**О ТРАЕКТОРНЫХ АТТРАКТОРАХ НЕАВТОНОМНОЙ 2D СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА В ПРОСТРАНСТВАХ НИКОЛЬСКОГО**

**Чепыжов В.В. (ИППИ РАН)**

***chep@iitp.ru***

Доклад основан на совместных работах с М.И.Вишиком.

Рассматривается неавтономная 2D система Навье–Стокса

$$\partial_t u + \nu L u + B(u) = g(x,t),\ (\nabla, u) = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (1)$$

$x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^2,\ t \geq 0, u = u(x,t) = (u^1, u^2) := u(t),\ g = g(x,t) = (g^1, g^2) := g(t)$. Здесь $Lu = -P\Delta u$ обозначает оператор Стокса, $\nu > 0$, $B(u) = P\sum_{i=1}^2 u_i \partial_{x_i} u$; $P$ – ортогональный проектор на пространство $H$ бездивергентных векторных полей с конечной $L_2$-нормой.

Предполагается, что зависящая от времени внешняя сила $g_0(x,t) =: g_0(t)$ в (1) является *трансляционно компактной* (*тр.к.*) функцией в $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H) =: L_2^{loc}$ (или $g_0(t)$ *тр.к.* в $L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; H) =: L_{2,w}^{loc}$). Это означает, что семейство сдвигов $\{g_0(t+h) \mid h \geq 0\}$ образует предкомпактоное множество в $L_2^{loc}$ (соответственно, в $L_{2,w}^{loc}$). Через $\mathcal{H}_+(g_0)$ обозначается *оболочка* функции $g_0$ в пространстве $L_{2,w}^{loc}$, т.е., $\mathcal{H}_+(g_0) = [\{g(t+h) \mid h \geq 0\}]_{L_{2,w}^{loc}}$. Изучается семейство уравнений (1) с внешними силами $g \in \mathcal{H}_+(g_0)$.

Обозначим через $H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2}), \mathbf{r} = (2,2,1)$ пространство Никольского в цилиндре $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times ]t_1, t_2[$, которое состоит из функций $\varphi(x,t) = (\varphi^1 \varphi^2) =: \varphi(t),\ t \in ]t_1, t_2[$, с конечной нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})} = \int_{Q_{t_1,t_2}} \left( \sum_{|\alpha| \leq 2} |\partial_x^\alpha \varphi(x,t)|^2 + |\partial_t \varphi(x,t)|^2 \right) dxdt. \qquad (2)$$

Каждой внешней силе $g(t) \in \mathcal{H}_+(g_0)$ соответствует *пространство траекторий* $\mathcal{K}_g^+$, которое, по определению, есть объединение всех решений $u(t) = u_g(t), t \geq 0$, уравнения (1) из пространства $H^{\mathbf{r},loc}(Q_+) =: H^{\mathbf{r},loc},\ Q_+ = \Omega \times ]0, +\infty[$, (т.е., $u(t) \in H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})$ при любом $]t_1, t_2[ \subset \mathbb{R}_+$). Обозначим $\mathcal{K}^+ = \bigcup_{g \in \mathcal{H}_+(g_0)} \mathcal{K}_g^+$. *Трансляционная полугруппа* $\{T(h) \mid h \geq 0\}$ действует на пространстве $H^{\mathbf{r},loc}$ по формуле $T(h)\varphi(t) = \varphi(t+h),\ h \geq 0$. Легко видеть, что $T(h)u_g(t) = u_g(t+h) = u_{T(h)g}(t) \in \mathcal{K}_{T(h)g}^+$. Следовательно,

$$T(h)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+ \ \forall h \geq 0.$$

Доказано, что множество $\mathcal{K}^+$ замкнуто в $H^{\mathbf{r},loc}$. Легко устанавливается, что полугруппа $\{T(h)\}$ непрерывна в топологии $H^{\mathbf{r},loc}$. Обозначим через $H^{\mathbf{r},a}(Q_+) =: H^{\mathbf{r},a}$ подпространство в $H^{\mathbf{r},loc}$, состоящее из функций $\varphi(t)$, $t \geq 0$, которые имеют конечную норму

$$\|\varphi\|^2_{H^{\mathbf{r},\mathbf{a}}} := \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial_x^\alpha \varphi\|_a^2 + \|\partial_t \varphi\|_a^2 < +\infty, \text{где } \|g_0\|_a^2 = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |g_0(s)|^2 ds.$$

По определению, *траекторным аттрактором* полугруппы трансляций $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}^+$ называется множество $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{K}^+$, такое, что $\mathfrak{A}$ компактно в $H^{\mathbf{r},loc}$, ограничено в $H^{\mathbf{r},a}$, строго инвариантно относительно $\{T(h)\} : T(h)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\ \forall h \geq 0$, и которое обладает следующим свойством притяжения: для любого множества $B \subset \mathcal{K}^+$, ограниченного в $H^{\mathbf{r},a}$, и для любого $[t_1, t_2] \subset \mathbf{R}_+$ множество $T(h)B$ стремится к $\mathfrak{A}$ в сильной топологии $H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})$, (см. (2)) т.е.,

$$\mathbf{dist}_{H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})}(T(h)B, \mathfrak{A}) \to 0\ (h \to +\infty).$$

В работе доказана основная теорема о существовании траекторного аттрактор $\mathfrak{A}$ системы (1), при условии, что функция $g_0(t)$ является тр.к. в (сильном) пространстве $L_2^{loc}$. Если функция $g_0(t)$ тр.к. в (слабом) пространстве $L_{2,w}^{loc}$, то построен "слабый" траекторного аттрактор $\mathfrak{A}_w$ в слабой топологии $H_w^{\mathbf{r},loc}(Q_+)$. В этом случае $T(h)B \to \mathfrak{A}_w$ при $h \to +\infty$ в слабой топологии пространств $H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})$ при каждом $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00784.