Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.16

Гайфуллин Александр Александрович

Комбинаторная реализация циклов

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Бухштабер Виктор Матвеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Долбилин Николай Петрович
	доктор физико-математических наук, профессор Лексин Владимир Павлович
Ведущая организация:	Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Московская обл., г. Черноголовка, РАН

Защита диссертации состоится 6 июня 2008 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 6 мая 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

В конце 1940-х годов Н. Стинрод поставил следующую проблему, известную как проблема о реализации циклов: существуют ли для данного класса (сингулярных) гомологий $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$ топологического пространства X замкнутое ориентированное многообразие N^n и непрерывное отображение $f : N^n \to X$, такие что $f_*[N^n] = z$? Без ограничения общности можно считать, что X — компактный полиэдр. Классическая теорема Р. Тома[1] утверждает, что для каждого натурального числа n существует такое натуральное число $k = k(n)$, что для любого класса гомологий $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$, класс kz реализуем в виде образа ориентированного замкнутого гладкого многообразия. В той же работе Р. Том доказал, что все классы гомологий размерностей $\leqslant 6$ реализуемы и построил первый пример 7-мерного целочисленного класса гомологий, не реализуемого по Стинроду.

Задача о реализации циклов тесно связана с задачей о дифференциалах в спектральной последовательности Атья-Хирцебруха в теории $SO_*(\cdot)$ ориентированных бордизмов. Член E^2 этой спектральной последовательности имеет вид $E^2_{s,t} = H_s(X;\Omega^{SO}_t)$, а член E^∞ присоединён к градуированной группе $SO_*(X)$ ориентированных бордизмов пространства X. Класс $z \in H_n(X;\mathbb{Z}) = E^2_{n,0}$ реализуем образом гладкого многообразия тогда и только тогда, когда он является циклом всех дифференциалов. Первым дифференциалом спектральной последовательности Атья-Хирцебруха, который может быть нетривиален, является дифференциал $d^5_{7,0}$: примером класса гомологий, не принадлежащего его ядру, является 7-мерный класс гомологий из примера Р. Тома. Используя отсутствие кручения в кольце Ω_U унитарных кобордизмов, С. П. Новиков[2] доказал, что если целочисленные гомологии пространства X не имеют кручения, то все дифференциалы спектральной последовательности Атья-Хирцебруха тривиальны и, следовательно, все классы гомологий пространства X реализуются по Стинроду.

В. М. Бухштабер[3] вычислил порядки дифференциалов в спектральной последовательности Атья–Хирцебруха. В результате им были получены важные результаты о числах $k(n)$.

Классический подход к проблеме Стинрода о реализации циклов, при

---

[1] Том Р., *Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий*, Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, с. 291–348.

[2] Новиков С. П., *Гомотопические свойства комплексов Тома*, Матем. сб., т. 57 (1962), №4, с. 407–442.

[3] Бухштабер В. М., *Модули дифференциалов спектральной последовательсти Атья-Хирцебруха I, II*, Матем. сб., т. 78 (1969), №2, с. 307–320; т. 83 (1970), №1, с. 61–76.

помощи которого были получены указанные выше результаты, заключается в её сведении к гомотопической задаче при помощи теоремы трансверсальности Тома и последующего исследования этой гомотопической задачи методами алгебраической топологии. В диссертации предлагается новый, комбинаторный подход к проблеме Стинрода, основанный на изучении локальной комбинаторной структуры цикла, представляющего заданный класс гомологий. Некоторые идеи этого подхода восходят к работе Д. Сулливана[4], в которой был предложен подход к проблеме Стинрода, основанный на разрешении особенностей псевдомногообразий.

Представляет интерес задача о реализации классов гомологий образами фундаментальных классов специальных многообразий, имеющих обозримое топологическое строение. Классическим примером является задача о реализации классов гомологий образами сфер, то есть задача об описании образа гомоморфизма Гуревича. Отметим, что при такой постановке аналог теоремы Р. Тома очевидно не верен: существуют целочисленные классы гомологий, для которых никакой кратный им класс гомологий не лежит в образе гомоморфизма Гуревича. Мы исследуем задачу о нахождении набора $\mathcal{M}_n$ гладких n-мерных многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью всех целочисленных n-мерных классов гомологий любого пространства X.

