ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 48 **2012** **Вып. 2**

УДК 621.391.1 : 519.146

© 2012 г. **К.Ю. Горбунов, А.В. Селиверстов, В.А. Любецкий**

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, КВАДРИК И ВЕРШИН МНОГОМЕРНОГО КУБА

Найдена такая пара параллельных гиперплоскостей в 30-мерном пространстве, однозначно определяемых лежащими на каждой из них вершинами единичного куба, что строго между гиперплоскостями не лежит ни одной вершины этого куба, но лежат целые точки. Аналогичный двусторонний пример построен в размерности 37. Рассмотрены допустимые расположения пустых квадрик относительно вершин куба, что является частным случаем задачи дискретной оптимизации квадратичного многочлена на множестве вершин куба. Показано существование большого числа пар параллельных гиперплоскостей, таких что на каждой паре лежит большое число наперед данных точек.

§ 1. Постановка задачи

Наши результаты верны над произвольным линейно упорядоченным полем, но для краткости изложения будем говорить о поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел. *Кубом* называется многогранник, у которого вершины имеют координаты 0 или 1 в n-мерном пространстве. *Весом вершины* куба назовем число ее единичных координат. *Квадрикой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество нулей вещественного квадратичного многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$, может быть, приводимого. Квадрика $f = 0$ называется *пустой*, если в каждой вершине куба многочлен f принимает неотрицательное значение или в каждой – неположительное значение. Ниже предполагается первый случай. Рассмотрена структура множества точек минимума квадратичного многочлена f на множестве всех вершин куба, т.е. расположение пустой квадрики относительно куба. Частным случаем квадрики является пара параллельных гиперплоскостей. Подробнее рассмотрена осуществимость специальных расположений параллельных гиперплоскостей относительно вершин куба или относительно произвольного набора точек в общем положении в n-мерном пространстве.

Минимизация на множестве вершин куба общего квадратичного многочлена – алгоритмически трудная задача. Эффективные алгоритмы, например, метод псевдобулева программирования [1], применимы лишь в частных случаях. В [2, 3] дан обзор эвристических алгоритмов. Частный случай оптимизации – задача с распадающимися переменными. В работе [4] (там же см. библиографию) рассмотрена многокритериальная минимаксная задача, в которой оптимизация квадратичных форм ведется по множествам вершин двух единичных кубов различной размерности. Из результатов [5] следует, что вершины куба, лежащие на пустой квадрике, лежат на пустом цилиндре (квадрике неполного ранга), на котором не лежат остальные вершины. Вырожденный случай состоит в описании вершин куба, лежащих на паре совпадающих гиперплоскостей.

Во многих работах (см., например, [6–9]) даны оценки числа вершин, лежащих на квадрике. На гиперплоскости лежит не более половины всех вершин куба. Однако если соответствующая линейная функция нетривиально зависит от каждой из n переменных, то доля вершин куба, лежащих на этой гиперплоскости, стремится к нулю с ростом n [6]. Аналогичный результат получен для квадратичного многочлена, имеющего достаточно много мономов: доля вершин куба, в которых такой многочлен принимает фиксированное значение, стремится к нулю с ростом размерности куба [7]. Известна оценка количества вершин куба, лежащих в полупространстве [8].

Важная задача дискретной оптимизации такова: является ли данная вершина куба ближайшей к данной гиперплоскости. Иными словами, даны две параллельные гиперплоскости – исходная и параллельная ей, проходящая через рассматриваемую вершину куба, и нужно определить, лежит ли строго между ними хотя бы одна вершина куба. Поскольку пару гиперплоскостей можно представить как множество нулей приводимого квадратичного многочлена, то упомянутая задача – частный случай минимизации квадратичного многочлена. Для поиска минимума важно узнать, как могут располагаться точки минимума среди вершин куба [10]. В [11] рассматриваются покрытия гиперплоскостями вершин n-мерного куба. Там доказано: для любых m гиперплоскостей, $m \leqslant n$, если они не покрывают все вершины куба, то не покрытыми остаются еще хотя бы 2^{n-m} вершин куба.

