_L для трёхмерных комбинаторных сфер L, а во-вторых, полученные формулы применимы только для тех триангуляций K, для которых все пространства конфигураций линков симплексов непусты, то есть для так называемых *брауэровских* триангуляций. Для многообразий размерности больше 3 это условие является весьма ограничительным, то есть класс брауэровских триангуляций является довольно узким подклассом в классе всех комбинаторных многообразий.

Трудности в обобщении формулы Габриэлова–Гельфанда–Лосика для старших классов Понтрягина связаны как раз с использованием пространств конфигураций. Дело в том, что строение пространств Σ_L довольно хорошо изучено при $\dim L \leqslant 2$: известно, что Σ_L стягиваемо, если $\dim L = 1$, линейно связно и односвязно, если $\dim L = 2$, — но при $\dim L \geqslant 3$ о строении пространств Σ_L практически ничего не известно. И. М. Гельфанд и Р. МакФерсон[20] вместо пространств конфигураций использовали более комбинаторные объекты — так называемые *ориентиро-*

ванные матроиды. Это позволило им получить формулы для всех рациональных классов Понтрягина, однако в качестве исходных данных этих формул по-прежнему выступают триангулированные многообразия с заданным сглаживанием, а не просто комбинаторные многообразия. Таким образом, ни одна из формул, полученных в перечисленных выше работах, не позволяет вычислять рациональные классы Понтрягина произвольного комбинаторного многообразия без каких бы то ни было дополнительных структур.

Другой, аналитический, подход к комбинаторному вычислению классов Понтрягина триангулированных многообразий, предложенный Дж. Чигером[21], основан на конструкции η-инварианта $(4k-1)$-мерного риманова многообразия, принадлежащей М. Атья, В. Патоди и И. Зингеру[22]. Дж. Чигер наделяет триангулированное многообразие локально плоской метрикой, ограничение которой на каждый симплекс совпадает со стандартной евклидовой метрикой на правильном симплексе с ребром 1, и рассматривает операторы Лапласа в пространствах L^2-интегрируемых дифференциальных форм на линках симплексов триангуляции. Явные формулы для L-полиномов Хирцебруха от вещественных классов Понтрягина многообразия пишутся в терминах спектров этих операторов Лапласа. Формулы Чигера применимы для любого комбинаторного многообразия; циклы, получаемые при помощи этих формул, зависят только от комбинаторного строения триангуляции. Тем не менее эти формулы стоит рассматривать скорее как важные тождества, связывающие объекты, имеющие топологическую и аналитическую природу, чем как формулы для комбинаторного вычисления классов Понтрягина, ввиду того, что для спектров операторов Лапласа также нет явного выражения в комбинаторных терминах. Отметим также, что неизвестно, являются ли коэффициенты циклов, получаемых при помощи формул Чигера, рациональными. Еще один подход к задаче комбинаторного вычисления классов Понтрягина, развивающий идеи М. Громова, предложил А. С. Мищенко[23]: он построил локальную комбинаторную формулу Хирцебруха, что позволило ему дать локальное определение рациональных классов Понтрягина кусочно линейного многообразия. К сожалению, получить на этом пути явную формулу, вычисляющую ха-

[21] Cheeger J., *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom., v. 18 (1983), №4, p. 575–657.

[22] Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M., *Spectral asymmetry and riemannian geometry*, Bull. London Math. Soc., v. 5 (1973), №2, p. 229–234.

[23] Мищенко А. С., *Локальная комбинаторная формула Хирцебруха*, Труды МИАН, т. 244 (1999), с. 249–263.

рактеристический цикл по триангуляции многообразия, пока не удалось.

В диссертации последовательно развивается теория *универсальных локальных формул* для полиномов от рациональных классов Понтрягина, то есть формул вида

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma\in K,\,\dim\sigma=m-4k} f\bigl(\langle \operatorname{link}\sigma\rangle\bigr)\sigma, \tag{2}$$

где через $\langle L\rangle$ обозначен класс изоморфизма ориентированной комбинаторной сферы L и f — функция на множестве классов изоморфизма ориентированных $(4k-1)$-мерных комбинаторных сфер, меняющая знак при обращении ориентации комбинаторной сферы. Универсальность формулы (2) заключается в том, что функция f не зависит от комбинаторного многообразия K и цепь $f_\sharp(K)$ является искомым циклом для любого комбинаторного многообразия K. Изначально мотивацией для такого подхода послужили следующие три результата.

1. Локальная формула Габриэлова–Гельфанда–Лосика[17] для первого класса Понтрягина: в частном случае брауэровских триангуляций, удовлетворяющих некоторому специальному условию, она даёт цикл коразмерности 4, в котором коэффициент при каждом симплексе зависит только от класса изоморфизма его линка.

2. Аналитические формулы Чигера[21] для L-полиномов Хирцебруха от вещественных классов Понтрягина имеют вид (2).

3. Результат Н. Левитта и К. Рурка[24]: для любого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует функция, сопоставляющая каждому ориентированному комбинаторному многообразию K симплициальный цикл, в котором коэффициент при каждом симплексе полностью определяется комбинаторным строением звезды этого симплекса. Отметим, что эта теорема является только теоремой существования, не дающей никакой явной формулы.

Другой классической задачей, рассматриваемой в диссертации, является проблема реализации циклов, поставленная Н. Стинродом в конце 1940-х годов: существуют ли для данного класса гомологий $z\in H_n(X;\mathbb{Z})$ топологического пространства X замкнутое ориентированное многообразие N^n и непрерывное отображение $f: N^n\to X$, такие что $f_*[N^n]=z$? Классическим является следующий результат Р. Тома[15]: *для каждого натурального числа n существует такое натуральное число $k=k(n)$, что для любого*

[24] Levitt N., Rourke C., *The existence of combinatorial formulae for characteristic classes*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 239 (1978), p. 391–397.

n-мерного целочисленного класса гомологий $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$, класс kz реализуем в виде образа ориентированного замкнутого гладкого многообразия; кроме того Р. Том доказал, что все классы гомологий размерностей $\leqslant 6$ реализуемы и построил первый пример 7-мерного целочисленного класса гомологий, не реализуемого по Стинроду. Согласно классической теореме Милнора–Новикова, кольцо комплексных кобордизмов Ω_*^{U} не имеет кручения. Опираясь на этот факт, С. П. Новиков[25] доказал, что, если целочисленные гомологии пространства X не имеют кручения, все классы гомологий пространства X реализуются по Стинроду. Задача о реализации циклов тесно связана с задачей о дифференциалах спектральной последовательности Атья–Хирцебруха в теории $\mathrm{SO}_*(\cdot)$ ориентированных бордизмов. Член E^2 этой спектральной последовательности имеет вид $E^2_{s,t} = H_s(X;\Omega_t^{\mathrm{SO}})$, а член E^∞ присоединён к градуированной группе $\mathrm{SO}_*(X)$ ориентированных бордизмов пространства X. Класс $z \in H_n(X;\mathbb{Z}) = E^2_{n,0}$ реализуем образом гладкого многообразия тогда и только тогда, когда он является циклом всех дифференциалов. Порядки дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха были вычислены В. М. Бухштабером[26]. В результате им были получены лучшие из известных к настоящему времени оценки чисел $k(n)$.

Классический подход к проблеме Стинрода о реализации циклов, при помощи которого были получены указанные выше результаты, заключается в её сведении к гомотопической задаче при помощи теоремы трансверсальности Тома и последующего исследования этой гомотопической задачи методами алгебраической топологии. В диссертации мы предлагаем новый, комбинаторный подход к проблеме Стинрода, основанный на явном комбинаторном построении многообразия, реализующего с некоторой кратностью заданный класс гомологий. Некоторые идеи нашего подхода восходят к работе Д. Сулливана[27], в которой был предложен подход к проблеме Стинрода, основанный на разрешении особенностей псевдомногообразий.

Отметим, что С. Буонкристиано и Д. Хэкон[28], развивая идеи Сулливана, получили для теоремы Тома о том, что всякий класс гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ может быть реализован образом гладкого многообразия, геометрическое доказательство, не использующее результатов алгебраической

[25]Новиков С. П., *Гомотопические свойства комплексов Тома*, Матем. сб., т. 57 (1962), № 4, с. 407–442.

[26]Бухштабер В. М., *Модули дифференциалов спектральной последовательсти Атья-Хирцебруха I, II*, Матем. сб., т. 78 (1969), №2, с. 307–320; т. 83 (1970), №1, с. 61–76.