В центре нашего исследования оказалось многообразие M^n изоспектральных вещественных симметрических трёхдиагональных $(n+1)\times(n+1)$ матриц, то есть многообразие вещественных симметрических трёхдиагональных матриц с фиксированным простым спектром $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n+1}$. (Матрица $A = (a_{ij})$ называется *трёхдиагональной*, если $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$.) В диссертации доказывается, что в качестве класса $\mathcal{M}_n$ можно взять набор конечнолистных накрытий над многообразием M^n. Многообразие M^n возникает в теории интегрируемых систем при изучении цепочки Тоды (см., например, работу Дж. Мозера[5]). Топологические свойства многообразия M^n были первоначально изучены К. Томеи[6]. Им было построено клеточное разбиение многообразия M^n и, опираясь на результаты М. Дэвиса[7], доказана его асферичность. Напомним, что пространство X

[4] Sullivan D., *Singularities in spaces*, Proc. of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture notes in Mathematics, v. 209 (1971), p. 196–206.

[5] Moser J., *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system*, Lecture Notes in Physics, v. 38 (1975), Springer–Verlag, p. 467–497.

[6] Tomei C., *The topology of the isospectral manifold of tridiagonal matrices*, Duke Math. J., v. 51 (1984), №4, p. 981–996.

[7] Davis M. W., *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. Math. (2), v. 117 (1983), №2, p. 293–324.

называется *асферичным*, если оно имеет гомотопический тип $K(\pi, 1)$, то есть если X линейно связно и $\pi_i(X) = 0$ при $i > 1$. Многообразие M^n является важным представителем интересного класса гладких многообразий с действием группы $\mathbf{Z}_2^n$, называемых *малыми накрытиями, индуцированными из линейной модели, над простыми многогранниками.* Этот класс многообразий был введён и исследован М. Дэвисом и Т. Янушкевичем[8].

Проблема Н. Стинрода о реализации циклов непрерывными образами многообразий тесно связана с проблемой о реализации циклов в замкнутом гладком многообразии Q^m ориентированными подмногообразиями. Эта проблема имеет два случая: стабильный (при $n < \frac{m}{2}$) и нестабильный (при $n \geqslant \frac{m}{2}$). В нестабильном случае вопрос о том, какими именно подмногообразиями может быть реализован заданный класс гомологий многообразия, исследовался в малых размерностях (двумерные классы гомологий в трёхмерных и четырёхмерных многообразиях). Эта проблема известна как проблема о вычислении минимального рода гладко вложенной поверхности, реализующей двумерный класс гомологий. Важные результаты по этой задаче были получены В. А. Рохлиным[9]. Классическим результатом также является знаменитая гипотеза Р. Тома, доказанная П. Кронхаймером и Т. Мровкой[10], утверждающая, что число $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ является наименьшим родом гладко вложенной поверхности, представляющей класс гомологий ku, где u — стандартная образующая группы $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z})$. Наши результаты относятся к стабильному случаю. Если $n < \frac{m}{2}$, то любой класс гомологий $z \in H_n(Q^m; \mathbb{Z})$, реализуемый по Стинроду, может быть реализован замкнутым ориентированным подмногообразием.

Ещё одной задачей, решаемой в настоящей диссертации, является задача о канонической $(n+1)$-значной динамике T на множестве n-мерных симплексов n-мерного симплициально клеточного псевдомногообразия K.

В 1971 году в работе В. М. Бухштабера и С. П. Новикова[11] возникла конструкция в теории характеристических классов векторных расслоений, в которой произведением двух элементов некоторого множества являлся набор (с кратностями) из m элементов того же множества. Эта конструкция привела к понятию m-значной группы. Теория m-значных групп развива-

[8] Davis M. W., Januszkiewicz T., *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., v. 62 (1991), №2, p. 417–451.

[9] Рохлин В. А., *Двумерные подмногообразия четырёхмерных многообразий*, Функц. анал. и прил., т. 5 (1971), №1, с. 48–60.

[10] Kronheimer P., Mrowka T., *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett., v. 1 (1994), №6, p. 797–808.

[11] Бухштабер В. М., Новиков С. П., *Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса*, Матем. сб., т. 84 (1971), №1, с. 81–118.