Поиск (или доказательство отсутствия) вершины куба, лежащей строго между двумя гиперплоскостями, определяемыми уравнениями с целыми коэффициентами, можно выполнить алгоритмом динамического программирования, впервые предложенным в [12]. Обзор таких алгоритмов можно найти в [13]. В этой задаче сложность алгоритма динамического программирования полиномиально зависит от размерности пространства, но быстро растет с увеличением длины записи коэффициентов уравнений. Такие алгоритмы называются псевдополиномиальными. В то же время, не имеющие общего нетривиального делителя целые коэффициенты уравнения, определяющего гиперплоскость, могут быть большими, что снижает эффективность алгоритма динамического программирования.

Гораздо легче определить, лежит ли строго между двумя параллельными гиперплоскостями, определяемыми уравнениями с целыми коэффициентами, целая точка. Здесь время работы определяется сложностью алгоритма Евклида для вычисления наибольшего общего делителя и, как хорошо известно, это время ограничено полиномом от длины записи совокупности коэффициентов уравнений. В маленьких размерностях, если одна из параллельных гиперплоскостей однозначно определена лежащими на ней вершинами куба, отсутствие строго между гиперплоскостями вершин куба равносильно отсутствию строго между ними целых точек. Это легко проверить в размерностях два или три перебором небольшого числа вариантов. В каких других размерностях это справедливо? Теорема 1 показывает, что в размерности 30 это не верно (по-видимому, эту теорему можно усилить). Не ясно, можно ли свести проверку отсутствия вершин куба между параллельными гиперплоскостями к отсутствию между ними целых точек в промежуточных размерностях. Таким образом, теорема 1 иллюстрирует вычислительную трудность рассматриваемой задачи. Пример из этой теоремы имеет интересную арифметическую структуру, которая может быть полезна при поиске аналогичных примеров.

Задача восстановления матрицы низкого ранга по набору ее элементов или по соотношениям между ними часто возникает при исследовании неполных данных и в факторном анализе. Задача имеет прикладное значение для распознавания образов, ЯМР-исследования структуры молекул, создания фильтров данных в компьютерных сетях. Эффективность алгоритмов восстановления матрицы по части ее элементов обычно основана на предположении об однозначности восстановления. Вопросы поиска симметричной матрицы по соотношениям между ее элементами рассмотрены в [14,15]. Пара параллельных гиперплоскостей соответствует симметричной матрице ранга один – матрице квадратичной формы.

Таблица 1

	t	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	x_1	y_1	z_1
$\boldsymbol{v}$	1	1	0	0	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}'$	1	0	1	0	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}''$	1	0	0	1	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}'''$	1	0	0	0	1	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}''''$	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$\boldsymbol{w}$	0	1	1	1	1	1	1	1	1

§ 2. Пример взаимного расположения параллельных гиперплоскостей, вершин куба и целых точек в n-мерном пространстве

Теорема 1. (а) *В пространстве $\mathbb{R}^{30}$ существует такая гиперплоскость H, которая однозначно определена лежащими на ней вершинами куба, и такая параллельная ей гиперплоскость H', на которой лежит хотя бы одна вершина куба, что в открытой области между H и H' не лежит ни одной вершины куба, но лежат целые точки.*

(б) *В пространстве $\mathbb{R}^{37}$ существует такая гиперплоскость H, однозначно определенная лежащими на ней вершинами куба, что расстояние от H до ближайшей не лежащей на H вершины куба строго больше расстояния до ближайшей не лежащей на H целой точки.*

Доказательство. (а) Рассмотрим линейную форму от 30 переменных

$$f = 1260t + 315(u_1 + \ldots + u_5) + 252(x_1 + \ldots + x_6) + 180(y_1 + \ldots + y_8) + \\ + 140(z_1 + \ldots + z_{10}).$$

Ее коэффициенты имеют разложения на (попарно взаимно простые) множители 4, 5, 7, 9: $1260 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$, $315 = 5 \cdot 7 \cdot 9$, $252 = 4 \cdot 7 \cdot 9$, $180 = 4 \cdot 5 \cdot 9$, $140 = 4 \cdot 5 \cdot 7$. Таким образом, одна переменная имеет коэффициент $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$, а число переменных с коэффициентом вида $\dfrac{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{p}$ равно $(p + 1)$.

