МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

Регулярные аттракторы автономных и неавтономных динамических систем

С.В.Зелик, В.В.Чепыжов

Посвящается памяти нашего учителя М.И.Вишика

Изучаются регулярные глобальные аттракторы динамических систем, которые соответствуют диссипативным эволюционным уравнениям и их неавтономным возмущениям. Доказано, что при малом неавтономном возмущении автономной динамической системы (полугруппы), имеющей регулярный аттрактор, получающаяся неавтономная динамическая система (процесс) также имеет регулярный неавтономный аттрактор. При этом симметричное хаусдорфово отклонение возмущенных аттракторов от невозмущенных оценивается сверху величиной $O(\varepsilon^{\varkappa})$, где ε – параметр возмущения, $0 < \varkappa < 1$. Полученные результаты применяются к волновым уравнениям со слабой диссипацией в ограниченной области $\mathbb{R}^3$, которые возмущаются внешними силами, зависящими от времени.

§1. Регулярный аттрактор автономной динамической системы. В банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$ рассматривается динамическая полугруппа $\{S_t\} := \{S_t \mid t \geq 0\}$, $S_t : E \mapsto E$; $S_0 = Id$, $S_{t_1+t_2} = S_{t_1} \circ S_{t_2}$, $t_1, t_2 \geq 0$.

Напомним (см. [1, 2]), что *компактное* множество $\mathcal{A} \Subset E$ называется *глобальным аттрактором* полугруппы $\{S_t\}$, если 1) $\mathcal{A}$ *строго инвариантно*, т.е., $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$ при всех $t \geq 0$, и 2) множество $\mathcal{A}$ является *притягивающим* для полугруппы $\{S_t\}$, т.е., для любого ограниченного подмножества $B \subset E$

$$\operatorname{dist}_E(S_tB, \mathcal{A}) \to 0 \ (t \to +\infty), \tag{1}$$

где $\operatorname{dist}_E(B_1, B_2) = \inf\{\delta \mid B_1 \subseteq \mathcal{O}_\delta(B_2)\}$ – (несимметричное) отклонение по Хаусдорфу множества B_1 от множества B_2. Соотношение (1) эквивалентно тому, что при любом $\delta > 0$ найдется $T = T(\delta, B)$, такое, что $S_t(B) \subset \mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$ при всех $t \geq T$.

Обозначим пространство $L^\infty(\mathbb{F}) := L^\infty(\mathbb{F}, E)$, где $\mathbb{F}$ – это $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ или $\mathbb{R}$. Функция $y(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_-)$ называется *отрицательной полутраекторией* полугруппы $\{S_t\}$, если $S_t y(s) = y(t+s)$ при всех $t \geq 0, s \in \mathbb{R}_-, t+s \leq 0$. Аналогично определяется *положительная полутраектория* $y(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, а также *полная траектория* $y(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Множество всех ограниченных полных траекторий полугруппы называется ее *ядром* и обозначается $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subset L^\infty(\mathbb{R})$.

Хорошо известно, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ и ядро $\mathcal{K}$ динамической полугруппы связаны соотношением: $\mathcal{A} = \mathcal{K}|_{t=0}$ (см. [1, 2]).

Зафиксируем отображение $S := S_1,\ S : E \mapsto E$.

Рассмотрим произвольную стационарную точку $z \in E$ отображения $S,\ S(z) = z$. Пусть S в z имеет дифференциал Фреше, который обозначается $S'(z) \in \mathcal{L}(E, E)$. Напомним, что стационарная точка z называется *гиперболической*, если спектр $\sigma(L)$ линейного оператора $L := S'(z)$ не пересекает единичную окружность в комплексной плоскости: $\sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\} = \varnothing$. Как известно (см. [1]), в этом случае пространство E раскладывается в прямую сумму $E = E_+ + E_-$ двух инвариантных спектральных подпространств: *неустойчивого* E_+ и *устойчивого* E_-, причем $\sigma(L|_{E_+}) = \sigma(L) \cap \{|\lambda| \ > 1\},\ \sigma(L|_{E_-}) = \sigma(L) \cap \{|\lambda| \ < 1\}$. Кроме того, оператор L обратим на E_+, и выполнены следующие оценки:

$$\begin{cases} \|L^n h\|_E \leq C \|h\|_E \, e^{-\beta n},\ \forall h \in E_-,\ n \in \mathbb{N}, \\ \|L^{-n} h\|_E \leq C \|h\|_E \, e^{-\beta n},\ \forall h \in E_+,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

с некоторыми положительными константами C и β, которые не зависят от n и h.

Выделим три блока предположений относительно полугруппы $\{S_t\}$.

I. Аналитические свойства. a) Операторы $S_t \in C^1(E, E)$ при $t \geq 0$. При любом $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$\|S_t y\|_E + \|S_t'(y)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq Q_0(\|y\|_E),$$

где монотонная функция Q_0 не зависит от y и t. Кроме того, при $t = 1$ производная по Фреше $S_1'(y)$ равномерно непрерывна по y на ограниченных подмножествах E.

b) Оператор S_t инъективен при любом $t \in [0, 1]$ и его производная по Фреше $S_t'(y)$ имеет нулевое ядро: $\ker\{S_t'(y)\} = \{0\}$ при каждом $y \in E$ и при всех $t \in [0, 1]$.

II. Условие гиперболичности. Отображение $S = S_1$ имеет конечное множество стационарных точек $\mathcal{R}_0 = \{z_1, \ldots, z_N\} \subset E,\ S(z_i) = z_i$, и все они являются гиперболическими.

III. Регулярность динамики на аттракторе. a) Полугруппа $\{S_t\}$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} \Subset E$.

b) При любом $y_0 \in \mathcal{A}$ положительная полутраектория $y(t) := S_t y_0$ (принадлежащая аттрактору) сходится при $t \to +\infty$ к некоторой стационарной точке $z = z_y \in \mathcal{R}_0$:

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t) - z_y\|_E = 0.$$

c) Полугруппа $\{S_t\}$ не имеет гомоклинических структур на аттракторе $\mathcal{A}$, т.е., если $y_1(\cdot), \ldots, y_k(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R})$ – некоторое конечное множество ограниченных полных траекторий из ядра $\mathcal{K}$ полугруппы $\{S_t\}$, таких, что

$$\lim_{t \to -\infty} \|y_i(t) - z_i\|_E = 0,\ \lim_{t \to +\infty} \|y_i(t) - z_{i+1}\|_E = 0,\ i = 1, \ldots, k,$$

где $\{z_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \mathcal{R}_0$, тогда все стационарные точки z_i *различны.*

Замечание 1 *Все элементы $\mathcal{R}_0$ являются стационарными точками полугруппы $\{S_t\}$, т.е., $S_t z = z$ при любом $t \geq 0$ для каждой $z \in \mathcal{R}_0$. Это следует из предположении о конечности множества $\mathcal{R}_0$ стационарных точек отображения S.*

Замечание 2 *Хорошо известно, что условия **III b)** и **III c)** выполнены, если полугруппа $\{S_t\}$ имеет глобальную функцию Ляпунова (см., например, [1]).*

Определение 1 *Пусть $z \in \mathcal{R}_0$.* Неустойчивым множеством $\mathcal{M}^+_{0,z}$ *точки z полугруппы $\{S_t\}$ называется множество*

$$\mathcal{M}^+_{0,z} := \{y_0 \in E \mid \quad \exists \text{ отрицательная полутраектория } y \in L^\infty(\mathbb{R}_-), \\ y(0) = y_0, \ \lim_{t\to-\infty} \|y(t) - z\|_E = 0\}.$$

Легко видеть, что множество $\mathcal{M}^+_{0,z}$ строго инвариантно относительно полугруппы $\{S_t\}$, $S_t\mathcal{M}^+_{0,z} = \mathcal{M}^+_{0,z}$ при $t \geq 0$. Кроме того, $\mathcal{M}^+_{0,z}$ принадлежит глобальному аттрактору $\mathcal{A}$ полугруппы $\{S_t\}$, и, следовательно, $\bigcup_{z\in\mathcal{R}_0} \mathcal{M}^+_{0,z} \subseteq \mathcal{A}$.

