

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

ГАЙФУЛЛИН АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 515.16

КОМБИНАТОРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЦИКЛОВ

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук В. М. Бухштабер

Москва — 2008

Оглавление

Введение	4
1 Построение псевдомногообразий по графам	26
1.1 Клеточные комплексы, склеенные из многогранников	26
1.2 Псевдомногообразия и комбинаторные многообразия	33
1.3 Построение симплициально клеточных псевдомногообразий по графам	37
1.4 Построение по графам псевдомногообразий, склеенных из простых многогранников	42
2 Многообразие изоспектральных симметрических трёхдиагональных матриц и его накрытия	46
2.1 Необходимые сведения о группах Кокстера	46
2.2 Пермутаэдры	49
2.3 Малые накрытия	51
2.4 Сглаживание многообразия $M^n(P^n)$	54
2.5 Малые накрытия над пермутаэдрами и многообразие изоспектральных трёхдиагональных матриц	64
2.6 Накрытия над многообразиями $M^n(P^n)$	68

3	Реализация циклов асферичными многообразиями	72
3.1	Проблема реализации циклов	72
3.2	Необходимые условия достаточности набора многообразий .	76
3.3	Реализация циклов образами псевдомногообразий	82
3.4	Построение многообразия $\widehat{M}^n$	85
3.5	Отображение пермутаэдра на симплекс	88
3.6	Построение отображения $f : \widehat{M}^n \rightarrow Z^n$	93
3.7	Реализация кубического цикла	95
4	Многозначные динамики на псевдомногообразиях	101
4.1	m -значные группы и m -значные динамики	101
4.2	Каноническая динамика на множестве максимальных симплексов псевдомногообразия	104
4.3	Интегрирование канонических динамик на множествах вершин однородных графов	110
	Литература	117

Введение

О теме диссертации

В конце 1940-х годов Н. Стинрод (см. [33]) поставил следующую проблему, известную как проблема о реализации циклов: существуют ли для данного класса (сингулярных) гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ замкнутое ориентированное многообразие N^n и непрерывное отображение $f : N^n \rightarrow X$, такие что $f_*[N^n] = z$? Здесь X — произвольное топологическое пространство. Однако без ограничения общности можно считать, что X — компактный полиэдр. Классическим результатом является следующая теорема Р. Тома.

Теорема (Р. Том [19]). *Для каждого натурального числа n существует такое натуральное число $k = k(n)$, что для любого n -мерного целочисленного класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$, класс kz реализуем в виде образа ориентированного замкнутого гладкого многообразия.*

В той же работе Р. Том доказал, что все классы гомологий размерностей ≤ 6 реализуемы и построил первый пример 7-мерного целочисленного класса гомологий, не реализуемого по Стинроду. Таким классом является класс гомологий $z \in H_7(K(\mathbb{Z}_3, 2); \mathbb{Z})$, такой что $\langle St_3^4 St_3^1 \iota, \rho_3(z) \rangle \neq 0$, где ρ_3 — операция приведения по модулю 3 и $\iota \in H^2(K(\mathbb{Z}_3, 2); \mathbb{Z}_3)$ — канонический класс. Такой класс z существует, так как $\beta St_3^4 St_3^1 \iota \neq 0$, где

$\beta : H^7(K(\mathbb{Z}_3, 2); \mathbb{Z}_3) \rightarrow H^8(K(\mathbb{Z}_3, 2); \mathbb{Z}_3)$ — гомоморфизм Бокштейна.

Задача о реализации циклов тесно связана с задачей о дифференциалах в гомологической спектральной последовательности Атья-Хирцебруха в теории $SO_*(\cdot)$ ориентированных бордизмов. Член E^2 этой спектральной последовательности имеет вид $E_{s,t}^2 = H_s(X; \Omega_t^{SO})$, а член E^∞ присоединён к градуированной группе $SO_*(X)$ ориентированных бордизмов пространства X . Класс $z \in H_n(X; \mathbb{Z}) = E_{n,0}^2$ реализуем образом гладкого многообразия тогда и только тогда, когда он является циклом всех дифференциалов. Аналогично, класс z может быть реализован образом стабильно комплексного многообразия тогда и только тогда, когда он является циклом всех дифференциалов спектральной последовательности Атья-Хирцебруха в теории $U_*(\cdot)$ унитарных бордизмов. Согласно классической теореме Милнора-Новикова [39], [15], кольцо комплексных кобордизмов Ω_U не имеет кручения. Опираясь на этот факт, С. П. Новиков [15] заметил, что, если целочисленные гомологии пространства X не имеют кручения, то все дифференциалы спектральной последовательности Атья-Хирцебруха в теории $U_*(\cdot)$ тривиальны и, следовательно, все классы гомологий пространства X реализуются по Стинроду.

Каждый компактный полиэдр X можно вложить в ориентированное замкнутое гладкое многообразие, так чтобы вложение индуцировало изоморфизмы гомотопических групп и групп гомологий вплоть до любой наперёд заданной размерности. Таким образом, задачу о реализации циклов достаточно исследовать в случае, когда $X = Q^m$ — ориентированное замкнутое гладкое многообразие. В этом случае двойственность Пуанкаре устанавливает изоморфизм между гомологической и когомологической

спектральными последовательностями Атья-Хирцебруха для теорий ориентированных бордизмов и ориентированных кобордизмов соответственно. Первым нетривиальным дифференциалом в гомологической спектральной последовательности Атья-Хирцебруха является дифференциал

$$d_{n,0}^5 : H_n(Q^m; \Omega_0^{SO}) = H_n(Q^m; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-5}(Q^m; \mathbb{Z}) = H_{n-5}(Q^m; \Omega_4^{SO}).$$

Двойственный ему дифференциал в когомологической спектральной последовательности имеет вид

$$d_5^{m-n,0} : H^{m-n}(Q^m; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho_3} H^{m-n}(Q^m; \mathbb{Z}_3) \xrightarrow{St_3^4} \xrightarrow{St_3^4} H^{m-n+4}(Q^m; \mathbb{Z}_3) \xrightarrow{\beta} H^{m-n+5}(Q^m; \mathbb{Z}).$$

Дифференциалы $d_{n,0}^5$ тривиальны при $n \leq 6$. Дифференциал $d_{7,0}^5$ может быть нетривиален: примером класса гомологий, не принадлежащего его ядру, является класс z из примера Р. Тома.

Порядки дифференциалов в спектральной последовательности Атья-Хирцебруха были вычислены В. М. Бухштабером [2]. В результате им были получены важные результаты о числах $k(n)$.

Классический подход к проблеме Стинрода о реализации циклов, при помощи которого были получены все указанные выше результаты, заключается в её сведении к гомотопической задаче при помощи теоремы трансверсальности Тома и последующего исследования этой гомотопической задачи методами алгебраической топологии. В настоящей работе мы предлагаем новый, комбинаторный подход к проблеме Стинрода, основанный на изучении локальной комбинаторной структуры цикла, представляющего заданный класс гомологий.

Хорошо известно, что всякий целочисленный класс сингулярных гомологий может быть реализован непрерывным образом ориентированного симплициального псевдомногообразия. Поэтому задача о реализации по Стинроду произвольных целочисленных классов гомологий сводится к задаче о реализации фундаментальных классов ориентированных симплициальных псевдомногообразий. Для каждого ориентированного симплициального псевдомногообразия Z^n мы даём явную комбинаторную конструкцию гладкого многообразия N^n и отображения $f : N^n \rightarrow Z^n$, таких что $f_*[N^n] = q[Z^n]$ для некоторого ненулевого целого числа q .

Некоторые идеи нашего подхода восходят к работе Д. Сулливана [42], в которой был предложен подход к проблеме Стинрода, основанный на разрешении особенностей псевдомногообразий. Пусть Z^n — псевдомногообразие, $\Sigma \subset Z^n$ — подмножество, такое что $Z^n \setminus \Sigma$ — гладкое ориентированное многообразие. Разрешение особенностей псевдомногообразия Z^n в смысле Д. Сулливана — это отображение $f : N^n \rightarrow Z^n$, где N^n — гладкое ориентированное многообразие, такое что ограничение

$$f|_{f^{-1}(Z \setminus \Sigma)} : f^{-1}(Z \setminus \Sigma) \rightarrow Z \setminus \Sigma$$

является диффеоморфизмом. Первым примером псевдомногообразия, не допускающего разрешения особенностей, является 7-мерный цикл, представляющий построенный Р. Томом [19] 7-мерный целочисленный класс гомологий, не реализуемый по Стинроду. В работе [42] Д. Сулливан построил серию геометрических препятствий к существованию разрешения особенностей псевдомногообразия. Эти препятствия дают геометрическую интерпретацию дифференциалов в спектральной последовательности Атья–Хирцебруха. Отметим, что исследование задачи о разрешении особенно-

стей Д. Сулливан проводил с помощью теории кобордизмов, то есть по сути всё равно с помощью сведения к гомотопической задаче и исследования её методами алгебраической топологии. Наш подход заключается в том, чтобы построить отображение $f : N^n \rightarrow Z^n$ исходя из локальной комбинаторной структуры псевдомногообразия Z^n . При этом нам на самом деле не нужно стремиться к тому, чтобы отображение f было разрешением особенностей в смысле Д. Сулливана, а достаточно лишь выполнения гомологического условия $f_*[N^n] = q[Z^n]$ для некоторого ненулевого целого числа q .

Представляет интерес задача о реализации классов гомологий образами фундаментальных классов специальных многообразий, имеющих сравнительно простое топологическое строение. Классическим примером является задача о реализации классов гомологий образами сфер, то есть задача об описании образа гомоморфизма Гуревича. Отметим, что при такой постановке аналог теоремы Р. Тома очевидно не верен: существуют целочисленные классы гомологий, для которых никакой кратный им класс гомологий не лежит в образе гомоморфизма Гуревича. В настоящей работе мы решаем задачу о нахождении набора $\mathcal{M}_n$ гладких n -мерных многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью всех целочисленных n -мерных классов гомологий любого пространства X .

В центре нашей конструкции находится многообразие M^n изоспектральных вещественных симметрических трёхдиагональных $(n+1) \times (n+1)$ матриц, то есть многообразие вещественных симметрических трёхдиагональных матриц с фиксированным простым спектром $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n+1}$. (Матрица $A = (a_{ij})$ называется *трёхдиагональной*, если $a_{ij} = 0$ при

$|i - j| > 1$.) Многообразие M^n возникает в теории интегрируемых систем при изучении цепочки Тоды (см. [40], [13]). Топологические свойства многообразия M^n были первоначально изучены К. Томеи [43]. Им было построено клеточное разбиение многообразия M^n и, опираясь на результаты М. Дэвиса [30], доказана его асферичность. Напомним, что пространство X называется *асферичным*, если оно имеет тип $K(\pi, 1)$, то есть если X линейно связно и $\pi_i(X) = 0$ при $i > 1$. К. Томеи также доказал, что класс диффеоморфизма многообразия M^n не зависит от чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$.

В настоящей работе мы доказываем, что в качестве набора $\mathcal{M}_n$ многообразий, достаточных для реализации всех n -мерных классов гомологий, можно взять набор всевозможных конечнолистных накрытий над многообразием M^n . Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ мы строим явно накрытие $\widehat{M}^n$ над многообразием M^n и непрерывное отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow X$, такие что $f_*[\widehat{M}^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q . Если пространство X линейно связно, полученное многообразие $\widehat{M}^n$ связно. Многообразие M^n асферично. Значит, все его связные накрытия также асферичны. Таким образом, мы получаем, что любой целочисленный класс гомологий любого линейно связного топологического пространства X может быть реализован образом ориентированного гладкого асферичного многообразия.

Проблема Н. Стинрода о реализации циклов непрерывными образами многообразий тесно связана с проблемой о реализации циклов в замкнутом гладком многообразии Q^m ориентированными подмногообразиями (см. [19]). Эта проблема имеет два случая: стабильный (при $n < \frac{m}{2}$) и нестабильный (при $n \geq \frac{m}{2}$). В нестабильном случае вопрос о том, каки-

ми именно подмногообразиями может быть реализован заданный класс гомологий многообразия, исследовался в малых размерностях (двумерные классы гомологий в трёхмерных и четырёхмерных многообразиях). Эта проблема известна как проблема о вычислении минимального рода гладко вложенной поверхности, реализующей двумерный класс гомологий. Важные результаты по этой задаче были получены В. А. Рохлиным [16]. Классическим результатом также является знаменитая гипотеза Р. Тома, доказанная П. Кронхаймером и Т. Мровкой [38], утверждающая, что число $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ является наименьшим родом гладко вложенной поверхности, представляющей класс гомологий ku , где u — стандартная образующая группы $H^2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z})$.

Наши результаты относятся к стабильному случаю. Если $n < \frac{m}{2}$, то любой класс гомологий $z \in H_n(Q^m; \mathbb{Z})$, реализуемый по Стинроду, может быть реализован замкнутым ориентированным подмногообразием. Таким образом, из упомянутых выше результатов следует, что при $n < \frac{m}{2}$ любой класс гомологий $z \in H_n(Q^m; \mathbb{Z})$ с некоторой кратностью может быть реализован асферичным гладким подмногообразием, диффеоморфным конечнолистному накрытию над многообразием M^n .

Многообразие M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных матриц является важным представителем интересного класса гладких многообразий с действием группы $\mathbf{Z}_2^n$, называемых *малыми накрытиями над многогранниками, индуцированными из линейной модели*. Этот класс многообразий был введён и исследован М. Дэвисом и Т. Янушкевичем в работе [32]. Ранее важные примеры малых накрытий были исследованы в работах [43], [36], [31]. Использование этих результатов играет большую

роль в наших конструкциях.

Важным инструментом, систематически используемым в настоящей работе, является конструкция, которая сопоставляет n -мерное симплициальное псевдомногообразие каждому однородному графу с вершинами степени $n+1$ и рёбрами раскрашенными правильным образом в $n+1$ цвет. Эта конструкция принадлежит М. Пеццана [41] в размерности 3 и М. Ферри [34] в произвольной размерности (см. также [35]). Эта конструкция даёт удобный язык для кодирования псевдомногообразий на языке графов. Практически все конструкции настоящей работы описаны на этом языке. Мы даём необходимые нам обобщения конструкции Пеццана–Ферри на случай псевдомногообразий, склеенных из произвольных простых многогранников.

Ещё одной задачей, исследуемой в настоящей диссертации, является задача об изучении канонической $(n+1)$ -значной динамики T на множестве n -мерных симплексов n -мерного симплициально клеточного псевдомногообразия K .

В 1971 году в работе В. М. Бухштабера и С. П. Новикова [6] возникла конструкция в теории характеристических классов векторных расслоений, в которой произведением двух элементов некоторого множества являлся набор (с кратностями) из t элементов того же множества. Эта конструкция привела к понятию t -значной группы. Изначально казалось, что условие ассоциативности для t -значных групп является очень сильным и запас примеров t -значных групп невелик. Однако позже было найдено большое количество примеров различной природы. Теория t -значных групп развивалась в работах В. М. Бухштабера [4] и В. М. Бухштабера и

Е. Г. Риса [8], [27], [28]. Обзор основных направлений развития теории m -значных групп, а также обзор литературы можно найти в работе [26].

С момента возникновения теории многозначных групп одними из основных её приложений являются её приложения в теории m -значных динамических систем с дискретным временем или, короче, m -значных динамик [29], и в примыкающей к ней теории действий m -значных групп на графах [23], [24], [25]. Важным примером многозначной динамики является введенная В. М. Бухштабером [26] каноническая $(n + 1)$ -динамика T на множестве максимальных (по включению) симплексов n -мерного симплициально клеточного псевдомногообразия, сопоставляющая каждому симплексу набор симплексов, имеющих с ним общую гипергрань. (Симплициально клеточным комплексом называется комплекс, склеенный из симплексов вдоль изоморфизмов их граней так, что разрешается склеивать два симплекса по нескольким общим граням, но запрещается приклеивать одну грань симплекса к другой грани того же симплекса; точное определение см. в разделе 1.1.) Класс канонических динамик на множествах максимальных симплексов симплициально клеточных псевдомногообразий достаточно широк. В частности, каждая m -значная динамика, задаваемая однородным графом степени m , может быть реализована в таком виде.

Хорошо известно, что каждая обратимая однозначная динамика задаётся действием бесконечной циклической группы $\mathbf{Z}$. При этом обратимая динамика на конечном множестве всегда задаётся действием некоторой конечной циклической группы $\mathbf{Z}_l$. Естественный вопрос, поставленный В. М. Бухштабером в работе [26], заключается в том, может ли m -значная динамика быть проинтегрирована при помощи некоторой однопо-

рождённой m -значной группы. Аналогично, естественно выяснить, может ли m -значная динамика на конечном множестве быть проинтегрирована при помощи конечной однопорождённой m -значной группы. Мы исследуем эти вопросы для канонических динамик на множествах максимальных симплексов симплициально клеточных псевдомногообразий. Наш подход основан на применении к рассматриваемой задаче хорошо разработанных методов изучения комбинаторики симплициальных комплексов. Основным инструментом является конструкция Пеццана–Ферри, применённая к ба-рицентрическому подразделению исходного псевдомногообразия.

Опираясь на методы, разработанные при исследовании интегрируемости канонических многозначных динамик на множествах максимальных симплексов псевдомногообразий, П. В. Ягодским и автором [12] был доказан следующий достаточный признак интегрируемости m -значной динамики: всякая m -значная динамика T интегрируема при помощи некоторой однопорождённой m -значной группы, если число прообразов (с учётом кратностей) каждой точки при этой динамике равно m . При этом интегрирующая группа конечна, если множество, на котором задана динамика, конечно. Этот результат не вошёл в настоящую диссертацию.

Краткий перечень результатов

Основными результатами настоящей работы являются следующие.

1. Дается новый подход к проблеме реализации циклов, основанный на изучении локальной комбинаторной структуры симплициального псевдомногообразия, реализующего цикл. Получена явная конструк-

ция, которая по каждому целочисленному сингулярному циклу ξ топологического пространства X строит ориентированное гладкое замкнутое многообразие N^n и отображение $f : N^n \rightarrow X$, реализующее с некоторой кратностью класс гомологий цикла ξ , то есть такое, что $f_*[N^n] = q[\xi]$, для некоторого ненулевого целого числа q . Таким образом, получено комбинаторное доказательство теоремы Р. Тома о том, что каждый целочисленный класс гомологий с некоторой кратностью реализуется непрерывным образом ориентированного гладкого многообразия, не использующее теорем трансверсальности и аппарата алгебраической топологии.

2. Доказано, что каждый n -мерный целочисленный класс гомологий любого топологического пространства может быть с некоторой кратностью реализован непрерывным образом конечнолистного накрытия над многообразием изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n + 1) \times (n + 1)$ матриц. В частности, доказано, что каждый целочисленный класс гомологий любого линейно связного топологического пространства может быть с некоторой кратностью реализован непрерывным образом ориентированного гладкого асферичного многообразия. Доказано, что каждый n -мерный целочисленный класс гомологий связного замкнутого гладкого многообразия Q^m , такого что $m > 2n$, может быть реализован асферичным гладким подмногообразием, диффеоморфным конечнолистному накрытию над многообразием изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n + 1) \times (n + 1)$ матриц.

3. Изучена каноническая $(n + 1)$ -значная динамика T на множестве n -мерных симплексов n -мерного симплициально клеточного псевдомногообразия. Дана явная конструкция однопорождённой бикосетной $(n + 1)!$ -значной группы, интегрирующей $(n + 1)!$ -значную динамику $n!T$, кратную динамике T . Для каждого неотрицательного целого числа n построена универсальная однопорождённая бикосетная $(n + 1)!$ -значная группа X_{n+1} , такая что каноническая $(n + 1)$ -значная динамика на множестве максимальных симплексов любого n -мерного симплициально клеточного псевдомногообразия может быть проинтегрирована с кратностью $n!$ при помощи $(n + 1)!$ -значной группы X_{n+1} .

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [5], [10], [11].

Содержание работы

Здесь мы кратко опишем структуру работы. Диссертация разбита на главы, а главы — на разделы. Теоремы, предложения, примеры, замечания и т. д. нумеруются в пределах раздела, а рисунки и уравнения — в пределах главы.

В конце введения мы приводим соглашения, которые используются в работе и список наиболее часто встречающихся обозначений.

Глава 1. Построение псевдомногообразий по графам

Эта глава посвящена изложению конструкции Пеццана–Ферри построения n -мерного симплициально клеточного псевдомногообразия по однородно-

му графу степени $n + 1$ и её обобщению на случай псевдомногообразий, склеенных из произвольных простых многогранников.

В разделах 1.1 и 1.2 мы даём необходимые нам базовые определения. Раздел 1.1 содержит определения выпуклого многогранника, простого многогранника, клеточного комплекса, склеенного из многогранников, изоморфизма и комбинаторной эквивалентности клеточных комплексов, склеенных из многогранников. Частными случаями комплексов, склеенных из многогранников, являются симплициальные, симплициально клеточные, кубические и кубически клеточные комплексы. Мы доказываем, что для каждого комплекса, склеенного из многогранников, комбинаторно эквивалентных кубам, существует кусочно линейно гомеоморфный ему кубически клеточный комплекс. Также мы определяем барицентрическое подразделение комплекса, склеенного из многогранников и каноническое кубическое подразделение симплициально клеточного комплекса. В разделе 1.2 мы даём определения линков граней клеточных комплексов, склеенных из простых многогранников, определения комбинаторных многообразий и псевдомногообразий, склеенных из многогранников, а также определение нормальных псевдомногообразий.

В разделе 1.3 мы описываем конструкцию Пеццана-Ферри, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между n -мерными симплициально клеточными псевдомногообразиями с вершинами, раскрашенными правильным образом в $n + 1$ цвет, и однородными графами степени $n + 1$ с рёбрами, раскрашенными правильным образом в $n + 1$ цвет. Мы приводим явное описание частично упорядоченного множества граней и линков граней симплициально клеточного псевдомногообразия, построенного

по графу. Кроме того в этом разделе мы вводим удобный формализм, позволяющий отождествлять однородный граф с правильной раскраской рёбер с множеством его вершин, на котором задан набор инволюций без неподвижных точек. В разделе 1.4 мы даём аналог конструкции Пеццана-Ферри для псевдомногообразий, склеенных из простых многогранников и получаем аналоги всех утверждений раздела 1.3 в этом случае.

Глава 2. Многообразие изоспектральных симметрических трёх-диагональных матриц и его накрытия

В разделе 2.1 мы приводим необходимые нам сведения о группах Кокстера: определения системы Кокстера, графа Кокстера системы Кокстера, некоторые базовые факты о системах Кокстера, а также хорошо известную классификацию конечных групп Кокстера. В разделе 2.1 пункте мы даём определения пермутаэдра конечной группы Кокстера и выписываем уравнения, задающие гиперграницы пермутаэдров групп Кокстера типов A_n и B_n .

Раздел 2.3 посвящён принадлежащей М. Дэвису и Т. Янушкевичу конструкции гладких многообразий с действием группы $\mathbf{Z}_2^n$ и простым выпуклым многогранником в качестве пространства орбит. Эти многообразия называются малыми накрытиями над простыми многогранниками. Особое внимание мы уделяем специальному классу малых накрытий — так называемым малым накрытиям, индуцированным из линейной модели. Конструкция Дэвиса–Янушкевича задаёт клеточные разбиения малых накрытий. Для малых накрытий, индуцированных из линейной модели, мы в разделе 2.4 явно задаём каноническое сглаживание этого разбиения. Про-

цедура сглаживания довольно стандартна и основана на построении согласованного семейства воротников гиперграней простого многогранника. Однако автору не удалось найти в литературе её аккуратного описания.

В разделе 2.5 мы приводим результаты К. Томеи и М. Дэвиса о малых накрытиях, индуцированных из линейной модели, над пермутаэдрами конечных групп Кокстера. В частности, формулируется результат К. Томеи о том, что малое накрытие, индуцированное из линейной модели, над пермутаэдром типа A_n диффеоморфно многообразию изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n + 1) \times (n + 1)$ матриц, и теорема Томеи–Дэвиса об асферичности малых накрытий, индуцированных из линейной модели, над пермутаэдрами конечных групп Кокстера.

В разделе 2.6 мы изучаем конечнолистные накрытия над многообразиями $M^n(P^n)$ — малыми накрытиями, индуцированными из линейной модели, над многогранниками P^n . Мы даём полную характеристику однородных графов, соответствующих конечнолистным накрытиям над многообразиями $M^n(P^n)$ в смысле обобщённой конструкции Пеццана–Ферри.

Глава 3. Реализация циклов асферичными многообразиями

В этой главе мы даём новый подход к проблеме реализации циклов, основанный на изучении локальной комбинаторной структуры симплицального псевдомногообразия, реализующего цикл. Мы даём явную комбинаторную конструкцию реализации циклов. В частности, мы получаем комбинаторное доказательство теоремы Р. Тома о том, что каждый целочисленный класс гомологий с некоторой кратностью реализуется образом замкнутого ориентированного гладкого многообразия. Мы доказываем, что

каждый целочисленный класс гомологий реализуется с некоторой кратностью непрерывным образом конечнолистного накрытия над многообразием изоспектральных трёхдиагональных симметрических вещественных матриц. В качестве следствия мы получаем, что каждый целочисленный класс гомологий линейно связного топологического пространства реализуется с некоторой кратностью непрерывным образом ориентированного гладкого асферичного многообразия.

Раздел 3.1 содержит строгую постановку задачи о нахождении набора $\mathcal{M}_n$ замкнутых ориентированных гладких n -мерных многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью всех n -мерных целочисленных классов гомологий. В этом разделе формулируются основные результаты главы 3: теоремы 3.1.3 и 3.1.4 и следствия 3.1.5 и 3.1.6. В разделе 3.2 мы приводим необходимые условия для того, чтобы набор $\mathcal{M}_n$ был достаточен. Эти необходимые условия не претендуют ни на новизну, ни на полноту. Наша цель заключается в том, чтобы проиллюстрировать тот факт, что достаточный набор $\mathcal{M}_n$ обязан содержать многообразия с довольно богатым запасом классов когомологий. Мы также показываем, что класс всех конечнолистных накрытий над многообразием M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных матриц удовлетворяет приведённым необходимым условиям. Для этого мы строим некоторые специальные накрытия над многообразием M^n и изучаем их когомологии.