Пусть гиперплоскость H задана уравнением $f = 2147$, где

$$2147 = 1260 + 315 + 252 + 180 + 140.$$

Покажем, что вершины куба, лежащие на H, порождают все пространство $\mathbb{R}^{30}$. Рассмотрим вершины $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}''$, $\boldsymbol{v}'''$, $\boldsymbol{v}''''$ и $\boldsymbol{w}$, лежащие на гиперплоскости $f = 2147$. Их координаты зададим с помощью табл. 1, в которой строки соответствуют вершинам, а столбцы – координатам (не указанные координаты во всех перечисленных вершинах равны нулю).

Линейная комбинация $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'' + \boldsymbol{v}''' + \boldsymbol{v}'''' - \boldsymbol{w}$ имеет только четыре ненулевые координаты: $a_t = 5$, $a_{x_1} = a_{y_1} = a_{z_1} = 4$. Аналогично, существуют и другие линейные комбинации вершин ровно с четырьмя ненулевыми координатами: $\boldsymbol{b}$ с $b_t = 6$, $b_{u_1} = b_{y_1} = b_{z_1} = 5$; $\boldsymbol{c}$ с $c_t = 8$, $c_{u_1} = c_{x_1} = c_{z_1} = 7$; $\boldsymbol{d}$ с $d_t = 10$, $d_{u_1} = d_{x_1} = d_{y_1} = 9$. Вершины $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ линейно независимы. Действительно, легко проверить, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 10 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг. Следовательно, из $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ можно составить такие линейные комбинации, у которых будет отлична от нуля только координата t, u_1, x_1, y_1 или z_1 соответственно.

Остальные случаи отличаются перестановками индексов координат, не меняющих форму f. Следовательно, для каждой из координат существует линейная комбинация вершин куба, лежащих на H, у которой только одна эта координата отлична от нуля. Следовательно, вершины куба, удовлетворяющие уравнению $f = 2147$, лежат на единственной гиперплоскости.

Поскольку наибольший общий делитель всех коэффициентов линейной формы f равен единице, эта форма принимает в целых точках все возможные целые значения. Докажем от противного, что ни в одной из вершин куба эта форма не равна 2146. Пусть вершина $\boldsymbol{v}$ такова, что $f(\boldsymbol{v}) = 2146$. Поскольку $2146 \equiv 2 \pmod 4$, $315 \equiv 3 \pmod 4$, а остальные коэффициенты делятся на 4, то равенство остатков по модулю 4 выполняется лишь при $v_{u_1} + v_{u_2} + v_{u_3} + v_{u_4} + v_{u_5} = 2$. Аналогично, $2146 \equiv 1 \pmod 5$, $252 \equiv 2 \pmod 5$, откуда $v_{x_1} + \ldots + v_{x_6} = 3$. Аналогично, $2146 \equiv 4 \pmod 7$, $180 \equiv 5 \pmod 7$, откуда $v_{y_1} + \ldots + v_{y_8} = 5$. Аналогично, $2146 \equiv 4 \pmod 9$, $140 \equiv 5 \pmod 9$, откуда $v_{z_1} + \ldots + v_{z_{10}} = 8$. Но тогда сумма последних четырех слагаемых формы f равна $315 \cdot 2 + 252 \cdot 3 + 180 \cdot 5 + 140 \cdot 8 = 3406 > 2146$. Противоречие.

Поскольку $f(\mathbf{0}) = 0 < 2147$, существуют гиперплоскости, параллельные H и проходящие через вершины куба в соответствующем полупространстве. Обозначим через H' ближайшую к H среди таких гиперплоскостей. Между H и H' нет вершин куба, но есть целые точки.