[27]Sullivan D., *Singularities in spaces*, Proc. of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture notes in Mathematics, v. 209 (1971), p. 196–206.

[28]Buoncristiano S., Hacon D., *An elementary geometric proof of two theorems of Thom*, Topology, v. 20, p. 97–99.

топологии; тем не менее, их доказательство использует гладкую теорему трансверсальности и не даёт явной комбинаторной конструкции реализующего многообразия.

Представляет интерес задача о реализации классов гомологий образами специальных многообразий, имеющих сравнительно простое топологическое строение. Классическим примером является задача о реализации классов гомологий образами сфер, то есть задача об описании образа гомоморфизма Гуревича. Отметим, что при такой постановке аналог теоремы Тома очевидно не верен: существуют целочисленные классы гомологий, для которых никакой кратный им класс гомологий не лежит в образе гомоморфизма Гуревича. В настоящей работе мы решаем задачу о нахождении набора $\mathcal{M}_n$ гладких n-мерных многообразий, достаточного для реализации с некоторыми кратностями всех целочисленных n-мерных классов гомологий всех пространств X. Эта задача тесно связана с отношением доминирования ориентированных замкнутых многообразий. Пусть M и N — ориентированные замкнутые многообразия одной размерности. Говорят, что многообразие M *доминирует* многообразие N и пишут $M \geqslant N$, если существует отображение $M \to N$ ненулевой степени; говорят, что многообразие M *виртуально доминирует* многообразие N, если некоторое конечнолистное накрытие над M доминирует N. Частичное упорядочение доминирования на множестве гомотопических классов ориентированных многообразий восходит к работам Дж. Милнора и У. Тёрстона[29] и М. Громова[30]. Очевидно, что гомотопический класс n-мерной сферы является наименьшим элементом в множестве гомотопических классов n-мерных ориентированных многообразий относительно рассматриваемого частичного упорядочения. С другой стороны, из того, что $M \geqslant N$ следует, что числа Бетти многообразия M не меньше соответствующих чисел Бетти многообразия N и группа $\pi_1(M)$ отображается на подгруппу конечного индекса в $\pi_1(N)$, т. е. многообразие M устроено «не проще», чем многообразие N. Отсюда следует, что в множестве гомотопических классов n-мерных ориентированных многообразий не может быть наибольшего элемента. В 1989 году Дж. Карлсон и Д. Толедо[31] поставили задачу о нахождении *максимального класса* многообразий относительно отношения доминирования, то есть такого класса n-мерных ориентированных многообразий, что любое n-мерное ориентиро-

[29] Milnor J. W., Thurston W. P., *Characteristic numbers of 3-manifolds*, Enseign. Math., v. 23 (1977), p. 249–254.

[30] Gromov M., *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S., v. 56 (1982), p. 5–99.

[31] Carlson J. A., Toledo D., *Harmonic mapping of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Publ. Math. I.H.E.S., v. 69 (1989), p. 173–201.

ванное многообразие доминируется каким-нибудь многообразием из рассматриваемого класса. Естественно, хочется найти по возможности более узкий такой класс. В силу теоремы Тома эта задача полностью эквивалентна сформулированной выше задаче о нахождении класса $\mathcal{M}_n$. Д. Котщик и К. Лёх[32] высказали интересную гипотезу о том, что в качестве искомого максимального класса можно взять класс всех гиперболических многообразий, то есть многообразий, на которых существует риманова метрика постоянной отрицательной кривизны.

В случае $n = 2$ отношение доминирования легко полностью описывается. Случай $n = 3$ довольно хорошо исследован (см. обзор С. Вонга[33]); в частности, Р. Брукс[34] доказал, что всякое ориентированное 3-мерное многообразие доминируется гиперболическим. Случай $n \geqslant 4$ исследован довольно плохо. В основном вопрос о наличии доминирования $M \geqslant N$ исследовался в двух случаях: когда N высокосвязно и когда N имеет риманову метрику неположительной кривизны (или кусочно евклидову метрику неположительной полиэдральной кривизны в смысле CAT(0)-пространств). При этом если в первом случае основные методы исследования были алгебро-топологическими, то во втором решающую роль играли геометрические методы, основанные, в частности, на теориях симплициального объёма и гармонических отображений. Для многообразий неположительной кривизны практически все результаты были негативными: доказывалось, что при определённых условиях на M и N многообразие M не может доминировать многообразие N. Наиболее интересным результатом в этом направлении является результат Д. Котщика и К. Лёх[32], которые для большого класса многообразий (включающего в себя, в частности, все римановы многообразия строго отрицательной кривизны) доказали невозможность их доминирования никаким произведением двух многообразий положительных размерностей.

До сих пор по сути единственным результатом по задаче об отыскании максимального класса многообразий в смысле отношения доминирования при $n \geqslant 4$ являлась конструкция гиперболизации М. Дэвиса и Т. Янушкевича[35]. Эта конструкция позволяет для каждого полиэдра P строить асферический полиэдр $\widehat{P}$ и непрерывное отображение $\widehat{P} \to P$, индуцирующее

[32] Kotschick D., Löh C., *Fundamental classes not representable by products*, J. London Math. Soc., v. 79 (2009), p. 545–561.

[33] Wang S., *Non-zero degree maps between 3-manifolds*, Proc. of the ICM Beijin 2002, vol. II, p. 457–468, Higher Education Press, Beijin, 2002.

[34] Brooks R., *On branched coverings of 3-manifolds which fiber over the circle*, J. Reine Angew. Math., v. 362 (1985), p. 87–101.

[35] Davis M. W., Januszkiewicz T., *Hyperbolization of polyhedra*, J. Diff. Geom., v. 34 (1991), № 2, p. 347–388.

эпиморфизм в гомологиях; при этом, если исходный полиэдр P является многообразием, полиэдр $\widehat{P}$ оказывается многообразием той же размерности. Напомним, что пространство X называется *асферическим*, если оно имеет тип $K(\pi, 1)$, то есть если X линейно связно и $\pi_i(X) = 0$ при $i > 1$. Из конструкции Дэвиса–Янушкевича сразу следует, что в качестве максимального класса многообразий в смысле отношения доминирования можно взять класс всех асферических многообразий. Однако этот класс слишком обширен и естественно представляет интерес задача о его уменьшении.

Ещё одной задачей, рассматриваемой в диссертации, является задача о построении комбинаторного многообразия с заданным набором линков вершин. Каждой триангуляции многообразия можно сопоставлять различные характеризующие ее комбинаторные данные. Простейшим примером таких данных является f-вектор $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, где через f_i обозначено количество i-мерных симплексов в триангуляции. В более сложных случаях комбинаторные данные тем или иным образом описывают взаимное расположение симплексов. Некоторые функции от комбинаторных данных дают инварианты многообразия, не зависящие от триангуляции. Например, эйлерова характеристика многообразия выражается через его f-вектор. Мы будем сопоставлять каждому ориентированному комбинаторному многообразию неупорядоченный набор классов изоморфизма линков его вершин. Интерес к таким комбинаторным данным обусловлен в том числе тем, что числа Понтрягина многообразия могут быть вычислены по набору классов изоморфизма линков его вершин. Таким образом, нашим объектом изучения является преобразование $\mathcal{L}$, сопоставляющее каждому ориентированному комбинаторному многообразию K неупорядоченный набор классов изоморфизма ориентированных комбинаторных сфер — линков вершин многообразия K. Изучая преобразование $\mathcal{L}$, естественно поставить задачу о его обращении:

Для каких наборов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер существует ориентированное n-мерное комбинаторное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$?

Этот вопрос является типичным примером часто встречающейся в топологии проблемы характеризации наборов локальных данных, которые могут быть реализованы как локальные инварианты некоторого глобального объекта. Классические примеры задач такого типа — задача характеризации возможных наборов локальных весов действия группы $\mathbb{Z}_p$ с изолированными неподвижными точками на замкнутом стабильно комплексном многообразии (см., например, работу В. М. Бухштабера и С. П. Новикова[36]) и задача о соотношениях между классами кобордизмов циклов, реализующих классы Понтрягина стабильно комплексного многообразия, решенная В. М. Бухштабером и А. П. Веселовым[37].

Цель работы.

Целью настоящей работы является построение теории универсальных локальных формул для полиномов от рациональных классов Понтрягина комбинаторных многообразий и кусочно линейных блочных расслоений; нахождение явной локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина; развитие комбинаторного подхода к проблеме Стинрода о реализации циклов.

Научная новизна.