лась в работах В. М. Бухштабера[12] и В. М. Бухштабера и Е. Г. Риса[13,14,15]. Обзор основных направлений развития теории m-значных групп, а также обзор литературы можно найти в работе В. М. Бухштабера[16]. Теория многозначных групп нашла важные приложения в теории m-значных динамических систем с дискретным временем или, короче, m-значных динамик (В. М. Бухштабер, А. П. Веселов[17]), и в примыкающей к ней теории действий m-значных групп на графах (П. В. Ягодовский[18,19,20]). В работе[16] была введена каноническая $(n+1)$-значная динамика T на множестве максимальных (по включению) симплексов любого n-мерного симплициального псевдомногообразия, сопоставляющая каждому симплексу набор симплексов, имеющих с ним общую гипергрань. В диссертации исследуется вопрос об интегрируемости динамики T и кратных ей многозначных динамик при помощи многозначных групп.

Цель работы.

Целью настоящей работы является развитие комбинаторного подхода к проблеме Стинрода о реализации циклов; получение явной конструкции, которая по сингулярному циклу, представляющему целочисленный класс гомологий, строит многообразие, реализующее с некоторой кратностью этот класс гомологий; доказательство того, что каждый n-мерный целочисленный класс гомологий может быть с некоторой кратностью реализован образом конечнолистного накрытия над многообразием изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1) \times (n+1)$ матриц; доказательство интегрируемости $(n+1)!$-значной динамики, кратной ка-

[12]Бухштабер В. М., *Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы*, Успехи математических наук, т. 45 (1990), №3, с. 185–186.

[13]Бухштабер В. М., Рис Е. Г., *Многозначные группы и n-алгебры Хопфа*, Успехи математических наук, т. 51 (1996), №4, с. 149–150.

[14]Buchstaber V. M., Rees E. G., *Multivalued groups, their representations and Hopf algebras*, Transformation Groups, v. 2 (1997), №4, p. 325–349.

[15]Buchstaber V. M., Rees E. G., *Multivalued groups, n-Hopf algebras and n-ring homomorphisms.* In book: Lie Groups and Lie Algebras. Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 85–107.

[16]Buchstaber V. M., *The n-valued groups: theory and applications*, Moscow Math. J., v. 6 (2006), №1, p. 57–84.

[17]Buchstaber V. M., Veselov A. P., *Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups*, Int. Math. Res. Not., v. 8 (1996), p. 381–400.

[18]Ягодовский П. В., *Представления многозначных групп на графах*, Успехи математических наук, т. 57 (2002), №1, с. 181–182.

[19]Ягодовский П. В., *Бикосетные группы и симметрические графы*, Записки науч. сем. ПОМИ, т. 292 (2002), с. 161–174.

[20]Ягодовский П. В., *σ-Расширения дискретных многозначных групп*, Записки науч. сем. ПОМИ, т. 325 (2005), с. 225–242.

нонической $(n+1)$-значной динамике на множестве максимальных симплексов n-мерного симплициально клеточного псевдомногообразия.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Получена явная комбинаторная конструкция, которая по каждому целочисленному сингулярному циклу ξ топологического пространства X строит ориентированное гладкое замкнутое многообразие N^n и отображение $f : N^n \to X$, реализующее с некоторой кратностью класс гомологий цикла ξ, то есть такое, что $f_*[N^n] = q[\xi]$ для некоторого ненулевого целого числа q. Таким образом, получено комбинаторное доказательство теоремы Р. Тома о том, что каждый целочисленный класс гомологий с некоторой кратностью реализуется непрерывным образом ориентированного гладкого многообразия.

2. Доказано, что каждый n-мерный целочисленный класс гомологий любого топологического пространства может быть с некоторой кратностью реализован непрерывным образом конечнолистного накрытия над многообразием изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1) \times (n+1)$ матриц. В частности, каждый целочисленный класс гомологий любого линейно связного топологического пространства может быть с некоторой кратностью реализован непрерывным образом ориентированного гладкого асферичного многообразия.

3. Дана явная конструкция однопорождённой бикосетной $(n+1)!$-значной группы, интегрирующей $(n+1)!$-значную динамику $n!T$, кратную канонической $(n+1)$-значной динамике T на множестве n-мерных симплексов n-мерного симплициально клеточного псевдомногообразия.