Теорема 1 *Пусть выполнены условия **I, II** и **III**. Тогда **a)** для любого $y_0 \in E$ положительная полутраектория $y(t) = S_t y_0$ стабилизируется к некоторой стационарной точке $z_y \in \mathcal{R}_0$ при $t \to +\infty$:*

$$\lim_{t\to+\infty} \|y(t) - z_y\|_E = 0, \ z_y \in \mathcal{R}_0;$$

любая полная траектория $y \in L^\infty(\mathbb{R})$, принадлежащая аттрактору $\mathcal{A}$, является гетероклинической траекторией между некоторыми двумя различными стационарными точками из $\mathcal{R}_0$:

$$\lim_{t\to-\infty} \|y(t) - z_-\|_E = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \|y(t) - z_+\|_E = 0, \ z_\pm \in \mathcal{R}_0, \ z_- \neq z_+;$$

***b)** для любой $z \in \mathcal{R}_0$ соответствующее неустойчивое множество $\mathcal{M}^+_{0,z}$ является конечномерным C^1-подмногообразием E, диффеоморфным $E_+(z)$, где $E_+(z)$ – неустойчивое подпространство линейного гиперболического отображения $S'(z)$. В частности, $\mathcal{M}^+_{0,z} \sim E_+(z) = \mathbb{R}^{\mathrm{ind}_+(z)}$, $\mathrm{ind}_+(z) := \dim\ E_+(z) < \infty$, $\forall z \in \mathcal{R}_0$;*
***c)** глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ представим в виде*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z\in\mathcal{R}_0} \mathcal{M}^+_{0,z}; \tag{2}$$

***d)** найдется положительное число α и монотонно возрастающая функция Q, такие, что для любого ограниченного подмножества $B \subset E$*

$$\mathrm{dist}_E(S_t B, \mathcal{A}) \leq Q(\|B\|_E)e^{-\alpha t}, \ \forall t \geq 0. \tag{3}$$

Из формулы (2) видно, что аттрактор $\mathcal{A}$ состоит из конечного числа конечномерных C^1-подмногообразий в E. Такие аттракторы, следуя терминологии [1, 3] (см. также [4]), принято называть *регулярными.* Теорема 1, была доказана в [1], где вместо условий **III b)** и **III c)** рассматривалось более сильное предположение – существование у полугруппы $\{S_t\}$ глобальной функции Ляпунова.

В завершении этого параграфа сформулируем улучшенный вариант свойства экспоненциального притяжения (3), который, в некотором смысле, означает асимптотическую замкнутость регулярных аттракторов. Напомним следующее определение (см. [1]).

Определение 2 *Функция $y \in L^\infty(\mathbb{R})$ называется N-составной траекторией полугруппы $\{S_t\}$, если найдутся $\{T_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}$, $T_1 < T_2 < \cdots < T_N$, такие, что $y(t)$ является траекторией полугруппы $\{S_t\}$ на каждом интервале $]-\infty, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_i, T_{i+1}], \dots, [T_N, +\infty[$, т.е., $S_t y(s) = y(t+s)$ при условии, что s и $t+s$ принадлежат одному из этих интервалов. Иначе говоря, каждая N-составная траектория $y(t)$ полугруппы $\{S_t\}$ состоит из $N+1$ куска "обычных" траекторий этой полугруппы, а в точках $T_1, \dots, T_N$ допускаются "перескоки" на другие траектории.*