Основными результатами диссертации являются следующие:

1. Построена теория универсальных локальных формул для рациональных классов Понтрягина комбинаторных многообразий, то есть формул вида
$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma\in K,\, \dim\sigma = m-4k} f\bigl(\langle \operatorname{link}\sigma\rangle\bigr)\sigma,$$
где f — функция на множестве классов изоморфизма ориентированных $(4k-1)$-мерных комбинаторных сфер, не зависящая от многообразия K. Построено и изучено дифференциальное кольцо $\mathcal{T}_*$ ориентированных комбинаторных сфер и двойственный ему коцепной комплекс $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q})$. Доказано, что функции f, задающие универсальные локальные формулы для полиномов от рациональных классов Понтрягина, суть в точности коциклы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$; при этом функция f, задающая универсальную локальную формулу для любого однородного полинома, существует и единственна с точностью до прибавления кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

2. Доказано, что для любого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует такая универсальная локальная формула f, что задача о вычислении значения $f(\langle L\rangle)$ по данной комбинаторной сфере L является алгоритмически разрешимой.

[36]Бухштабер В. М., Новиков С. П., *Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса*, Матем. сб., т. 84 (1971), №1, с. 81–118.

[37]Buchstaber V. M., Veselov A. P., *On a remarkable functional equation in the theory of generalized Dunkl operators and transformations of elliptic genera*, Math. Z., v. 223 (1996), p. 595–607.

3. Решена задача о нахождении явной локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина комбинаторных многообразий.

4. Получена нижняя оценка на рост знаменателей локальной формулы f для первого рационального класса Понтрягина: доказано, что для любой универсальной локальной формулы f для первого класса Понтрягина и любого $l \geqslant 12$ наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(\langle L\rangle)$, где L пробегает множество всех ориентированных комбинаторных сфер с не более, чем l вершинами, делится на наименьшее общее кратное чисел $2, 3, \ldots, l-3$. Доказано, что ни для какого кратного первого класса Понтрягина не существует целочисленной универсальной локальной формулы.

5. Показано, что рациональные классы Понтрягина блочного расслоения ξ над компактным полиэдром P могут быть комбинаторно вычислены в терминах триангуляции K тотального пространства $E(\xi)$ и отображения $g : P \to E(\xi)$, гомотопного нулевому сечению, транссимплициального к триангуляции K и такого, что замыкания всех компонент связности прообразов открытых симплексов триангуляции K при отображении g являются кусочно линейными шарами.

6. Для компактного полиэдра P введена абелева полугруппа $\mathcal{D}(P)$ классов конкордантности разбиения полиэдра P на простые клетки. Дана конструкция, сопоставляющая каждому классу стабильной эквивалентности блочных расслоений над полиэдром P, класс конкордантности разбиений полиэдра P на простые клетки. Показано, что эта конструкция индуцирует естественный гомоморфизм $\mathcal{X} : I(P) \to \mathcal{D}(P)$, где $I(P)$ — группа классов стабильной эквивалентности блочных расслоений над P. Доказано, что отображения $p_i : I(P) \to H^{4i}(P; \mathbb{Q})$, задаваемые рациональными классами Понтрягина блочных расслоений, раскладываются в композицию гомоморфизма $\mathcal{X}$ и естественных отображений $\mathcal{D}(P) \to H^{4i}(P; \mathbb{Q})$, которые естественно называть рациональными классами Понтрягина разбиений на простые клетки.

7. Найдены явные конструкции, позволяющие по набору ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ такому, что вершины несвязного объединения $Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_k$ разбиваются на пары с линками вершин в каждой паре изоморфными друг другу с обращением ориентации, строить ориентированное кубически клеточное комбинаторное многообразие $\mathbf{Q}$, набор линков вершин которого совпадает с точностью до сохраня-

ющего ориентацию изоморфизма с набором

$$\underbrace{Y_1',\ldots,Y_1'}_{q},\underbrace{Y_2',\ldots,Y_2'}_{q},\ldots,\underbrace{Y_k',\ldots,Y_k'}_{q},$$

и ориентированное симплициальное комбинаторное многообразие $\mathbf{K}$, набор линков вершин которого совпадает с точностью до сохраняющего ориентацию изоморфизма с набором

$$\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{q},\underbrace{Y_2,\ldots,Y_2}_{q},\ldots,\underbrace{Y_k,\ldots,Y_k}_{q},Z_1,Z_2,\ldots,Z_l,-Z_1,-Z_2,\ldots,-Z_l,$$

для некоторого натурального числа q и некоторых ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Z_1,Z_2,\ldots,Z_l$. Здесь $-Z_i$ — комбинаторная сфера Z_i с обращённой ориентацией и Y_i' — первое барицентрическое подразделение комбинаторной сферы Y_i.

8. Получены явные описания всех универсальных локальных формул для L-полиномов Хирцебруха от рациональных классов Понтрягина.

9. Решена задача о прямом комбинаторном построении ориентированного гладкого многообразия, реализующего с некоторой кратностью заданный класс целочисленных гомологий топологического пространства.

10. Решена задача о нахождении класса $\mathcal{M}_n$ ориентированных n-мерных гладких замкнутых многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью любого n-мерного целочисленного класса гомологий любого топологического пространства. Доказано, что в качестве такого класса $\mathcal{M}_n$ можно взять класс всех конечнолистных накрытий над многообразием M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1)\times(n+1)$-матриц. В частности, доказано, что любое ориентированное замкнутое n-мерное многообразие виртуально доминируется многообразием M^n.

Основные методы исследования.

В работе используются методы алгебраической, геометрической и комбинаторной топологии, комбинаторной геометрии и теории графов. Большое значение имеет использование результатов У. Пахнера[38] о бизвёздных преобразованиях комбинаторных многообразий, а также результата К. Томеи[39]

[38]Pachner U., *Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, v. 57 (1987), p. 69–86.

[39]Tomei C., *The topology of the isospectral manifold of tridiagonal matrices*, Duke Math. J., v. 51 (1984), №4, p. 981–996.

о клеточном разбиении многообразия изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных матриц.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для алгебраической топологии, топологии многообразий, теории гомологий, кусочно линейной топологии. Результаты диссертации могут быть полезны для специалистов из Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Санкт-Петербургского государственного университета, Новосибирского государственного университета, Челябинского государственного университета, Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, Независимого московского университета.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательских семинарах «Геометрия, топология и математическая физика» (руководители С.П. Новиков и В.М. Бухштабер, отдел геометрии и топологии МИ РАН и кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ), «Алгебраическая топология и её приложения» им. М.М. Постникова (бюро семинара: В.М. Бухштабер, А.В. Чернавский, И.А. Дынников, Л.А. Алания, Д.В. Миллионщиков, Т.Е. Панов, кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ), «Дискретная геометрия и геометрия чисел» (руководители Н.П. Долбилин и Н.Г. Мощевитин, кафедра теории чисел Механико-математического факультета МГУ), «Геометрический семинар им. А.Д. Александрова» (руководитель Ю.Д. Бураго, ПОМИ РАН), «Московско-Петербургский семинар по маломерной математике» (руководитель С.В. Дужин, ПОМИ РАН), «Семинар Сектора 4.1» (руководитель М.А. Цфасман, ИППИ РАН), «Глобус» (бюро семинара: А.А. Белавин, В.А. Васильев, Ю.С. Ильяшенко, А.Б. Сосинский, М.А. Цфасман, О.В. Шварцман, НМУ), «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» (руководители С.М. Натанзон, О.В. Шварцман, О.К. Шейнман, НМУ), на заседаниях Московского математического общества (президент В.И. Арнольд), а также на следующих международных научных конференциях:

1. «Geometry, Topology and Combinatorics», г. Стокгольм, Швеция, 2–6 июля 2004 года.

2. «Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств», посвящённая 100-летию со дня рождения Л. В. Келдыш, г. Москва, 24–26 августа 2004 года.

3. «International Conference on Toric Topology», г. Осака, Япония, 29 мая – 3 июня 2006 года.

4. «Новиковский день», посвящённая 70-летию С. П. Новикова, г. Москва, 3 июня 2008 года.

5. «Дифференциальные уравнения и топология», посвящённая 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина, г. Москва, 17–22 июня 2008 года.

6. «New Horizons in Toric Topology», г. Манчестер, Великобритания, 7–11 июля 2008 года.

7. «Seventieth Meeting of the Transpennine Topology Triangle and Toric Topology», г. Манчестер, Великобритания, 2–3 ноября 2009 года.

8. «International Conference on Topology and its Applications», г. Нафпактос, Греция, 26–30 июня 2010 года.