Основные методы исследования.

В работе используются методы комбинаторной геометрии, алгебраической топологии, теории графов и теории действий групп на многообразиях.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для алгебраической топологии, топологии многообразий, теории гомологий.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

1. Семинар «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством академика РАН С. П. Новикова и чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера; Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова;

2. Семинар «Алгебраическая топология и её приложения» им. М.М.Постникова под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, профессоров, д.ф.-м.н. А. В. Чернавского, И. А. Дынникова и доцентов, к.ф.-м.н. Л. А. Алания, Т. Е. Панова; механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова;

3. Семинар «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» под руководством д.ф.-м.н. С.М.Натанзона, к.ф.-м.н. О.В.Шварцмана и д.ф.-м.н. О. К. Шейнмана; Независимый Московский Университет.

4. Международная конференция «International Conference on Toric Topology», г. Осака, Япония, 29 мая – 3 июня 2006 года.

5. Научная конференция «Ломоносовские чтения», г. Москва, 16 апреля – 25 апреля 2008 года.

Публикации.

Основное содержание диссертации опубликовано в трёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа изложена на 121 странице и состоит из введения и четырёх глав. Библиография включает 44 наименования.

Краткое содержание работы.

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемой проблемы и формулируются основные результаты.

Содержание главы 1.

Эта глава посвящена изложению конструкции Пеццана–Ферри построения n-мерного симплициально клеточного псевдомногообразия по однородному графу степени $n+1$ и её обобщению на случай псевдомногообразий, склеенных из произвольных простых многогранников. Первая часть главы носит вводный характер. В ней содержатся необходимые нам в дальнейшем определения, в частности, определения комплексов, псевдомногообразий и комбинаторных многообразий, склеенных из простых многогранников.

Вторая часть главы посвящена изложению следующей конструкции. Пусть P^n есть n-мерный простой выпуклый многогранник с m гипергранями, $\mathcal{F}$ — множество его гиперграней. *Однородным графом степени m* называется граф, все вершины которого имеют степень m. Мы считаем, что граф может содержать кратные рёбра, но не содержит петель. Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если никакие два ребра, имеющие общую вершину не окрашены в один цвет. Пусть Γ — однородный граф степени m на множестве вершин V с рёбрами, раскрашенными правильным образом в цвета из множества $\mathcal{F}$. Для каждой гиперграни $F \in \mathcal{F}$ обозначим через Φ_F инволюцию без неподвижных точек на множестве V, сопоставляющую каждой вершине вершину, соединённую с ней ребром цвета F. Положим

$$M^n(P^n, \Gamma) = (V \times P^n)/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями $(v, x) \equiv (\Phi_F(v), x)$, если $x \in F$. Тогда $M^n(P^n, \Gamma)$ — псевдомногообразие, склеенное из простых многогранников. В случае, когда P^n — симплекс, описанная конструкция принадлежит М. Пеццана[21] и М. Ферри[22]. Имеет место следующее предложение, которое будет необходимо нам в дальнейшем.

Предложение 1. *Предположим, что*

1. *инволюции Φ_{F_1} и Φ_{F_2} коммутируют для любых двух гиперграней F_1 и F_2 многогранника P^n с непустым пересечением;*

[21] Pezzana M., *Diagrammi di Heegaard e triangolazione contratta*, Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 4., v. 12 (1975), Suppl. al №3, p. 98–105.

[22] Ferri M., *Una rappresentazione delle n-varietà topologiche triangolabili mediante grafi $(n+1)$-colorati* Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 5, v. 13-B (1976), №1, p. 250–260.

2. *отображение $\Phi_{F_1} \circ \Phi_{F_2} \circ \ldots \circ \Phi_{F_k}$ не имеет неподвижных точек для любых попарно различных гиперграней $F_1, F_2, \ldots, F_k$ с непустым пересечением.*

Тогда линк каждой вершины псевдомногообразия $M^n(P^n, \Gamma)$ изоморфен границе n-мерного октаэдра. В частности, псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ является кусочно линейным многообразием.

Содержание главы 2.