Замечание 1. С другой стороны, форма достигает значения 2148 в каждой из вершин $\boldsymbol{v}$, удовлетворяющей равенствам $v_t = v_{u_1} = v_{u_2} = v_{u_3} = v_{u_4} = v_{u_5} = 0$, $v_{x_1} + \ldots + v_{x_6} = 4$, $v_{y_1} + \ldots + v_{y_8} = 4$, $v_{z_1} + \ldots + v_{z_{10}} = 3$. Действительно, подставляя эти равенства в форму f, получим

$$f(\boldsymbol{v}) = 252 \cdot 4 + 180 \cdot 4 + 140 \cdot 3 = 2148.$$

Следовательно, *не верно*, что расстояние от H до ближайшей не лежащей на H вершины куба строго больше расстояния до ближайшей не лежащей на H целой точки.

Замечание 2. Утверждение (а) теоремы 1 станет тривиальным, если не требовать, чтобы на каждой из гиперплоскостей H и H' лежали вершины куба.

Замечание 3. Доказанное утверждение не выполняется в пространствах малой размерности. Например, для пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ это нетрудно показать перебором всех возможных вариантов. Было бы интересно определить минимальную размерность, для которой утверждение верно.

(б) Рассмотрим линейную форму от 37 переменных

$$f = 3465t + 693(u_1 + \ldots + u_6) + 495(x_1 + \ldots + x_8) + 385(y_1 + \ldots + y_{10}) + \\ + 315(z_1 + \ldots + z_{12}).$$

Ее коэффициенты имеют разложения на (попарно взаимно простые) множители 5, 7, 9, 11: $3465 = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$, $693 = 7 \cdot 9 \cdot 11$, $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$, $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, $315 = 5 \cdot 7 \cdot 9$. Таким образом, одна переменная имеет коэффициент $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$, а число переменных с коэффициентом вида $\dfrac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{p}$ равно $(p + 1)$.

Пусть гиперплоскость H задана уравнением $f = 5353$, где

$$5353 = 3465 + 693 + 495 + 385 + 315.$$

Таблица 2

	t	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	x_1	y_1	z_1
$\boldsymbol{v}$	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}'$	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}''$	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}'''$	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}''''$	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
$\boldsymbol{v}'''''$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\boldsymbol{w}$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Покажем, что вершины куба, лежащие на H, порождают все пространство $\mathbb{R}^{37}$. Рассмотрим вершины $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}''$, $\boldsymbol{v}'''$, $\boldsymbol{v}''''$, $\boldsymbol{v}'''''$ и $\boldsymbol{w}$, лежащие на гиперплоскости $f = 5353$. Их координаты зададим с помощью табл. 2, в которой строки соответствуют вершинам, а столбцы – координатам (не указанные координаты во всех перечисленных вершинах равны нулю).

Линейная комбинация $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'' + \boldsymbol{v}''' + \boldsymbol{v}'''' + \boldsymbol{v}''''' - \boldsymbol{w}$ имеет только четыре ненулевые координаты: $a_t = 6$, $a_{x_1} = a_{y_1} = a_{z_1} = 5$. Аналогично, существуют и другие линейные комбинации вершин с ровно четырьмя ненулевыми координатами: $\boldsymbol{b}$ с $b_t = 8$, $b_{u_1} = b_{y_1} = b_{z_1} = 7$; $\boldsymbol{c}$ с $c_t = 10$, $c_{u_1} = c_{x_1} = c_{z_1} = 9$; $\boldsymbol{d}$ с $d_t = 12$, $d_{u_1} = d_{x_1} = d_{y_1} = 11$. Вершины $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ линейно независимы. Действительно, легко проверить, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 9 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг. Рассуждая так же, как в доказательстве пункта (а), заключаем, что вершины куба, удовлетворяющие уравнению $f = 5353$, лежат на единственной гиперплоскости.