9. «Геометрия и топология, алгебра и теория чисел, приложения», посвящённая 120-летию со дня рождения Б. Н. Делоне, г. Москва, 16–20 августа 2010 года.

За отдельные результаты работы автору была присвоена первая премия конкурса им. А. Мёбиуса (2005 г.); на основе отдельных результатов работы были разработаны исследовательские проекты, поддержанные грантом Президента РФ МК-4220.2009.1 и премией фонда «Династия» (2009 г.).

Публикации.

Основное содержание диссертации опубликовано в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата [1–10].

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа изложена на 341 страницах и состоит из введения, пяти глав и трёх приложений. Библиография включает 132 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемых проблем, формулируются основные результаты, приводится краткое содержание работы и список основных соглашений и обозначений.

Содержание главы 1

Первая глава диссертации посвящена развитию теории *универсальных локальных формул* для полиномов от классов Понтрягина.

В разделе 1.1 мы строим и изучаем дифференциальное кольцо ориентированных комбинаторных сфер. Для каждого $n \geqslant 1$ обозначим через $\mathcal{T}_n$ абелеву группу, порожденную классами изоморфизма $\langle L\rangle$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер и соотношениями $\langle -L\rangle = -\langle L\rangle$, где $-L$ — комбинаторная сфера L с обращённой ориентацией; полагаем, $\mathcal{T}_0 = \mathbb{Z}$. Прямая сумма

$$\mathcal{T}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$$

является суперкоммутативным ассоциативным дифференциальным градуированным кольцом (с понижающим ориентацию дифференциалом) относительно умножения

$$\langle L_1\rangle\langle L_2\rangle = \langle L_1 * L_2\rangle,$$

где $L_1 * L_2$ — джойн комбинаторных сфер L_1 и L_2, и дифференциала

$$\partial\langle L\rangle = \sum_{v\in V(L)} \langle \operatorname{link} v\rangle,$$

где $V(L)$ — множество вершин комбинаторной сферы L и линки вершин наделяются ориентациями, индуцированными ориентацией L.

Каждому ориентированному комбинаторному многообразию K мы можем поставить в соответствие элемент группы $\mathcal{T}_n$ — формальную сумму классов изоморфизма линков вершин комбинаторного многообразия K. Мы доказываем, что это соответствие продолжается до аддитивного гомоморфизма $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_n(\mathcal{T}_*)$, который является мультипликативным с точностью до элементов порядка 2. Здесь и далее Ω_*^{SPL} — кольцо кобордизмов ориентированных кусочно линейных многообразий.

Теорема 1. *Ядро и коядро гомоморфизма $\partial_* : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \to H_*(\mathcal{T}_*)$ являются группами кручения. Таким образом, гомоморфизм*

$$\partial_* \otimes \mathbb{Q} : \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q} \to H_*(\mathcal{T}_*) \otimes \mathbb{Q}$$

является изоморфизмом градуированных колец.

Эта теорема доказывается в главе 4 диссертации. Хорошо известно, что естественный гомоморфизм кольца Ω_*^{SO} кобордизмов ориентированных гладких многообразий в кольцо Ω_*^{SPL} индуцирует изоморфизм колец

$$\Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q} \cong \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}\left[[\mathbb{C}\mathrm{P}^2], [\mathbb{C}\mathrm{P}^4], [\mathbb{C}\mathrm{P}^6], \ldots\right].$$

Кроме того, в разделе 1.1 исследуется оператор барицентрического подразделения $\beta : \mathcal{T}_* \to \mathcal{T}_*$, $\langle L\rangle \mapsto \langle L'\rangle$, где L' — барицентрическое подразделение комбинаторной сферы L.

Предложение 2. *По модулю элементов порядка 2 оператор β является гомоморфизмом дифференциальных градуированных колец, цепно гомотопным тождественному.*

В разделе 1.2 изучается коцепной комплекс $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_*, \mathbb{Q})$ с дифференциалом

$$(\delta f)\bigl(\langle L\rangle\bigr) = (-1)^n \sum_{v\in V(L)} f\bigl(\langle \operatorname{link} v\rangle\bigr), \tag{3}$$

Пусть $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ и K — m-мерное комбинаторное многообразие. Определим $(m-n)$-мерную симплициальную цепь $f_\sharp(K)$ по формуле

$$f_\sharp(K) = \sum_{\sigma\in K,\, \dim\sigma = m-n} f\bigl(\langle \operatorname{link}\sigma\rangle\bigr)\sigma. \tag{4}$$

(Если многообразие K неориентируемо, эту цепь нужно понимать как *коориентированную*.)

Определение 3. Функция $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ называется (*универсальной*) *локальной формулой* для однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ степени n, если для любого ориентированного комбинаторного многообразия K цепь $f_\sharp(K)$ является циклом, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре классу $F\bigl(p_1(K), p_2(K), \ldots\bigr)$.

Из теоремы 1 следует, что имеется изоморфизм

$$\delta^* : H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \to \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots], \tag{5}$$

сопряжённый изоморфизму $\partial_* \otimes \mathbb{Q}$.

Теорема 4. *Следующие условия на функцию $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ эквивалентны:*

1) цепь $f_\sharp(K)$ является циклом для любого комбинаторного многообразия K;

2) f — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, то есть $\delta f = 0$;

3) f является универсальной локальной формулой для некоторого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина.

При этом если f — коцикл комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, представляющий класс когомологий ψ, и $\delta^*(\psi) = F$, то f — универсальная локальная формула для полинома F от рациональных классов Понтрягина. Таким образом, универсальная локальная формула для каждого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует и единственна с точностью до прибавления кограницы комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

Часть теоремы 4, утверждающая, что для любого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина существует универсальная локальная формула, является усилением теоремы Левитта–Рурка[24].

В разделе 1.3 мы доказываем, что для любого однородного полинома F от рациональных классов Понтрягина степени $4k$ существует универсальная локальная формула $f \in \mathcal{T}^{4k}(\mathbb{Q})$ такая, что задача о вычислении значения $f(\langle L\rangle)$ по заданной комбинаторной сфере L является алгоритмически разрешимой.

Аналоги теоремы 1 имеют место для симплициальных гомологических многообразий, для многообразий с коническими особенностями. В разделе 1.4 формулируется наиболее общий аналог теоремы 1. Пусть C — класс ориентированных псевдомногообразий, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Нульмерные псевдомногообразия, принадлежащие классу C, суть в точности все нульмерные сферы; все псевдомногообразия положительной размерности, лежащие в классе C, связны и нормальны.

2) Если псевдомногообразие Y принадлежит классу C, то любое псевдомногообразие, кусочно линейно гомеоморфное псевдомногообразию Y с сохранением или с обращением ориентации, также принадлежит классу C.

3) Если n-мерное псевдомногообразие Y принадлежит классу C и σ — симплекс псевдомногообразия Y, такой что $\dim\sigma < n$, то псевдомногообразие $\operatorname{link}\sigma$ принадлежит классу C.

4) Если псевдомногообразие Y принадлежит классу C, то неприведённая надстройка ΣY также принадлежит классу C.

Используя вместо комбинаторных сфер псевдомногообразия из класса C, мы можем определить аналог $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$ цепного комплекса $\mathcal{T}_*$; цепной комплекс $\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}$ является кольцом, если класс C дополнительно удовлетворяет следующему условию

5) Если псевдомногообразия Y_1 и Y_2 принадлежат классу C, то их джойн $Y_1 * Y_2$ тоже принадлежит классу C.

Многообразием с особенностями из класса C называется псевдомногообразие, линки всех вершин которого принадлежат классу C. В разделе 1.4 для произвольного класса C, удовлетворяющего условиям 1)–4) вводится градуированная группа Ω_*^{C} кобордизмов ориентированных многообразий с особенностями из класса C, которая является кольцом, если класс C удовлетворяет условию 5). Доказательство следующего аналога теоремы 1 также откладывается до главы 4.

Теорема 5. *Пусть C — класс псевдомногообразий, удовлетворяющий условиям 1)–4). Тогда имеется изоморфизм градуированных групп*

$$\partial_* \otimes \mathbb{Q} : \Omega_*^{\mathrm{C}} \otimes \mathbb{Q} \to H_*\big(\mathcal{T}_*^{\mathrm{C}}\big) \otimes \mathbb{Q}.$$

Если класс C дополнительно удовлетворяет условию 5), изоморфизм $\partial_* \otimes \mathbb{Q}$ является изоморфизмом колец.