Эта глава посвящена накрытиям над многообразием M^n изоспектральных симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1) \times (n+1)$ матриц. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *трёхдиагональной*, если $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$. Фиксируем простой спектр $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{n+1}$ и рассмотрим множество всех симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1) \times (n+1)$ матриц с данным спектром. Это множество есть ориентируемое замкнутое гладкое n-мерное многообразие M^n, с точностью до диффеоморфизма не зависящее от выбранного спектра.

В первых двух разделах главы 2 содержатся необходимые сведения о группах Кокстера и их пермутаэдрах. Традиционно пермутаэдром называется пермутаэдр группы перестановок, то есть группы Кокстера типа A_n. Пермутаэдр Π^n есть выпуклая оболочка $(n+1)!$ точек, полученных всевозможными перестановками координат точки $(1, 2, \ldots, n+1)$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество непустых собственных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Гиперграни пермутаэдра Π^n находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами $\omega \in \mathcal{S}$. Гипергрань, соответствующую подмножеству ω, мы обозначаем через F_ω. Гиперграни F_{ω_1} и F_{ω_2} пересекаются тогда и только тогда, когда одно из множеств ω_1 и ω_2 содержится во втором.

К. Томеи[6] построил клеточное разбиение многообразия M^n, n-мерными клетками которого являются 2^n пермутаэдров Π^n. Это разбиение является специальным случаем конструкции *малых накрытий, индуцированных из линейной модели,* принадлежащей М. Дэвису и Т. Янушкевичу[8]. Для пермутаэдра эта конструкция имеет вид

$$M^n = (\mathbf{Z}_2^n \times \Pi^n)/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями $(g, x) \equiv (r_{|\omega|} g, x)$, если $x \in F_\omega$. Здесь $\mathbf{Z}_2$ — циклическая группа порядка 2 и $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — образующие группы $\mathbf{Z}_2^n$. Мы используем для группы $\mathbf{Z}_2$ мультипликативную форму записи и отождествляем её с множеством $\{-1, 1\}$. Используя описанное выше клеточное разбиение, К. Томеи доказал асферичность многообразия M^n.

Рассмотрим псевдомногообразие $M^n(\Pi^n, \Gamma)$, где Γ — однородный граф степени $2^{n+1} - 2$ с правильной раскраской рёбер в $2^{n+1} - 2$ цвета, соответствующих гиперграням пермутаэдра Π^n. Инволюцию $\Phi_{F_\omega} : V \to V$ мы будем обозначать просто через Φ_ω. Следующее предложение является основным результатом главы 2. Оно даёт полную характеризацию графов Γ, таких что $M^n(\Pi^n, \Gamma)$ — накрытие над многообразием M^n.

Предложение 2. *Псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ является накрытием над многообразием M^n тогда и только тогда, когда инволюции Φ_ω, задающие граф Γ, удовлетворяют следующим свойствам:*

1. *инволюции Φ_{ω_1} и Φ_{ω_2} коммутируют, если $\omega_1 \subset \omega_2$;*
2. *имеется отображение $\underline{p} : V \to \mathbf{Z}_2^n$, такое что $\underline{p}(\Phi_\omega(v)) = r_{|\omega|}\underline{p}(v)$ для всех $v \in V$ и всех $\omega \in \mathcal{S}$.*

В частности, при выполнении этих условий псевдомногообразие $M^n(P^n, \Gamma)$ имеет естественную структуру гладкого многообразия. Любое накрытие над многообразием M^n эквивалентно накрытию вида $M^n(P^n, \Gamma) \to M^n$.

Содержание главы 3.

Эта глава посвящена явному построению многообразия, реализующего с некоторой кратностью заданный n-мерный целочисленный класс гомологий. Полученное многообразие будет иметь вид $M^n(\Pi^n, \Gamma)$ для некоторого графа Γ, удовлетворяющего условиям 1 и 2 из предложения 2. Поэтому оно будет накрытием над многообразием M^n и, в частности, будет несвязным объединением асферичных многообразий. Таким образом, мы получаем следующие теоремы.