В разделе 3.3 мы стандартным образом сводим задачу о реализации произвольного цикла к задаче о реализации фундаментального цикла симплического псевдомногообразия Z^n . В разделах 3.4–3.6 мы даём явную кон-

струкцию реализации с некоторой кратностью фундаментального класса псевдомногообразия Z^n непрерывным образом конечнолистного накрытия над многообразием M^n , то есть мы строим явно отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow Z^n$, такое что $f_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n]$ для некоторого ненулевого целого числа q , где $\widehat{M}^n$ — конечнолистное накрытие над многообразием M^n . В разделе 3.4 приведено построение многообразия $\widehat{M}^n$. Мы строим явно однородный граф Γ степени $2^{n+1} - 2$ с правильной раскраской рёбер в $2^{n+1} - 2$ цвета, после чего применяем обобщённую конструкцию Пеццана–Ферри. В разделе 3.6 мы получаем явную формулу для отображения f и доказываем, что оно корректно определено и $f_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n]$. Раздел 3.5 носит вспомогательный характер. В нём мы строим отображение ψ пермутаэдра на симплекс, которое является основным составным элементом при построении отображения f , и устанавливаем необходимые нам свойства отображения ψ .

Глава 4. Многозначные динамики на псевдомногообразиях

Раздел 4.1 содержит необходимые сведения об m -значных группах и m -значных динамиках. Мы приводим определение m -значной группы, конструкцию бикосетной m -значной группы на множестве $H \backslash G / H$ двойных смежных классов (обычной) группы G по её m -элементной подгруппе H , определения действия m -значной группы на множестве, m -значной динамики на множестве, а также интегрируемости m -значной динамики при помощи однопорождённой m -значной группы.

Раздел 4.2 посвящён изучению канонической $(n + 1)$ -значной динамики T на множестве n -мерных симплексов n -мерного симплициально клеточного псевдомногообразия. Для каждого симплициально клеточно-

го псевдомногообразия K мы рассматриваем однородный граф Γ степени $n+1$, соответствующий барицентрическому подразделению K' в смысле конструкции Пеццана–Ферри. Мы изучаем группу $G(K')$, порождённую инволюциями Φ'_i , задающими граф Γ , и доказываем, что она изоморфна факторгруппе специальной бесконечной группы Кокстера W_{n+1} . Кроме того, мы выделяем в группе $G(K')$ подгруппу H , изоморфную группе перестановок Σ_{n+1} . Основными результатами этого раздела являются теоремы 4.2.3 и 4.2.5. Теорема 4.2.3 утверждает, что $(n+1)!$ -значная динамика $n!T$, кратная динамике T , может быть проинтегрирована при помощи бикосетной $(n+1)!$ -значной группы $H \backslash G(K') / H$, которая конечна, если псевдомногообразие K компактно. Теорема 4.2.5 утверждает, что существует универсальная бесконечная бикосетная $(n+1)!$ -значная группа, имеющая вид $\Sigma_{n+1} \backslash W_{n+1} / \Sigma_{n+1}$, при помощи которой могут быть проинтегрированы все $(n+1)!$ -значные динамики $n!T$, где T — каноническая $(n+1)$ -значная динамика на множестве n -мерных симплексов любого n -мерного симплициально клеточного псевдомногообразия.

В разделе 4.3 мы изучаем каноническую m -значную динамику на множестве вершин однородного графа Γ степени m . Мы доказываем, что всякая такая динамика реализуется в виде канонической m -значной динамики на множестве $(m-1)$ -мерных симплексов некоторого симплициально клеточного псевдомногообразия K . Таким образом, все результаты раздела 4.2 без изменений переносятся на этот случай. Однако псевдомногообразие K определяется по графу Γ неоднозначно. Мы приводим пример, когда два способа выбора псевдомногообразия K дают различные $m!$ -значные группы, интегрирующие динамику, кратную канонической динамике на

множестве вершин графа Γ .

Соглашения и обозначения

Все графы в настоящей работе — это графы с неориентированными рёбрами. Графам разрешается содержать кратные рёбра, но запрещается содержать петли. (Петлёй называется ребро, концы которого совпадают.)

В главах 1–3 все рассматриваемые клеточные комплексы предполагаются компактными, все многообразия и псевдомногообразия — замкнутыми, то есть компактными и без края, все графы — конечными. В главе 4 рассматриваемые многообразия и псевдомногообразия могут быть некомпактными, но не должны иметь края.

Циклическая группа порядка l обозначается через $\mathbf{Z}_l$. Для неё всегда принята мультипликативная форма записи. Группа $\mathbf{Z}_2$ отождествляется с множеством $\{\pm 1\}$. Через $\mathbf{Z}_2^n$ мы обозначаем прямое произведение n экземпляров группы $\mathbf{Z}_2$. Стандартные образующие группы $\mathbf{Z}_2^n$ мы будем обозначать через $r_1, r_2, \dots, r_n$.

Обозначение M^n зафиксировано для многообразия изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных матриц. Мы никогда не обозначаем через M^n произвольное n -мерное многообразие.

Через $\mathbb{R}^n$ обозначается пространство последовательностей вещественных чисел длины n . По необходимости мы рассматриваем его как аффинное или как векторное пространство. Мы полагаем $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на i -ом месте). При этом в зависимости от контекста понимаем $\mathbf{e}_i$ как точку или как вектор.

Собственным подмножеством множества A называется подмножество

$B \subset A$, такое что $B \neq A$.

Раскраской элементов множества A в цвета из множества C называется произвольная функция $A \rightarrow C$. Образ элемента $a \in A$ называется его цветом.

Символ $\cong$ используется для обозначения изоморфности групп, графов и клеточных комплексов, склеенных из многогранников. Символ $\approx$ используется для обозначения диффеоморфности гладких многообразий.

Приведём теперь список основных обозначений.

$[n]$	множество натуральных чисел от 1 до n включительно.
$ A $	мощность множества A .
$B \subset A$	множество B содержится в множестве A и, быть может, совпадает с ним.
$B \subsetneq A$	множество B содержится в множестве A и не совпадает с ним.
id_A	тождественное отображение множества A в себя.
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$	кольцо целых чисел.
η	эпиморфизм $\mathbf{Z}_2^n \rightarrow \mathbf{Z}_2$, переводящий каждую образующую r_i в -1 .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	спаривание между когомологиями и гомологиями.
f_*, f^*	гомоморфизмы групп гомологий и когомологий соответственно, индуцированные непрерывным отображением f .

$[N^n]$	фундаментальный гомологический класс многообразия или псевдомногообразия N^n .
K'	барицентрическое подразделение комплекса K .
$\text{link } \sigma, \text{link}_K \sigma$	линк грани σ комплекса K .
$K(\Gamma)$	симплициально клеточное псевдомногообразие, построенное по однородному графу Γ (см. раздел 1.3).
$M^n(P^n, \Gamma)$	псевдомногообразие, склеенное из многогранников, построенное по простому многограннику P^n и однородному графу Γ (см. раздел 1.4).
$M^n(P^n, \lambda)$	малое накрытие над многогранником P^n , построенное по характеристической функции λ (см. раздел 2.3).
$M^n(P^n)$	малое накрытие над многогранником P^n , индуцированное из линейной модели (см. раздел 2.3).
Σ_n	группа перестановок множества из n элементов.
Σ_V	группа перестановок множества V .
$(X)^n$	n -ая симметрическая степень множества X .

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН, профессору Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановки задач и постоянное внимание. Автор благодарен профессорам, д.ф.-м.н. И. А. Дынникову, С. М. Натанзону, А. Б. Сосинскому и доцентам, к.ф.-м.н. Л. А. Алания, Т. Е. Панову, А. В. Пенскому, О. В. Шварцману за полезные обсуждения. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического МГУ за поддержку и внимание.

Глава 1

Построение псевдомногообразий по графам

1.1 Клеточные комплексы, склеенные из многогранников

Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного числа точек в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$. *Размерностью* выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ называется размерность минимального аффинного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$, содержащего многогранник P . Пусть $H \subset V$ — гиперплоскость, такая что многогранник P содержится в одном из двух замкнутых полупространств в V , ограниченных гиперплоскостью H , и $\dim P \cap H = \dim P - 1$. Тогда подмножество $P \cap H \subset P$ называется *гипергранью* многогранника P . *Гранями* многогранника P называются пересечения его гиперграней. Нам удобно считать, что пустое множество $\emptyset$ и сам многогранник P также являются гранями многогранника P . Грани размерности 0 называются вершинами, грани размерности 1 — рёбрами. В дальнейшем под многогранником мы всегда понимаем выпуклый много-

гранник.

Основными примерами многогранников, возникающими в этой работе, будут симплекс, октаэдр, куб и пермутаэдры, ассоциированные с конечными группами Кокстера. *Симплексом* называется выпуклая оболочка нескольких аффинно независимых точек в $\mathbb{R}^n$. Размерность симплекса на единицу меньше количества этих точек. Любые два симплекса одной размерности аффинно эквивалентны. *Стандартным n -мерным симплексом* называется симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с вершинами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$, где

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (\text{единица на } i\text{-ом месте}).$$

Стандартным n -мерным октаэдром называется выпуклая оболочка $2n$ точек $\pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2, \dots, \pm \mathbf{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$. *Стандартным n -мерным кубом* называется многогранник $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ или многогранник $[-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Нам будет удобно называть кубами все многогранники, аффинно эквивалентные стандартному кубу. Определения пермутаэдров, ассоциированных с конечными группами Кокстера, будут даны в разделе 2.2.

Многогранник P размерности n называется *простым*, если каждая его вершина содержится ровно в n его гипергранях. Это условие эквивалентно тому, что гиперплоскости, содержащие гиперграницы многогранника P , находятся в общем положении. Хорошо известно, что грани простого многогранника снова являются простыми многогранниками. В частности, простыми многогранниками являются симплексы и кубы. Как мы увидим в разделе 2.2, пермутаэдры, ассоциированные с конечными группами Кокстера, также являются простыми. Простейшим примером непростого многогранника служит n -мерный октаэдр, $n \geq 3$.

Определение 1.1.1. *Конечным клеточным комплексом, склеенным из*

многогранников называется факторпространство несвязного объединения конечного количества выпуклых многогранников $P_1, P_2, \dots, P_q$ по отношению эквивалентности $\sim$, такому что

1. отношение эквивалентности $\sim$ не отождествляет никакие две различные точки одного многогранника Δ_i ;
2. если $x \in P_i$, $x' \in P_j$ и $x \sim x'$, то отношение эквивалентности $\sim$ отождествляет некоторую грань $F \subset P_i$ с некоторой гранью $F' \subset P_j$ вдоль некоторого аффинно линейного изоморфизма.

Образы граней многогранников P_i при такой факторизации называются *клетками* или *гранями* полученного клеточного комплекса, склеенного из многогранников.

В дальнейшем все рассматриваемые клеточные комплексы считаются конечными. Неформально говоря, клеточный комплекс, склеенный из многогранников — это результат склейки нескольких выпуклых многогранников вдоль аффинно линейных изоморфизмов их граней. При этом два многогранника могут склеиваться по нескольким парам попарно изоморфных граней. В частности, примером комплекса, склеенного из многогранников, является *дубль* многогранника P , то есть результат склейки двух экземпляров многогранника P вдоль тождественного гомеоморфизма их границ. Тем не менее, определение комплекса, склеенного из простых многогранников, запрещает нам приклеивать какую-либо грань многогранника к другой грани того же многогранника. В частности, отрезок с отождествлёнными концами не является клеточным комплексом, склеенным из многогранников.

В настоящей работе мы будем рассматривать только клеточные комплексы, склеенные из простых многогранников.

Определение 1.1.2. Клеточный комплекс, склеенный из многогранников, называется *симплициально клеточным комплексом*, если все многогранники P_i — симплексы. Клеточный комплекс, склеенный из многогранников, называется *кубически клеточным комплексом*, если все многогранники P_i — кубы.

Если мы наложим на симплициально или кубически клеточный комплекс дополнительное ограничение, запрещающее двум симплексам или кубам быть склеенными по нескольким парам граней, мы придём к более традиционным объектам: симплициальным и кубическим комплексам.

Определение 1.1.3. Симплициально клеточный (соответственно, кубически клеточный) комплекс называется *симплициальным* (соответственно, *кубическим*) *комплексом*, если пересечение любых двух его граней само является его гранью (возможно, пустой).

Простейшим примером симплициально клеточного комплекса, не являющегося симплициальным комплексом, служит разбиение окружности на две дуги (см. рис. 1.1).

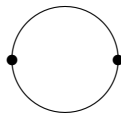


Рис. 1.1. Симплициально клеточный комплекс, не являющийся симплициальным

Определение 1.1.4. *Изоморфизмом* клеточных комплексов K_1 и K_2 , склеенных из многогранников, называется гомеоморфизм $K_1 \rightarrow K_2$, ограничение которого на каждую грань комплекса K_1 является аффинно линейным изоморфизмом на некоторую грань комплекса K_2 .

Для обозначения изоморфности двух комплексов мы будем использовать символ $\cong$.

Каждому клеточному комплексу, склеенному из простых многогранников, можно сопоставить частично упорядоченное множество его граней (включающее символ $\emptyset$). Мы будем говорить, что два клеточных комплекса, склеенные из простых многогранников, *комбинаторно эквивалентны*, если частично упорядоченные множества их граней изоморфны. В частности, два простых многогранника комбинаторно эквивалентны, если частично упорядоченные множества их граней изоморфны. Легко видеть, что два симплициально клеточных комплекса изоморфны тогда и только тогда, когда они комбинаторно эквивалентны. Для произвольных клеточных комплексов, склеенных из простых многогранников, это не так, ввиду того что существуют комбинаторно эквивалентные, но аффинно неизоморфные простые многогранники.

Пусть K — клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников. Выберем по одной точке b_σ в относительной внутренней¹ каждой непустой грани σ комплекса K . Для каждой последовательности

$$\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k \tag{1.1}$$

вложенных непустых граней комплекса K рассмотрим в грани σ_k выпуклый $(k - 1)$ -мерный симплекс $\Delta_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k}$ с вершинами $b_{\sigma_1}, b_{\sigma_2}, \dots, b_{\sigma_k}$. Сим-

¹Относительной внутренней вершины считается сама эта вершина

плексы $\Delta_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k}$ образуют симплициальный комплекс, который называется *барицентрическим подразделением* комплекса K и обозначается через K' . Легко видеть, что с точностью до изоморфизма комплекс K' не зависит от произвола в выборе точек b_σ . Это следует из того, что частично упорядоченное множество симплексов комплекса K' с точностью до изоморфизма не зависит от произвола в выборе точек b_σ . Действительно, частично упорядоченное множество граней комплекса K' состоит из символа $\emptyset$ и всевозможных последовательностей вида (1.1). При этом одна такая последовательность меньше другой, если первая является подпоследовательностью второй. Из сказанного также следует, что барицентрические подразделения комбинаторно эквивалентных клеточных комплексов, склеенных из простых многогранников, изоморфны. Значит, комбинаторно эквивалентные клеточные комплексы всегда кусочно линейно гомеоморфны. Укажем одно простое следствие этого факта.

Предложение 1.1.5. *Пусть Q — клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников, комбинаторно эквивалентных кубам. Тогда существует кубически клеточный комплекс Q_1 , комбинаторно эквивалентный и кусочно линейно гомеоморфный комплексу Q .*

Доказательство. Комплекс Q склеен из многогранников, комбинаторно эквивалентных кубам вдоль некоторых изоморфизмов их граней. Рассмотрим столько же аффинных кубов тех же размерностей и склеим их вдоль соответствующих изоморфизмов их граней. Пусть Q_1 — полученный кубически клеточный комплекс. Тогда комплекс Q комбинаторно эквивалентен и, следовательно, кусочно линейно гомеоморфен комплексу Q_1 . $\square$

Определим теперь *каноническое кубическое подразделение* симплициально клеточного комплекса. Рассмотрим стандартный симплекс Δ^n и обозначим через $P_i^n \subset \Delta^n$ подмножество, состоящее из всех точек $(t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$, таких что $t_i \geq t_j$ для всех $j \in [n+1]$. Легко видеть, что P_i^n — выпуклый n -мерный многогранник, комбинаторно эквивалентный n -мерному кубу. Многогранники P_i^n , $i = 1, 2, \dots, n+1$, образуют клеточное разбиение симплекса Δ^n , которое мы будем называть *каноническим кубическим подразделением* симплекса Δ^n . Пусть теперь K — симплициально клеточный комплекс. Возьмём канонические кубические подразделения всех его симплексов. Полученное разбиение Q на многогранники, комбинаторно эквивалентные кубам, мы назовём *каноническим кубическим подразделением* комплекса K . В дальнейшем нам будет удобно считать каноническим кубическим подразделением комплекса K не построенное разбиение Q , а комбинаторно эквивалентное ему кубически клеточное разбиение Q_1 . Из предложения 1.1.5 следует, что комплекс Q_1 кусочно линейно гомеоморфен исходному комплексу K . В принципе, определение канонического кубического подразделения можно было бы дать для любого клеточного комплекса, склеенного из простых многогранников. Нам оно будет нужно только в случае симплициально клеточного комплекса и в случае комплекса, склеенного из пермутаэдров (см. раздел 2.2).

Замечание 1.1.6. Термин «клеточный комплекс, склеенный из многогранников» не является общепринятым. Однако общепринятой терминологии по-видимому не существует. Термин «симплициально клеточный комплекс» использовался, например, в работах В.М. Бухштабера и Т.Е. Панова (см. [7]). Другие авторы для обозначения того же понятия

использовали различные термины, в частности, «псевдокомплекс», «псевдотриангуляция», «предсимплициальный комплекс» (см., например, [20]). Термин «кубически клеточный комплекс» является естественным аналогом термина «симплициально клеточный комплекс». Насколько известно автору, ранее этот термин в литературе не встречался.

1.2 Псевдомногообразия и комбинаторные многообразия

Линк симплекса σ симплициального комплекса K обычно определяется как подкомплекс комплекса K , состоящий из всех симплексов τ , таких что $\sigma \cap \tau = \emptyset$ и существует симплекс комплекса K , содержащий σ и τ . В данной работе нам будет удобнее использовать другое определение, которое годится для всех клеточных комплексов, склеенных из простых многогранников.

Определение 1.2.1. Пусть K — клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников, σ — его грань размерности k . В относительной внутренней каждой $(k + 1)$ -мерной грани ρ , содержащей грань σ , выберем какую-нибудь точку b_ρ . Для каждой l -мерной грани $\tau \supsetneq \sigma$ существует ровно $l - k$ граней ρ , таких что $\dim \rho = k + 1$ и $\sigma \subset \rho \subset \tau$. Выпуклая оболочка соответствующих точек b_ρ в грани τ является $(l - k - 1)$ -мерным симплексом, который мы обозначим через $\Delta_{\sigma, \tau}$. Объединив симплексы $\Delta_{\sigma, \tau}$ для всех граней $\tau \subsetneq \sigma$, мы получим симплициально клеточный комплекс, который мы будем называть *линком* грани σ в комплексе K и обозначать через $\text{link } \sigma$ или $\text{link}_K \sigma$.

Несложно проверить, что с точностью до изоморфизма линк грани σ не зависит от выбора точек b_ρ . Также легко проверяется, что для симплициального комплекса K два определения линка дают канонически изоморфные симплициальные комплексы. Частично упорядоченное множество симплексов комплекса $\text{link } \sigma$ канонически изоморфно частично упорядоченному множеству граней комплекса K , содержащих грань σ .

Замечание 1.2.2. Отметим, что определение линка можно было бы модифицировать так, чтобы оно годилось и в случае клеточного комплекса, склеенного из любых (не обязательно простых) многогранников, однако линк в этом случае будет не симплициально клеточным комплексом, а комплексом, склеенным из сферических многогранников. Этот случай не будет нам нужен.

Определение 1.2.3. Клеточный комплекс, склеенный из простых многогранников, называется *n -мерным комбинаторным многообразием, склеенным из простых многогранников*, если линки всех его вершин кусочно линейно гомеоморфны границе n -мерного симплекса. *Симплициальным* (соответственно, *симплициально клеточным*, *кубическим* или *кубически клеточным*) *комбинаторным многообразием* называется комбинаторное многообразие, склеенное из простых многогранников, которое является симплициальным (соответственно, симплициально клеточным, кубическим или кубически клеточным) комплексом.

Хорошо известно (см., например, [18]), что всякое комбинаторное многообразие имеет каноническую структуру кусочно линейного многообразия, то есть допускает атлас карт с кусочно линейными функциями перехода.

Также хорошо известно, что линки всех k -мерных граней n -мерного комбинаторного многообразия кусочно линейно гомеоморфны границе $(n - k)$ -мерного симплекса. В [18] эти утверждения доказаны для симплициальных комбинаторных многообразий, однако общий случай полностью аналогичен.

Определение 1.2.4. Клеточный комплекс K , склеенный из многогранников, называется n -мерным псевдомногообразием, склеенным из многогранников, если каждая грань комплекса K содержится в некоторой n -мерной грани, причём каждая $(n - 1)$ -мерная грань комплекса K содержится ровно в двух n -мерных гранях. Симплициальным (соответственно, симплициально клеточным, кубическим или кубически клеточным) псевдомногообразием называется псевдомногообразие, склеенное из многогранников, которое является симплициальным (соответственно, симплициально клеточным, кубическим или кубически клеточным) комплексом.

Часто в определении псевдомногообразия на комплекс K накладывают ещё условие *сильной связности* (см., например, [14]): для любых двух n -мерных граней τ_1 и τ_2 должна существовать последовательность n -мерных граней

$$\tau_1 = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r = \tau_2,$$

такая что для любого i грани ρ_i и ρ_{i+1} имеют общую $(n - 1)$ -мерную грань. Мы тоже будем требовать выполнения этого условия, но только для связных компонент комплекса K . Дело в том, что нам удобно, чтобы по крайней мере все комбинаторные многообразия были псевдомногообразиями. На самом деле мы будем работать только с так называемыми *нормальными*

ми псевдомногообразиями (см. [37]). Приведём здесь два эквивалентных определения нормального псевдомногообразия.

Определение 1.2.5. Псевдомногообразие K размерности n называется *нормальным*, если $H_n(K, K \setminus x) \cong \mathbb{Z}$ для всех точек $x \in K$.

Определение 1.2.6. Псевдомногообразие K размерности n , склеенное из простых многогранников, называется *нормальным*, если линк каждой его непустой грани σ связан при $\dim \sigma \leq n - 2$.

Из определения 1.2.6 сразу следует, что компоненты связности нормального псевдомногообразия являются сильно связными и при $\dim \sigma \leq n - 2$ линк грани σ нормального псевдомногообразия является связным нормальным псевдомногообразием. В частности, линк грани σ является сильно связным.

В дальнейшем мы будем рассматривать только нормальные псевдомногообразия и всегда будем понимать под псевдомногообразием нормальное псевдомногообразие, не оговаривая это особо. Класс нормальных псевдомногообразий включает в себя все наиболее интересные примеры псевдомногообразий: комбинаторные многообразия, гомологические многообразия, многообразия с коническими особенностями. Для произвольного n -мерного псевдомногообразия K можно построить его *нормализацию* K^{norm} [37]. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ — все n -мерные грани псевдомногообразия K . Рассмотрим их несвязное объединение и произведем в нем следующие отождествления: для любых двух граней σ_i и σ_j , имеющих в K общую гипергрань, отождествим их соответствующие гиперграни вдоль соответствующего изоморфизма. Несложно проверить, что полученное псевдомно-

гообразии K^{norm} является нормальным. При этом существует отображение $K^{\text{norm}} \rightarrow K$, являющееся гомеоморфизмом на дополнениях к $(n - 2)$ -мерным остовам комплексов K^{norm} и K и отображающее каждую грань комплекса K^{norm} изоморфно на некоторую грань комплекса K .

1.3 Построение симплициально клеточных псевдомногообразий по графам

В этой статье граф — это всегда неориентированный конечный граф, который может содержать кратные ребра, но не содержит петель. Граф называется *однородным*, если степени всех его вершин одинаковы. Пусть Γ — однородный граф степени m . Будем говорить, что рёбра графа Γ раскрашены *правильным образом* в цвета из некоторого m -элементного множества A , если каждому ребру графа Γ поставлен в соответствие цвет — элемент множества A — так, что из каждой вершины выходит m рёбер попарно различных цветов.

Пусть V — множество вершин графа Γ . Каждому цвету $a \in A$ поставим в соответствие отображение $\Phi_a : V \rightarrow V$, переводящее вершину $v \in V$ в вершину, соединённую с v ребром цвета a . Тогда Φ_a — инволюция без неподвижных точек. Обратно, если нам задано произвольное конечное множество V и набор инволюций без неподвижных точек $\Phi_a : V \rightarrow V$, $a \in A$, то мы можем построить однородный граф Γ на множестве вершин V с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества A . Для этого нужно для любой вершины $v \in V$ и любого элемента $a \in A$ соединить вершины v и $\Phi_a(v)$ ребром цвета a .

Пусть K есть n -мерное симплициально клеточное псевдомногообразие. Раскраска вершин псевдомногообразия K в цвета из $(n + 1)$ -элементного множества A называется *правильной*, если вершины каждого симплекса раскрашены в попарно различные цвета. Есть один важный случай, когда вершины псевдомногообразия K могут быть естественным образом раскрашены в $n + 1$ цвет. Это случай, когда псевдомногообразию K является барицентрическим подразделением некоторого симплициально клеточного псевдомногообразия L . Раскраска получается следующим образом: вершину, являющуюся барицентром j -мерного симплекса комплекса L , красим в цвет $j + 1$.

Оказывается, что n -мерные нормальные симплициально клеточные псевдомногообразия с правильной раскраской вершин находятся во взаимно однозначном соответствии с однородными графами степени $n + 1$ с правильной раскраской рёбер. Конструкция, устанавливающая это соответствие, принадлежит М. Пеццана [41] в размерности 3 и М. Ферри [34] в общем случае (см. также [35]). (М. Пеццана и М. Ферри не рассматривали условие нормальности, поэтому у них соответствие не было взаимно однозначным.) В оставшейся части этого раздела мы изложим в удобном для нас виде результаты М. Пеццана и М. Ферри. Без ограничения общности можно считать, что $A = [n + 1]$.

Построение графа по псевдомногообразию. Пусть K есть n -мерное симплициально клеточное псевдомногообразие с правильной раскраской вершин. Каждому n -мерному симплексу σ комплекса K поставим в соответствие вершину v_σ . Каждому $(n - 1)$ -мерному симплексу τ комплекса K поставим в соответствие ребро e_τ , соединяющее вершины v_{σ_1} и v_{σ_2} , где σ_1

и σ_2 — два n -мерных симплекса, содержащих симплекс τ . Покрасим ребро e_τ в цвет j , если симплекс τ не содержит вершины цвета j .