Рассматривая изоморфизм (5), естественно поставить вопрос о том, как описать каким-либо явным комбинаторным способом умножение, возникающее в когомологиях комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. В разделе 1.5 комбинаторно определена операция умножения коциклов комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$, которая индуцирует искомое умножение в когомологиях. К сожалению, эта операция умножения не является ни билинейной, ни ассоциативной, ни коммутативной, не удовлетворяет тождеству Лейбница и, по-видимому, не имеет естественного продолжения на весь комплекс $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Явное построение даже такого не очень хорошего умножения коциклов комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ сразу дает нам возможность по известным локальным формулам для двух полиномов от рациональных классов Понтрягина построить явно локальную формулу для произведения этих полиномов.

Когда мы хотим по локальным формулам для двух полиномов от классов Понтрягина построить локальную формулу для их произведения, нам удобнее работать с коциклами, представляющими полиномы от классов Понтрягина, а не с циклами, представляющими двойственные классы гомологий. Впервые локальные формулы для коциклов, представляющих характеристические классы, рассматривались Н. Левиттом и К. Рурком[24]. При этом они рассматривали симплициальные коциклы в первом барицентрическом подразделении данного комбинаторного многообразия. Нам удобнее работать не с барицентрическим подразделением, а с каноническим кубическим подразделением комбинаторного многообразия. В разделе 1.5 определяется коцепной комплекс $\mathcal{W}^*(\mathbb{Q})$, являющийся аналогом комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ в рассматриваемой ситуации. В комплексе $\mathcal{W}^*(\mathbb{Q})$ вводится ассоциативное умножение, удовлетворяющее формуле Лейбница. Основным результатом этого раздела является изоморфизм $H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong H^*(\mathcal{W}^*(\mathbb{Q}))$, дающий возможность использовать умножение в комплексе $\mathcal{W}^*(\mathbb{Q})$ для построения искомого умножения коциклов комплекса $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$.

Содержание главы 2

Эта глава посвящена построению явной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина. Наш подход заключается в том, чтобы искать цикл, представляющий класс гомологий, двойственный первому классу Понтрягина данного комбинаторного многообразия K, в виде универсальной локальной формулы (4). Здесь $n = 4$, значит, f — рациональнозначная функция на множестве классов изоморфизма ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер. Чтобы описать явно такую функцию f, нам необходимо научиться каким-либо образом «перемещаться» по множеству классов изоморфизма ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер. Для этой цели мы используем так называемые *бизвёздные преобразования* комбинаторных многообразий. Согласно теореме У. Пахнера[38], любые два кусочно линейно гомеоморфных комбинаторных многообразия переводятся друг в друга последовательностью бизвёздных преобразований и изоморфизмов. В частности, любая 3-мерная комбинаторная сфера переводится в границу 4-мерного симплекса последовательностью бизвёздных преобразований и изоморфизмов. Таким образом, для того, чтобы задать функцию на множестве классов изоморфизма ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер, нам достаточно описать, как её значение изменяется при бизвёздных преобразованиях. Оказывается, что из уравнения $\delta f = 0$, которому удовлетворяют локальные формулы для первого класса Понтрягина, следует, что приращение значения $f(\langle L\rangle)$ при бизвёздном преобразовании β является суммой локальных вкладов $h(\langle\beta_v\rangle)$, зависящих только от бизвёздных преобразований β_v, индуцированных преобразованием β в линках вершин сферы L. При этом функция h является коциклом, представляющим некоторый конкретный класс одномерных когомологий c_0 графа Γ_2, вершинами которого являются классы изоморфизма ориентированных 2-мерных комбинаторных сфер, а рёбрами — бизвёздные преобразования; мы явно вычисляем класс когомологий c_0. В результате мы получаем явную локальную комбинаторную формулу для первого класса Понтрягина, которая может быть применена к любому комбинаторному многообразию без каких бы то ни было дополнительных структур.

Глава 2 организована следующим образом.

В разделе 2.1 приводится необходимая информация о бизвёздных преобразованиях, для каждого n строится граф Γ_n, вершинами которого являются классы изоморфизма ориентированных n-мерных комбинаторных сфер, а рёбрами — бизвёздные преобразования. Рассматриваются абелевы группы эквивариантных клеточных коцепей $C^{j,n} = C^j_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_{n-1}; \mathcal{Q})$, где группа $\mathbb{Z}_2$ действует на графе Γ_{n-1} обращением ориентаций комбинаторных сфер и $\mathcal{Q}$ — группа $\mathbb{Q}$, наделённая структурой $\mathbb{Z}_2$-модуля такой, что образующая группы $\mathbb{Z}_2$ действует умножением на -1. На биградуированной группе $C^{*,*}$ вводится структура биградуированного коцепного комплекса с двумя коммутирующими дифференциалами: повышающим первую градуировку дифференциалом d эквивариантных клеточных коцепных комплексов графов Γ_n и повышающим вторую градуировку дифференциалом δ, индуцированным операцией взятия формальной суммы линков комбинаторной сферы. При этом первый столбец $C^{0,*}$ введённого бикомплекса канонически изоморфен коцепному комплексу $\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$. Кроме того, строится цепная гомотопия s между цепными отображениями d и 0 коцепного комплекса $(C^{0,*}, \delta)$ в коцепной комплекс $(C^{1,*}, \delta)$. Оказывается, что гомоморфизм

$$s : \mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) = C^{0,4} \to C^{1,3} = C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$$

отображает подгруппу $\ker\delta \subset \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, состоящую из универсальных локальных формул для классов, кратных первому классу Понтрягина, изоморфно на подгруппу группы $C^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$, состоящую из всех коциклов, классы гомологий которых лежат в ядре N гомоморфизма

$$\delta^* : H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q}) \to H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_3; \mathcal{Q}),$$

индуцированного дифференциалом δ; при этом обратный к s изоморфизм совпадает с отображением $d^{-1}\delta$. Таким образом, явное описание универсальных локальных формул для классов, кратных первому классу Понтрягина сводится к явному вычислению группы N.

В разделах 2.2 и 2.3 изучаются циклы в графе Γ_2. В разделе 2.2 строятся несколько семейств циклов в графе Γ_2, которые удобно называть *элементарными циклами*, и доказывается, что любой цикл в графе Γ_2 представляется в виде линейной комбинации элементарных. В разделе 2.3 приводится эффективный алгоритм для нахождения представления данного цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных. Явное описание группы N даётся в разделе 2.5: группа N является одномерным векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$, порождённым классом когомологий

$c_0 \in H^1_{\mathbb{Z}_2}(\Gamma_2; \mathcal{Q})$, для которого явно указываются его значения на всех элементарных циклах.

В окончательном виде явная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина приведена в разделе 2.4. Несмотря на то, что ключевую роль в развитом подходе играет локальность формулы, оказывается, что окончательная формула может быть упрощена, если отказаться от требования локальности. Процесс вычисления по этой упрощённой формуле симплициального цикла Z, представляющего класс гомологий, двойственный по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина m-мерного комбинаторного многообразия K, имеет следующий вид.

1. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 3 или 4 найдем последовательность бизвездных преобразований

$$\operatorname{link}\sigma = L_1^{(\sigma)} \overset{\beta_1^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} L_2^{(\sigma)} \overset{\beta_2^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} \dots \overset{\beta_{k(\sigma)}^{(\sigma)}}{\rightsquigarrow} L_{k(\sigma)+1}^{(\sigma)} \cong \partial\Delta^{\operatorname{codim}\sigma}. \tag{6}$$

2. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ коразмерности 4 выберем какую-нибудь коориентацию, т. е. ориентацию его линка; снабдим все симплексы $\tau \in K$ коразмерности 3, содержащие σ, такими коориентациями, чтобы коэффициент инцидентности симплексов σ и τ был равен $+1$; положим

$$\zeta_\sigma = \sum_{j=1}^{k(\sigma)} \sum_{v} \left\{ \left(\beta_j^{(\sigma)}\right)_v \right\} - \sum_{\substack{\tau\in K,\, \tau\supset\sigma, \\ \operatorname{codim}\tau=3}} \sum_{j=1}^{k(\tau)} \left\{ \beta_j^{(\tau)} \right\},$$

где в первом слагаемом внутренняя сумма берётся по всем вершинам v, «вовлечённым» в бизвёздное преобразование $\beta_j^{(\sigma)}$ и через $\left(\beta_j^{(\sigma)}\right)_v$ обозначено индуцированное бизвёздное преобразование линка вершины v. Тогда ζ_σ — цикл в графе Γ_2.