Следствие 1 *Пусть выполнены условия **I, II,** и **III**. Тогда для любого ограниченного подмножества B из E и для любой полутраектории $y(t) := S_t y_0,\ y_0 \in B$, найдется N-составная траектория $a = a_y(t),\ t \in \mathbb{R}$, этой полугруппы, принадлежащая аттрактору (т.е., $a_y(t) \in \mathcal{A}$ при всех $t \in \mathbb{R}$), такая, что $N = N(y_0) \le \#\mathcal{R}_0$ и*

$$\|y(t) - a_y(t)\|_E \le C\|y_0 - a_y(0)\|_E \mathrm{e}^{-\alpha t},\ \forall t \ge 0,$$

где положительная константа C зависит от $\|B\|_E$.

§2. Неавтономное возмущение динамической системы и ее регулярный аттрактор. Рассматривается семейство $\{U_\varepsilon(t,\tau) \mid t,\tau \in \mathbb{R},\ t \ge \tau\}$ динамических процессов в пространстве E. Здесь $\varepsilon \in [0,1]$ является малым параметром, смысл которого станет ясен позже.

Напомним, что семейство отображений $\{U(t,\tau)\} := \{U(t,\tau) \mid t,\tau \in \mathbb{R},\ t \ge \tau\}$, $U(t,\tau) : E \mapsto E$, называется *динамическим процессом* в E, если $U(\tau,\tau) = Id,\ U(t,s) \circ U(s,\tau) = U(t,\tau)$, для всех $t \ge s \ge \tau,\ \tau \in \mathbb{R}$. Эти соотношения естественным образом выполнены для разрешающих операторов *неавтономных* эволюционных уравнений с частными производными (см., например, [5, 6], а также следующий параграф).

Зафиксируем произвольное число $\theta \in \mathbb{R}$. Функция $y \in L^\infty(]-\infty,\theta])$ (или $y \in L^\infty([\theta,+\infty[))$ называется *отрицательной* (или *положительной*) *полутраекторией* процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$, *с концом в* θ (или *с началом в* θ) если $U_\varepsilon(t,\tau)y(\tau) = y(t)$ при всех $\tau \le t \le \theta$ (или, соответственно, при всех $t \ge \tau \ge \theta$). Функция $y \in L^\infty(\mathbb{R})$ называется *полной траекторией*, если $U_\varepsilon(t,\tau)y(\tau) = y(t)$ при всех $t \ge \tau,\ \tau \in \mathbb{R}$. Множество всех ограниченных полных траекторий называется *ядром* процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ и обозначается $\mathcal{K}_\varepsilon$.

Предполагается, что процесс $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ "стремится" при $\varepsilon \to 0$ к некоторой предельной полугруппе $S_{t-\tau} : E \mapsto E$. Поэтому операторы $U_\varepsilon(t,\tau)$ удобно представить в виде

$$U_\varepsilon(t,\tau) = S_{t-\tau} + R_\varepsilon(t,\tau), \tag{4}$$

где $R_\varepsilon(t,\tau) : E \mapsto E$ – некоторые возмущающие операторы. Условия, характеризующие "малость" возмущающих операторов, описываются ниже в блоке **IV**.

Предполагается, что полугруппа $\{S_t\}$ удовлетворяет условиям **I**, **II** и **III**, а для семейства процессов $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ и для неавтономных возмущений $R_\varepsilon(t,\tau)$ выполнены следующие дополнительные условия.