Теорема 3. *Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ любого топологического пространства X существуют конечнолистное накрытие $\widehat{M}^n$ над многообразием M^n и непрерывное отображение $f : \widehat{M}^n \to X$, такие что $f_*[\widehat{M}^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q.*

Теорема 4. *Пусть X — линейно связное пространство. Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ существуют ориентированное асферичное гладкое многообразие $\widehat{M}^n$ и непрерывное отображение $f : \widehat{M}^n \to X$, такие что $f_*[\widehat{M}^n] = qz$ для некоторого ненулевого целого числа q.*

Каждый целочисленный класс гомологий может быть представлен образом ориентированного симплициального псевдомногообразия. Таким образом, задача о реализации произвольного класса гомологий сводится к задаче о реализации фундаментального класса произвольного ориентированного симплициального псевдомногообразия Z^n. При этом, перейдя к барицентрическому подразделению, можно считать, что вершины псевдомногообразия Z^n раскрашены в цвета $1, 2, \ldots, n+1$ правильным образом, то есть так, что любые две вершины, соединённые ребром, окрашены в различные цвета. Обозначим через $\mu(\sigma)$ множество цветов вершин симплекса σ. Для n-мерного симплекса σ обозначим через $b_\omega(\sigma)$ барицентр грани $\tau \subset \sigma$, такой что $\mu(\tau) = \omega$. Обозначим через U множество n-мерных симплексов комплекса Z^n. Из наличия правильной раскраски вершин следует, что множество U может быть разбито на две части $U_+ \sqcup U_-$, так что симплексы, имеющие общую гипергрань, лежат в разных частях. Для любого $\omega \in \mathcal{S}$ обозначим через $\mathcal{P}_\omega$ множество инволюций $\Lambda : U \to U$, таких что $\Lambda(U_\pm) = U_\mp$ и $\mu\left(\sigma \cap \Lambda(\sigma)\right) \supset \omega$ для любого симплекса $\sigma \in U$. Множества $\mathcal{P}_\omega$ непусты. Определим гомоморфизм $\eta : \mathbf{Z}_2^n \to \mathbf{Z}_2$ на образующих по формуле $\eta(r_i) = -1$. Определим множество V и инволюции $\Phi_\omega : V \to V$ по формулам

$$V = \left(U_+ \times \prod_{\gamma \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\gamma \times \eta^{-1}(1)\right) \cup \left(U_- \times \prod_{\gamma \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\gamma \times \eta^{-1}(-1)\right) \subset U \times \prod_{\gamma \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\gamma \times \mathbf{Z}_2^n;$$

$$\Phi_\omega\left(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, g\right) = \left(\Lambda_\omega(\sigma), \left(\widetilde{\Lambda}_\gamma\right)_{\gamma \in \mathcal{S}}, r_{|\omega|} g\right),$$

где $\widetilde{\Lambda}_\gamma = \Lambda_\omega \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_\omega$, если $\gamma \subset \omega$, и $\widetilde{\Lambda}_\gamma = \Lambda_\gamma$, если $\gamma \not\subset \omega$. Пусть Γ — однородный граф степени $2^{n+1} - 2$ на множестве вершин V, задаваемый инволюциями Φ_ω. Тогда $\widehat{M}^n = M^n(P^n, \Gamma)$ — искомое многообразие.

Пусть K — триангуляция многообразия $\widehat{M}^n$, являющаяся барицентрическим подразделением построенного разбиения на пермутаэдры. Определим отображение $f : \widehat{M}^n \to Z^n$ на вершинах триангуляции K по формуле

$$f([v, b_{\omega_1, \ldots, \omega_k}(\Pi^n)]) = b_{\omega_1}(\sigma), \qquad \varnothing \subsetneq \omega_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \omega_k \subsetneq [n+1],$$

где $b_{\omega_1, \ldots, \omega_k}(\Pi^n)$ — центр симметрии грани $F_{\omega_1} \cap F_{\omega_2} \cap \ldots \cap F_{\omega_k}$ пермутаэдра Π^n, и продолжим f по линейности на каждый симплекс триангуляции K. Отображение f корректно определено и $f_*[\widehat{M}^n] = q[Z^n]$, где $q = 2^{n-1} \prod_{\omega \in \mathcal{S}} |\mathcal{P}_\omega|$.

Содержание главы 4.

В этой главе изучается вопрос об интегрировании канонических многозначных динамик на множествах максимальных симплексов симплициально клеточных псевдомногообразий при помощи многозначных групп.