Построение псевдомногообразия по графу. Пусть V — множество вершин графа Γ и $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}$ — соответствующие инволюции. Пусть

$$\Delta^n = \{(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1} = 1, \\ t_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\} —$$

стандартный n -мерный симплекс. Положим,

$$K(\Gamma) = (V \times \Delta^n) / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями

$$(v, t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \equiv (\Phi_j(v), t_1, t_2, \dots, t_{n+1}), \text{ если } t_j = 0. \quad (1.2)$$

Замечание 1.3.1. Фраза «отношение эквивалентности порождено отождествлениями» здесь и далее в аналогичных ситуациях понимается в следующем смысле. Отождествления (1.2) задают на множестве $V \times \Delta^n$ симметричное отношение $\equiv$, которое не является однако ни рефлексивным, ни транзитивным. Отношение $\sim$ есть слабейшее отношение эквивалентности, содержащее отношение $\equiv$, то есть такое, что $(v, x) \sim (v', x')$ всякий раз, когда $(v, x) \equiv (v', x')$.

Непосредственно проверяется, что $K(\Gamma)$ — нормальное псевдомногообразие. Раскраска вершин комплекса $K(\Gamma)$ индуцируется стандартной раскраской вершин симплекса Δ^n . Несложно проверить, что приведенные конструкции являются взаимно обратными.

Частично упорядоченное множество симплексов комплекса $K(\Gamma)$. Для любого подмножества $B \subset [n+1]$ обозначим через Γ_B граф, получаемый из Γ при удалении всех рёбер, цвета которых не принадлежат

множеству B . Тогда Γ_B — однородный граф степени, равной количеству элементов в множестве B . Обозначим через $\mathcal{K}(\Gamma)$ множество, элементами которого являются символ $\emptyset$ и всевозможные пары (B, Υ) , где B — подмножество множества $[n + 1]$, $B \neq [n + 1]$, Υ — компонента связности графа Γ_B . Введём упорядочение в множестве $\mathcal{K}(\Gamma)$, положив $\emptyset < (B, \Upsilon)$ и $(B_1, \Upsilon_1) \leq (B_2, \Upsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $B_2 \subset B_1$ и $\Upsilon_2 \subset \Upsilon_1$.

Через Δ_v мы будем обозначать n -мерный симплекс комплекса $K(\Gamma)$, соответствующий вершине $v \in V$; через Δ_e мы будем обозначать $(n - 1)$ -мерный симплекс комплекса $K(\Gamma)$, соответствующий ребру e графа Γ .

Предложение 1.3.2. *Частично упорядоченное множество симплексов комплекса $K(\Gamma)$ изоморфно частично упорядоченному множеству $\mathcal{K}(\Gamma)$. При этом изоморфизме каждому симплексу σ комплекса $K(\Gamma)$ соответствует пара (B, Υ) , где $B \subset [n + 1]$ — подмножество, состоящее из всех цветов, не являющихся цветами вершин симплекса σ .*

Доказательство. Для каждого подмножества $B \subsetneq [n + 1]$ обозначим через $\Delta_{B,v}$ грань симплекса Δ_v , натянутую на множество вершин, цвета которых не принадлежат подмножеству B . Тогда $\Delta_{B,v}$ — симплекс размерности $n - k$, где k — количество элементов в множестве B . Очевидно, что каждый симплекс комплекса $K(\Gamma)$ имеет вид $\Delta_{B,v}$ для некоторых B и v . Рассматривая отождествления, производимые при склейке комплекса $K(\Gamma)$, мы получаем, что $\Delta_{B,v_1} = \Delta_{B,v_2}$, если вершины v_1 и v_2 соединены ребром, цвет которого принадлежит множеству B . Значит, $\Delta_{B,v_1} = \Delta_{B,v_2}$, если вершины v_1 и v_2 лежат в одной компоненте связности графа Γ_B . Несложно также проверить, что симплексы Δ_{B,v_1} и Δ_{B,v_2} различны, если вершины v_1 и v_2 лежат в разных компонентах связности графа Γ_B . $\square$

Симплекс комплекса $K(\Gamma)$, соответствующий паре (B, Υ) , мы будем обозначать через $\Delta_{B, \Upsilon}$. В частности, $\Delta_{\emptyset, v} = \Delta_v$ и $\Delta_{\{j\}, e} = \Delta_e$, где e — ребро цвета j .

Предложение 1.3.3. *Линк симплекса $\Delta_{B, \Upsilon}$ в симплициально клеточном комплексе $K(\Gamma)$ изоморфен симплициально клеточному комплексу $K(\Upsilon)$.*

Доказательство. Несложно проверить, что частично упорядоченное множество $\mathcal{K}(\Upsilon)$ изоморфно полуинтервалу

$$[(B, \Upsilon), +\infty) = \{\xi \in \mathcal{K}(\Gamma) \mid \xi \geq (B, \Upsilon)\}.$$

Значит, оно изоморфно частично упорядоченному множеству симплексов комплекса $K(\Gamma)$, содержащих симплекс $\Delta_{B, \Upsilon}$. Таким образом, частично упорядоченное множество симплексов комплекса $K(\Upsilon)$ изоморфно частично упорядоченному множеству симплексов комплекса $\text{link } \Delta_{B, \Upsilon}$. $\square$

Ориентация. Несложно проверить, что псевдомногообразие $K(\Gamma)$ является ориентируемым тогда и только тогда, когда граф Γ не содержит циклов нечетной длины, то есть является двудольным. Предположим, что задано разбиение множества V на два непересекающихся подмножества V_+ и V_- , такое что граф Γ является двудольным по отношению к этому разбиению. Если $v \in V_+$, зададим на симплексе Δ_v ориентацию, индуцированную канонической ориентацией стандартного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Если $v \in V_-$, зададим на симплексе Δ_v ориентацию, противоположную ориентации, индуцированной канонической ориентацией стандартного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Легко проверить, что введенные ориентации на симплексах Δ_v согласованны. Таким образом, разбиение $V = V_+ \sqcup V_-$ задает ориентацию псевдомногообразия $K(\Gamma)$. Обратно, ориентация псевдомногообразия

$K(\Gamma)$ задает разбиение множества V , относительно которого граф Γ является двудольным.

1.4 Построение по графам псевдомногообразий, склеенных из простых многогранников

В этом разделе мы обобщим конструкцию Пеццана–Ферри на случай псевдомногообразий, склеенных из простых многогранников. Нас будет интересовать только та часть конструкции Пеццана–Ферри, которая сопоставляет псевдомногообразие каждому однородному графу. Мы будем склеивать псевдомногообразия из одинаковых клеток, то есть из нескольких экземпляров некоторого выпуклого многогранника P^n . При этом каждую гипергрань многогранника P^n мы будем склеивать вдоль тождественного изоморфизма с той же гипергранью какого-нибудь другого экземпляра многогранника P^n . Дадим теперь строгое описание конструкции.

Пусть P^n — простой многогранник размерности n , $\mathcal{F}$ — множество его гиперграней, $m = |\mathcal{F}|$. Пусть Γ — конечный однородный граф степени m с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества $\mathcal{F}$, и V — множество вершин графа Γ . Пусть $\Phi_F : V \rightarrow V$, $F \in \mathcal{F}$, — инволюции, задающие граф Γ .

Положим

$$M^n(P^n, \Gamma) = (V \times P^n) / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями

$$(v, x) \equiv (\Phi_F(v), x), \text{ если } x \in F.$$

Точку полиэдра $M^n(P^n, \Gamma)$, являющуюся классом эквивалентности пары

(v, x) , мы будем обозначать через $[v, x]$. Гиперграни стандартного симплекса находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $[n + 1]$. Таким образом, конструкция, описанная в разделе 1.3, является частным случаем рассматриваемой общей конструкции, то есть $M^n(\Delta^n, \Gamma) = K(\Gamma)$.

Комплекс $M^n(P^n, \Gamma)$ является нормальным псевдомногообразием. Псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ является ориентируемым тогда и только тогда, когда граф Γ является двудольным. Ориентации псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями $V = V_+ \sqcup V_-$, относительно которых граф Γ является двудольным.

Получим теперь аналоги предложений 1.3.2, и 1.3.3 в рассматриваемом нами общем случае.

Обозначим через $\mathcal{M}(P^n, \Gamma)$ множество, элементами которого являются символ $\emptyset$ и всевозможные пары (B, Υ) , где B — подмножество множества $\mathcal{F}$, такого что пересечение гиперграней из множества B непусто, и Υ — компонента связности графа Γ_B . Упорядочение в множестве $\mathcal{M}(P^n, \Gamma)$ вводится точно так же, как упорядочение в множестве $\mathcal{K}(\Gamma)$ (см. раздел 1.3).

Из конструкции псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$ сразу следует, что его n -мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами графа Γ (грань, соответствующую вершине v , мы будем обозначать через Q_v), а его $(n - 1)$ -мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с рёбрами графа Γ (грань, соответствующую ребру e , мы будем обозначать через Q_e). Информацию о строении остальных граней даёт следующее предложение.

Предложение 1.4.1. *Частично упорядоченное множество граней псев-*

домногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$ изоморфно частично упорядоченному множеству $\mathcal{M}(P^n, \Gamma)$.

Грань комплекса $M^n(P^n, \Gamma)$, соответствующую паре (B, Υ) , мы будем обозначать через $Q_{B, \Upsilon}$. В частности, $Q_{\emptyset, v} = Q_v$ и $Q_{\{F\}, e} = Q_e$, где e — ребро цвета F .

Предложение 1.4.2. *Линк грани $Q_{B, \Upsilon}$ в комплексе $M^n(P^n, \Gamma)$ изоморфен симплициально клеточному комплексу $K(\Upsilon)$.*

Доказательства предложений 1.4.1 и 1.4.2 полностью аналогичны доказательствам предложений 1.3.2 и 1.3.3.

Отметим одно очевидное, но важное следствие предложения 1.4.2.

Следствие 1.4.3. *Предположим, что*

1. *инволюции Φ_{F_1} и Φ_{F_2} коммутируют для любых двух гиперграней F_1, F_2 многогранника P^n с непустым пересечением;*
2. *отображение $\Phi_{F_1} \circ \Phi_{F_2} \circ \dots \circ \Phi_{F_k}$ не имеет неподвижных точек для любых попарно различных гиперграней $F_1, F_2, \dots, F_k$ с непустым пересечением.*

Тогда линк каждой вершины псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$ изоморфен границе n -мерного октаэдра. В частности, псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ является кусочно линейным многообразием.

Замечание 1.4.4. Если условие 2 не выполнено, в псевдомногообразии $M^n(P^n, \Gamma)$ будут вершины, линки которых не изоморфны границе n -мерного октаэдра. Например, в нём могут встретиться вершины, линки

которых изоморфны симплициально клеточному комплексу, полученному при склейке двух $(n - 1)$ -мерных симплексов по их целым границам.

Глава 2

Многообразие изоспектральных симметрических трёхдиагональных матриц и его накрытия

2.1 Необходимые сведения о группах Кокстера

Пусть S — конечное множество, $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ — функция, такая что $m(s, s') = m(s', s)$, $m(s, s) = 1$ и $m(s, s') \geq 2$, если $s \neq s'$.

Определение 2.1.1. *Группой Кокстера*, задаваемой функцией m , называется группа W с копредставлением

$$W = \langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \text{ для всех } s, s' \in S \rangle.$$

Равенство $m(s, s') = \infty$ означает отсутствие соответствующего соотношения. Пара (W, S) называется *системой Кокстера*. Группа Кокстера (соответственно, система Кокстера) называется *прямоугольной*, если $m(s, s') = 2$ или ∞ для любых $s \neq s'$. *Рангом* системы Кокстера (W, S) называется мощность множества S .

Определение 2.1.2. *Графом Кокстера* системы Кокстера (W, S) называется граф на множестве вершин S , в котором вершины s и s' соединены ребром без метки, если $m(s, s') = 3$, и ребром с меткой $m(s, s')$, если $m(s, s') \geq 4$.

Пусть W_1 и W_2 — группы Кокстера с графами Кокстера Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда группа Кокстера с графом Кокстера, являющимся несвязным объединением графов Γ_1 и Γ_2 , изоморфна прямому произведению групп W_1 и W_2 . В частности, группа $\mathbf{Z}_2^n$ является группой Кокстера с графом Кокстера на n вершинах без рёбер. Группа Кокстера, соответствующая графу на n вершинах, в котором каждые две вершины соединены ребром с меткой ∞ есть свободное произведение n экземпляров группы $\mathbf{Z}_2$.

Пусть (W, S) — система Кокстера, задаваемая функцией m , $T \subset S$ — подмножество. Через W_T мы будем обозначать подгруппу группы W , порождённую множеством T . Хорошо известны следующие факты о группах Кокстера (см., например, [1]):

1. Тавтологическое отображение $S \rightarrow W$ является вложением, причём ни один из элементов множества S не переходит в единицу группы W .
2. Пусть $s, s' \in S$. Тогда порядок элемента ss' в группе W равен $m(s, s')$.
3. Пусть (W_1, T) — система Кокстера, задаваемая функцией $m|_{T \times T}$. Тогда естественное отображение $W_1 \rightarrow W$ является вложением с образом W_T . Таким образом, (W_T, T) — также система Кокстера.

Хорошо известно (см., например, [1]), что группа Кокстера конечна тогда и только тогда, когда её граф Кокстера представляется в виде несвязного объединения графов, изображённых на рис. 2.1.

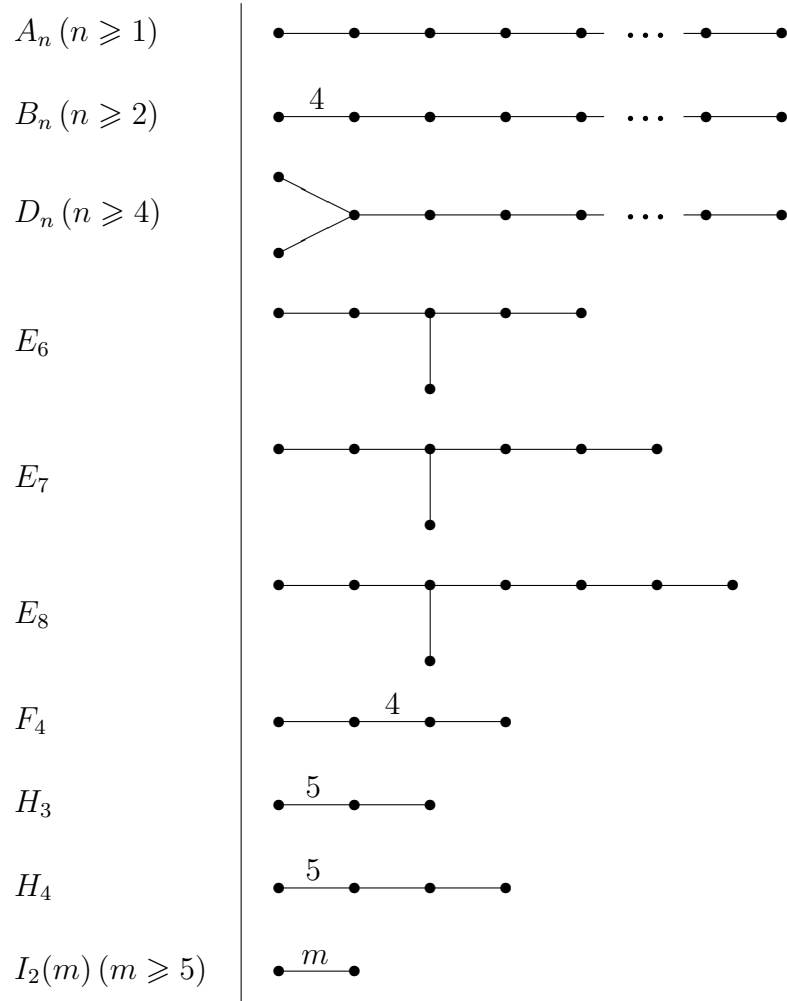


Рис. 2.1. Графы Кокстера конечных неприводимых групп Кокстера

В настоящей работе нам будут в основном нужны группы Кокстера типов A_n и B_n . Группа Кокстера W типа A_n есть группа симметрий правильного n -мерного симплекса. Она изоморфна группе перестановок Σ_{n+1} . При этом изоморфизме множество образующих $S \subset W$ переходит в стандартную систему образующих группы Σ_{n+1} , состоящую из транспозиций $(i, i + 1)$, $i = 1, \dots, n$. Группа Кокстера типа B_n есть группа симметрий n -мерного куба. Группы типа A_n будут возникать при реализации фундаментальных циклов симплициальных псевдомногообразий, группы типа B_n — при реализации фундаментальных циклов кубических псевдо-

многообразий.

2.2 Пермутаэдры

Пусть теперь (W, S) — конечная система Кокстера ранга n . Хорошо известно (см., например, [1]), что группа W обладает точным ортогональным представлением $\rho : W \rightarrow O(n)$, таким что фундаментальной камерой для действия группы W на $\mathbb{R}^n$ является n -гранный угол K и $\rho(s_i)$ есть ортогональные отражения в гипергранях этого угла. В частности, группа Кокстера типа A_n реализуется как группа симметрий правильного n -мерного симплекса, а группа Кокстера типа B_n — как группа симметрий n -мерного куба. Пусть x — точка из внутренней точки угла K . Тогда стабилизатор точки x тривиален и, следовательно, орбита точки x состоит из $|W|$ различных точек. Выпуклая оболочка орбиты Wx является простым многогранником и называется *пермутаэдром типа W* . Мы будем обозначать его через $\Pi^n(W)$. Этот многогранник определён однозначно с точностью до комбинаторной эквивалентности.

Если элемент $w \in W$ сопряжён одной из образующих s_i , то $\rho(w)$ есть ортогональное отображение в некоторой гиперплоскости. Все такие гиперплоскости называются *зеркалами* группы W . Зеркала группы W разбивают её пермутаэдр $\Pi^n(W)$ на $|W|$ многогранников, каждый из которых комбинаторно эквивалентен n -мерному кубу. Такое разбиение пермутаэдра на комбинаторные кубы, а также комбинаторно эквивалентное ему кубически клеточное разбиение мы будем называть его *каноническим кубическим подразделением* (см. раздел 1.1). *Типом* зеркала, соответствующего элементу w , называется то число i , для которого элемент w сопряжён об-

разующей s_i . Для каждой гиперграни F пермутаэдра $\Pi^n(W)$ существует ровно одно число $i \in [n]$, такое что гипергрань F не пересекается ни с одним зеркалом типа i . Это число i называется *типом* гиперграни F . Различные гиперграни, имеющие непустое пересечение, всегда имеют разные типы. Таким образом, мы получаем правильную раскраску гиперграней пермутаэдра $\Pi^n(W)$ в цвета из множества $[n]$.

Традиционно *пермутаэдром* называют пермутаэдр типа A_n . В этом случае мы будем опускать указание на группу W в обозначении и обозначать пермутаэдр просто через Π^n . Стандартной реализацией пермутаэдра типа A_n является выпуклая оболочка точек, получающихся при помощи всевозможных перестановок координат точки $(1, 2, \dots, n+1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Это n -мерный простой выпуклый многогранник, лежащий в гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Описание граней этого многогранника может быть найдено например в [43], [44]. В частности, его гиперграни находятся во взаимно однозначном соответствии с непустыми собственными подмножествами множества $[n+1]$. Гипергрань F_ω , соответствующая подмножеству ω , задаётся уравнением

$$\sum_{i \in \omega} t_i = \frac{|\omega|(2n - |\omega| + 3)}{2}.$$

Пусть теперь (W, S) — система Кокстера типа B_n . В этом случае пермутаэдр $\Pi^n(W)$ может быть реализован как выпуклая оболочка $2^n n!$ точек, получающихся из точки $(1, 2, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$ при помощи перестановок координат и обращений знаков некоторых координат. Гиперграни многогранника $\Pi^n(W)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами

(ω, χ) , где $\omega \subset [n]$ — непустое подмножество и $\chi : \omega \rightarrow \mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$ — произвольное отображение. Гипергрань $F_{\omega, \chi}$, соответствующая паре (ω, χ) задаётся уравнением

$$\sum_{i \in \omega} \chi(i) t_i = \frac{|\omega|(2n - |\omega| + 1)}{2}.$$

В дальнейшем мы всегда понимаем под пермутаэдрами типов A_n и B_n именно эти их стандартные реализации.

2.3 Малые накрытия

Малые накрытия представляют собой $\mathbf{Z}_2$ -аналоги квазиторических многообразий (см. [32], [7]). *Малым накрытием* называется гладкое многообразие M^n с локально стандартным действием группы $\mathbf{Z}_2^n$, такое что $M^n / \mathbf{Z}_2^n = P^n$ — простой многогранник. (Действие называется *локально стандартным*, если локально оно моделируется стандартным действием группы $\mathbf{Z}_2^n$ отражениями на $\mathbb{R}^n$.) В 1991 году М. Дэвис и Т. Янушкевич [32] доказали, что каждое малое накрытие получается с помощью некоторой стандартной конструкции. В этом пункте мы изложим эту конструкцию Дэвиса-Янушкевича.

Рассмотрим n -мерный простой многогранник P^n с m гипергранями $F_1, F_2, \dots, F_m$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m$ — образующие группы $\mathbf{Z}_2^m$. *Характеристической функцией* называется произвольный гомоморфизм $\lambda : \mathbf{Z}_2^m \rightarrow \mathbf{Z}_2^n$, такой что элементы $\lambda(a_{i_1}), \lambda(a_{i_2}), \dots, \lambda(a_{i_k})$ линейно независимы, всякий раз когда пересечение $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_k}$ непусто. Пусть F — грань многогранника P^n , являющаяся пересечением гиперграней $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_k}$. Обозначим через $G(F) \subset \mathbf{Z}_2^n$ подгруппу, порождённую

элементами $\lambda(a_{i_1}), \lambda(a_{i_2}), \dots, \lambda(a_{i_k})$. Для каждой точки $x \in P^n$ обозначим через $F(x)$ единственную грань многогранника P^n , содержащую точку x в своей относительной внутренней. Положим

$$M^n(P^n, \lambda) = P^n \times \mathbf{Z}_2^n / \sim, \quad (2.1)$$

где $(x, g) \sim (x', g')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $g^{-1}g' \in G(F(x))$. Будем обозначать класс эквивалентности пары (g, x) через $[g, x]$.

Определённое таким образом пространство $M^n(P^n, \lambda)$ действительно является многообразием, так как в окрестности точки $[g, x]$, такой что $\text{codim } F(x) = k$ оно локально гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, разбитому стандартным образом на 2^k «углов» вида $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}_+^k$. Группа $\mathbf{Z}_2^n$ действует на многообразии $M^n(P^n, \lambda)$ по формуле $g'[g, x] = [g'g, x]$. При этом $M^n(P^n, \lambda)/\mathbf{Z}_2^n = P^n$. Многообразие $M^n(P^n, \lambda)$ обладает канонической (с точностью до изотопии) $\mathbf{Z}_2^n$ -инвариантной гладкой структурой (см. [30], [32], а также раздел 2.4 настоящей работы).

Формула (2.1) задаёт клеточное разбиение многообразия $M^n(P^n, \lambda)$, все n -мерные клетки которого изоморфны многограннику P^n . Двойственное ему клеточное разбиение есть кубическое комбинаторное многообразие, линк каждой вершины которого изоморфен комплексу L , где L — граница симплицального многогранника, двойственного многограннику P^n .

Важнейшим специальным случаем малых накрытий являются так называемые малые накрытия, индуцированные из линейной модели, также введённые М. Дэвисом и Т. Янушкевичем в работе [32].

Пусть $\mathcal{F}$ — множество гиперграней многогранника P^n . Предположим, что нам задана *правильная раскраска* гиперграней многогранника P^n в цвета из множества $[n]$, то есть функция $c : \mathcal{F} \rightarrow [n]$, такая что для любой

вершины v многогранника P^n значения $c(F_1), c(F_2), \dots, c(F_n)$ попарно различны, где $F_1, F_2, \dots, F_n$ — гипергрani, сходящиеся в вершине v . Отметим, что если только такая функция c существует, она автоматически единственна с точностью до перестановки множества $[n]$. Пусть $r_1, r_2, \dots, r_n$ — система образующих группы $\mathbf{Z}_2^n$. Правильная раскраска c задаёт характеристическую функцию λ_c по формуле $\lambda_c(a_i) = r_{c(F_i)}$. Малое накрытие $M^n(P^n, \lambda_c)$ называется *малым накрытием, индуцированным из линейной модели*. С точностью до диффеоморфизма оно не зависит от выбора правильной раскраски гиперграней многогранника P^n в n цветов. Мы будем обозначать его просто через $M^n(P^n)$. Отметим однако, что малые накрытия, индуцированные из линейной модели, существует только над теми многогранниками, которые допускают правильную раскраску гиперграней в n цветов.

Для каждого подмножества $C \subset [n]$, мы будем обозначать через $\mathbf{Z}_2^C$ подгруппу группы $\mathbf{Z}_2^n$, порождённую всеми образующими r_i , такими что $i \in C$. Тогда для характеристической функции λ_c мы имеем $G(F) = \mathbf{Z}_2^{C(F)}$ для любой грани F многогранника P^n . Здесь $C(F)$ — множество цветов гиперграней, содержащих грань F . Несложно проверить, что $|C(F)| = \text{codim } F$. В частности, $C(v) = [n]$ для любой вершины v многогранника P^n и $C(P^n) = \emptyset$.

Для каждого элемента $g \in \mathbf{Z}_2^n$ определим вложение $\iota_g : P^n \rightarrow M^n(P^n)$ по формуле $\iota_g(x) = [g, x]$. Образы многогранника P^n и его граней при отображениях ι_g задают клеточное разбиение многообразия $M^n(P^n)$. В частности, n -мерными клетками этого разбиения являются клетки $Q_g = \iota_g(P^n)$. Число таких клеток равно 2^n . Многообразие $M^n(P^n)$ ориентируемо. Его

ориентация задаётся следующим образом. Сначала фиксируем какую-либо ориентацию на многограннике P^n . Пусть $\eta : \mathbf{Z}_2^n \rightarrow \mathbf{Z}_2$ — гомоморфизм, переводящий каждую образующую r_i в -1 . Наделим n -мерную клетку Q_g ориентацией так, чтобы вложение ι_g сохраняло ориентацию, если $\eta(g) = 1$, и обращало ориентацию, если $\eta(g) = -1$. Несложно проверить, что введённые таким образом ориентации на n -мерных клетках разбиения многообразия $M^n(P^n)$ согласованны.

Грани разбиения $M^n(P^n)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (F, Y) , такими что F — грань многогранника P^n и Y — смежный класс группы $\mathbf{Z}_2^n$ по подгруппе $\mathbf{Z}_2^{C(F)}$. Грань, соответствующая паре (F, Y) состоит из всех точек $[g, x]$, где $g \in Y$, $x \in F$. Мы будем обозначать эту грань через $Q_{F,Y}$ или $Q_{B,Y}$, где B — множество всех гиперграней многогранника P^n , содержащих грань F . В частности, $Q_{P^n, \{g\}} = Q_{\emptyset, \{g\}} = Q_g$.