3. Представив цикл ζ_σ в виде суммы элементарных циклов, вычислим значение $r_\sigma = c_0(\zeta_\sigma)$. Тогда искомый цикл задается по формуле

$$Z = \sum_{\sigma\in K,\, \operatorname{codim}\sigma=4} r_\sigma \sigma.$$

Отметим, что из результатов главы 2 следует лишь, что выписанная явная формула даёт первый класс Понтрягина с точностью до умножения на некоторую универсальную (то есть не зависящую от многообразия K) константу. Чтобы доказать, что эта константа в действительности равна 1, необходимо произвести вычисления по полученной формуле для некоторого конкретного многообразия с известным ненулевым классом Понтрягина. Такие вычисления для $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ вынесены в приложение В.

В отличие от старших целочисленных классов Понтрягина, первый целочисленный класс Понтрягина комбинаторно инвариантен. Поэтому имеет смысл задача о его вычислении в комбинаторных терминах. К настоящему времени эта задача не решена: все известные комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина дают только рациональные циклы. В разделе 2.6 показано, что решение этой задачи не может быть найдено в виде универсальной локальной формулы (4), так как знаменатели значений любой локальной формулы $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ для первого класса Понтрягина неограничены. Доказана следующая оценка: пусть $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ — локальная формула для первого класса Понтрягина; тогда для любого $l \geqslant 12$ наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(\langle L \rangle)$, где L пробегает множество всех ориентированных 3-мерных комбинаторных сфер с не более, чем l вершинами, делится на наименьшее общее кратное чисел $2, 3, \dots, l-3$.

Содержание главы 3

Глава 3 посвящена распространению полученных в первых двух главах результатов о комбинаторных формулах для классов Понтрягина многообразий на задачу о комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина блочных расслоений. Мы показываем, что рациональные классы Понтрягина q-мерного блочного расслоения ξ над клеточным разбиением Z компактного полиэдра P могут быть комбинаторно вычислены в терминах пары (K, g), где K — кусочно линейная триангуляция тотального пространства $E(\xi)$, являющаяся измельчением разбиения на блоки, $g : P \to E(\xi)$ — кусочно линейное отображение такое, что

1) образ каждой клетки σ_i разбиения Z при отображении g содержится в блоке β_i над ней;

2) отображение g транссимплициально триангуляции K;

3) для каждого симплекса τ триангуляции K замыкание каждой компоненты связности прообраза $g^{-1}\bigl(\mathring{\tau}\bigr)$ есть кусочно линейный шар размерности $\dim \tau - q$; здесь $\mathring{\tau}$ — относительная внутренность симплекса τ.

При выполнении указанных условий замыкания множеств $g^{-1}\bigl(\mathring{\tau}\bigr)$ образуют клеточное разбиение полиэдра P, которое мы будем обозначать через $g^! K$. При этом каждая клетка Q разбиения $g^! K$ имеет структуру кусочно линейного многообразия с углами, все грани которого являются кусочно линейными шарами. Такие многообразия с углами мы будем называть *квазипростыми клетками*; квазипростая клетка называется *простой клеткой*, если пересечение любого числа её граней либо пусто, либо снова является её гранью. Простые и квазипростые клетки являются естественными обобщениями простых выпуклых многогранников. Действительно, каждой триангуляции сферы, которая может быть реализована в виде границы выпуклого симплициального многогранника, можно сопоставить двойственный простой многогранник. Аналогичным образом, произвольная n-мерная простая клетка двойствена некоторой кусочно линейной триангуляции $(n-1)$-мерной сферы, а произвольная n-мерная квазипростая клетка — симплициально клеточному разбиению $(n-1)$-мерной сферы, то есть разбиению на симплексы, в котором два симплекса могут иметь несколько общих граней. Для каждой квазипростой клетки Q мы будем обозначать двойственное ей симплициально клеточное разбиение сферы через L_Q. Основной результат главы 3 заключается в том, что рациональные классы Понтрягина блочного расслоения ξ могут быть восстановлены по комбинаторному строению разбиения $g^!K$ полиэдра P на квазипростые клетки.

В градуированном кольце $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ имеется канонический автоморфизм w, переводящий каждую образующую p_k в такой полином $\widetilde{p}_k$, что

$$\widetilde{p}_k + \widetilde{p}_{k-1}p_1 + \widetilde{p}_{k-2}p_2 + \ldots + p_k = 0$$

для всех k. Мы будем обозначать образ полинома F при автоморфизме w через $\widetilde{F}$.

Теорема 6. *Пусть $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ — однородный полином степени $4k$ и $f \in \mathcal{T}^{4k}(\mathbb{Q})$ — универсальная локальная формула для полинома $\widetilde{F}$. Рассмотрим $4k$-мерную клеточную коцепь $f^\sharp_{(1)}(g^!K) \in C^{4k}(g^!K; \mathbb{Q})$, значение которой на каждой $4k$-мерной клетке Q разбиения $g^!K$ равно $f(\langle L'_Q \rangle)$. Тогда $f^\sharp_{(1)}(g^!K)$ — коцикл, представляющий класс когомологий $F(p_1(\xi), p_2(\xi), \ldots)$. Если разбиение $g^!K$ является разбиением на простые клетки, вместо $f^\sharp_{(1)}(g^!K)$ можно взять коцепь $f^\sharp(g^!K)$, в которую каждая клетка Q входит с коэффициентом $f(\langle L_Q \rangle)$.*

Разделы 3.1 и 3.2 содержат определения кусочно линейных многообразий с углами, простых и квазипростых клеток, разбиений на многообразия с углами, простые и квазипростые клетки. Раздел 3.3 содержит необходимые сведения о блочных расслоениях. В разделе 3.4 формулируется основной результат главы 3 — теорема 6.

Оставшаяся часть главы 3 посвящена систематическому изучению разбиений компактных полиэдров на многообразия с углами, простые и квазипростые клетки. Основным объектом изучения является множество классов конкордантности таких разбиений. Два разбиения полиэдра P на многообразия с углами (соответственно, простые или квазипростые клетки) называются *конкордантными*, если существует разбиение полиэдра $P\times[0,1]$ на многообразия с углами (соответственно, простые или квазипростые клетки), ограничения которого на основания цилиндра $P\times[0,1]$ совпадают с двумя данными разбиениями. В разделе 3.5 мы показываем, что получающееся множество $\mathcal{D}(P)$ классов конкордантности не зависит от того, рассматриваем ли мы разбиения полиэдра на многообразия с углами, на простые клетки или на квазипростые клетки; элементы множества $\mathcal{D}(P)$ мы называем *$\mathcal{D}$-структурами* на полиэдре P. В разделах 3.6 и 3.7 в множестве $\mathcal{D}(P)$ вводится операция сложения, превращающая его в абелеву полугруппу с нулём, и доказывается, что полугруппа $\mathcal{D}(P)$ является гомотопическим инвариантом полиэдра P, а сопоставление $P\mapsto\mathcal{D}(P)$ является контравариантным функтором из категории компактных полиэдров и гомотопических классов их отображений в категорию абелевых полугрупп с нулём. В разделе 3.8 доказывается, что в случае, когда триангуляция K такова, что каждый блок расслоения ξ триангулирован как конус над триангуляцией своей границы, существует отображение $g\colon P\to E(\xi)$, удовлетворяющее сформулированным выше условиям 1–3; также доказывается относительный вариант этого утверждения. Эти результаты позволяют нам в разделе 3.9 сопоставить каждому блочному расслоению ξ класс конкордантности разбиения $g^!K$. Доказывается, что этот класс конкордантности не зависит от выбора пары (K,g) и определяет естественный гомоморфизм $\mathcal{X}\colon I(P)\to\mathcal{D}(P)$, где $I(P)$ — группа классов стабильной эквивалентности блочных расслоений над полиэдром P. В разделе 3.10 доказывается основной результат о $\mathcal{D}$-структурах на компактных полидрах, который и является основной мотивацией для их изучения: оказывается, что можно определить рациональные классы Понтрягина $\mathcal{D}$-структур, то есть естественные отображения $p_k\colon\mathcal{D}(P)\to H^{4k}(P;\mathbb{Q})$ такие, что в композиции с естественным гомоморфизмом $\mathcal{X}$ они дают рациональные классы Понтрягина блочных расслоений. Конструкция классов Понтрягина $\mathcal{D}$-структур подсказывается формулировкой теоремы 6: k-ый рациональный класс Понтрягина класса конкордантности разбиения Y полиэдра P на простые клетки по определению есть класс гомологий коцикла $f^\sharp(Y)$, значение которого на каждой клетке Q равно $f(\langle L_Q\rangle)$, где f — локальная формула для полинома $\widetilde{p}_k$; класс когомологий коцикла $f^\sharp(Y)$ не зависит от выбора локальной формулы f и не меняется при замене разбиения Y на конкордантное. В разделе 3.11 строится классифицирующее пространство $\mathcal{Z}$ такое, что $\mathcal{D}(P) \cong [P, \mathcal{Z}]$ для любого полиэдра P; доказывается, что имеет место изоморфизм

$$H^*(\mathcal{Z}; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots];$$

с помощью этого изоморфизма доказывается несколько естественных свойств рациональных классов Понтрягина $\mathcal{D}$-структур, в частности, аналог формулы Уитни. В конце раздела 3.11 на основе полученных результатов о $\mathcal{D}$-структурах доказывается теорема 6. Кроме того, в разделе 3.11 доказана двусвязность пространства $\mathcal{Z}$, откуда сразу следует тривиальность полугрупп $\mathcal{D}(P)$ для всех двумерных полиэдров P; в разделе 3.12 сформулировано несколько открытых вопросов.