Поскольку наибольший общий делитель всех коэффициентов линейной формы f равен единице, эта форма принимает в целых точках все возможные целые значения. Докажем от противного, что ни в одной из вершин куба эта форма не равна 5352. Пусть вершина $\boldsymbol{v}$ такова, что $f(\boldsymbol{v}) = 5352$. Поскольку $5352 \equiv 2 \pmod 5$, $693 \equiv 3 \pmod 5$, а остальные коэффициенты делятся на 5, то равенство остатков по модулю 5 выполняется лишь при $v_{u_1} + \ldots + v_{u_6} = 4$. Аналогично, $5352 \equiv 4 \pmod 7$, $495 \equiv 5 \pmod 7$, откуда $v_{x_1} + \ldots + v_{x_8} = 5$. Аналогично, $5352 \equiv 6 \pmod 9$, $385 \equiv 7 \pmod 9$, откуда $v_{y_1} + \ldots + v_{y_{10}} = 6$. Аналогично, $5352 \equiv 6 \pmod{11}$, $315 \equiv 7 \pmod{11}$, откуда $v_{z_1} + \ldots + v_{z_{12}} = 4$. Но тогда сумма последних четырех слагаемых формы f равна $693 \cdot 4 + 495 \cdot 5 + 385 \cdot 6 + 315 \cdot 4 > 5352$. Противоречие.

Теперь так же, как и выше, докажем, что ни в одной из вершин куба наша форма не равна 5354. Пусть вершина $\boldsymbol{v}$ такова, что $f(\boldsymbol{v}) = 5354$.

Поскольку $5354 \equiv 4 \pmod 5$, $693 \equiv 3 \pmod 5$, то $v_{u_1} + \ldots + v_{u_6} = 3$. Аналогично, $5354 \equiv 6 \pmod 7$, $495 \equiv 5 \pmod 7$, откуда $v_{x_1} + \ldots + v_{x_8} = 4$. Аналогично, $5354 \equiv 8 \pmod 9$, $385 \equiv 7 \pmod 9$, откуда $v_{y_1} + \ldots + v_{y_{10}} = 5$. Аналогично, $5354 \equiv 8 \pmod{11}$, $315 \equiv 7 \pmod{11}$, откуда $v_{z_1} + \ldots + v_{z_{12}} = 9$. Но тогда сумма последних четырех слагаемых формы f равна $693 \cdot 3 + 495 \cdot 4 + 385 \cdot 5 + 315 \cdot 9 > 5354$. Противоречие.

Таким образом, обе “соседние” гиперплоскости не содержат вершин куба, но содержат целые точки. ▲

Замечание 4. Интересно отметить, что в доказательствах обоих утверждений теоремы 1 определители рассматриваемых матриц равны значениям формы f на гиперплоскости H, т.е. в первом случае 2147, а во втором 5353.

Вопрос. Можно ли заменить условие однозначной определимости гиперплоскости H условием, что на ней лежит достаточно много вершин куба с линейно независимыми тензорными квадратами (точнее, тензорными квадратами векторов, составленных из координат вершин)?

§ 3. Допустимые расположения вершин куба на пустой квадрике

Теорема 2. *Даны пустая квадрика $f = 0$ в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и целое число w, $2 \leqslant w \leqslant n-1$. Если все вершины куба веса 0 и веса w лежат на этой квадрике, то и все остальные вершины куба лежат на квадрике.*

Доказательство. Начало координат лежит на квадрике. Следовательно, многочлен f имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j + \sum_i f_i x_i,$$

где $f_{ij} = f_{ji}$ составляют симметричную матрицу квадратичной формы. Обозначим суммы $D = \sum\limits_i (f_{ii} + f_i)$ и $B = \sum\limits_{i \neq j} f_{ij}$. Суммируя значения многочлена на вершинах веса w, получаем равенство

$$\frac{(n-1)!}{(n-w)!\,(w-1)!} D + \frac{(n-2)!}{(n-w)!\,(w-2)!} B = 0,$$

т.е.