Замечание 2.3.1. Отметим, что отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями

$$(g, x) \equiv (r_i g, x), \text{ если } \exists F \in \mathcal{F} : x \in F \text{ и } c(F) = i.$$

2.4 Сглаживание многообразия $M^n(P^n)$

Малые накрытия над простыми многогранниками обладают каноническими (с точностью до изотопии) $\mathbf{Z}_2^n$ -инвариантными сглаживаниями (см. [32]). На самом деле верно более общее утверждение: любое n -мерное кусочно линейное многообразие, склеенное из простых многогранников вдоль линейных изоморфизмов их граней так, что линки всех его вер-

шин изоморфны границе n -мерного октаэдра, обладает каноническим (с точностью до изотопии) сглаживанием (см., например, [30]). Для полноты изложения мы опишем явно каноническую гладкую структуру на многообразии $M^n(P^n)$. Аналогично можно было бы ввести гладкую структуру на произвольном малом накрытии $M^n(P^n, \lambda)$, но мы не будем этого делать, так как это нам нигде не понадобится.

Напомним вначале, как вводится гладкая структура на многообразии $M^n = M_1^n \cup_f M_2^n$, где M_1^n и M_2^n — гладкие многообразия с краями и $f : \partial M_1^n \rightarrow \partial M_2^n$ — диффеоморфизм (см., например, [17]). Для этого у многообразий M_1^n и M_2^n нужно выбрать *воротники*, то есть гладкие вложения $\varphi_i : \partial M_i^n \times [0, \delta) \rightarrow M_i^n$, $i = 1, 2$, такие что $\varphi_i|_{\partial M_i^n \times 0}$ — тождественные диффеоморфизмы. После этого многообразие M^n легко наделить гладкой структурой, такой что локальными координатами в окрестности точки $q_0 \in \partial M_1^n = \partial M_2^n$ являются функции

$$x_1 \circ \pi_1 \circ \varphi_i^{-1}, x_2 \circ \pi_1 \circ \varphi_i^{-1}, \dots, x_{n-1} \circ \pi_1 \circ \varphi_i^{-1}, (-1)^i \pi_2 \circ \varphi_i^{-1},$$

где $\pi_1 : \partial M_i^n \times [0, \delta) \rightarrow \partial M_i^n$ и $\pi_2 : \partial M_i^n \times [0, \delta) \rightarrow [0, \delta)$ — проекции и $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ — локальные координаты на многообразии $\partial M_1^n = \partial M_2^n$ в окрестности точки q_0 . Гладкая структура на M^n с точностью до изотопии не зависит от выбора воротников.

Наша задача состоит в том, чтобы получить аналог этой конструкции для склеивания многообразия $M^n(P^n)$ из простых многогранников.

Воротником гиперграницы $F \subset P^n$ мы будем называть гладкое вложение $\varphi : F \times [0, \delta) \rightarrow P^n$, такое что

1. $\varphi|_{F \times 0} = \text{id}_F$ — тождественное отображение;

2. образ вложения φ содержит некоторую открытую окрестность гиперграницы F в P^n (здесь и далее под открытым подмножеством многогранника P^n мы всегда понимаем его подмножество, открытое в индуцированной топологии, а не открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, содержащееся в P^n);
3. $\varphi((G \cap F) \times [0, \delta)) \subset G$ для любой грани $G \subset P^n$, такой что $G \not\subset F$ и $G \cap F \neq \emptyset$.

Мы будем называть векторное поле на $F \times [0, \delta)$ *вертикальным*, если оно касается слоёв проекции π_1 , и *горизонтальным*, если оно касается слоёв проекции π_2 . В частности, вертикальным является векторное поле $\frac{\partial}{\partial t}$, где t — координата на полуинтервале $[0, \delta)$. Воротник задаёт векторное поле $\xi = \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ в окрестности грани F . Это векторное поле обладает следующими свойствами:

1. Поле ξ трансверсально к гипергранице F , причём $\alpha(\xi) > 0$ во всех точках гиперграницы F . Здесь α — линейная функция на $\mathbb{R}^n$, равная нулю на всех векторах, параллельных грани F , и равная $+1$ на единичном векторе внутренней нормали к F .
2. Если G — грань многогранника P^n , не содержащаяся в гипергранице F , и $q \in G$, то вектор $\xi(q)$ параллелен грани G .

Обратно, каждое векторное поле ξ , обладающее свойствами 1 и 2, задаёт воротник гиперграницы F по формуле $\varphi(x, t) = g_t(x)$, где g_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порождённая полем ξ .

Если $G \subset P^n$ — грань, такая что $G \not\subset F$ и $G \cap F \neq \emptyset$, то $\varphi|_{(G \cap F) \times [0, \delta)}$ — воротник гиперграницы $G \cap F$ многогранника G , который мы будем назы-

вать воротником, *индуцированным* воротником φ . Мы будем обозначать его через φ_G .

Если $0 < \delta' < \delta$, то воротник φ можно ограничить до воротника $\varphi_{F \times [0, \delta']}$. Как правило, мы не будем различать эти два воротника.

Пусть F_1 и F_2 — две различные гиперграни многогранника P^n с непустым пересечением, φ_1 и φ_2 — их воротники и ξ_1 и ξ_2 — соответствующие векторные поля. Мы будем говорить, что воротники φ_1 и φ_2 *согласованны*, если диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} (F_1 \cap F_2) \times [0, \delta) \times [0, \delta) & \xrightarrow{(\varphi_1)_{F_2} \times \text{id}} & F_2 \times [0, \delta) & \xrightarrow{\varphi_2} & P^n \\ \text{id} \times T \downarrow & & & & \parallel \\ (F_1 \cap F_2) \times [0, \delta) \times [0, \delta) & \xrightarrow{(\varphi_2)_{F_1} \times \text{id}} & F_1 \times [0, \delta) & \xrightarrow{\varphi_1} & P^n \end{array}$$

коммутативна (возможно, после ограничения на меньший полуинтервал $[0, \delta') \subset [0, \delta)$). Здесь $T(t_1, t_2) = (t_2, t_1)$. Равносильно, воротники φ_1 и φ_2 согласованны тогда и только тогда, когда $[\xi_1, \xi_2] = 0$ в некоторой окрестности грани $F_1 \cap F_2$. Воротники двух непересекающихся гиперграней всегда считаются согласованными.

Предположим, что для каждой гиперграни F многогранника P^n задан её воротник φ_F и воротники φ_F попарно согласованы. Тогда набор воротников $\Theta = \{\varphi_F\}$ мы будем называть *системой согласованных воротников* для многогранника P^n .

Предложение 2.4.1. *Для каждого простого многогранника P^n существует система согласованных воротников.*

Доказательство этого предложения будет дано ниже, а сейчас мы покажем, как по системе согласованных воротников строится гладкая структура на многообразии $M^n(P^n)$.

Напомним, что каждая грань разбиения $M^n(P^n)$ имеет вид $Q_{F,Y}$, где $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$ — грань многогранника P^n и Y — смежный класс группы $\mathbf{Z}_2^n$ по подгруппе $\mathbf{Z}_2^{C(F)}$. Здесь F_i — попарно различные гиперграни многогранника P^n . Каждой такой паре (F, Y) мы сопоставим карту $f_{F,Y} : \mathcal{U}_{F,Y} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{U}_{F,Y}$ — открытое подмножество, содержащее относительную внутренность грани $Q_{F,Y}$. Пусть g_0 — какой-либо элемент смежного класса Y . Тогда все элементы класса Y имеют вид gg_0 , $g \in \mathbf{Z}_2^{C(F)}$.

Рассмотрим отображение $\varphi_{F_1 F_2 \dots F_k} : F \times [0, \delta)^k \rightarrow P^n$, определённое по формуле

$$\varphi_{F_1 F_2 \dots F_k} = \varphi_{F_1} \circ ((\varphi_{F_2})_{F_1} \times \text{id}_{[0, \delta)}) \circ \dots \circ ((\varphi_{F_k})_{F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1}} \times \text{id}_{[0, \delta)^{k-1}}). \quad (2.2)$$

Из согласованности воротников φ_{F_i} следует, что отображение $\varphi_{F_1 F_2 \dots F_k}$ не зависит от упорядочения гиперграней $F_1, F_2, \dots, F_k$. Точнее,

$$\varphi_{F_{\nu(1)} F_{\nu(2)} \dots F_{\nu(k)}}(x, t_{\nu(1)}, t_{\nu(2)}, \dots, t_{\nu(k)}) = \varphi_{F_1 F_2 \dots F_k}(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

для любой перестановки $\nu \in \Sigma_k$.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_F &= \varphi_{F_1 F_2 \dots F_k}(\text{Int}(F) \times [0, \delta)^k); \\ \mathcal{U}_{F,Y} &= \left\{ [gg_0, x] \in M^n(P^n) \mid g \in \mathbf{Z}_2^{C(F)} \text{ и } x \in \mathcal{U}_F \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{U}_F \subset P^n$ — открытое подмножество, содержащее относительную внутренность грани F , и, следовательно, $\mathcal{U}_{F,Y} \subset M^n(P^n)$ — открытое подмножество, содержащее относительную внутренность грани $Q_{F,Y}$. Множества $\mathcal{U}_{F,Y}$ образуют открытое покрытие многообразия $M^n(P^n)$. Отображение

$$f_{F,Y} : \mathcal{U}_{F,Y} \rightarrow F \times (-\delta, \delta)^k \subset \mathbb{R}^n$$

определяется по формуле

$$f_{F,Y}([gg_0, x]) = ((\text{id}_F \times \rho(g)) \circ \varphi_{F_1 F_2 \dots F_k}^{-1})(x),$$

где $\rho : \mathbf{Z}_2^{C(F)} \rightarrow O(k)$ — представление группы $\mathbf{Z}_2^{C(F)}$, такое что

$$\rho(r_{c(F_i)})(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_k) = (t_1, t_2, \dots, -t_i, \dots, t_k), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Непосредственно проверяется, что отображения $f_{F,Y}$ корректно определены и набор $\{(\mathcal{U}_{F,Y}, f_{F,Y})\}$ образует гладкий атлас на многообразии $M^n(P^n)$.

Докажем теперь предложение 2.4.1. Пусть $F_1, F_2, \dots, F_m$ — все гипергрani многогранника P^n . Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.4.2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ — попарно согласованные воротники гиперграней $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}$. Пусть для каждого $i < k$, такого что $F_i \cap F_k \neq \emptyset$, задан воротник $\varphi_k^{(i)}$ гипергрani $F_i \cap F_k$ многогранника F_i , причём для всех $i, j < k$, таких что $i \neq j$ и $F_i \cap F_j \cap F_k \neq \emptyset$, воротник $\varphi_k^{(i)}$ согласован с воротником $\varphi_j^{(i)} = (\varphi_j)_{F_i}$ и $(\varphi_k^{(i)})_{F_i \cap F_j} = (\varphi_k^{(j)})_{F_i \cap F_j}$. Тогда существует воротник φ_k гипергрani F_k , такой что φ_k согласован с воротниками φ_i , $i < k$, и $(\varphi_k)_{F_i} = \varphi_k^{(i)}$ для всех $i < k$, таких что $F_i \cap F_k \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}$ — векторные поля, соответствующие воротникам $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$.

Пусть $\xi_k^{(i)}$ — векторные поля на гипергранях F_i (в окрестностях граней $F_i \cap F_k$), соответствующие воротникам $\varphi_k^{(i)}$. Из условия

$$(\varphi_k^{(i)})_{F_i \cap F_j} = (\varphi_k^{(j)})_{F_i \cap F_j}$$

следует, что $\xi_k^{(i)} = \xi_k^{(j)}$ на пересечении $F_i \cap F_j$ (в окрестности грани $F_i \cap F_j \cap F_k$) для любых различных $i, j < k$, таких что $F_i \cap F_j \cap F_k \neq \emptyset$.

Нам нужно построить воротник φ_k так, чтобы он был согласован с воротниками $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ и индуцированные им воротники гиперграней $F_i \cap F_k \subset F_i$ совпадали с воротниками $\varphi_k^{(i)}$. Для этого нам достаточно построить векторное поле ξ_k в окрестности гиперграницы $F_k \subset P^n$, такое что

1. $\alpha_k(\xi_k) > 0$ на F_k , где α_k — линейная функция на $\mathbb{R}^n$, равная нулю на всех векторах, параллельных гиперграницы F_k , и равная $+1$ на единичном векторе внутренней нормали к F_k ;
2. если $i < k$ и $F_i \cap F_k \neq \emptyset$, то $\xi_k = \xi_k^{(i)}$ на F_i (точнее, на пересечении гиперграницы F_i с той окрестностью гиперграницы F_k , в которой определено поле ξ_k);
3. если $j > k$ и $F_j \cap F_k \neq \emptyset$, то векторное поле ξ_k касается гиперграницы F_j ;
4. если $i < k$ и $F_i \cap F_k \neq \emptyset$, то $[\xi_i, \xi_k] = 0$ в окрестности грани $F_i \cap F_k$.

По такому векторному полю ξ_k однозначно восстанавливается искомый воротник φ_k . При этом нам придётся уменьшать число δ , то есть ограничивать все воротники на меньший полуинтервал $[0, \delta') \subset [0, \delta)$.

Пусть $i < k$ и $F_i \cap F_k \neq \emptyset$. Обозначим через $\bar{\xi}_k^{(i)}$ горизонтальное векторное поле в окрестности подмножества $(F_i \cap F_k) \times [0, \delta) \subset F_i \times [0, \delta)$, такое что $\pi_{1*} \bar{\xi}_k^{(i)} = \xi_k^{(i)}$. Положим $\tilde{\xi}_k^{(i)} = \varphi_{i*} \bar{\xi}_k^{(i)}$. Тогда $\tilde{\xi}_k^{(i)}$ — векторное поле, определённое в некоторой окрестности $\mathcal{V}_i$ грани $F_i \cap F_k$ многогранника P^n , причём $[\tilde{\xi}_k^{(i)}, \xi_i] = 0$ в $\mathcal{V}_i$ и $\tilde{\xi}_k^{(i)} = \xi_k^{(i)}$ на пересечении $\mathcal{V}_i \cap F_i$.

Пусть теперь $i, j < k$, $i \neq j$ и $F_i \cap F_j \cap F_k \neq \emptyset$. Докажем, что $\tilde{\xi}_k^{(i)} = \tilde{\xi}_k^{(j)}$ на пересечении $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j$. Пусть ζ_i — прообраз векторного поля $\tilde{\xi}_k^{(i)}$ при вложении

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \left((\varphi_j)_{F_i} \times \text{id}_{[0, \delta)} \right) : (F_i \cap F_j) \times [0, \delta)^2 \rightarrow P^n.$$

Тогда поле ζ_i касается слоёв проекции $\pi_1 : (F_i \cap F_j) \times [0, \delta)^2 \rightarrow (F_i \cap F_j)$ и $\pi_{1*}\zeta_i = \xi_k^{(i)}$. Аналогично, векторное поле $\zeta_j = (\varphi_{ji}^{-1})_* \tilde{\xi}_k^{(j)}$ касается слоёв проекции π_1 и $\pi_{1*}\zeta_j = \xi_k^{(j)}$. Имеем, $\xi_k^{(i)} = \xi_k^{(j)}$ в тех точках грани $F_i \cap F_j$, где оба поля определены. Значит, $\zeta_i = \zeta_j$. Отображения φ_{ij} и φ_{ji} связаны формулой (2.2). Поэтому их действия на векторные поля, касательные к слоям проекции π_1 и постоянные вдоль слоёв проекции π_2 , одинаковы. Следовательно, $\tilde{\xi}_k^{(i)} = \tilde{\xi}_k^{(j)}$ на пересечении $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j$.

Обозначим через $\mathcal{V}$ объединение всех множеств $\mathcal{V}_i$, где $i < k$ и $F_i \cap F_k \neq \emptyset$. Тогда на множестве $\mathcal{V}$ корректно определено векторное поле $\tilde{\xi}_k$, такое что $\tilde{\xi}_k = \tilde{\xi}_k^{(i)}$ в $\mathcal{V}_i$. Множество $\mathcal{V}$ открыто в многограннике P^n и содержит все пересечения $F_i \cap F_k$, $i < k$. При этом $\tilde{\xi}_k = \xi_k^{(i)}$ в $\mathcal{V} \cap F_i$ и $[\tilde{\xi}_k, \xi_i] = 0$ в окрестности грани $F_i \cap F_k$.

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество граней $G \subset P^n$, таких что G не содержится ни в одной из гиперграней $F_1, F_2, \dots, F_k$ и $G \cap F_k \neq \emptyset$. В частности, всегда $P^n \in \mathcal{G}$. Для каждой грани $G \in \mathcal{G}$ обозначим через $\mathbf{n}_G$ единичный вектор внутренней нормали к гиперграну $G \cap F_k$ многогранника G . Имеем, $\alpha_k(\mathbf{n}_G) > 0$.

Очевидно, что имеются открытые подмножества $\mathcal{W}_G \subset P^n$, $G \in \mathcal{G}$, обладающие следующими свойствами:

1. $\overline{\mathcal{W}_G} \cap F_j = \emptyset$, если $j \neq k$ и $G \not\subset F_j$, где $\overline{\mathcal{W}_G}$ — замыкание множества $\mathcal{W}_G$;
2. $\mathcal{V} \cup \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{W}_G \supset F_k$.

В частности, из свойства 1 следует, что ни одно из множеств $\overline{\mathcal{W}_G}$ не пересекается ни с одной из гиперграней F_i , $i < k$.

Пусть $\psi_0, \{\psi_G\}_{G \in \mathcal{G}}$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое открытому покрытию $\mathcal{V}, \{\mathcal{W}_G\}_{G \in \mathcal{G}}$. Положим

$$\xi_k = \psi_0 \tilde{\xi}_k + \sum_{G \in \mathcal{G}} \psi_G \mathbf{n}_G.$$

Очевидно, что $\alpha_k(\xi_k) > 0$ на F_k . В окрестности каждой гиперграницы F_i , такой что $i < k$ и $F_i \cap F_k \neq \emptyset$, мы имеем $\xi_k = \tilde{\xi}_k$ и, следовательно, $[\xi_k, \xi_i] = 0$. Кроме того, в каждой точке гиперграницы F_i , где поле ξ_k определено, оно совпадает с полем $\xi_k^{(i)}$. Пусть теперь $j > k$. Тогда на F_j мы имеем

$$\xi_k = \sum_{G \in \mathcal{G}, G \subset F_j} \psi_G \mathbf{n}_G.$$

Это векторное поле касается грани F_j . □

Лемма 2.4.3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ — попарно согласованные воротники гиперграней $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}$. Тогда существует согласованный с ними воротник φ_k гиперграницы F_k .

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество граней $H \subset P^n$ вида $H = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k-1$, таких что $H \cap F_k \neq \emptyset$. Мы построим набор воротников $\varphi_k^H, H \in \mathcal{H}$, такой что

1. φ_k^H есть воротник гиперграницы $H \cap F_k$ многогранника H ;
2. воротник φ_k^H согласован с воротниками $(\varphi_i)_H, i < k$;
3. если $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ и $H_1 \subset H_2$, то $\left(\varphi_k^{H_2}\right)_{H_1} = \varphi_k^{H_1}$.

Мы будем строить воротники φ_k^H по индукции по размерности грани H . Предположим, что такие воротники построены для всех граней $H \in \mathcal{H}$, таких что $\dim H < d$. Рассмотрим грань $H \in \mathcal{H}$, такую что $\dim H = d$.

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_s$ — все гипергрani многогранника H , принадлежащие множеству $\mathcal{H}$. Тогда каждая грань H_r имеет вид $H \cap F_{i_r}$, $i_r < k$. Для построения воротника φ_k^H достаточно применить лемму 2.4.2 для многогранника H , набора его гиперграней $H_1, H_2, \dots, H_s$, их воротников $(\varphi_{i_r})_H$, $r = 1, 2, \dots, s$, и воротников $\varphi_k^{H_r}$ гиперграней $H_r \cap F_k$ многогранников H_r .

Когда набор воротников φ_k^H построен, мы, в частности, получаем воротники $\varphi_k^{(i)} = \varphi_k^{F_i}$ для всех $i < k$, таких что $F_i \cap F_k \neq \emptyset$. При этом воротники $\varphi_k^{(i)}$ удовлетворяют требованиям из леммы 2.4.2. Значит, по этой лемме, существует воротник φ_k гипергрani F_k , согласованный со всеми воротниками φ_i , $i < k$. $\square$

Предложение 2.4.1 сразу следует из леммы 2.4.3.

Предложение 2.4.4. *Построенная гладкая структура на многообразии $M^n(P^n)$ с точностью до изотопии не зависит от выбора системы согласованных воротников гиперграней многогранника P^n .*

Доказательство. Пусть $\Theta = \{\varphi_F\}$ и $\Theta' = \{\varphi'_F\}$ — две системы согласованных воротников гиперграней многогранника P^n . Рассмотрим многогранник $P^n \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Для его гиперграней $P^n \times \{0\}$ и $P^n \times \{1\}$ выберем воротники φ_0 и φ_1 , задаваемые постоянными векторными полями их внутренних нормалей $\mathbf{e}_{n+1}$ и $-\mathbf{e}_{n+1}$ соответственно. Из лемм 2.4.2 и 2.4.3 следует, что существуют воротники $\bar{\varphi}_F$ гиперграней $F \times [0, 1] \subset P^n \times [0, 1]$, согласованные между собой и с воротниками φ_0 и φ_1 гиперграней $P^n \times \{0\}$ и $P^n \times \{1\}$ и такие, что $(\bar{\varphi}_F)_{P^n \times \{0\}} = \varphi_F$ и $(\bar{\varphi}_F)_{P^n \times \{1\}} = \varphi'_F$. При этом легко видеть, что процедура, описанная в доказательствах лемм 2.4.2 и 2.4.3, даст нам воротники $\bar{\varphi}_F$, порождённые векторными полями $\bar{\xi}_F$, параллель-

ными подпространству $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, содержащему многогранник P^n . Положим $\xi_{F,t}(x) = \bar{\xi}_F(x, t)$, $x \in P^n$, $t \in [0, 1]$. Тогда $\xi_{F,t}$ есть векторные поля, задающие согласованную систему воротников гиперграней многогранника P^n для каждого $t \in [0, 1]$, причём поля $\xi_{F,0}$ задают систему воротников Θ , а поля $\xi_{F,1}$ — систему воротников Θ' . Из того, что гладкая изотопия всегда продолжается до объемлющей гладкой изотопии, следует, что существует непрерывное семейство диффеоморфизмов $f_t : P^n \rightarrow P^n$, $t \in [0, 1]$, такое что $f_{t*}\xi_{F,0} = \xi_{F,t}$ в некоторой окрестности границы многогранника P^n и $f_0 = \text{id}_{P^n}$. Тогда семейство гомеоморфизмов

$$\tilde{f}_t : M^n(P^n) \rightarrow M^n(P^n), \quad \tilde{f}_t([g, x]) = [g, f_t(x)],$$

осуществляет изотопию между гладкими структурами на многообразии $M^n(P^n)$, заданными согласованными системами воротников Θ и Θ' соответственно. $\square$

2.5 Малые накрытия над пермутаэдрами и многообразие изоспектральных трёхдиагональных матриц

Пусть теперь $P^n = \Pi^n$ — пермутаэдр. Правильная раскраска гиперграней пермутаэдра задаётся по формуле $c(F_\omega) = |\omega|$. Этот случай будет для нас самым важным. Он был исследован К. Томеи [43] до появления работы [32] и, по-видимому, послужил одной из мотиваций для общей конструкции, описанной выше. К. Томеи изучал многообразие изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных матриц и построил его разбиение, изоморфное разбиению $M^n(\Pi^n)$. Сформулируем более детально этот

результат.

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n+1}$ — произвольные действительные числа. Обозначим через $M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^n$ множество всех симметрических трёхдиагональных вещественных матриц размера $(n+1) \times (n+1)$ со спектром $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$. Множество $M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^n$ является гладким n -мерным подмногообразием в пространстве всех матриц. Для каждой последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}$, $\sigma_i = \pm 1$, обозначим через $M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} \subset M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^n$ подмножество, состоящее из всех матриц $A = (a_{ij})$, таких что $\sigma_i a_{i, i+1} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. В работе [43] К. Томеи доказал следующие утверждения.

1. Каждое множество $M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ диффеоморфно пермутаэдру как многообразию с углами. (К. Томеи не использовал термина «многообразие с углами», но его результат по сути означает именно это.)
2. Разбиение многообразия $M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^n$ на 2^n множеств $M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ изоморфно описанному выше разбиению многообразия $M^n(\Pi^n)$ на 2^n пермутаэдров Π^n . Этот изоморфизм задаёт диффеоморфизм

$$M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^n \approx M^n(\Pi^n).$$

3. Для двух разных наборов вещественных чисел $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n+1}$ и $\lambda'_1 > \lambda'_2 > \dots > \lambda'_{n+1}$ многообразия $M_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}^n$ и $M_{\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n+1}}^n$ диффеоморфны.

В [31] М. Дэвис изучил многообразия $M^n(\Pi^n(W))$ для конечных групп Кокстера W . Гиперграницы многогранника $\Pi^n(W)$ допускают правильную раскраску в n цветов (см. раздел 2.2), поэтому многообразие $M^n(\Pi^n(W))$ корректно определено. Перечислим вкратце некоторые результаты М. Дэвиса. Взяв каноническое кубическое подразделение всех пермутаэдров в

разбиении многообразия $M^n(\Pi^n(W))$, можно получить кубическое разбиение этого многообразия. Склеивая многообразия $M^n(\Pi^n(W))$ из кубов, получаем его представление в виде

$$M^n(\Pi^n(W)) = (W \times \mathbf{Z}_2^n \times [0, 1]^n) / \sim, \quad (2.3)$$

где $(w, g, x) \sim (w', g', x')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$, $w^{-1}w' \in W_{S(x)}$ и $g^{-1}g' \in \mathbf{Z}_2^{R(x)}$. Здесь $R(x) \subset R$ есть подмножество, состоящее из всех образующих r_i , таких что точка x лежит в гиперграни $t_i = 0$, и $S(x) \subset S$ есть подмножество, состоящее из всех образующих s_i , таких что точка x лежит в гиперграни $t_i = 1$. Отметим, что для каждого i либо $r_i \notin R(x)$, либо $s_i \notin S(x)$.