IV. Аналитические свойства. а) Операторы $U_\varepsilon(t,\tau) \in C^1(E,E)$ при всех $t \ge \tau, \tau \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in [0,1]$, и выполнены неравенства

$$\|U_\varepsilon(\tau+t,\tau)y\|_E + \|U'_\varepsilon(\tau+t,\tau)(y)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \le Q_1(\|y\|_E),\ \forall \tau \in \mathbb{R},\ t \in [0,1].$$

где монотонная функция Q_1 не зависит от ε, y, τ и t. Кроме того, при каждом $\varepsilon \in [0,1]$ производные по Фреше $U'_\varepsilon(\tau+1,\tau)(y)$ равномерно непрерывна по y на ограниченных подмножествах E, причем соответствующий модуль непрерывности не зависит от $\tau \in \mathbb{R}$.

b) Оператор $U_\varepsilon(\tau+t,\tau)$ инъективен при любых $\varepsilon\in[0,1]$, $\tau\in\mathbb{R}$, $t\in[0,1]$, и его производная по Фреше $U'_\varepsilon(\tau+t,\tau)(y)$ имеет нулевое ядро: $\ker\{U'_\varepsilon(\tau+t,\tau)(y)\}=\{0\}$ при каждом $y\in E$ и при всех $\varepsilon\in[0,1]$, $\tau\in\mathbb{R}$, $t\in[0,1]$.

c) Операторы $R_\varepsilon(\tau+t,\tau)=U_\varepsilon(\tau+t,\tau)-S_t$ равномерно малы в следующем смысле:

$$\|R_\varepsilon(\tau+t,\tau)y\|_E+\|R'_\varepsilon(\tau+t,\tau)(y)\|_{\mathcal{L}(E,E)}\le\varepsilon Q_2(\|y\|_E);\ \varepsilon,t\in[0,1],\ \tau\in\mathbb{R},\tag{5}$$

где монотонная функция Q_2 не зависит от ε,y,τ и t.(Свойства **I** включаются в **IV** при $\varepsilon=0$.)

V. Равномерная диссипативность. Процессы $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ (см. (4)) имеют общее *ограниченное* в E равномерно (по $\tau\in\mathbb{R}$ и по $\varepsilon\in[0,1]$) поглощающее множество $\mathcal{B}\Subset E$: для каждого ограниченного подмножества $B\subset E$ найдется $T=T(B)$ такое, что при всех $\tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in[0,1]$

$$U_\varepsilon(\tau+t,\tau)B\subset\mathcal{B},\ \forall t\ge T.$$

При $\varepsilon=0$ процесс (4) в силу (5) становится полугруппой, $\{U_0(t,\tau)\}=\{S_{t-\tau}\}$.

Замечание 3 *Отметим, что мы не требуем существование у семейства процессов* $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ компактного *в E равномерно (по $\tau\in\mathbb{R}$ и по $\varepsilon\in[0,1]$) поглощающего или притягивающего множества. Достаточно, что компактное притягивающее множество имеется лишь у предельной (при $\varepsilon=0$) полугруппы S_t (условие **III a**).*

Как уже отмечалось, множество стационарных точек полугруппы $\{S_t\}$ совпадает с множеством $\mathcal{R}_0$ стационарных точек отображения $S=S_1:\mathcal{R}_0=\{z\mid S(z)=z\}$. Нам также понадобятся *стационарные траектории* процессов $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ при $\varepsilon>0$.

Утверждение 1 *Пусть выполнены условия **I**, **II** и **IV**. Тогда найдется $\varepsilon_0>0$ такое, что при любом $\varepsilon\le\varepsilon_0$ для каждой стационарной точки $z\in\mathcal{R}_0$ существует, и при том единственная, ограниченная полная траектория $w_{\varepsilon,z}\in L^\infty(\mathbb{R},E)$ процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$, которая удовлетворяет неравенству*

$$\|w_{\varepsilon,z}(t)-z\|_E\le C'\varepsilon,\ \forall t\in\mathbb{R},\tag{6}$$

где константа C' не зависит от ε и z. Следовательно, полная траектория $w_{\varepsilon,z}$ стремится (равномерно по $t\in\mathbb{R}$) к предельной стационарной точке z при $\varepsilon\to0$.