Содержание главы 4

Эта глава посвящена задаче об обращении преобразования $\mathcal{L}$, сопоставляющего каждому ориентированному комбинаторному многообразию неупорядоченный набор линков его вершин. Ввиду наличия групповой структуры в множестве $\mathcal{T}_n$ наряду с преобразованием $\mathcal{L}$ удобно рассматривать преобразование $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, сопоставляющее ориентированному n-мерному комбинаторному многообразию сумму линков его вершин в группе $\mathcal{T}_n$. Задача об обращении преобразования $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ эквивалентна следующему вопросу:

Для каких наборов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер существует ориентированное n-мерное комбинаторное многообразие, набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Z_1, Z_2 \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2 \ldots, -Z_l$$

для некоторого набора $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$ ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер?

Помимо интереса, который вопросы об обращении преобразований $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ представляют сами по себе, их важность для нас вызвана тем, что они являются ключевыми для доказательства теоремы 1. В главе 4 получен следующий частичный положительный результат по задаче об обращении преобразований $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.

Теорема 7. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — набор ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер такой, что элемент $\sum_{i=1}^{k} \langle Y_i \rangle$ является циклом цепного комплекса $\mathcal{T}_*$. Тогда существуют ориентированное n-мерное кубиче-*

ски клеточное комбинаторное многообразие $\mathbf{Q}$, *набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором*

$$\underbrace{Y_1', \ldots, Y_1'}_{q}, \underbrace{Y_2', \ldots, Y_2'}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k', \ldots, Y_k'}_{q}$$

и n*-мерное симплициальное комбинаторное многообразие* $\mathbf{K}$, *набор линков вершин которого совпадает с точностью до изоморфизма с набором*

$$\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{q}, \underbrace{Y_2, \ldots, Y_2}_{q}, \ldots, \underbrace{Y_k, \ldots, Y_k}_{q}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_l$$

для некоторого натурального числа q *и некоторых ориентированных* $(n-1)$*-мерных комбинаторных сфер* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$.

Основными результатами главы являются явные конструкции комбинаторных многообразий $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{K}$, удовлетворяющих требованиям этой теоремы; мы также доказываем аналог теоремы 7 для произвольного класса псевдомногообразий C, удовлетворяющего условиям из раздела 1.4. Из того, что $\partial \sum_{i=1}^{k} \langle Y_i \rangle = 0$, следует, что вершины сфер Y_i могут быть разбиты на пары так, что линки вершин в каждой паре изоморфны друг другу с обращением ориентации. Требования, предъявляемые к комплексу $\mathbf{Q}$ в теореме 7, могут быть усилены: он может быть построен так, чтобы изоморфизмы линков его вершин со сферами Y_i' были определённым образом согласованы с наперёд заданным разбиением вершин сфер Y_i на пары с линками, изоморфными с обращением ориентации.

В разделах 4.2 и 4.3 излагается конструкция построения псевдомногообразия, склеенного из простых многогранников, по однородному графу. Пусть P^n — простой выпуклый многогранник с m гипергранями, $\mathcal{F}$ — множество его гиперграней. Пусть Γ — однородный граф степени m на множестве вершин V с рёбрами, раскрашенными в цвета из множества $\mathcal{F}$ правильным образом, то есть так, что никакие два ребра, имеющие общую вершину, не окрашены в один цвет. Для каждой гиперграни $F \in \mathcal{F}$ обозначим через Φ_F инволюцию без неподвижных точек на множестве V, сопоставляющую каждой вершине вершину, соединённую с ней ребром цвета F. Положим

$$M^n(P^n, \Gamma) = (V \times P^n)/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями $(v, x) \equiv (\Phi_F(v), x)$, если $x \in F$. Тогда $M^n(P^n, \Gamma)$ — псевдомногообразие, склеенное из простых многогранников. В случае, когда P^n — симплекс, описанная конструкция принадлежит М. Пеццана[40] и М. Ферри[41]. В разделе 4.4 мы останавливаемся подробнее на случае, когда P^n — куб $[0,1]^n$. Оказывается, что, если граф Γ удовлетворяет некоторым специальным условиям, кубически клеточное разбиение $\mathbf{Q}(\Gamma) = M^n(\Gamma, [0,1]^n)$ является каноническим подразделением некоторого кубически клеточного псевдомногообразия $\widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$. (*Каноническое подразделение* кубически клеточного комплекса получается, если каждый его n-мерный куб разбить стандартным образом на 2^n кубов с вдвое меньшим ребром.)

В разделе 4.5 даётся конструкция кубически клеточного комбинаторного многообразия $\mathbf{Q}$. Она основана на прямом построении однородного графа Γ степени $2n$ такого, что $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{Q}}(\Gamma)$ — искомое кубически клеточное комбинаторное многообразие. Раздел 4.6 содержит конструкцию симплициального комбинаторного многообразия $\mathbf{K}$: оно является несвязным объединением двух экземпляров барицентрического подразделения $\mathbf{Q}'$ и нескольких комбинаторных сфер. Также в разделе 4.6 доказывается теорема 5, частным случаем которой является теорема 1.

В разделе 4.7 мы используем конструкцию комбинаторного многообразия $\mathbf{Q}$ для получения явного описания всех универсальных локальных формул для L-полиномов Хирцебруха от классов Понтрягина. Напомним, что полиномы L_l определяются по формуле (1).

Теорема 8. *Пусть $f \in \mathcal{T}^{4l}(\mathbb{Q})$ — универсальная локальная формула для полинома Хирцебруха L_l. Тогда для любого набора $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ориентированных $(4l-1)$-мерных комбинаторных сфер такого, что $\sum_{i=1}^k \langle Y_i \rangle$ — цикл цепного комплекса $\mathcal{T}_*$, функция f удовлетворяет уравнению*

$$f(\langle Y_1 \rangle) + f(\langle Y_2 \rangle) + \ldots + f(\langle Y_k \rangle) = \frac{\operatorname{sign}(\mathbf{Q})}{q}, \tag{7}$$

где $\mathbf{Q}$ и q — соответственно ориентированное кубически клеточное комбинаторное многообразие и натуральное число из теоремы 7. Обратно, всякая функция $f \in \mathcal{T}^{4l}(\mathbb{Q})$, удовлетворяющая системе уравнений (7), является универсальной локальной формулой для полинома L_l.

Вместе с результатами раздела 1.5 эта теорема даёт явные, хотя, конечно же, очень неэффективные, локальные комбинаторные формулы для всех однородных полиномов от рациональных классов Понтрягина.

---

[40] Pezzana M., *Diagrammi di Heegaard e triangolazione contratta*, Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 4., v. 12 (1975), Suppl. al №3, p. 98–105.

[41] Ferri M., *Una rappresentazione delle n-varietà topologiche triangolabili mediante grafi $(n+1)$-colorati* Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 5, v. 13-B (1976), №1, p. 250–260.

Содержание главы 5

Эта глава посвящена явному построению многообразия, реализующего с некоторой кратностью заданный целочисленный класс гомологий. Раздел 5.1 посвящён формулировкам основных результатов. Любой класс гомологий z произвольного топологического пространства X может быть реализован в виде непрерывного образа некоторого ориентированного псевдомногообразия Z. В разделах 5.2, 5.3 мы для любого ориентированного псевдомногообразия Z, склеенного из простых клеток, строим явно его *разрешение особенностей с некоторой кратностью* q, то есть ориентированное кусочно линейное многообразие N и отображение $g : N \to Z$ такие, что вне остова коразмерности 2 псевдомногообразия Z отображение g является q-листным накрытием, уважающим ориентацию. При этом N — кубически клеточное многообразие, получающееся при помощи конструкции из раздела 4.5, применённой к набору комбинаторных сфер, двойственных простым клеткам максимальной размерности псевдомногообразия Z.