Такое кубическое разбиение многообразия $M^n(\Pi^n(W))$ удобно для описания его универсальной накрывающей. Определим вначале одну вспомогательную бесконечную группу Кокстера $\widetilde{W}$. Пусть m_{ij} — матрица показателей, определяющих группу Кокстера W . Группа $\widetilde{W}$ задаётся образующими

$$s_1, s_2, \dots, s_n, r_1, r_2, \dots, r_n$$

и соотношениями

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1, & i &= 1, 2, \dots, n; \\ r_i^2 &= 1, & i &= 1, 2, \dots, n; \\ (s_i s_j)^{m_{ij}} &= 1, & i, j &= 1, 2, \dots, n; \\ r_i r_j &= r_j r_i, & i, j &= 1, 2, \dots, n; \\ s_i r_j &= r_j s_i, & i, j &= 1, 2, \dots, n, i \neq j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если к указанным соотношениям добавить соотношения $s_i r_i = r_i s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, мы получим стандартное копредставление группы $W \times \mathbf{Z}_2^n$.

Таким образом, мы получаем эпиморфизм $\varphi : \widetilde{W} \rightarrow W \times \mathbf{Z}_2^n$. Известно, что группа $\ker \varphi$ свободна от кручения (см., например, [31]).

Универсальная накрывающая многообразия $M^n(\Pi^n(W))$ имеет вид

$$\widetilde{M}^n(\Pi^n(W)) = (\widetilde{W} \times [0, 1]^n) / \sim, \quad (2.5)$$

где $(\widetilde{w}, x) \sim (\widetilde{w}', x')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $\widetilde{w}^{-1}\widetilde{w}' \in \widetilde{W}_{S(x) \cup R(x)}$. Это кубическое разбиение было изучено М. Дэвисом в [30]. Основным полученным им результатом является стягиваемость многообразия $\widetilde{M}^n(\Pi^n(W))$. Действие группы $\widetilde{W}$ на многообразии $\widetilde{M}^n(\Pi^n(W))$ задаётся по формуле $\widetilde{w}'[\widetilde{w}, x] = [\widetilde{w}'\widetilde{w}, x]$. При этом стабилизаторы всех точек многообразия $\widetilde{M}^n(\Pi^n(W))$ конечны. Поэтому свободная от кручения подгруппа $\ker \varphi \subset \widetilde{W}$ действует на многообразии $\widetilde{M}^n(\Pi^n(W))$ свободно. Имеем,

$$\widetilde{M}^n(\Pi^n(W)) / \ker \varphi = M^n(\Pi^n(W)).$$

Таким образом, имеет место следующая теорема, принадлежащая К. Томеи [43] для групп Кокстера типа A_n (без вычисления фундаментальной группы) и М. Дэвису [31] в общем случае.

Теорема 2.5.1 (К. Томеи [43], М. Дэвис [31]). *Многообразие $M^n(\Pi^n(W))$ асферично и $\pi_1(M^n(\Pi^n(W))) \cong \ker \varphi$ есть свободная от кручения подгруппа конечного индекса в группе $\widetilde{W}$.*

Замечание 2.5.2. Конструкции (2.1), (2.3) и (2.5) являются частными случаями общей конструкции, принадлежащей Э. Б. Винбергу [9]. Пусть (W, S) — система Кокстера ранга n , K — топологическое пространство с отмеченными замкнутыми подмножествами $K_1, K_2, \dots, K_n$. Э. Б. Винберг определил *универсальное пространство* $\mathcal{U}(W, K)$ по формуле

$$\mathcal{U}(W, K) = (W \times K) / \sim,$$

где $(w, x) \sim (w', x')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $w^{-1}w' \in W_{S(x)}$. Здесь $S(x)$ есть множество всех s_i , таких что $x \in K_i$. В случае (2.1), группа Кокстера — это группа $\mathbf{Z}_2^n$, $K = P^n$, K_i — объединение гиперграней $F \subset P^n$, таких что $c(F) = i$. В случаях (2.3) и (2.5), группы Кокстера — группы $W \times \mathbf{Z}_2^n$ и $\widetilde{W}$ соответственно, $K = [0, 1]^n$, K_{s_i} и K_{r_i} — гиперграни $t_i = 1$ и $t_i = 0$ соответственно.

2.6 Накрытия над многообразиями $M^n(P^n)$

Предположим, что имеется правильная раскраска s гиперграней многогранника P^n в цвета из множества $[n]$ (см. раздел 2.3). Предположим, что граф Γ удовлетворяет следующим двум условиям:

1. инволюции Φ_{F_1} и Φ_{F_2} коммутируют для любых гиперграней F_1 и F_2 с непустым пересечением;
2. имеется отображение $\underline{p} : V \rightarrow \mathbf{Z}_2^n$, такое что $\underline{p}(\Phi_F(v)) = r_{c(F)}\underline{p}(v)$ для любых $v \in V$, $F \in \mathcal{F}$.

Тогда граф Γ удовлетворяет условиям 1 и 2 из следствия 1.4.3. Значит, псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ является кусочно линейным многообразием.

Пример 2.6.1. Простейшим графом, удовлетворяющим условиям 1 и 2, является граф Γ_0 , который получается из 1-остова стандартного n -мерного куба после замены каждого ребра, параллельного i -ой оси координат, на m_i рёбер с теми же концами для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Здесь m_i — количество гиперграней $F \in \mathcal{F}$, таких что $c(F) = i$. При этом полученные m_i

рёбер будут окрашены во всевозможные цвета $F \in \mathcal{F}$, такие что $c(F) = i$. Для этого графа $V = \mathbf{Z}_2^n$ и $\Phi_F(g) = r_{c(F)}g$ для всех $g \in \mathbf{Z}_2^n$, $F \in \mathcal{F}$. Очевидно, что $M^n(P^n, \Gamma_0) = M^n(P^n)$ — малое накрытие, индуцированное из линейной модели, над многогранником P^n . Условие 2 можно теперь переформулировать так: граф Γ является конечнолистным накрытием над графом Γ_0 , причём каждое ребро покрывается рёбрами того же цвета.

Отображение $\underline{p} : V \rightarrow \mathbf{Z}_2^n$ задаёт отображение $p : M^n(P^n, \Gamma) \rightarrow M^n(P^n)$ по формуле

$$p([v, x]) = [\underline{p}(v), x].$$

Предложение 2.6.2. *Отображение p корректно определено и является $\frac{|V|}{2^n}$ -листным накрытием. Таким образом, пространство $M^n(P^n, \Gamma)$ обладает естественной структурой гладкого многообразия.*

Доказательство. Пространства $M^n(P^n)$ и $M^n(P^n, \Gamma)$ — компакты, причём пространство $M^n(P^n)$ связно. Поэтому для того, чтобы доказать, что p — конечнолистное накрытие, нам достаточно проверить, что для любой точки $[v_0, x_0] \in M^n(P^n, \Gamma)$ отображение p осуществляет гомеоморфизм некоторой её окрестности на некоторую окрестность точки $p([v_0, x_0])$.

Пусть F — грань многогранника P^n , содержащая точку x_0 в своей относительной внутренней, и $F_1, F_2, \dots, F_k$ — все гиперграни многогранника P^n , содержащие грань F . Тогда инволюции $\Phi_{F_1}, \Phi_{F_2}, \dots, \Phi_{F_k}$ попарно коммутируют и элементы $c(F_1), c(F_2), \dots, c(F_k) \in [n]$ попарно различны.

Обозначим через $\mathcal{U} \subset M^n(P^n, \Gamma)$ подмножество, состоящее из всех точек вида $[v, x]$, таких что x лежит в относительной внутренней какой-либо грани, содержащей грань F , и $v = (\Phi_{F_{i_1}} \circ \Phi_{F_{i_2}} \circ \dots \circ \Phi_{F_{i_l}})(v_0)$ для

некоторых $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq k$. Тогда $\mathcal{U}$ — открытая окрестность точки $[v_0, x_0]$ в $M^n(P^n, \Gamma)$.

Обозначим через $\mathcal{V} \subset M^n(P^n)$ подмножество, состоящее из всех точек вида $[g, x]$, таких что x лежит в относительной внутренней какой-либо грани, содержащей грань F , и $g = r_{c(F_{i_1})} r_{c(F_{i_2})} \dots r_{c(F_{i_l})} p(v_0)$ для некоторых $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq k$. Тогда $\mathcal{V}$ — открытая окрестность точки $p([v_0, x_0])$ в $M^n(P^n)$.

Легко видеть, что $p(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Определим отображение $q : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ по формуле

$$q \left(r_{c(F_{i_1})} r_{c(F_{i_2})} \dots r_{c(F_{i_l})} p(v_0) \right) = \left(\Phi_{F_{i_1}} \circ \Phi_{F_{i_2}} \circ \dots \circ \Phi_{F_{i_l}} \right) (v_0).$$

Отображение q корректно определено, так как инволюции $\Phi_{F_1}, \Phi_{F_2}, \dots, \Phi_{F_k}$ попарно коммутируют. Непосредственно проверяется, что $p|_{\mathcal{U}} \circ q = \text{id}_{\mathcal{U}}$ и $q \circ p|_{\mathcal{V}} = \text{id}_{\mathcal{V}}$. Значит, $p|_{\mathcal{U}}$ — гомеоморфизм и, следовательно, p — конечно-листное накрытие.

Проекция p отображает каждую n -мерную грань разбиения $M^n(P^n, \Gamma)$ изоморфно на некоторую n -мерную грань разбиения $M^n(P^n)$. При этом количество n -мерных граней в разбиении $M^n(P^n, \Gamma)$ равно $|V|$, в то время как количество n -мерных граней в разбиении $M^n(P^n)$ равно 2^n . Значит, количество листов накрытия p равно $\frac{|V|}{2^n}$. $\square$

Для каждого элемента $v \in V$ определим вложение $\iota_v : P^n \rightarrow M^n(P^n, \Gamma)$ по формуле $\iota_v(x) = [v, x]$. Его образом является грань Q_v псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$. Ввиду наличия накрытия $p : M^n(P^n, \Gamma) \rightarrow M^n(P^n)$ ориентация многообразия $M^n(P^n)$, определённая в разделе 2.3, индуцирует ориентацию многообразия $M^n(P^n, \Gamma)$. При этом вложение ι_v сохраняет

ориентацию, если $\eta(\underline{p}(v)) = 1$, и обращает ориентацию, если $\eta(\underline{p}(v)) = -1$. Легко проверить, что имеет место следующее предложение.

Предложение 2.6.3. *Каждое накрытие над многообразием $M^n(P^n)$ эквивалентно накрытию вида $p : M^n(P^n, \Gamma) \rightarrow M^n(P^n)$; два накрытия, соответствующие парам $(\Gamma_1, \underline{p}_1)$ и $(\Gamma_2, \underline{p}_2)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда графы Γ_1 и Γ_2 изоморфны, причём изоморфизм сохраняет цвета рёбер и переводит проекцию $\underline{p}_1$ в проекцию $\underline{p}_2$.*

Таким образом, описанная конструкция устанавливает взаимно однозначное соответствие между парами $(\Gamma, \underline{p})$, удовлетворяющими свойствам 1 и 2, и конечнолистными накрытиями над многообразием $M^n(P^n)$.

Особый интерес представляет случай $P^n = \Pi^n(W)$. В этом случае асфериичность многообразия $M^n(\Pi^n(W))$ влечёт асфериичность многообразия $M^n(\Pi^n(W), \Gamma)$ для любого связного однородного графа Γ .

Пусть теперь $P^n = \Pi^n$ — пермутаэдр типа A_n . Гиперграни пермутаэдра Π^n нумеруются непустыми собственными подмножествами множества $[n + 1]$ (см. раздел 2.2). При этом гиперграни F_{ω_1} и F_{ω_2} имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда либо $\omega_1 \subset \omega_2$, либо $\omega_2 \subset \omega_1$. Таким образом, граф Γ должен быть однородным графом степени $m = 2^{n+1} - 2$, рёбра которого раскрашены правильным образом в цвета из множества непустых собственных подмножеств множества $[n + 1]$. Инволюцию Φ_{F_ω} , соответствующую гиперграни F_ω , мы будем обозначать через Φ_ω .

Глава 3

Реализация циклов асферичными многообразиями

3.1 Проблема реализации циклов

В этой главе мы исследуем задачу о нахождении класса $\mathcal{M}_n$ ориентированных гладких n -мерных многообразий, достаточных для реализации с некоторой кратностью любого класса гомологий z любого топологического пространства X . Дадим более строгую формулировку задачи.

Определение 3.1.1. Набор $\mathcal{M}_n$ ориентированных гладких замкнутых n -мерных многообразий назовём *достаточным*, если для любого топологического пространства X и любого класса гомологий $z \in X$ найдутся многообразие $N^n \in \mathcal{M}_n$ и непрерывное отображение $f : N^n \rightarrow X$, такие что $f_*[N^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q .

Наша задача состоит в том, чтобы для каждого натурального n найти достаточный набор $\mathcal{M}_n$, состоящий из многообразий, имеющих сравнительно простое топологическое строение. Понятно, что для реализации циклов в несвязных топологических пространствах нам необходимы мно-

гообразия, имеющие сколь угодно много компонент связности. Поэтому нам будет удобно ввести следующее определение.

Определение 3.1.2. Набор $\mathcal{M}_n^{con}$ связных ориентированных гладких замкнутых n -мерных многообразий назовём *преддостаточным*, если набор $\mathcal{M}_n$ всевозможных конечных несвязных объединений многообразий из набора $\mathcal{M}_n^{con}$ является достаточным.

Очевидно, что набор $\mathcal{M}_n$ достаточен тогда и только тогда, когда набор компонент связности всех многообразий из набора $\mathcal{M}_n$ преддостаточен. Таким образом, для каждого n нам надо найти преддостаточный набор $\mathcal{M}_n^{con}$. Тогда искомым набором $\mathcal{M}_n$ будет набор всевозможных конечных несвязных объединений многообразий из набора $\mathcal{M}_n^{con}$. Для $n = 1$ задача тривиальна: преддостаточным является набор из одного многообразия — окружности. Для $n = 2$ задача также решается просто. Для любой бесконечной строго возрастающей последовательности целых чисел $g_1 < g_2 < \dots$ набор ориентированных поверхностей родов $g_1, g_2, \dots$ является преддостаточным. При этом никакой конечный набор ориентированных поверхностей не является преддостаточным (см. следующий раздел).

Основной результат настоящей главы заключается в том, что набор всевозможных конечнолистных накрытий над многообразием M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных $(n + 1) \times (n + 1)$ матриц является достаточным. Соответственно, набор всевозможных связных конечнолистных накрытий над многообразием M^n является преддостаточным. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1.3. Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ существуют конечнолистное накрытие $\widehat{M}^n$ над многообразием M^n и непрерывное

отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow X$, такие что $f_*[\widehat{M}^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q . Кроме того, если пространство X линейно связно, многообразие $\widehat{M}^n$ может быть выбрано связным.

Многообразие M^n асферично и его фундаментальная группа изоморфна свободной от кручения подгруппе конечного индекса бесконечной группы Кокстера $\widetilde{W}$, соответствующей группе W типа A_n (см. раздел 2.5). Граф Кокстера группы $\widetilde{W}$, изображён на рис. 3.1. Таким образом, из теоремы 3.1.3 вытекает следующее утверждение.

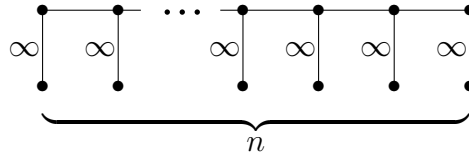


Рис. 3.1. Граф Кокстера группы Кокстера $\widetilde{W}$

Теорема 3.1.4. Пусть X — линейно связное пространство. Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ существуют ориентированное асферичное гладкое многообразие $\widehat{M}^n$ и непрерывное отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow X$, такие что $f_*[\widehat{M}^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q . При этом группа $\pi_1(\widehat{M}^n)$ изоморфна свободной от кручения подгруппе конечного индекса группы Кокстера $\widetilde{W}$ с графом Кокстера, изображённым на рис. 3.1.

В следующем разделе мы получим некоторые гомологические условия, необходимые для того, чтобы набор многообразий $\mathcal{M}_n$ был достаточным, и проверим, что набор конечнолистных накрытий над многообразием M^n удовлетворяет этим необходимым условиям.

Доказательство теоремы 3.1.3 будет дано в разделах 3.3–3.6

Укажем некоторые простые следствия теоремы 3.1.3.

Следствие 3.1.5. Пусть Q^m — связное замкнутое гладкое многообразие, $z \in H_n(Q^m; \mathbb{Z})$, $n < \frac{m}{2}$. Тогда существует связное ориентированное подмногообразие $\widehat{M}^n \subset Q^m$, диффеоморфное конечнолистному накрытию над многообразием M^n .

Следствие 3.1.6. Пусть N^n — замкнутое ориентированное многообразие. Тогда существует многообразие $\widehat{M}^n$, являющееся конечнолистным накрытием над многообразием M^n , такое что имеется отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow N^n$ ненулевой степени.

К сожалению, наши методы не дают никаких разумных оценок для числа q из теорем 3.1.3 и 3.1.4. Более того, автору не известно, может ли это число быть выбрано так, чтобы оно зависело лишь от размерности n , а не от свойств конкретного класса гомологий z . Таким образом, остаются нерешёнными следующие проблемы.

Проблема 3.1.7. Существует ли функция $q_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что любой целочисленный n -мерный класс гомологий может быть с кратностью $q_1(n)$ реализован образом конечнолистного накрытия над многообразием M^n ? Если ответ на этот вопрос положителен, каково наименьшее возможное значение $q_1(n)$?

Проблема 3.1.8. Существует ли функция $q_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что любой целочисленный n -мерный класс гомологий линейно связного пространства может быть с кратностью $q_2(n)$ реализован образом асферичного гладкого многообразия? Если ответ на этот вопрос положителен, каково наименьшее возможное значение $q_2(n)$?

3.2 Необходимые условия достаточности набора многообразий

В этом разделе мы получим некоторые простые необходимые условия для того, чтобы набор $\mathcal{M}_n$ замкнутых ориентированных n -мерных многообразий, был достаточным. Нам будет удобнее сформулировать соответствующие необходимые условия для того, чтобы набор $\mathcal{M}_n^{con}$ связных компонент многообразий из набора $\mathcal{M}_n$, был преддостаточным. Если Q^n — связное ориентированное многообразие и набор $\mathcal{M}_n^{con}$ преддостаточен, то фундаментальный класс $[Q^n]$ с некоторой кратностью обязательно реализуется непрерывным образом многообразия из класса $\mathcal{M}_n^{con}$. Это будет основным соображением при доказательстве нижеследующих необходимых условий. Первые два из этих условий годятся только для чётного n .

Предложение 3.2.1. *Пусть $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ — преддостаточный набор замкнутых ориентированных $2k$ -мерных многообразий. Тогда в наборе $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ имеется многообразие N^{2k} , такое что $\langle a^k, [N^{2k}] \rangle = q$ для некоторого класса когомологий $a \in H^2(N^{2k}; \mathbb{Z})$ и некоторого ненулевого целого числа q .*

Доказательство. Из того, что набор $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ преддостаточный следует, что фундаментальный класс комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^k$ с некоторой кратностью q реализуется образом многообразия N^{2k} из набора $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ при некотором непрерывном отображении $f : N^{2k} \rightarrow \mathbb{CP}^k$. Пусть u — стандартная образующая группы $H^2(\mathbb{CP}^k; \mathbb{Z})$. Положим, $a = f^*u$. Тогда $\langle a^k, [N^{2k}] \rangle = q \langle u^k, [\mathbb{CP}^k] \rangle = q$. $\square$

Из полученного необходимого условия сразу вытекает, что набор из од-

ного многообразия — сферы S^{2k} не является преддостаточным. Это эквивалентно хорошо известному факту, что не каждый класс гомологий линейно связного пространства может быть реализован непрерывным образом сферы. Предложение 3.2.1 можно значительно усилить.

Предложение 3.2.2. Пусть $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ — преддостаточный набор замкнутых ориентированных $2k$ -мерных многообразий, $k > 1$. Тогда для любого натурального числа l в наборе $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ имеется многообразие N^{2k} , для которого группа $H^2(N^{2k}; \mathbb{Z})$ содержит классы гомологий $a_1, a_2, \dots, a_l$, такие что $\langle a_i^k, [N^{2k}] \rangle = q$, $i = 1, 2, \dots, l$, для некоторого ненулевого целого числа q и $a_i a_j = 0$ при $i \neq j$.

Доказательство. Пусть Σ_l^2 — ориентированная поверхность рода l , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ — стандартная система образующих в группе $H^1(\Sigma_l^2; \mathbb{Z})$, такая что $\langle \alpha_i \alpha_j, [\Sigma_l^2] \rangle = \langle \beta_i \beta_j, [\Sigma_l^2] \rangle = 0$ и $\langle \alpha_i \beta_j, [\Sigma_l^2] \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, l$. Рассмотрим многообразие $Q^{2k} = \Sigma_l^2 \times \Sigma_l^2 \times \dots \times \Sigma_l^2$ (k сомножителей). Положим

$$\alpha_i^{(s)} = 1 \times \dots \times 1 \times \alpha_i \times 1 \times \dots \times 1 \quad (\alpha_i \text{ на } s\text{-ом месте});$$

$$\beta_i^{(s)} = 1 \times \dots \times 1 \times \beta_i \times 1 \times \dots \times 1 \quad (\beta_i \text{ на } s\text{-ом месте});$$

$$u_i = \sum_{s=1}^k \alpha_i^{(s)} \beta_i^{(s)}.$$

Тогда $u_i u_j = 0$ при $i \neq j$ и $\langle u_i^k, [Q^{2k}] \rangle = k!$.

Из преддостаточности набора $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ следует, что имеются многообразие N^{2k} из набора $\mathcal{M}_{2k}^{con}$ и непрерывное отображение $f : N^{2k} \rightarrow Q^{2k}$, такие что $f_*[N^{2k}] = p[Q^{2k}]$ для некоторого ненулевого целого числа p . Положим $a_i = f^* u_i$, $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда $a_i a_j = 0$ при $i \neq j$ и $\langle a_i^k, [N^{2k}] \rangle = k!p$, $i = 1, 2, \dots, l$. □

Предложение 3.2.3. Пусть $\mathcal{M}_n^{con}$ — преддостаточный набор замкнутых ориентированных n -мерных многообразий, $n > 1$. Тогда для любого натурального числа l в наборе $\mathcal{M}_n^{con}$ имеется многообразие N^n , для которого группа $H^1(N^n; \mathbb{Z})$ содержит классы гомологий c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, n$, такие что $\langle c_{i1}c_{i2} \dots c_{in}, [N^n] \rangle = q$, $i = 1, 2, \dots, l$, для некоторого ненулевого целого числа q и $c_{i_1j_1}c_{i_2j_2} = 0$ при $i_1 \neq i_2$.

Доказательство. Пусть $T^n = (S^1)^n$ — тор и $t_1, t_2, \dots, t_n$ — стандартная система образующих группы $H^1(T^n; \mathbb{Z})$. Рассмотрим многообразие Q^n , являющееся связной суммой l экземпляров тора T^n . Тогда группа $H^1(Q^n; \mathbb{Z})$ изоморфна прямой сумме l экземпляров группы $H^1(T^n; \mathbb{Z})$. Обозначим через $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}$ стандартные образующие i -ого слагаемого $H^1(T^n; \mathbb{Z})$. Тогда $t_{i_1j_1}t_{i_2j_2} = 0$ при $i_1 \neq i_2$ и

$$\langle t_{i1}t_{i2} \dots t_{in}, [Q^n] \rangle = \langle t_1t_2 \dots t_n, [T^n] \rangle = 1, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Из преддостаточности набора $\mathcal{M}_n^{con}$ следует, что имеются многообразие N^n из набора $\mathcal{M}_n^{con}$ и непрерывное отображение $f : N^n \rightarrow Q^n$, такие что $f_*[N^n] = q[Q^n]$ для некоторого ненулевого целого числа q . Положим $c_{ij} = f^*t_{ij}$. Тогда $\langle c_{i1}c_{i2} \dots c_{in}, [N^n] \rangle = q$, $i = 1, 2, \dots, l$, и $c_{i_1j_1}c_{i_2j_2} = 0$ при $i_1 \neq i_2$. $\square$

Из предложений 3.2.1–3.2.3 следует, что многообразия из преддостаточного набора $\mathcal{M}_n^{con}$ должны обладать достаточно большим запасом классов когомологий. В частности, из предложения 3.2.3 сразу выводится следующее утверждение.

Следствие 3.2.4. Пусть $\mathcal{M}_n^{con}$ — преддостаточный набор замкнутых ориентированных n -мерных многообразий, $n > 1$. Тогда для любого на-

турального числа l существует многообразие $N^n \in \mathcal{M}_n^{con}$, для которого все числа Бетти $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ не меньше l . В частности, при $n > 1$ любой преддостаточный набор n -мерных многообразий бесконечен.

Из следствия 3.2.4 в частности следует, что при $n > 1$ не всякий n -мерный целочисленный класс гомологий может быть с некоторой кратностью реализован непрерывным образом n -мерной сферы S^n и не всякий n -мерный целочисленный класс гомологий может быть с некоторой кратностью реализован непрерывным образом n -мерного тора T^n . Конечно, эти факты хорошо известны и по крайней мере первый из них может быть доказан гораздо проще. Действительно, очевидно, что фундаментальный класс n -мерного тора ни с какой кратностью не может быть реализован непрерывным образом n -мерной сферы, так как $\pi_n(T^n) = 0$ при $n > 1$.

Замечание 3.2.5. На самом деле предложение 3.2.2 и, тем более, предложение 3.2.1 являются простыми следствиями предложения 3.2.3. Действительно, предположим, что в группе $H^1(N^{2k}; \mathbb{Z})$ нашлись элементы c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, 2k$, удовлетворяющие требованиям предложения 3.2.3. Тогда элементы

$$a_i = \sum_{j=1}^k c_{i,2j-1} c_{i,2j} \in H^2(N^{2k}; \mathbb{Z})$$

удовлетворяют требованием предложения 3.2.2. Мы привели независимые доказательства предложений 3.2.1 и 3.2.2, для того чтобы продемонстрировать различные примеры многообразий, условия реализации фундаментальных циклов которых накладывают содержательные требования на ко-гомологии многообразий из набора $\mathcal{M}_n^{con}$.

Пусть теперь $\mathcal{M}_n$, $n > 1$, — набор всех конечнолистных накрытий над многообразием M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных матриц и $\mathcal{M}_n^{con}$ — набор всех связных конечнолистных накрытий над многообразием M^n . Проверим, что эти наборы удовлетворяют сформулированным выше необходимым условиям. Согласно замечанию 3.2.5, нам достаточно проверить, что набор $\mathcal{M}_n^{con}$ удовлетворяет необходимому условию из предложения 3.2.3.