Для произвольного множества X через $(X)^m$ мы обозначим его m-ую симметрическую степень. Говорят, что на множестве X задана структура *m-значной группы*, если заданы m-значная операция умножения

$$\mu : X \times X \to (X)^m, \qquad \mu(x, y) = x * y,$$

единица $e \in X$ и операция взятия обратного элемента $\mathrm{inv} : X \to X$, удовлетворяющие естественным обобщениям аксиом группы. Для любых группы G и ее конечной подгруппы H из m элементов на множестве двойных смежных классов $H\backslash G/H$ существует структура *бикосетной* m-значной группы с умножением $(Hh_1H) * (Hh_2H) = [Hh_1hh_2H,\ h \in H]$.

Действием m-значной группы X на множестве V называется отображение $X \times V \to (V)^m$, $(x, v) \mapsto x \cdot v$, такое что для любых $x_1, x_2 \in X$, $v \in V$ наборы $(x_1 * x_2) \cdot v$ и $x_1 \cdot (x_2 \cdot v)$ из m^2 элементов совпадают и $e \cdot v = [v, \dots, v]$.

Отображение $T : V \to (V)^m$ называется *m-значной динамикой* на множестве V. Для каждого натурального числа k динамика T задает естественным образом *кратную* ей km-значную динамику на том же множестве V. Говорят, что m-значная динамика T интегрируема при помощи однопорождённой m-значной группы X с образующей a, если существует действие группы X на множестве V, такое что $T(v) = a \cdot v$ для любого $v \in V$.

Для каждого n-мерного симплициально клеточного псевдомногообразия K определена каноническая $(n + 1)$-значная динамика T на множестве V его n-мерных симплексов, которая каждому симплексу τ сопоставляет набор всех n-мерных симплексов, не совпадающих с τ и имеющих с τ общую $(n - 1)$-мерную грань. Симплекс, имеющий с τ несколько общих $(n - 1)$-мерных граней, входит в набор $T(\tau)$ с соответствующей кратностью. Обозначим через K' барицентрическое подразделение комплекса K и через V' множество n-мерных симплексов комплекса K'.

Теорема 5. *Для любого симплициально клеточного псевдомногообразия K динамика $n!T$ интегрируема при помощи некоторой однопорождённой бикосетной $(n + 1)!$-значной группы $X = H\backslash G/H$. При этом в качестве группы G может быть выбрана некоторая подгруппа группы перестановок $\Sigma_{V'}$ множества V', а подгруппа H изоморфна группе Σ_{n+1}.*

Многозначная группа X строится следующим образом. Рассмотрим однородный граф Γ' степени $n+1$ с рёбрами, раскрашенными правильным образом в $n+1$ цвет, соответствующий симплициально клеточному псевдомногообразию K' в смысле конструкции Пеццана–Ферри. Граф Γ' задаётся инволюциями $\Phi'_i : V' \to V'$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Пусть $G \subset \Sigma_{V'}$ — подгруппа, порождённая инволюциями $\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_{n+1}$, и $H \subset G$ — подгруппа, порождённая инволюциями $\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_n$. Тогда $H \cong \Sigma_{n+1}$ и $X = H\backslash G/H$ — искомая однопорождённая $(n+1)!$-значная группа с образующей $H\Phi_{n+1}H$. Действие группы G на множестве V' индуцирует каноническое действие $(n+1)!$-значной группы X на множестве $V \cong V'/H$, интегрирующее динамику $n!T$.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН, профессору Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановки задач и постоянное внимание. Автор благодарен профессорам, д.ф.-м.н. И. А. Дынникову, С. М. Натанзону, А. Б. Сосинскому и доцентам, к.ф.-м.н. Л. А. Алания, Т. Е. Панову, А. В. Пенскому, О. В. Шварцману за полезные обсуждения. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического МГУ за поддержку и внимание.

Список публикаций по теме диссертации.

[1] Бухштабер В. М., Гайфуллин А. А., *Представления m-значных групп на триангуляциях многообразий*, Успехи математических наук, т. 61 (2006), №3, с. 171–172.

[2] Гайфуллин А. А., *Явное построение многообразий, реализующих заданные классы гомологий*, Успехи математических наук, т. 62 (2007), №6, с. 167–168.

[3] Гайфуллин А. А., *Реализация циклов асферичными многообразиями*, Успехи математических наук, т. 63 (2008), №3, с. 173–174.