$$\gamma D + B = 0, \tag{1}$$

где $\gamma = \dfrac{n-1}{w-1} > 1$. Поскольку квадрика пустая, значения многочлена f неотрицательны во всех вершинах куба. В частности,

$$f(1, \dots, 1) = D + B \geqslant 0. \tag{2}$$

Из неотрицательности значений f в вершинах веса 2 следует, что для каждой пары индексов $i \neq j$ сумма

$$(f_{ii} + f_i) + (f_{jj} + f_j) + (f_{ij} + f_{ji}) \geqslant 0. \tag{3}$$

Из неотрицательности значений f в вершинах веса 1 следует, что для каждого индекса i сумма $f_{ii} + f_i \geqslant 0$. Следовательно, $D \geqslant 0$. Вычитая (1) из (2), получаем $D(1-\gamma) \geqslant 0$, откуда $D \leqslant 0$. Следовательно, $D = 0$ и для каждого индекса i сумма $f_{ii} + f_i = 0$. Также из (1) получаем $B = 0$. В силу (3) для каждой пары индексов $i \neq j$ коэффициент полинома $f_{ij} \geqslant 0$. Теперь из $B = 0$ получаем $f_{ij} = 0$. Многочлен $f = \sum\limits_i (f_{ii} x_i^2 + f_i x_i)$, в котором для каждого индекса $f_{ii} + f_i = 0$, равен нулю в каждой вершине куба. ▲

Пример. На пустой квадрике $\sum\limits_{i>j} x_i x_j = 0$ лежат все вершины веса 0 или 1 и только они. На пустой квадрике

$$n \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = 0$$

лежат все вершины веса 0 или n и только они. Поэтому в теореме 2 границы для веса w улучшить нельзя.

Замечание 5. Теорема 2 остается верной для любого аффинного образа куба в любой размерности при соответствующем переопределении веса. Этот факт позволяет найти на квадрике 2^k вершин исходного куба, если уже известно $k+1$ таких вершин, определенным образом расположенных на некотором вложенном в куб k-мерном параллелепипеде.

В [9] доказано следующее предложение, частный случай которого приведен в [11].

Предложение 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – многочлен от n переменных степени d над произвольным полем $\Bbbk$. Если хотя бы одна вершина куба не лежит на многообразии $f = 0$, то доля вершин, лежащих на нем, не превосходит $1 - 2^{-d}$.*

В частности, если семь из восьми вершин трехмерного куба лежат на квадрике, то и восьмая вершина лежит на квадрике. И это единственное ограничение на возможное расположение вершин трехмерного куба, лежащих на произвольных квадриках. Если ограничиться только пустыми квадриками, то можно получить ограничение, в котором участвуют только четыре вершины. Например, если четыре вершины трехмерного куба с координатами $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ и $(1,0,1)$ лежат на пустой квадрике, то и все остальные вершины лежат на ней.

§ 4. Число пар параллельных гиперплоскостей, содержащих данный набор точек

Пусть $\Bbbk$ – произвольное поле. Рассмотрим вопрос о числе пар параллельных гиперплоскостей в n-мерном пространстве $\Bbbk^n$, таких что каждая пара содержит наперед фиксированный набор точек этого пространства.

Предложение 2. *Для любого поля $\Bbbk$ и множества S из $n+1$ точек в общем положении в $\Bbbk^n$ существует ровно $2^n - 1$ пар параллельных гиперплоскостей, таких что каждая пара содержит все точки из S.*

Доказательство. Покажем, что для любого разбиения множества S на два непустых множества I и J существует единственная пара параллельных гиперплоскостей, на одной из которых лежат вершины из I, а на другой – из J. Без ограничения общности можно считать, что начало координат принадлежит множеству J. Тогда коэффициенты линейной формы, задающей обе гиперплоскости, должны удовлетворять неоднородной системе линейных уравнений, где свободные члены равны нулю или единице в зависимости от разбиения на I и J. Система невырождена из-за независимости точек из S. Следовательно, она имеет единственное решение при фиксированном J. Число собственных подмножеств J равно $2^{n+1} - 2$. Поскольку замена I и J местами не изменяет пару гиперплоскостей, то общее число таких пар равно $2^n - 1$. ▲

Предложение 3. *При $n \geqslant 2$ в пространстве $\Bbbk^n$ существует набор из $n+2$ точек, лежащих в $3 \cdot 2^{n-2} - 1$ парах параллельных гиперплоскостей.*