Нам будет нужна некоторая информация о гомологиях и когомологиях многообразия M^n . В принципе, целочисленные гомологии и когомологии этого многообразия полностью вычислены (см. [36], [31]). Однако нам не будет нужен результат этого вычисления, а будут нужны лишь некоторые классы гомологий, представляемые так называемыми *специальными* подмногообразиями многообразия M^n (см. [31]). Напомним, что на многообразии M^n имеется гладкое действие группы $\mathbf{Z}_2^n$ (см. раздел 2.3). Пусть $\omega \subset [n + 1]$ — непустое собственное подмножество. Рассмотрим в многообразии M^n подмножество M_ω^{n-1} , состоящее из всех точек $[g, x]$, таких что $x \in F_\omega$. Подмножество M_ω^{n-1} является гладким ориентируемым $(n - 1)$ -мерным многообразием, так как оно является множеством неподвижных точек для гладкого действия подгруппы $\mathbf{Z}_2 \subset \mathbf{Z}_2^n$, порождённой элементом $r_{|\omega|}$. Непосредственно проверяется, что многообразие M_ω^{n-1} связно. Выберем на каждом многообразии M_ω^{n-1} какую-нибудь ориентацию и обозначим через $c_\omega \in H^1(M^n; \mathbb{Z})$ двойственный класс когомологий. Многообразия $M_{[1]}^{n-1}, M_{[2]}^{n-1}, \dots, M_{[n]}^{n-1}$ трансверсально пересекаются в единственной точке $[1, x_0]$, где $x_0 = (n + 1, n, \dots, 2, 1) \in \Pi^n$. Значит, $\langle c_{[1]} c_{[2]} \dots c_{[n]}, [M^n] \rangle = \pm 1$.

Фиксируем натуральное число l и построим однородный граф Γ степени $2^{n+1} - 2$ с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества непустых собственных подмножеств множества $[n+1]$, следующим образом. Граф Γ будет иметь множество вершин $V = \mathbf{Z}_2^n \times \{-1, 1\} \times \mathbf{Z}_l$ и задаваться инволюциями $\Phi_\omega : V \rightarrow V$, определёнными по формулам

$$\Phi_\omega(g, \varepsilon, h) = \begin{cases} (r_{|\omega|}g, \varepsilon, h), & \text{если } \omega \neq \{1\}, \{n+1\}; \\ (r_1g, -\varepsilon, h), & \text{если } \omega = \{1\}; \\ (r_1g, -\varepsilon, b^\varepsilon h), & \text{если } \omega = \{n+1\}. \end{cases}$$

Здесь $g \in \mathbf{Z}_2^n$, $\varepsilon = \pm 1$, $h \in \mathbf{Z}_l$ и b — образующая группы $\mathbf{Z}_l$. Легко проверить, что граф Γ связан и удовлетворяет условиям 1 и 2 из раздела 2.6, где в качестве отображения $\underline{p}$ берётся проекция на первый сомножитель. Значит, $\widehat{M}^n = M^n(P^n, \Gamma)$ есть связное $2l$ -листное накрытие над многообразием M^n . Выбросим из графа Γ все рёбра цвета $\{n+1\}$. Получившийся граф Γ' распадается на l компонент связности $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$, соответствующих элементам группы $\mathbf{Z}_l$.

Напомним, что $(n-1)$ -мерные грани разбиения $\widehat{M}^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с рёбрами графа Γ ; грань, соответствующую ребру e , мы обозначаем через Q_e . Прообраз $\widehat{M}_{[j]}^{n-1}$ многообразия $M_{[j]}^{n-1}$ при накрытии $\widehat{M}^n \rightarrow M^n$ есть объединение всех $(n-1)$ -мерных граней Q_e , где e — рёбра цвета $[j]$. При этом две грани Q_{e_1} и Q_{e_2} имеют общую гипергрань тогда и только тогда, когда рёбра e_1 и e_2 лежат в одной компоненте связности какого-либо графа вида $\Gamma_{[j], \omega}$, где либо $[j] \subset \omega$, либо $\omega \subset [j]$. Из этого легко следует, что грани Q_{e_1} и Q_{e_2} лежат в одной компоненте связности многообразия $\widehat{M}_{[j]}^{n-1}$ тогда и только тогда, когда рёбра e_1 и e_2 лежат в одной компоненте связности графа Γ' . Таким образом, каждое из

многообразий $\widehat{M}_{[j]}^{n-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$, распадается на l компонент связности, соответствующих компонентам связности $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$ графа Γ' ; компоненту связности, соответствующую графу Γ_i , мы будем обозначать через $\widehat{M}_{[j],i}^{n-1}$. Пусть $c_{ij} \in H^1(\widehat{M}^n; \mathbb{Z})$ — класс когомологий, двойственный подмногообразию $\widehat{M}_{[j],i}^{n-1} \subset \widehat{M}^n$. Если $i_1 \neq i_2$, то подмногообразия $\widehat{M}_{[j_1],i_1}^{n-1}$ и $\widehat{M}_{[j_2],i_2}^{n-1}$ не пересекаются и, значит, $c_{i_1 j_1} c_{i_2 j_2} = 0$. Для каждого i подмногообразия $\widehat{M}_{[1],i}^{n-1}, \widehat{M}_{[2],i}^{n-1}, \dots, \widehat{M}_{[n],i}^{n-1}$ пересекаются трансверсально в двух точках $[(1, 1, b^i), x_0]$ и $[(1, -1, b^i), x_0]$, имеющих одинаковый знак. Следовательно, $\langle c_{i1} c_{i2} \dots c_{in}, [\widehat{M}^n] \rangle = \pm 2$. Таким образом, многообразие $\widehat{M}^n$ удовлетворяет требованиям предложения 3.2.3.

3.3 Реализация циклов образами псевдомногообразий

Приведём строгое доказательство того, что любой целочисленный класс гомологий может быть реализован непрерывным образом ориентированного симплициально клеточного псевдомногообразия.

Предложение 3.3.1. *Для каждого n -мерного целочисленного класса сингулярных гомологий z произвольного топологического пространства X существуют ориентированное симплициально клеточное псевдомногообразие Z^n и непрерывное отображение $h : Z^n \rightarrow X$, такие что $h_*[Z^n] = z$.*

Доказательство. Класс z представляется сингулярным симплициальным циклом

$$\xi = \sum_{i=1}^k \varphi_{+,i} - \sum_{i=1}^l \varphi_{-,i},$$

где $\varphi_{\pm,i}$ — сингулярные симплексы пространства X , то есть непрерывные отображения $\Delta^n \rightarrow X$. Нам удобно рассмотреть $k + l$ экземпляров

стандартного симплекса Δ^n , которые мы будем обозначать через $\Delta_{+,i}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\Delta_{-,i}^n$, $i = 1, 2, \dots, l$, и интерпретировать отображения $\varphi_{\pm,i}$ как отображения $\Delta_{\pm,i}^n \rightarrow X$. Из того, что сингулярная цепь ξ является циклом, следует, что гиперграни симплексов $\Delta_{\pm,i}^n$ разбиваются на пары так, что для каждой такой пары гиперграней $F_1 \subset \Delta_{\varepsilon_1, i_1}^n$, $F_2 \subset \Delta_{\varepsilon_2, i_2}^n$ имеется изоморфизм $\chi : F_1 \rightarrow F_2$, такой что $\varphi_{\varepsilon_1, i_1}|_{F_1} = \varphi_{\varepsilon_2, i_2}|_{F_2} \circ \chi$ и изоморфизм χ обращает ориентацию, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, и сохраняет ориентацию, если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Отметим, что такой изоморфизм χ не обязательно единственен. Указанное разбиение гиперграней на пары также может быть неединственным. Назовём пару (F_1, F_2) полученного разбиения на пары *плохой*, если F_1 и F_2 — гиперграни одного симплекса $\Delta_{\varepsilon, i}^n$.

Покажем, что, изменяя сингулярный цикл ξ , представляющий класс гомологий z , мы можем избавиться от плохих пар. Действительно, пусть (F_1, F_2) — плохая пара гиперграней симплекса $\Delta_{\varepsilon, i}^n$. Добавим к циклу ξ нулевое слагаемое вида $f_{\varepsilon, i} - f_{\varepsilon, i}$. При этом к рассматриваемому набору симплексов $\Delta_{\pm, j}^n$ добавятся два новых симплекса, которые мы обозначим через Δ_+^n и Δ_-^n . Теперь рассмотрим исходное разбиение гиперграней старых симплексов $\Delta_{\pm, j}^n$ на пары и выбросим из него плохую пару гиперграней (F_1, F_2) симплекса $\Delta_{\varepsilon, i}^n$. Спарим теперь гипергрань F_2 симплекса $\Delta_{\varepsilon, i}^n$ с гипергранью F_1 нового симплекса Δ_{ε}^n и гипергрань F_1 симплекса $\Delta_{\varepsilon, i}^n$ с гипергранью F_1 симплекса $\Delta_{-\varepsilon}^n$. Также спарим гипергрань F симплекса Δ_+^n с гипергранью F симплекса Δ_-^n , если $F \neq F_1$. Легко видеть, что полученное разбиение на пары удовлетворяет описанным выше требованиям. При этом оно содержит на одну плохую пару меньше, чем исходное разбиение. Повторяя указанную процедуру, мы избавимся от всех плохих пар.

Рассмотрим теперь несвязное объединение симплексов $\Delta_{\pm,i}^n$ и для каждой пары гиперграней $F_1 \subset \Delta_{\varepsilon_1,i_1}^n$, $F_2 \subset \Delta_{\varepsilon_2,i_2}^n$ (из описанного выше разбиения на пары) отождествим гипергрань F_1 и F_2 симплексов $\Delta_{\varepsilon_1,i_1}^n$ и $\Delta_{\varepsilon_2,i_2}^n$ вдоль соответствующего изоморфизма χ . Мы получим клеточный комплекс Z^n . Из отсутствия плохих пар следует, что комплекс Z^n будет ориентированным симплициально клеточным псевдомногообразием. Отображение h совпадает с отображением $\varphi_{\varepsilon,i}$ на каждом симплексе $\Delta_{\varepsilon,i}^n$ псевдомногообразия Z^n . $\square$

Таким образом, задача о реализации класса z с кратностью q сводится к задаче о реализации фундаментального класса псевдомногообразия Z^n с кратностью q . В частности, теорему 3.1.3 достаточно доказать для случая, когда $X = Z^n$ — ориентированное симплициально клеточное псевдомногообразие и $z = [Z^n]$. Кроме того, перейдя, если нужно, к первому барицентрическому подразделению, мы можем добиться того, чтобы псевдомногообразие Z^n было симплициальным и обладало правильной раскраской вершин в цвета из множества $[n+1]$.

В следующих трёх разделах мы по заданному ориентированному симплициальному псевдомногообразию Z^n с правильной раскраской вершин в цвета из множества $[n+1]$ построим явно ориентированное многообразие $\widehat{M}^n$ и непрерывное отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow Z^n$, такие что $f_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n]$ для некоторого натурального числа q . При этом многообразие $\widehat{M}^n$ будет иметь вид $M^n(\Pi^n, \Gamma)$ и его построение сводится к построению графа Γ . Следовательно, многообразие $\widehat{M}^n$ будет конечнолистным накрытием многообразия $M^n(\Pi^n)$.

3.4 Построение многообразия $\widehat{M}^n$

Пусть Z^n — ориентированное псевдомногообразие с правильной раскраской вершин в цвета из множества $[n + 1]$. Для каждого симплекса σ комплекса Z^n мы будем обозначать через $\mu(\sigma)$ подмножество множества $[n + 1]$, состоящее из цветов всех вершин симплекса σ . Очевидно, что $|\mu(\sigma)| = \dim \sigma + 1$.

Обозначим через U множество n -мерных симплексов псевдомногообразия Z^n . Вершины псевдомногообразия Z^n раскрашены правильным образом в цвета из множества $[n + 1]$. Поэтому ориентация псевдомногообразия Z^n задаёт разбиение $U = U_+ \sqcup U_-$, такое что из двух n -мерных симплексов, имеющих общую гипергрань, один всегда принадлежит множеству U_+ , а другой — множеству U_- . Ориентация каждого симплекса $\sigma \in U_+$, заданная последовательностью цветов $1, 2, \dots, n + 1$, совпадает с ориентацией, индуцированной ориентацией псевдомногообразия Z^n ; для симплексов $\sigma \in U_-$ эти две ориентации противоположны.

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество непустых собственных подмножеств множества $[n + 1]$. Для любого подмножества $\omega \in \mathcal{S}$ обозначим через $\mathcal{P}_\omega$ множество инволюций $\Lambda : U \rightarrow U$, таких что

1. $\Lambda(U_+) = U_-$ и $\Lambda(U_-) = U_+$;
2. $\mu(\sigma \cap \Lambda(\sigma)) \supset \omega$ для любого симплекса $\sigma \in U$.

Из наличия правильной раскраски вершин псевдомногообразия Z^n следует, что для каждого симплекса τ , такого что $\mu(\tau) = \omega$, количество n -мерных симплексов σ , содержащих симплекс τ , чётно, причём ровно половина из них принадлежит множеству U_+ и ровно половина — множе-

ству U_- . Следовательно, множество $\mathcal{P}_\omega$ непусто. Очевидно, что $\mathcal{P}_\gamma \supset \mathcal{P}_\omega$, если $\gamma \subset \omega$. Кроме того, очевидно, что композиция нечётного числа инволюций из множества $\mathcal{P}_\gamma$ снова принадлежит множеству $\mathcal{P}_\gamma$. В частности, если $\gamma \subset \omega$, $\Lambda_1 \in \mathcal{P}_\omega$ и $\Lambda_2 \in \mathcal{P}_\gamma$, то $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \in \mathcal{P}_\gamma$.

Напомним, что $\eta : \mathbf{Z}_2^n \rightarrow \mathbf{Z}_2$ есть гомоморфизм, переводящий каждую образующую r_i в -1 . Положим

$$\begin{aligned} V_+ &= U_+ \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \eta^{-1}(1); \\ V_- &= U_- \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \eta^{-1}(-1); \\ V &= V_+ \cup V_- \subset U \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \mathbf{Z}_2^n. \end{aligned}$$

Определим отображения $\Phi_\omega : V \rightarrow V$, $\omega \in \mathcal{S}$, по формуле

$$\begin{aligned} \Phi_\omega \left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, g \right) &= \left(\Lambda_\omega(\sigma), \left(\tilde{\Lambda}_\gamma \right)_{\gamma \in \mathcal{S}}, r_{|\omega|} g \right), \\ \tilde{\Lambda}_\gamma &= \begin{cases} \Lambda_\omega \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_\omega, & \text{если } \gamma \subset \omega; \\ \Lambda_\gamma, & \text{если } \gamma \not\subset \omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $(\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}$ — элемент произведения $\prod_{\gamma \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\gamma$, являющийся набором инволюций $\Lambda_\gamma \in \mathcal{P}_\gamma$.

Предложение 3.4.1. *Отображения Φ_ω являются инволюциями без неподвижных точек, удовлетворяющими условиям 1 и 2 из раздела 2.6. Кроме того, $\Phi_\omega(V_+) = V_-$ и $\Phi_\omega(V_-) = V_+$.*

Доказательство. Очевидно, что Φ_ω — инволюция. То, что инволюция Φ_ω меняет местами множества V_+ и V_- , следует из того, что инволюция Λ_ω меняет местами множества U_+ и U_- . Значит, инволюция Φ_ω не может иметь неподвижных точек.

Докажем, что $\Phi_{\omega_1} \circ \Phi_{\omega_2} = \Phi_{\omega_2} \circ \Phi_{\omega_1}$, если $\omega_1 \subset \omega_2$. Пусть

$$\begin{aligned}\Phi_{\omega_1} \left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, g \right) &= \left(\Lambda_{\omega_1}(\sigma), \left(\tilde{\Lambda}_\gamma \right)_{\gamma \in \mathcal{S}}, r_{|\omega_1|} g \right); \\ (\Phi_{\omega_2} \circ \Phi_{\omega_1}) \left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, g \right) &= \left(\tilde{\Lambda}_{\omega_2}(\Lambda_{\omega_1}(\sigma)), \left(\tilde{\tilde{\Lambda}}_\gamma \right)_{\gamma \in \mathcal{S}}, r_{|\omega_2|} r_{|\omega_1|} g \right); \\ \Phi_{\omega_2} \left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, g \right) &= \left(\Lambda_{\omega_2}(\sigma), \left(\hat{\Lambda}_\gamma \right)_{\gamma \in \mathcal{S}}, r_{|\omega_2|} g \right); \\ (\Phi_{\omega_1} \circ \Phi_{\omega_2}) \left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, g \right) &= \left(\hat{\Lambda}_{\omega_1}(\Lambda_{\omega_2}(\sigma)), \left(\hat{\hat{\Lambda}}_\gamma \right)_{\gamma \in \mathcal{S}}, r_{|\omega_1|} r_{|\omega_2|} g \right).\end{aligned}$$

Нам нужно доказать, что $\tilde{\Lambda}_{\omega_2}(\Lambda_{\omega_1}(\sigma)) = \hat{\Lambda}_{\omega_1}(\Lambda_{\omega_2}(\sigma))$ и $\tilde{\tilde{\Lambda}}_\gamma = \hat{\hat{\Lambda}}_\gamma$ для любого $\gamma \in \mathcal{S}$. Первое равенство следует из того, что $\tilde{\Lambda}_{\omega_2} = \Lambda_{\omega_2}$ и $\hat{\Lambda}_{\omega_1} = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}$. Если $\gamma \not\subset \omega_2$, то

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}_\gamma = \Lambda_\gamma = \hat{\hat{\Lambda}}_\gamma.$$

Если $\gamma \not\subset \omega_1$ и $\gamma \subset \omega_2$, то

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\Lambda}}_\gamma &= \tilde{\Lambda}_{\omega_2} \circ \tilde{\Lambda}_\gamma \circ \tilde{\Lambda}_{\omega_2} = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_2}; \\ \hat{\hat{\Lambda}}_\gamma &= \hat{\Lambda}_\gamma = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_2}.\end{aligned}$$

Если $\gamma \subset \omega_1$, то

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\Lambda}}_\gamma &= \tilde{\Lambda}_{\omega_2} \circ \tilde{\Lambda}_\gamma \circ \tilde{\Lambda}_{\omega_2} = \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}; \\ \hat{\hat{\Lambda}}_\gamma &= \hat{\Lambda}_{\omega_1} \circ \hat{\Lambda}_\gamma \circ \hat{\Lambda}_{\omega_1} = \\ &= (\Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}) \circ (\Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_2}) \circ (\Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}) = \\ &= \Lambda_{\omega_2} \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_{\omega_1} \circ \Lambda_{\omega_2}.\end{aligned}$$

В качестве отображения $\underline{p} : V \rightarrow \mathbf{Z}_2^n$ возьмём проекцию на последний сомножитель. □

Обозначим через Γ однородный граф степени $2^{n+1} - 2$ на множестве вершин V с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества $\mathcal{S}$, заданный инволюциями Φ_ω . Тогда $\widehat{M}^n = M^n(\Pi^n, \Gamma)$ — некоторое многообразие. Оно является $(\frac{1}{2}|U| \prod_{\omega \in \mathcal{S}} |\mathcal{P}_\omega|)$ -листным накрытием над многообразием $M^n(\Pi^n)$.

Очевидно, что $\eta(\underline{p}(v)) = 1$ для всех $v \in V_+$ и $\eta(\underline{p}(v)) = -1$ для всех $v \in V_-$. Значит, вложение $\iota_v : \Pi^n \rightarrow M^n(\Pi^n, \Gamma)$ сохраняет ориентацию, если $v \in V_+$, и обращает ориентацию, если $v \in V_-$.

3.5 Отображение пермутаэдра на симплекс

Напомним, что стандартный n -мерный симплекс Δ^n — это выпуклая оболочка точек $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Симплекс Δ^n лежит в n -мерной плоскости

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1.$$

Для любого непустого подмножества $\omega \subset [n+1]$ обозначим через $\Delta_\omega \subset \Delta^n$ грань с вершинами $\mathbf{e}_i, i \in \omega$. Имеем, $\dim \Delta_\omega = |\omega| - 1$. Барицентром грани Δ_ω является точка

$$b_\omega(\Delta^n) = b(\Delta_\omega) = \frac{1}{|\omega|} \sum_{i \in \omega} \mathbf{e}_i.$$

В частности, барицентром симплекса Δ^n является точка

$$b(\Delta^n) = b_{[n+1]}(\Delta^n) = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right).$$

Каждая грань коразмерности k многогранника Π^n имеет вид

$$F = F_{\omega_1} \cap F_{\omega_2} \cap \dots \cap F_{\omega_k}, \quad \emptyset \subsetneq \omega_1 \subsetneq \omega_2 \subsetneq \dots \subsetneq \omega_k \subsetneq [n+1].$$

Легко проверить, что все грани пермутаэдра центральносимметричны. Центр симметрии грани F мы будем обозначать через $b(F)$ или через $b_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k}(\Pi^n)$. В частности,

$$b(\Pi^n) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} \right)$$

есть центр симметрии пермутаэдра Π^n . *Барицентрическим подразделением* пермутаэдра Π^n называется его триангуляция выпуклыми симплексами, n -мерными симплексами которой являются выпуклые оболочки наборов точек вида

$$b(F^0), b(F^1), \dots, b(F^n),$$

где

$$F^0 \subset F^1 \subset \dots \subset F^n = \Pi^n, \quad \dim F^i = i,$$

есть грани пермутаэдра.

Зададим отображение $\psi : \Pi^n \rightarrow \Delta^n$ на вершинах барицентрического подразделения пермутаэдра по формулам

$$b(\Pi^n) \mapsto b(\Delta^n);$$

$$b_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k}(\Pi^n) \mapsto b_{\omega_1}(\Delta^n), \quad \emptyset \subsetneq \omega_1 \subsetneq \omega_2 \subsetneq \dots \subsetneq \omega_k \subsetneq [n+1].$$

Продолжим отображение ψ на весь пермутаэдр так, чтобы оно было линейно на каждом симплексе барицентрического подразделения пермутаэдра.

Предложение 3.5.1. *Отображение ψ сюръективно. Оно отображает внутренность пермутаэдра Π^n на внутренность симплекса Δ^n и границу пермутаэдра Π^n на границу симплекса Δ^n . При этом степень отображения ψ равна единице, то есть гомоморфизм*

$$\psi_* : H_n(\Pi^n, \partial\Pi^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом, переводящим образующую

$$[\Pi^n, \partial\Pi^n] \in H_n(\Pi^n, \partial\Pi^n; \mathbb{Z}),$$

соответствующую стандартной ориентации пермутаэдра Π^n , в образующую

$$[\Delta^n, \partial\Delta^n] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; \mathbb{Z}),$$

соответствующую стандартной ориентации симплекса Δ^n . Кроме того, $\psi(F_\omega) = \Delta_\omega$ для любого непустого подмножества $\omega \subset [n+1]$.

Доказательство. Если точка $b_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k}(\Pi^n)$ лежит в гиперграни $F_\omega \subset \Pi^n$, то $\omega_i = \omega$ для некоторого i . Значит, $\omega_1 \subset \omega$. Тогда $\psi(b_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k}(\Pi^n)) \in \Delta_\omega$. Следовательно, $\psi(F_\omega) \subset \Delta_\omega$. Таким образом, $\psi(\partial\Pi^n) \subset \partial\Delta^n$. Пусть теперь x — точка из внутренней многогранника Π^n . Тогда $x = \lambda b(\Pi^n) + (1-\lambda)x_1$, $0 < \lambda \leq 1$, где $x_1 \in \partial\Pi^n$. При этом отрезок с концами в точках $b(\Pi^n)$ и x_1 содержится в некотором симплексе барицентрического подразделения пермутаэдра Π^n . Поэтому

$$\psi(x) = \lambda\psi(b(\Pi^n)) + (1-\lambda)\psi(x_1) = \lambda b(\Delta^n) + (1-\lambda)\psi(x_1).$$

Значит, точка $\psi(x)$ принадлежит внутренней симплекса Δ^n . Таким образом, отображение ψ переводит внутренность пермутаэдра во внутренность симплекса.

Очевидно, что n -мерные симплексы барицентрического подразделения симплекса Δ^n находятся во взаимно однозначном соответствии с перестановками $\nu \in \Sigma_{n+1}$. При этом перестановке

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1 \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n+1} \end{pmatrix}$$

соответствует симплекс τ_ν с вершинами

$$b_{\{i_1\}}(\Delta^n), b_{\{i_1, i_2\}}(\Delta^n), \dots, b_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}(\Delta^n), b(\Delta^n).$$

Выберем ориентацию симплекса τ_ν , соответствующую этому порядку вершин. Фундаментальный класс $[\Delta^n, \partial\Delta^n]$ представляется симплициальной цепью

$$\eta = \sum_{\nu \in \Sigma_{n+1}} \text{sign}(\nu) \tau_\nu.$$

Несложно проверить, что n -мерные симплексы барицентрического подразделения пермутаэдра Π^n находятся во взаимно однозначном соответствии с парами перестановок $(\nu, \varkappa) \in \Sigma_{n+1} \times \Sigma_n$. При этом паре перестановок

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1 \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \varkappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

соответствует симплекс $\sigma_{\nu, \varkappa}$ с вершинами

$$b_{\omega_{j_1^{(1)}}, \omega_{j_2^{(1)}}, \dots, \omega_{j_n^{(1)}}}(\Pi^n), b_{\omega_{j_2^{(2)}}, \dots, \omega_{j_n^{(2)}}}(\Pi^n), \dots, b_{\omega_{j_{n-1}^{(n-1)}}, \omega_{j_n^{(n-1)}}}(\Pi^n), b_{\omega_{j_n}}(\Pi^n), b(\Pi^n),$$

где

$$\omega_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и $(j_k^{(k)}, j_{k+1}^{(k)}, \dots, j_n^{(k)})$ есть набор $(j_k, j_{k+1}, \dots, j_n)$ упорядоченный по возрастанию. Ориентируем симплекс $\sigma_{\nu, \varkappa}$ в соответствии с указанным выше порядком вершин. Фундаментальный класс $[\Pi^n, \partial\Pi^n]$ представляется симплициальной цепью

$$\xi = \sum_{(\nu, \varkappa) \in \Sigma_{n+1} \times \Sigma_n} \text{sign}(\nu) \text{sign}(\varkappa) \sigma_{\nu, \varkappa}.$$

Отображение ψ является симплициальным отображением первого барицентрического подразделения пермутаэдра Π^n в первое барицентриче-

ское подразделение симплекса Δ^n . Непосредственно проверяется, что индуцированное цепное отображение ψ_* симплициальных цепных комплексов устроено следующим образом: $\psi_*(\sigma_{\nu, \varkappa}) = 0$, если $\varkappa \neq \text{id}$ и $\psi_*(\sigma_{\nu, \text{id}}) = \tau_\nu$, где id — тождественная перестановка. Значит, $\psi_*[\Pi^n, \partial\Pi^n] = [\Delta^n, \partial\Delta^n]$.