В разделе 5.4 исследуется вопрос о классе бордизмов, представляемом в группе $\mathrm{SPL}_*(X)$ ориентированных кусочно линейных бордизмов пространства X сквозным отображением

$$\varphi : N \xrightarrow{g} Z \to X.$$

В действительности, более правильным вопросом является вопрос о вычислении класса $\frac{[\varphi]}{q} \in \mathrm{SPL}_*(X) \otimes \mathbb{Q}$. Содержательный ответ получается в двух случаях. Если Z — симплициальное псевдомногообразие, то все рациональные классы Понтрягина многообразия N равны нулю и элемент $\frac{[\varphi]}{q}$ является образом класса z при гомоморфизме

$$H_*(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta} H_*(X; \Omega_*^{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\left(\mathrm{ch}^{\mathrm{SPL}}\right)^{-1}} \mathrm{SPL}_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Пусть теперь $X = K$ — ориентированное симплициальное комбинаторное многообразие и Z — клеточный цикл в двойственном разбиении K^*, то есть при отображении $Z \to K$ каждая клетка разбиения Z отображается изоморфно на некоторую клетку разбиения K^*. Тогда отображение φ^* переводит рациональные классы Понтрягина многообразия K в рациональные классы Понтрягина многообразия N и элемент $\frac{[\varphi]}{q}$ является образом класса z при гомоморфизме

$$H_*(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{D} H^*(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta} H^*(X; \Omega^*_{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}_{\mathrm{SPL}}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}_{\mathrm{SPL}}} \mathrm{SPL}^*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{D^{-1}_{\mathrm{SPL}} \otimes \mathbb{Q}} \mathrm{SPL}_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Здесь η — гомоморфизмы, индуцированные изоморфизмом $\Omega_0^{\mathrm{SPL}} \cong \mathbb{Z}$, D и D_{SPL} — операторы двойственности Пуанкаре в когомологиях и кобордизмах соответственно, $\mathrm{ch}^{\mathrm{SPL}}$ и $\mathrm{ch}_{\mathrm{SPL}}$ — характеры Чженя–Дольда в теориях ориентированных кусочно линейных бордизмов и кобордизмов соответственно.

В оставшейся части главы 5 исследуется задача о нахождении класса $\mathcal{M}_n$ ориентированных замкнутых многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью любого n-мерного класса гомологий любого топологического пространства. В центре нашей конструкции находится многообразие M^n изоспектральных вещественных симметрических трёхдиагональных $(n+1)\times(n+1)$-матриц, то есть многообразие вещественных симметрических трёхдиагональных матриц с фиксированным простым спектром $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n+1}$. (Матрица $A = (a_{ij})$ называется *трёхдиагональной*, если $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$.)

Теорема 9. *Пусть X — произвольное топологическое пространство и $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$; тогда существуют конечнолистное накрытие $\widehat{M}^n$ над многообразием M^n и непрерывное отображение $\varphi : \widehat{M}^n \to X$ такие, что $\varphi_*\bigl[\widehat{M}^n\bigr] = qz$ для некоторого положительного целого числа q.*

Следствие 10. *Любое замкнутое ориентированное n-мерное многообразие доминируется некоторым конечнолистным накрытием над многообразием M^n; таким образом, любое замкнутое ориентированное n-мерное многообразие виртуально доминируется многообразием M^n.*

Теорема 9 получается практически сразу из нашей явной конструкции разрешения особенностей псевдомногообразия, склеенного из простых клеток: дело в том, что в случае, когда исходное псевдомногообразие Z является симплициальным, наша конструкция автоматически даёт многообразие, являющееся конечнолистным накрытием над многообразием M^n. Разделы 5.5–5.7 содержат необходимую информацию о многообразии M^n и его конечнолистных накрытиях. В разделах 5.8–5.10 конструкция разрешения особенностей симплициального псевдомногообразия Z переизлагается на другом языке, более удобном для доказательства того, что построенное многообразие является конечнолистным накрытием над многообразием M^n. Переизложение на другом языке заключается по сути в том, что мы вместо кубически клеточного разбиения N строим двойственное ему клеточное разбиение, которое является разбиением на специальные простые многогранники — так называемые пермутоэдры. Пермутоэдр Π^n есть выпуклая оболочка $(n+1)!$ точек пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, полученных из точки $(1, 2, \ldots, n+1)$ при помощи всевозможных перестановок её координат;

это n-мерный простой многогранник с $2^{n+1}-2$ гипергранями. Искомое разбиение на пермутоэдры имеет вид $M^n(\Pi^n,\Gamma)$ для подходящего однородного графа Γ степени $2^{n+1}-2$. Разбиение многообразия M^n на 2^n пермутоэдров было построено К. Томеи[39]. Из нашей конструкции следует, что построенное разбиение $M^n(\Pi^n,\Gamma)$ является накрытием над разбиением Томеи многообразия M^n.

Содержание приложений

Приложение A содержит необходимые сведения о простых многогранниках, клеточных комплексах, склеенных из простых многогранников, в частности, о симплициальных, кубических, симплициально клеточных и кубически клеточных комплексах, а также об операциях над такими комплексами.

Приложение B посвящено вычислениям при помощи явной комбинаторной формулы для первого класса Понтрягина, построенной в главе 2. Мы приводим явные расчёты для двух простейших случаев: 9-вершинной триангуляции $\mathbb{C}P^2$, построенной В. Кюнелем и Т. Банхофом[42], и 15-вершинной триангуляции $\mathbb{C}P^2$, построенной автором [9].

Приложение C посвящено применению некоторых идей, возникших в задаче о построении комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин, рассматриваемой в главе 4, в задаче об интегрируемости m-значных динамик при помощи m-значных групп. Результаты этого приложения получены автором совместно с В. М. Бухштабером [4].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту В.М. Бухштаберу за постоянное внимание и многочисленные полезные советы. Автор благодарен Л.А. Алания, И.В. Баскакову, Н.П. Долбилину, И.А. Дынникову, Н.Ю. Ероховцу, М.Э. Казаряну, В.П. Лексину, С.А. Мелихову, А.С. Мищенко, С.П. Новикову, Т.Е. Панову, А.В. Пенскому, А.Б. Сосинскому, Г.И. Шарыгину, О.В. Шварцману за полезные обсуждения. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

[42] Kühnel W., Banchoff T. F., *The 9-vertex complex projective plane*, Math. Intell., v. 5 (1983), № 3, 11–22.

Список публикаций по теме диссертации

[1] Гайфуллин А. А., *О локальных формулах для комбинаторных классов Понтрягина многообразий*, УМН, т. 59 (2004), № 2, с. 189–190.

[2] Гайфуллин А. А., *Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина*, Известия РАН, сер. матем., т. 68 (2004), № 5, с. 13–66.

[3] Гайфуллин А. А., *Вычисление характеристических классов многообразия по его триангуляции*, УМН, т. 64 (2005), № 4, с. 37–66.

[4] Бухштабер В. М., Гайфуллин А. А., *Представления m-значных групп на триангуляциях многообразий*, УМН, т. 61 (2006), № 3, с. 171–172.

[5] Гайфуллин А. А., *Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий*, УМН, т. 62 (2007), № 6, с. 167–168.

[6] Гайфуллин А. А., *Реализация циклов асферичными многообразиями*, УМН, т. 63 (2008), № 3, с. 173–174.

[7] Гайфуллин А. А., *Многообразие изоспектральных симметрических трехдиагональных матриц и реализация циклов асферичными многообразиями*, Тр. МИАН, т. 263 (2008), с. 44–63.

[8] Гайфуллин А. А., *Построение комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин*, Известия РАН, сер. матем., т. 72 (2008), № 5, с. 3–62.

[9] Гайфуллин А. А., *Минимальная триангуляция комплексной проективной плоскости, допускающая шахматную раскраску четырехмерных симплексов*, Тр. МИАН, т. 266 (2009), с. 33–53.

[10] Гайфуллин А. А., *Пространства конфигураций, бизвёздные преобразования и комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина*, Тр. МИАН, т. 268 (2010), с. 76–93.