Доказательство. Рассмотрим множество S из $n+1$ точек в общем положении. На каких-либо трех точках из S построим (плоский) параллелограмм. Искомое множество точек – это S и четвертая вершина параллелограмма. Разобьем это множество на подмножества I и J, как в доказательстве предложения 2. Линейная зависимость вершин параллелограмма накладывает дополнительное ограничение: J содержит четное число вершин параллелограмма. Если J содержит ровно две вершины параллелограмма, то это вершины одной стороны параллелограмма. Подходит $6/8 = 3/4$ всех выборов I и J, кроме случаев $I = \varnothing$ или $J = \varnothing$. Таким образом, всего возможных разбиений $\dfrac{3}{4}(2^{n-2}/2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. Каждое такое разбиение определяет единственную пару параллельных гиперплоскостей. ▲

Предложения 2 и 3 иллюстрируют нетривиальность задачи оптимизации: даже если заранее известно, что рассматриваемые вершины куба лежат на паре параллельных гиперплоскостей (или на квадрике низкого ранга), то может быть много вариантов выбора таких гиперплоскостей, а в зависимости от конкретного выбора меняется сложность соответствующей задачи целочисленного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Береснев В.Л.* Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2005.
2. *Billionnet A., Elloumi S.* Using a Mixed Integer Quadratic Programming Solver for the Unconstrained Quadratic 0–1 Problem // Math. Program. Ser. A. 2007. V. 109. № 1. P. 55–68.
3. *Ahlatçioğlu A., Bussieck M., Esen M., Guignard M., Jagla J.-H., Meeraus A.* Combining QCR and CHR for Convex Quadratic Pure 0–1 Programming Problems with Linear Constraints // Ann. Oper. Res. (online publ.). September 30, 2011. DOI:10.1007/s10479-011-0969-1.
4. *Емеличев В.А., Коротков В.В.* О радиусе устойчивости эффективного решения векторной квадратичной булевой задачи на узкие места // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18. № 6. С. 3–16.
5. *Селиверстов А.В., Любецкий В.А.* О симметричных матрицах с неопределенной главной диагональю // Пробл. передачи информ. 2009. Т. 45. № 3. С. 73–78.
6. *Erdős P.* On a Lemma of Littlewood and Offord // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. V. 51. № 12. P. 898–902.
7. *Costello K.P., Vu V.H.* The Rank of Random Graphs // Random Structures and Algorithms. 2008. V. 33. № 3. P. 269–285.
8. *Шнурников И.Н.* Мощность отделяемого множества вершин многомерного куба // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2010. № 2. С. 11–17.
9. *Селиверстов А.В., Любецкий В.А.* О формах, равных нулю в каждой вершине куба // Информационные процессы. 2011. Т. 11. № 3. С. 330–335.
10. *Береснев В.Л., Гончаров Е.Н., Мельников А.А.* Локальный поиск по обобщенной окрестности для задачи оптимизации псевдобулевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18. № 4. С. 3–16.
11. *Alon N., Füredi Z.*, Covering the Cube by Affine Hyperplanes // European J. Combin. 1993. V. 14. № 2. P. 79–83.
12. *Ibarra O.H., Kim C.E.* Fast Approximation Algorithms for the Knapsack and Sum of Subset Problems // J. Assoc. Comput. Mach. 1975. V. 22. № 4. P. 463–468.
13. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.
14. *Xiao Q.-F., Hu X.-Y., Zhang L.* The Symmetric Minimal Rank Solution of the Matrix Equation $AX = B$ and the Optimal Approximation // Electron. J. Linear Algebra. 2009. V. 18. P. 264–273.
15. *Mitra S.K.* Fixed Rank Solutions of Linear Matrix Equations // Sankhyā. Ser. A. 1972. V. 34. № 4. P. 387–392.

Горбунов Константин Юрьевич
Селиверстов Александр Владиславович
Любецкий Василий Александрович
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
gorbunov@iitp.ru
slvstv@iitp.ru
lyubetsk@iitp.ru

Поступила в редакцию
15.11.2011
После переработки
23.01.2012