Из доказанного равенства сразу следует, что ψ сюръективно. Нам осталось доказать, что $\psi(F_\omega) \supset \Delta_\omega$. Пусть $k = \dim \Delta_\omega = |\omega| - 1$. Каждый k -мерный симплекс τ барицентрического подразделения симплекса Δ_ω имеет вершины

$$b_{\omega_1}(\Delta^n), b_{\omega_2}(\Delta^n), \dots, b_{\omega_k}(\Delta^n), b_\omega(\Delta^n), \quad \emptyset \subsetneq \omega_1 \subsetneq \omega_2 \subsetneq \dots \subsetneq \omega_k \subsetneq \omega.$$

Нам осталось заметить, что на симплекс τ изоморфно отображается симплекс σ барицентрического подразделения грани F_ω с вершинами

$$b_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega}(\Pi^n), b_{\omega_2, \dots, \omega_k, \omega}(\Pi^n), \dots, b_{\omega_k, \omega}(\Pi^n), b_\omega(\Pi^n).$$

□

Пример 3.5.2. Для $n = 2$ и $n = 3$ отображение ψ изображено на рис. 3.2 и 3.3 соответственно. На рис. 3.2 заштрихованные треугольники отображаются на жирные отрезки. На рис. 3.3 заштрихованные шестиугольные грани пермутаэдра Π^3 отображаются на соответствующие вершины тетраэдра. Четырёхугольные грани отображаются на ребра тетраэдра, причем каждый отрезок, параллельный направлению штриховки, «схлопывается» в точку. Внутренности незаштрихованных шестиугольных граней отображаются на внутренности соответствующих граней тетраэдра при помощи отображений, изображённых на рис. 3.2.

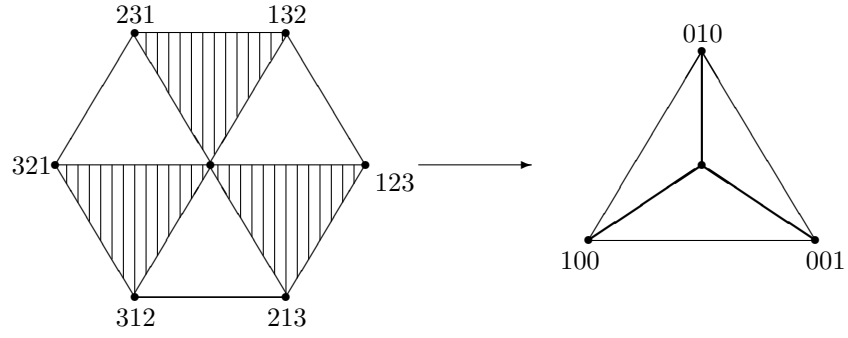


Рис. 3.2. Отображение ψ для $n = 2$

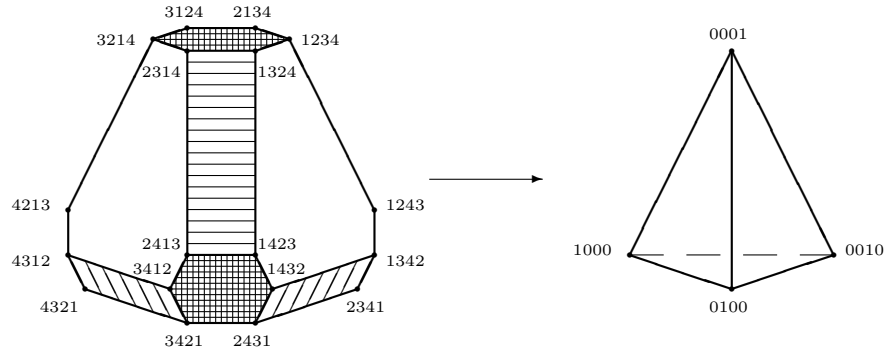


Рис. 3.3. Отображение ψ для $n = 3$

3.6 Построение отображения $f : \widehat{M}^n \rightarrow Z^n$

Для любого симплекса $\sigma \in U$ обозначим через $\iota_\sigma : \Delta^n \rightarrow Z^n$ вложение, отображающее стандартный симплекс Δ^n изоморфно на симплекс σ так, что вершина $\mathbf{e}_i$ переходит в вершину цвета i . Определим отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow Z^n$ по формуле

$$f([\sigma, (\Lambda_\omega)_{\omega \in \mathcal{S}}, g], x) = \iota_\sigma(\psi(x)).$$

Предложение 3.6.1. *Отображение f корректно определено и*

$$f_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n], \quad q = 2^{n-1} \prod_{\omega \in \mathcal{S}} |\mathcal{P}_\omega|.$$

Доказательство. Чтобы доказать, что f — корректно определённое отображение, мы должны показать, что $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x)) = \iota_{\sigma}(\psi(x))$, если $x \in F_{\omega}$ и $\Lambda \in \mathcal{P}_{\omega}$. Действительно, если $x \in F_{\omega}$, то $\psi(x) \in \Delta_{\omega}$. Значит, точка $\iota_{\sigma}(\psi(x))$ содержится в грани τ_1 симплекса σ , такой что $\mu(\tau_1) = \omega$. Аналогично, точка $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x))$ содержится в грани τ_2 симплекса $\Lambda(\sigma)$, такой что $\mu(\tau_2) = \omega$. Имеем, $\tau_1 = \tau_2$, так как $\mu(\sigma \cap \Lambda_{\omega}(\sigma)) \supset \omega$. Барицентрические координаты точки $\iota_{\sigma}(\psi(x))$ в симплексе τ_1 равны барицентрическим координатам точки $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x))$ в симплексе $\tau_2 = \tau_1$ и равны барицентрическим координатам точки $\psi(x)$ в симплексе Δ^n . Таким образом, точки $\iota_{\sigma}(\psi(x))$ и $\iota_{\Lambda(\sigma)}(\psi(x))$ совпадают, что и требовалось проверить.

На каждый n -мерный симплекс σ псевдомногообразия Z^n отображается ровно q клеток Q_v , таких что $v = (\sigma, (\Lambda_{\omega})_{\omega \in \mathcal{S}}, g)$. При этом, по предложению 3.5.1, каждая такая клетка Q_v отображается на симплекс σ со степенью ± 1 . Осталось проверить, что ориентации клеток Q_v и симплекса σ согласованы так, что степень каждого такого отображения в действительности равна $+1$. Для каждого $v = (\sigma, (\Lambda_{\omega})_{\omega \in \mathcal{S}}, g)$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Pi^n & \xrightarrow{\iota_v} & Q_v \\ \psi \downarrow & & \downarrow f|_{Q_v} \\ \Delta^n & \xrightarrow{\iota_{\sigma}} & \sigma \end{array}$$

По предложению 3.5.1, отображение ψ имеет степень 1. Если $\sigma \in U_+$, то $v \in V_+$ и оба вложения ι_{σ} и ι_v сохраняют ориентацию. Если $\sigma \in U_-$, то $v \in V_-$ и оба вложения ι_{σ} и ι_v обращают ориентацию. Таким образом, в обоих случаях, отображение $f|_{Q_v}$ является отображением степени $+1$, что завершает доказательство предложения. $\square$

Построенное отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow Z^n$ реализует класс гомологий,

кратный фундаментальному классу $[Z^n]$. Однако многообразие $\widehat{M}^n$ вообще говоря не будет связным. Предположим теперь, что исходное псевдомногообразие Z^n сильно связно. Пусть

$$\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_k,$$

где Γ_i — связные компоненты графа Γ . Имеем,

$$\widehat{M}^n = \widehat{M}_1^n \sqcup \widehat{M}_2^n \sqcup \dots \sqcup \widehat{M}_k^n,$$

где $\widehat{M}_i^n = M^n(\Pi^n, \Gamma_i)$ — связные многообразия. Пусть $f_*[\widehat{M}_i^n] = q_i[Z^n]$. Тогда

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = q = 2^{n-1} \prod_{\omega \in \mathcal{S}} |\mathcal{P}_\omega| \neq 0.$$

Значит, какое-нибудь из чисел q_i не равно нулю. На самом деле из доказательства предложения 3.6.1 легко следует, что все числа q_i строго положительны. Таким образом, отображение $f|_{\widehat{M}_i^n}$ реализует класс гомологий, кратный классу $[Z^n]$.

Заметим теперь, что любой целочисленный класс гомологий z линейно связного пространства X можно реализовать в виде образа фундаментального класса некоторого сильно связного ориентированного псевдомногообразия Z^n . Значит, некоторый класс гомологий, кратный классу z , может быть реализован в виде образа фундаментального класса асферичного многообразия $\widehat{M}_i^n$. Это завершает доказательства теорем 3.1.3 и 3.1.4.

3.7 Реализация кубического цикла

Покрасим каждую вершину $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ стандартного куба $[-1, 1]^n$ в цвет $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, рассматриваемый как элемент группы $\mathbf{Z}_2^n$. Такую раскраску

мы будем называть *стандартной* раскраской вершин стандартного куба. Пусть Z^n — кубическое псевдомногообразие. *Правильной раскраской* вершин кубического псевдомногообразия Z^n в цвета из множества $\mathbf{Z}_2^n$ называется функция, сопоставляющая каждой вершине псевдомногообразия Z^n элемент группы $\mathbf{Z}_2^n$, такая что каждый n -мерный куб σ псевдомногообразия Z^n изоморфен с сохранением раскраски стандартному n -мерному кубу со стандартной раскраской. Обозначим через ι_σ сохраняющий цвета вершин изоморфизм $[-1, 1]^n \rightarrow \sigma$. Следуя схеме разделов 3.3–3.6, мы в первую очередь должны реализовать с некоторой кратностью заданный класс гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ в виде образа фундаментального класса кубического псевдомногообразия Z^n с правильной раскраской вершин. Очевидно, что, если не заботиться о раскраске вершин, каждый целочисленный класс гомологий может быть реализован в виде образа фундаментального образа ориентированного кубического псевдомногообразия Z^n . Для этого достаточно взять каноническое кубическое подразделение произвольного симплициального псевдомногообразия, реализующего заданный класс гомологий. Поэтому требуемое утверждение вытекает из следующего предложения.

Предложение 3.7.1. *Пусть Z^n — ориентированное кубическое псевдомногообразие. Тогда существуют ориентированное кубическое псевдомногообразие $\overline{Z}^n$ с правильной раскраской вершин в цвета из множества $\mathbf{Z}_2^n$ и отображение $p : \overline{Z}^n \rightarrow Z^n$, такие что p отображает каждую клетку комплекса $\overline{Z}^n$ изоморфно на некоторую клетку комплекса Z^n и $p_*[\overline{Z}^n] = 2^n n! [Z^n]$.*

Доказательство. Для каждого куба σ рассмотрим $k = 2^n n!$ экземпляров

куба σ со всеми возможными раскрасками вершин в цвета из множества $\mathbf{Z}_2^n$ и обозначим их через $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$. (Рассматриваются только такие раскраски, для которых куб σ изоморфен с сохранением цветов вершин стандартному кубу со стандартной раскраской вершин.) Пусть σ и τ — два n -мерных куба псевдомногообразия Z^n , имеющие общую $(n-1)$ -мерную грань. Разобьём кубы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ на пары (в каждой паре один куб σ_i и один куб τ_j), так чтобы для каждой пары раскрасок индуцированные раскраски вершин грани $\sigma \cap \tau$ совпадали, и для каждой такой пары (σ_i, τ_j) склеим кубы σ_i и τ_j вдоль тождественного изоморфизма их гиперграней, соответствующих гиперграни $\sigma \cap \tau$. Произведя такие склеивания для всех пар кубов (σ, τ) , имеющих общую гипергрань, мы получим искомое псевдомногообразие $\bar{Z}^n$. Ограничение проекции p на каждый куб σ_i есть тождественный изоморфизм $\sigma_i \rightarrow \sigma$. $\square$

Таким образом, задача о реализации с некоторой кратностью произвольного целочисленного класса гомологий сводится к задаче о реализации с некоторой кратностью фундаментального класса ориентированного кубического псевдомногообразия с правильной раскраской вершин в цвета из множества $\mathbf{Z}_2^n$. В дальнейшем все результаты данного раздела полностью параллельны результатам разделов 3.4–3.6, поэтому мы ограничимся формулировками.

В этом разделе W — конечная группа Кокстера типа B_n , $\widetilde{W}$ — соответствующая ей бесконечная группа Кокстера ранга $2n$ (см. раздел 2.3, формулы (2.4)). Обозначим через $\mathcal{T}$ множество пар (ω, χ) , где ω — непустое подмножество множества $[n]$ и $\chi : \omega \rightarrow \mathbf{Z}_2$ — отображение. Как было отмечено в разделе 2.2, гиперграни пермутаэдра $\Pi^n(W)$ находятся во взаимно

однозначном соответствии с элементами множества $\mathcal{T}$.

Пусть U — множество n -мерных кубов псевдомногообразия Z^n . Ввиду наличия правильной раскраски оно разбивается на две части $U_+ \sqcup U_-$, такие что отображение ι_σ сохраняет ориентацию, если $\sigma \in U_+$, и обращает ориентацию, если $\sigma \in U_-$.

Для каждой пары $(\omega, \chi) \in \mathcal{T}$ обозначим через $\mathcal{P}_{\omega, \chi}$ множество инволюций $\Lambda : U \rightarrow U$, таких что

1. $\Lambda(U_+) = U_-$ и $\Lambda(U_-) = U_+$;
2. для любого куба $\sigma \in U$ множество цветов вершин грани $\sigma \cap \Lambda(\sigma)$ содержит все элементы $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}_2^n$, такие что $a_i = \chi(i)$ для всех $i \in \omega$.

Все множества $\mathcal{P}_{\omega, \chi}$ непусты. Положим

$$\begin{aligned} V_+ &= U_+ \times \prod_{(\omega, \chi) \in \mathcal{T}} \mathcal{P}_{\omega, \chi} \times \eta^{-1}(1); \\ V_- &= U_- \times \prod_{(\omega, \chi) \in \mathcal{T}} \mathcal{P}_{\omega, \chi} \times \eta^{-1}(-1); \\ V &= V_+ \cup V_- \subset U \times \prod_{(\omega, \chi) \in \mathcal{T}} \mathcal{P}_{\omega, \chi} \times \mathbf{Z}_2^n. \end{aligned}$$

Определим отображения $\Phi_{\omega, \chi} : V \rightarrow V$, $(\omega, \chi) \in \mathcal{T}$, по формуле

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega, \chi} \left(\sigma, (\Lambda_{\gamma, \theta})_{(\gamma, \theta) \in \mathcal{T}}, g \right) &= \left(\Lambda_{\omega, \chi}(\sigma), \left(\tilde{\Lambda}_{\gamma, \theta} \right)_{(\gamma, \theta) \in \mathcal{T}}, r_{|\omega|} g \right), \\ \tilde{\Lambda}_{\gamma, \theta} &= \begin{cases} \Lambda_{\omega, \chi} \circ \Lambda_{\gamma, \theta} \circ \Lambda_{\omega, \chi}, & \text{если } \gamma \subset \omega, \text{ и } \chi|_\gamma = \theta; \\ \Lambda_\gamma, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Отображения $\Phi_{\omega, \chi}$ являются инволюциями без неподвижных точек, причём инволюции Φ_{ω_1, χ_1} и Φ_{ω_2, χ_2} коммутируют, если $\omega_1 \subset \omega_2$ и $\chi_2|_{\omega_1} = \chi_1$,

т. е. если гиперграницы F_{ω_1, χ_1} и F_{ω_2, χ_2} имеют непустое пересечение. Пусть Γ — однородный граф степени $|\mathcal{T}|$, определяемый инволюциями $\Phi_{\omega, \chi}$. Тогда $\widehat{M}^n = M^n(\Pi^n(W), \Gamma)$ — ориентированное гладкое многообразие, являющееся конечнолистным накрытием над многообразием $M^n(\Pi^n(W))$. Компоненты связности многообразия $\widehat{M}^n$ асферичны. Грани коразмерности k многогранника $\Pi^n(W)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k; \chi)$, где $\emptyset \subsetneq \omega_1 \subsetneq \omega_2 \subsetneq \dots \subsetneq \omega_k \subset [n]$ и $\chi : \omega_k \rightarrow \mathbf{Z}_2$ — произвольное отображение. Центр симметрии грани, соответствующей такому набору, мы обозначим через $b_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k; \chi}(\Pi^n(W))$. В частности, $b(\Pi^n(W))$ — центр симметрии пермутаэдра $\Pi^n(W)$.

Каждой паре $(\omega, \chi) \in \mathcal{T}$ соответствует грань куба $[-1, 1]^n$, задаваемая уравнениями $t_i = \chi(i)$, $i \in \omega$. Обозначим через $b_{\omega, \chi}([-1, 1]^n)$ барицентр этой грани. Тогда $b_{\omega, \chi}([-1, 1]^n) = \sum_{i \in \omega} \chi(i) \mathbf{e}_i$.

Определим отображение $\psi : \Pi^n(W) \rightarrow [-1, 1]^n$ на вершинах барицентрического подразделения пермутаэдра $\Pi^n(W)$ по формулам

$$b(\Pi^n(W)) \mapsto \mathbf{0} = (0, \dots, 0);$$

$$b_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k; \chi}(\Pi^n(W)) \mapsto b_{\omega_1, \chi|_{\omega_1}}([-1, 1]^n)$$

и продолжим его по линейности на все симплексы барицентрического подразделения пермутаэдра $\Pi^n(W)$. Тогда ψ отображает границу и внутренность пермутаэдра $\Pi^n(W)$ соответственно на границу и внутренность куба $[-1, 1]^n$ и имеет степень 1.

Искомое отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow Z^n$ определяется по формуле

$$f([\sigma, (\Lambda_{\omega, \chi})_{(\omega, \chi) \in \mathcal{T}}, g), x] = (\iota_\sigma \circ \psi)(x).$$

Отображение f корректно определено и $f_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n]$, где

$$q = 2^{n-1} \prod_{(\omega, \chi) \in \mathcal{T}} |\mathcal{P}_{\omega, \chi}|.$$

В результате мы получаем следующий аналог теорем 3.1.3 и 3.1.4.

Теорема 3.7.2. Пусть W — конечная группа Кокстера типа B_n , $\widetilde{W}$ — соответствующая ей бесконечная группа Кокстера ранга $2n$, определённая соотношениями (2.4), с графом Кокстера, изображённым на рис. 3.4. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ существуют связное конечнолистное накрытие $p : \widehat{M}^n \rightarrow M^n(\Pi^n(W))$ и отображение $f : \widehat{M}^n \rightarrow X$, такие что $f_*[\widehat{M}^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q . Многообразие $\widehat{M}^n$ есть ориентированное гладкое асферичное многообразие и $\pi_1(\widehat{M}^n) \subset \widetilde{W}$ — свободная от кручения подгруппа конечного индекса.

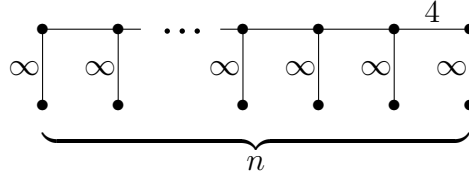


Рис. 3.4. Граф Кокстера группы Кокстера $\widetilde{W}$

Глава 4

Многозначные динамики на псевдомногообразиях

4.1 m -значные группы и m -значные динамики

В этом разделе мы излагаем необходимые нам основы теории m -значных групп, следуя обзору В. М. Бухштабера [26].

Для произвольного множества X через $(X)^m$ мы обозначим его m -ую симметрическую степень, то есть множество неупорядоченных наборов из m элементов множества X . Неупорядоченный набор из m элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$ мы будем обозначать через $[x_1, x_2, \dots, x_m]$.

Определение 4.1.1. Говорят, что на множестве X задана структура m -значной группы, если заданы m -значная операция умножения

$$\mu : X \times X \rightarrow (X)^m, \quad \mu(x, y) = x * y,$$

единица $e \in X$ и операция взятия обратного элемента $\text{inv} : X \rightarrow X$, удовлетворяющие следующим естественным обобщениям аксиом ассоциативной группы.

1. *Ассоциативность.* Для любых элементов $x, y, z \in X$ справедливо равенство $x * (y * z) = (x * y) * z$. Здесь через $x * (y * z)$ обозначен элемент симметрической степени $(X)^{m^2}$, являющийся объединением наборов $x * u_1, x * u_2, \dots, x * u_m$, где $y * z = [u_1, u_2, \dots, u_m]$. Аналогичным образом понимается правая часть равенства.
2. *Условие двусторонней единицы.* Для любого элемента $x \in X$ справедливо равенство $[e, x] = [x, e] = [x, x, \dots, x]$.
3. *Условие двустороннего обратного.* Для любого элемента $x \in X$ каждый из наборов $x * \text{inv}(x)$ и $\text{inv}(x) * x$ содержит единицу e .

Для любого элемента $x \in X$ определены его степени $x^1 = x \in X$, $x^2 = x * x \in (X)^{m^2}$, $x^3 = x * (x * x) \in (X)^{m^3}$ и т. д.; m -значная группа X называется *однопорождённой* с образующей $a \in X$, если каждый элемент группы X содержится в некоторой степени элемента a . Образующая a называется *эрмитовой*, если $\text{inv}(a) = a$. Принципиальным отличием теории m -значных групп от теории обычных групп является нетривиальность теории однопорождённых m -значных групп.

Важнейшими примерами m -значных групп являются *бикосетные m -значные группы*. Для любых (обычной) группы G и ее конечной подгруппы H из m элементов на множестве двойных смежных классов $H \backslash G / H$ существует структура *бикосетной m -значной группы* с умножением

$$(Hh_1H) * (Hh_2H) = [Hh_1hh_2H, h \in H],$$

единицей $e = H$ и операцией взятия обратного $\text{inv}(HhH) = Hh^{-1}H$. Аксиомы 1–3 проверяются непосредственно. Если группа G порождается своей подгруппой H и ещё одним элементом конечного порядка g_0 , то m -значная

группа $H \backslash G / H$ является однопорождённой с образующей $a = Hg_0H$. Если порядок элемента g_0 равен 2, то образующая a эрмитова.

Действием m -значной группы X на множестве V называется отображение $X \times V \rightarrow (V)^m$, $(x, v) \mapsto x \cdot v$, такое что для любых $x_1, x_2 \in X$, $v \in V$ наборы $(x_1 * x_2) \cdot v$ и $x_1 \cdot (x_2 \cdot v)$ из m^2 элементов совпадают и $e \cdot v = [v, v, \dots, v]$.

Отображение $T : V \rightarrow (V)^m$ называется m -значной динамикой на множестве V . Говорят, что m -значная динамика T интегрируема при помощи однопорождённой m -значной группы X с образующей a , если существует действие группы X на множестве V , такое что $Tv = a \cdot v$ для любого $v \in V$.

Пусть T_1 и T_2 есть m_1 -значная и m_2 -значная динамики на множестве V . Объединением динамик T_1 и T_2 мы назовём $(m_1 + m_2)$ -значную динамику T на множестве V , такую что для любого элемента $v \in V$ набор $T(v)$ является объединением наборов $T_1(v)$ и $T_2(v)$.

Пусть теперь T есть m -значная динамика на множестве V . Тогда для каждого натурального числа k определена km -значная динамика kT на множестве V , являющаяся объединением k экземпляров динамики T , то есть такая, что для любого элемента $v \in V$ набор $(kT)(v)$ есть объединение k экземпляров набора $T(v)$. Динамика kT называется динамикой, *кратной* динамике T .

Очевидно, что каждая обратимая однозначная динамика $T : V \rightarrow V$ интегрируема при помощи бесконечной циклической группы $\mathbf{Z}$. Если же множество V конечно, то обратимая динамика T интегрируема при помощи некоторой конечной циклической группы $\mathbf{Z}_q$. В случае многозначных динамик вопрос о существовании группы, интегрирующей заданную дина-

мику, менее тривиален.

4.2 Каноническая динамика на множестве максимальных симплексов псевдомногообразия

В этом и следующем разделах рассматриваемые псевдомногообразия не обязаны быть компактными, но не должны иметь края. Пусть K — симплициально клеточное псевдомногообразие, V — множество его n -мерных симплексов.

Определение 4.2.1. *Канонической динамикой* на множестве V называется $(n+1)$ -значная динамика T , сопоставляющая каждому симплексу $\tau \in V$ набор всех симплексов $\rho \in V$, не совпадающих с симплексом τ и имеющих с симплексом τ общую гипергрань. Если некоторый симплекс ρ имеет с симплексом τ несколько общих гиперграней, то он входит в набор $T(\tau)$ с соответствующей кратностью.

Мы рассмотрим вопрос об интегрируемости $(n+1)$ -значной динамики T и динамик, кратных ей.

Если комплекс K обладает правильной раскраской вершин в цвета из множества $[n+1]$, то динамика T представляется в виде объединения однозначных динамик $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}$. (Отметим, что множество V — это в точности множество вершин однородного графа Γ степени $n+1$, соответствующего псевдомногообразию K .) Пусть Σ_V — группа перестановок множества V . Обозначим через $G(K)$ подгруппу группы Σ_V , порождённую перестановками $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}$.

Пусть теперь снова K — произвольное n -мерное симплициально клеточное псевдомногообразие. Напомним, что его барицентрическое подразделение K' всегда допускает правильную раскраску вершин в цвета из множества $[n + 1]$, такую что барицентр каждого j -мерного симплекса покрашен в цвет $j + 1$. Наш подход заключается в том, чтобы получить некоторые результаты о группе $G(K')$ и применить их для построения однопорождённой многозначной группы, интегрирующей динамику, кратную динамике T . Мы будем обозначать через V' множество n -мерных симплексов комплекса K' , через Γ' — однородный граф степени $n + 1$, соответствующий псевдомногообразию K' в смысле конструкции Пеццана-Ферри (см. раздел 1.3), через $\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_{n+1}$ — инволюции на множестве V' , порождающие граф Γ' . Обозначим через $H \subset G(K')$ подгруппу, порождённую инволюциями $\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_n$.

Предложение 4.2.2. *Перестановки Φ'_i удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$(\Phi'_i)^2 = 1; \quad \Phi'_i \Phi'_j = \Phi'_j \Phi'_i, \quad |i - j| > 1; \quad \Phi'_i \Phi'_{i+1} \Phi'_i = \Phi'_{i+1} \Phi'_i \Phi'_{i+1}, \quad i < n. \quad (4.1)$$

Группа H изоморфна группе Σ_{n+1} .

Доказательство. Для каждого n -мерного симплекса τ комплекса K' имеется единственный n -мерный симплекс Δ комплекса K , содержащий симплекс τ . При этом инволюции $\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_n$ переставляют n -мерные симплексы комплекса K' внутри n -мерных симплексов комплекса K , в то время как инволюция Φ'_{n+1} изменяет симплекс комплекса K , в котором содержится рассматриваемый симплекс комплекса K' . Пусть Δ — произвольный n -мерный симплекс комплекса K . Отождествим его каким-либо

образом со стандартным симплексом Δ^n . Тогда n -мерные симплексы барицентрического подразделения симплекса Δ^n нумеруются перестановками $\nu \in \Sigma_{n+1}$. При этом перестановке ν соответствует симплекс τ_ν с вершинами

$$b_{\nu([1])}(\Delta^n), b_{\nu([2])}(\Delta^n), \dots, b_{\nu([n])}(\Delta^n), b(\Delta^n).$$

Значит, инволюции Φ'_i , $1 \leq i \leq n$, действуют по формуле

$$\Phi'_i(\tau_\nu) = \tau_{\nu\sigma_i}, \quad (4.2)$$

где $\sigma_i = (i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — стандартные образующие группы Σ_{n+1} . Следовательно, инволюции Φ'_i , $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям (4.1). Кроме того, из формулы (4.2) следует, что группа H свободно действует на множестве n -мерных симплексов барицентрического подразделения симплекса Δ^n , которое имеет мощность $(n+1)!$. Значит, группа H изоморфна группе Σ_{n+1} .

Нам осталось доказать, что $\Phi'_i\Phi'_{n+1} = \Phi'_{n+1}\Phi'_i$ при $i < n$. Это сразу следует из того, что для любого симплекса $\tau \in V'$ симплексы τ и $\Phi'_i(\tau)$ примыкают к одной и той же гипергранице симплекса $\Delta \in V$, содержащего симплекс τ . □

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 4.2.3. *Пусть K — n -мерное симплицеально клеточное псевдомногообразие, T — его каноническая $(n+1)$ -значная динамика. Тогда $(n+1)!$ -значная динамика $n!T$ интегрируема при помощи однопорождённой бикосетной $(n+1)!$ -значной группы $X = H \backslash G(K')/H$ с эрмитовой образующей $H\Phi_{n+1}H$.*

Доказательство. Пусть $\alpha : V' \rightarrow V$ — отображение, сопоставляющее каждому n -мерному симплексу комплекса K' единственный содержащий его n -мерный симплекс комплекса K . Пусть $\beta : V \rightarrow (V')^{(n+1)!}$ — отображение, сопоставляющее каждому n -мерному симплексу комплекса K набор всех содержащихся в нём n -мерных симплексов комплекса K' . Определим действие $(n+1)!$ -значной группы $X = H \backslash G(K') / H$ на множестве V по формуле

$$(HgH) \cdot \Delta = \left((\alpha)^{(n+1)!} \circ (g)^{(n+1)!} \circ \beta \right) (\Delta), \quad g \in G(K'). \quad (4.3)$$

Поясним использованные нами в этой формуле обозначения $(g)^{(n+1)!}$ и $(\alpha)^{(n+1)!}$. Для каждого отображения $f : A \rightarrow B$ мы обозначаем через $(f)^m : (A)^m \rightarrow (B)^m$ отображение, определённое по формуле

$$(f)^m([a_1, a_2, \dots, a_m]) = [f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)].$$

Таким образом, $(HgH) \cdot \Delta$ есть набор всех симплексов $\alpha(g(\tau))$, где $\tau \in V'$ — симплексы, содержащиеся в симплексе Δ . Легко видеть, что этот набор не меняется при замене элемента g на любой другой элемент h_1gh_2 из двойного смежного класса HgH . Действительно, $\alpha((h_1gh_2)(\tau)) = \alpha(g(h_2(\tau)))$ и отображение h_2 просто переставляет симплексы $\tau \in V'$, содержащиеся в симплексе Δ . Таким образом, формула (4.3) задаёт корректно определённое отображение $X \times V \rightarrow (V)^{(n+1)!}$. Из того, что $\beta(\alpha(\tau)) = H\tau$ сразу следует, что это отображение является действием. Осталось заметить, что $(H\Phi'_{n+1}H) \cdot \Delta = (n!T)(\Delta)$. Это сразу следует из того, что к каждой гипергранице симплекса Δ прилегает ровно $n!$ симплексов $\tau \in V'$, содержащихся в симплексе Δ . □

Отметим, что для компактных симплициально клеточных псевдомного-

образий построенная группа X конечна. Если не заботиться о конечности группы X , то все динамики вида $n!T$, где T — каноническая динамика на n -мерном симплицiallyно клеточном псевдомногообразии, могут быть проинтегрированы при помощи одной универсальной однопорождённой бикосетной $(n+1)!$ -значной группы X_{n+1} . Для доказательства этого факта нам будет необходимо следующее очевидное предложение.

Предложение 4.2.4. *Пусть G_1 и G_2 — группы, $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$ — их собственные конечные подгруппы, $|H_1| = |H_2| = m$, $a_1 \in G_1$ и $a_2 \in G_2$ — элементы и $\pi : G_1 \rightarrow G_2$ — эпиморфизм, такой что π изоморфно отображает подгруппу H_1 на подгруппу H_2 и $\varphi(a_1) = a_2$. Тогда любое действие m -значной бикосетной группы $H_2 \backslash G_2 / H_2$ на произвольном множестве V индуцирует действие m -значной бикосетной группы $H_1 \backslash G_1 / H_1$ на множестве V по формуле*

$$(H_1 g H_1) \cdot v = (H_2 \pi(g) H_2) \cdot v, \quad g \in G_2, \ v \in V.$$

При этом m -значные динамики на множестве V , задаваемые действиями элементов a_1 и a_2 , совпадают.

Рассмотрим теперь группу Кокстера W_{n+1} с графом Кокстера, изображённым на рис. 4.1. Эта группа задаётся образующими $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$ и

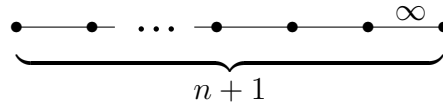


Рис. 4.1. Граф Кокстера группы Кокстера W_{n+1}

соотношениями

$$s_i^2 = 1; \quad s_i s_j = s_j s_i, \quad |i - j| > 1; \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad i < n.$$

Подгруппу группы W_{n+1} , порождённую элементами $s_1, s_2, \dots, s_n$ мы будем отождествлять с группой Σ_{n+1} .

Рассмотрим теперь эпиморфизм $\pi : W_{n+1} \rightarrow G(K')$, определённый на образующих по формуле $\pi(s_i) = \Phi'_i$. Его корректная определённость следует из предложения 4.2.2. Эпиморфизм π удовлетворяет условиям предложения 4.2.4 по отношению к подгруппам $\Sigma_{n+1} \subset W_{n+1}$ и $H \subset G(K')$ и элементам $s_{n+1} \in W_{n+1}$ и $\Phi'_{n+1} \in G(K')$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 4.2.5. *Имеется универсальная однопорождённая бикосетная $(n+1)!$ -значная группа $X_{n+1} = \Sigma_{n+1} \backslash W_{n+1} / \Sigma_{n+1}$ с эрмитовой образующей $\Sigma_{n+1} s_{n+1} \Sigma_{n+1}$, интегрирующая $(n+1)!$ -значную динамику $n!T$, кратную канонической $(n+1)$ -значной динамике T , для любого n -мерного симплицально клеточного псевдомногообразия K .*

Замечание 4.2.6. Опираясь на идеи описанного выше подхода к интегрированию динамик, кратных каноническим динамикам на множестве максимальных симплексов симплицально клеточных псевдомногообразий, П. В. Ягодовский и автор в работе [12] получили следующий достаточный признак интегрируемости многозначных динамик: если каждый элемент множества V имеет с учётом кратностей ровно m прообразов при m -значной динамике T , то динамика T интегрируема при помощи некоторой однопорождённой m -значной группы. В частности, из этого достаточного признака следует, что каноническая многозначная динамика на множестве максимальных симплексов псевдомногообразия всегда интегрируема без перехода к кратной динамике. Эти результаты не вошли в настоящую диссертацию.

Стоит отметить, что построенное нами в этом разделе действие $(n+1)!$ -значной группы на множестве максимальных симплексов n -мерного псевдомногообразия K коммутирует со всеми автоморфизмами псевдомногообразия K . Если же мы хотим проинтегрировать каноническую динамику T без перехода к кратной динамике или с кратностью, меньшей чем $n!$, то интегрирующая группа будет в меньшей степени связана с геометрией псевдомногообразия K . В частности, её действие может не коммутировать с автоморфизмами псевдомногообразия K .

4.3 Интегрирование канонических динамик на множествах вершин однородных графов

Пусть Γ — (конечный или бесконечный) однородный граф степени m на множестве вершин V . Граф Γ задаёт m -значную динамику T на множестве V , такую что $T(v)$ есть набор вершин, соединённых рёбрами с вершиной v . При этом каждая такая вершина u входит в набор $T(v)$ с коэффициентом, равным количеству рёбер, соединяющих вершины u и v . Динамика T называется *канонической m -значной динамикой* на множестве вершин графа Γ . В этом разделе мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 4.3.1. *Пусть Γ — однородный граф степени m , T — каноническая динамика на множестве его вершин. Тогда динамика $(m-1)!T$ интегрируема при помощи некоторой однопорождённой бикосетной $m!$ -значной группы $H \backslash G / H$ с эрмитовой образующей, где $H \cong \Sigma_m$. Если граф Γ конечен, то группа G также может быть выбрана конечной.*

Теорема 4.3.2. Пусть Γ — однородный граф степени m , T — каноническая динамика на множестве его вершин. Тогда динамика $(m - 1)!T$ интегрируема при помощи универсальной однопорождённой бикосетной $m!$ -значной группы $X_m = \Sigma_m \backslash W_m / \Sigma_m$ с эрмитовой образующей $\Sigma_m s_m \Sigma_m$.

Каждому $(m - 1)$ -мерному симплициально клеточному псевдомногообразию K можно сопоставить однородный граф $\Gamma(K)$ степени m , взяв по одной вершине для каждого $(m - 1)$ -мерного симплекса и соединив каждые две вершины столькими рёбрами, сколько общих гиперграней имеют соответствующие симплексы. Эта конструкция в точности совпадает с конструкцией построения графа по псевдомногообразию, описанной в разделе 1.3. Единственное отличие заключается в том, что в разделе 1.3 мы использовали наличие правильной раскраски вершин псевдомногообразия для того, чтобы получить правильную раскраску рёбер графа, а сейчас нам это не нужно. Очевидно, что каноническая m -значная динамика на множестве $(m - 1)$ -мерных симплексов комплекса K совпадает с канонической динамикой на множестве вершин графа $\Gamma(K)$. Следовательно, для графов Γ , которые изоморфны графам вида $\Gamma(K)$, теоремы 4.3.1 и 4.3.2 являются непосредственными следствиями теорем 4.2.3 и 4.2.5. Осталось доказать, что все графы таковы.

Предложение 4.3.3. Пусть Γ — однородный граф степени m . Тогда существует $(m - 1)$ -мерное симплициально клеточное псевдомногообразие K , такое что граф Γ изоморфен графу $\Gamma(K)$.

Доказательство. Сопоставим $(m - 1)$ -мерный симплекс Δ_v^{m-1} каждой вершине v графа Γ . Для каждой вершины v установим произвольным обра-

зом взаимно однозначное соответствие между гипергранями F симплекса Δ_v^{m-1} и рёбрами e графа Γ , выходящими из вершины v . Тогда каждому ребру e с концами v_1 и v_2 соответствуют две гиперграницы $F_1 \subset \Delta_{v_1}^{m-1}$ и $F_2 \subset \Delta_{v_2}^{m-1}$ двух различных симплексов $\Delta_{v_1}^{m-1}$ и $\Delta_{v_2}^{m-1}$. Склеим эти гиперграницы вдоль произвольного аффинно линейного изоморфизма. Произведя такие склейки для всех пар гиперграней, соответствующих рёбрам графа Γ , мы получим симплициально клеточное псевдомногообразие K , такое что $\Gamma(K) \cong \Gamma$. $\square$

Замечание 4.3.4. Граф Γ называется *симметрическим*, если группа G_Γ его автоморфизмов действует транзитивно на множестве его вершин и на множестве его рёбер. Интегрируемость динамики, кратной канонической динамике T , в случае, когда Γ — симметрический граф без петель и кратных рёбер, была доказана в серии работ [23], [24], [25]. Интегрирующая группа имела вид $H_\Gamma \backslash G_\Gamma / H_\Gamma$, где $H_\Gamma \subset G_\Gamma$ — стабилизатор некоторой вершины. Конструкция из [23], [24], [25] и описанная выше конструкция приводят вообще говоря к различным многозначным группам, поскольку построение псевдомногообразия K , такого что $\Gamma(K) \cong \Gamma$ нарушает симметрию графа. Приведём пример, иллюстрирующий это утверждение.

Пример 4.3.5. Простейшим примером однозначной динамики является динамика T_1 на двухэлементном множестве $V = \{v_1, v_2\}$, меняющая местами элементы множества V . Естественно, эта динамика интегрируется при помощи группы $\mathbf{Z}_2$. Попробуем применить описанные выше конструкции к динамикам $T_m = mT_1$, кратным динамике T_1 . Оказывается, что уже этот случай нетривиален. Обозначим через Γ_m граф, состоящий из двух вершин, соединённых m рёбрами. Тогда T_m — каноническая m -значная ди-

намика на множестве вершин графа Γ_m . Динамику T_m можно реализовать как динамику на множестве максимальных симплексов симплициально клеточного псевдомногообразия K , полученного с помощью склейки двух экземпляров $(m-1)$ -мерного симплекса Δ^{m-1} вдоль их общей границы. Тогда $G(K') \cong \Sigma_m \times \mathbf{Z}_2$ и $H \cong \Sigma_m$ — первый сомножитель этого произведения. Поэтому искомая $m!$ -значная группа X , интегрирующая динамику $T_{m!}$ состоит из двух элементов e и x с умножением $x * x = [e, e, \dots, e]$. (На самом деле несложно проверить, что такая же двухэлементная k -значная группа интегрирует динамику T_k при любом k , а не только при $k = m!$.)

Однако указанная выше реализация не единственная. Можно найти несколько различных примеров симплициально клеточных псевдомногообразий K , таких что $\Gamma(K) = \Gamma_m$. Рассмотрим более детально первый нетривиальный случай $m = 3$. Имеется 4 попарно неизоморфных симплициально клеточных псевдомногообразий K , таких что $\Gamma(K) = \Gamma_3$. Эти псевдомногообразия изображены на рис. 4.2. Как обычно, отрезки, помеченные одинаковым числом стрелок склеиваются в соответствии с направлениями стрелок. Случай, изображённый на рис. 4.2а, уже был рассмотрен выше. С топологической точки зрения псевдомногообразия, изображённые на рис. 4.2б–г, есть проективная плоскость, бутылка Клейна и тор соответственно. В случае, изображённом на рис. 4.2г, группа $G(K')$ имеет вид полупрямого произведения $\Sigma_3 \ltimes \mathbf{Z}_2$, подгруппа $H \cong \Sigma_3$ — первый сомножитель и в результате получается та же двухэлементная шестизначная группа, интегрирующая динамику T_6 , что и в случае, изображённом на рис. 4.2а.

Пусть теперь K — симплициально клеточное псевдомногообразие, изоб-

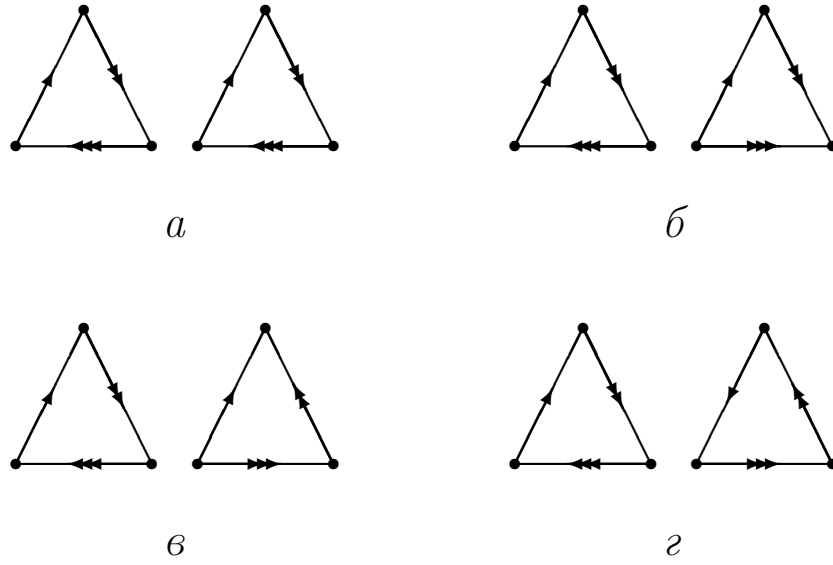


Рис. 4.2. Четыре способа реализации графа Γ_3

ражѐнное на рис. 4.2б. В этом случае

$$G(K') = (\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) \wr \mathbf{Z}_3,$$

где образующими сомножителя $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ являются элементы Φ_3 , $\Phi_2\Phi_3\Phi_2$ и $\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_2\Phi_1$, а образующей сомножителя $\mathbf{Z}_3$ — элемент $\Phi_1\Phi_2$ и группа $\mathbf{Z}_3$ действует циклическими перестановками указанных образующих группы $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Подгруппа H порождена элементами Φ_1 и Φ_2 . В результате мы получаем четырёхэлементную шестизначную группу

$$X = H \backslash G / H = \{e, x_1, x_2, x_3\}$$

с элементами $x_1 = H\Phi_3H$, $x_2 = H\Phi_3\Phi_2\Phi_3H$ и $x_3 = H\Phi_3\Phi_2\Phi_3\Phi_2\Phi_1\Phi_2\Phi_3H$

и следующей таблицей умножения:

$$\begin{aligned}
x_1 * x_1 &= [e, e, x_2, x_2, x_2, x_2]; \\
x_1 * x_2 &= x_2 * x_1 = [x_1, x_1, x_1, x_1, x_3, x_3]; \\
x_1 * x_3 &= x_3 * x_1 = [x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, x_2]; \\
x_2 * x_2 &= [e, e, x_2, x_2, x_2, x_2]; \\
x_2 * x_3 &= x_3 * x_2 = [x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1]; \\
x_3 * x_3 &= [e, e, e, e, e, e].
\end{aligned}$$

Действие шестизначной группы X на множестве V задаётся по формулам

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot v_1 &= x_2 \cdot v_2 = x_3 \cdot v_1 = [v_2, v_2, v_2, v_2, v_2, v_2]; \\
x_1 \cdot v_2 &= x_2 \cdot v_1 = x_3 \cdot v_2 = [v_1, v_1, v_1, v_1, v_1, v_1].
\end{aligned}$$

Группы $G(K')$ и X , получающиеся в случае изображённом на рис. 4.2в, изоморфны группам, получающимся в случае, изображённом на рис. 4.2б.

Пример 4.3.6. Рассмотрим m -значную динамику T на $(m+1)$ -элементном множестве V , сопоставляющую каждому элементу множества V набор всех остальных элементов множества V . Эту динамику можно интерпретировать как каноническую динамику на множестве вершин полного графа на $m+1$ вершинах или как каноническую динамику на множестве максимальных симплексов границы m -мерного симплекса. В. М. Бухштабер [26] заметил, что динамика T интегрируется при помощи двухэлементной m -значной группы $X = \{e, x\}$ с умножением

$$x * x = [e, \underbrace{x, \dots, x}_{m-1}].$$

Эта группа очень часто возникает в теории m -значных групп. Она является примером так называемой m -значной деформации группы $\mathbf{Z}_2$. Понятие m -значной деформации обычной группы было введено и исследовано П. В. Ягодновским в работах [21], [22]. Наша конструкция, описанная выше, даёт $m!$ -значную группу $\overline{X} = \{e, x\}$ с умножением

$$x * x = [\underbrace{e, \dots, e}_{m-1}, \underbrace{x, \dots, x}_{(m-1) \cdot (m-1)!}],$$

интегрирующую динамику $(m-1)!T$. Эта $m!$ -значная группа также является $m!$ -значной деформацией группы $\mathbf{Z}_2$.

Литература

- [1] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, главы 4–6. М.: Мир, 1972.
- [2] Бухштабер В. М., *Модули дифференциалов спектральной последовательности Атья-Хирцебруха I, II*, Матем. сб., т. 78 (1969), №2, с. 307–320; т. 83 (1970), №1, с. 61–76.
- [3] Бухштабер В. М., *Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп*, Итоги науки и техн. ВИНТИ, Соврем. пробл. мат., т. 10 (1978), с. 5–178.
- [4] Бухштабер В. М., *Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы*, Успехи математических наук, т. 45 (1990), №3, с. 185–186.
- [5] Бухштабер В. М., Гайфуллин А. А., *Представления m -значных групп на триангуляциях многообразий*, Успехи математических наук, т. 61 (2006), №3, с. 171–172.
- [6] Бухштабер В. М., Новиков С. П., *Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса*, Матем. сб., т. 84 (1971), №1, с. 81–118.

- [7] Бухштабер В. М., Панов Т. Е., *Торические действия в топологии и комбинаторике*. М.: МЦНМО, 2004.
- [8] Бухштабер В. М., Рис Е. Г., *Многозначные группы и n -алгебры Хопфа*, Успехи математических наук, т. 51 (1996), №4, с. 149–150.
- [9] Винберг Э. Б., *Дискретные линейные группы, порождённые отражениями*, Известия АН СССР, сер. матем., т. 35 (1971), №5, с. 1072–1112.
- [10] Гайфуллин А. А., *Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий*, Успехи математических наук, т. 62 (2007), №6, с. 167–168.
- [11] Гайфуллин А. А., *Реализация циклов асферичными многообразиями*, Успехи математических наук, т. 63 (2008), №3, с. 173–174.
- [12] Гайфуллин А. А., Ягодковский П. В., *Об интегрируемости m -значных динамик при помощи однопорождённых m -значных групп*, Успехи математических наук, т. 62 (2007), №1, с. 201–202.
- [13] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., под ред. Новикова С. П., *Теория солитонов: Метод обратной задачи*. М.: Наука, 1980.
- [14] Зейферт Г., Трельфалль В., *Топология*. М.–Л.: ГОНТИ, 1938; Ижевск: НИЦ РХД, 2001.
- [15] Новиков С. П., *Гомотопические свойства комплексов Тома*, Матем. сб., т. 57 (1962), №4, с. 407–442.

- [16] Рохлин В. А., *Двумерные подмногообразия четырёхмерных многообразий*, Функц. анализ и прил., т. 5 (1971), №1, с. 48–60.
- [17] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., *Начальный курс топологии. Геометрические главы*. М.: Наука, 1977.
- [18] Рурк К., Сандерсон Б., *Введение в кусочно линейную топологию*. М.: Мир, 1974.
- [19] Том Р., *Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий*, Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 291–348.
- [20] Хилтон П. Дж., Уайли С., *Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию*. М.: Мир, 1966.
- [21] Ягодовский П. В., *Деформация многозначных групп*, Успехи математических наук, т. 52 (1997), №3, с. 179–180.
- [22] Ягодовский П. В., *Линейная деформация дискретных групп и конструкции многозначных групп*, Известия РАН, сер. матем., т. 64 (2000), №5, с. 197–224.
- [23] Ягодовский П. В., *Представления многозначных групп на графах*, Успехи математических наук, т. 57 (2002), №1, с. 181–182.
- [24] Ягодовский П. В., *Бикосетные группы и симметрические графы*, Записки науч. сем. ПОМИ, т. 292 (2002), с. 161–174.
- [25] Ягодовский П. В., *σ -Расширения дискретных многозначных групп*, Записки науч. сем. ПОМИ, т. 325 (2005), с. 225–242.

- [26] Buchstaber V. M., *The n -valued groups: theory and applications*, Moscow Math. J., v. 6 (2006), №1, p. 57–84.
- [27] Buchstaber V. M., Rees E. G., *Multivalued groups, their representations and Hopf algebras*, Transformation Groups, v. 2 (1997), №4, p. 325–349.
- [28] Buchstaber V. M., Rees E. G., *Multivalued groups, n -Hopf algebras and n -ring homomorphisms*. In book: Lie Groups and Lie Algebras. Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 85–107.
- [29] Buchstaber V. M., Veselov A. P., *Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups*, Int. Math. Res. Not., v. 8 (1996), p. 381–400.
- [30] Davis M. W., *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. Math. (2), v. 117 (1983), №2, p. 293–324.
- [31] Davis M. W. *Some aspherical manifolds*, Duke Math. J., v. 55 (1987), №1, p. 105–139.
- [32] Davis M. W., Januszkiewicz T., *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., v. 62 (1991), №2, p. 417–451.
- [33] Eilenberg S., *Problems in topology*, Ann. Math. (2), v. 50 (1949), p. 246–260.
- [34] Ferri M., *Una rappresentazione delle n -varietà topologiche triangolabili mediante grafi $(n+1)$ -colorati* Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 5, v. 13-B (1976), №1, p. 250–260.

- [35] Ferri M., Gagliardi C., Grasselli L., *A graph-theoretical representation of PL-manifolds — A survey on crystallizations*, Aequationes Math., v. 31 (1986), №2–3, p. 121–141.
- [36] Fried D., *The cohomology of an isospectral flow*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 98 (1986), p. 363–368.
- [37] Goresky M., MacPherson R., *Intersection homology theory*, Topology, v. 19 (1980), №2, p. 135–162.
- [38] Kronheimer P., Mrowka T., *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett., v. 1 (1994), №6, p. 797–808.
- [39] Milnor J., *On the cobordism ring and a complex analogue. I*, Amer. Math. J., v. 82 (1960), №3, p. 505–521.
- [40] Moser J., *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system*, Lecture Notes in Physics, v. 38 (1975), Springer-Verlag, p. 467–497.
- [41] Pezzana M., *Diagrammi di Heegaard e triangolazione contratta*, Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 4., v. 12 (1975), Suppl. al №3, p. 98–105.
- [42] Sullivan D., *Singularities in spaces*, Proc. of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture notes in Mathematics, v. 209 (1971), p. 196–206.
- [43] Tomei C., *The topology of the isospectral manifold of tridiagonal matrices*, Duke Math. J., v. 51 (1984), №4, p. 981–996.
- [44] Ziegler G.M., *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Math., v. 152, Springer-Verlag, 1995.