Траектория $w_{\varepsilon,z}$ будет называется *стационарной траекторией* динамического процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$. Множество стационарных траекторий обозначается

$$\mathcal{R}_\varepsilon:=\{w_{\varepsilon,z}\mid z\in\mathcal{R}_0\},\ \varepsilon\le\varepsilon_0.$$

Определение 3 *Пусть $\varepsilon\le\varepsilon_0$ (ε_0 взято из утверждения 1). Для каждой точки $z\in\mathcal{R}_0$, которой соответствует стационарная тректория $w_{\varepsilon,z}\in\mathcal{R}_\varepsilon$, и для каждого $\theta\in\mathbb{R}$ (глобальное) неустойчивое множество $\mathcal{M}^+_{\varepsilon,z}(\theta)$ (с концом в θ) определяется по следующей формуле:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^+_{\varepsilon,z}(\theta):=\ \{y_\theta\in E\mid\ &\exists\ \textit{отрицательная полутраектория}\ y\in L^\infty(]-\infty,\theta]),\\ &y(\theta)=y_\theta\ \ \textit{и}\ \lim_{t\to-\infty}\|y(t)-w_{\varepsilon,z}(t)\|_E=0\}.\end{aligned}$$

При обобщении понятий стационарная точка z и неустойчивое множество $\mathcal{M}^+_{\varepsilon,z}$, введенных для полугруппы $\{S_t\}$, на неавтономный случай, приходится рассматривать объекты и множества, которые зависят от времени: $w_{\varepsilon,z}(t)$, $\mathcal{M}^+_{\varepsilon,z}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. То же происходит и с понятием глобального аттрактора, который вводится для изучаемого динамического процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$. Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ – ядро процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$. Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) := \{y(t) \mid y \in \mathcal{K}_\varepsilon\} \subset E,\ t \in \mathbb{R}.$$

Будет показано, что при малых ε это семейство множеств служит *регулярными глобальными аттракторами* процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ при выполнении определенных условий. Пользуясь терминологией [5], глобальные аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ – это сечения ядра $\mathcal{K}_\varepsilon$ процесса в моменты времени t. В автономном случае при $\varepsilon = 0$, множество $\mathcal{A}_0(t)$ не зависит от времени t, а в более общем, неавтономном случае при $\varepsilon > 0$, у глобальных аттракторов возникает зависимость от времени.

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ условия **I–III** выполнены, и свойства (автономного) глобального аттрактора $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ предельной полугруппы $\{S_t\}$ описаны в теореме 1.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия **I**–**V**. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при любом $\varepsilon \le \varepsilon_0$ выполнены следующие свойства:* ***a)*** *при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ и при любом $y_\tau \in E$ положительная полутраектория $y(t) = U_\varepsilon(t,\tau)y_\tau, t \ge \tau$, стабилизируется к некоторой стационарной траектории $w_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ при $t \to +\infty$:*

$$\lim_{t\to+\infty} \|y(t) - w_\varepsilon(t)\|_E = 0;$$

любое полная траектория $y_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$, принадлежащая ядру $\mathcal{K}_\varepsilon$, является гетероклинической траекторией между двумя различными стационарными траекториями $w_{-,\varepsilon}$ и $w_{+,\varepsilon}$ из $\mathcal{R}_\varepsilon$:

$$\lim_{t\to-\infty} \|y(t) - w_{-,\varepsilon}(t)\|_E = 0,\ \lim_{t\to+\infty} \|y(t) - w_{+,\varepsilon}(t)\|_E = 0,\ w_{\pm,\varepsilon} \in \mathcal{R}_\varepsilon,\ w_{-,\varepsilon} \ne w_{+,\varepsilon};$$

b) *для любой $z \in \mathcal{R}_0$ и при каждом $t \in \mathbb{R}$ неустойчивое множество $\mathcal{M}^+_{\varepsilon,z}(t)$ является конечномерным C^1-подмногообразием E, диффеоморфным $E_+(z)$. В частности, $\mathcal{M}^+_{\varepsilon,z}(t) \sim \mathcal{M}^+_{0,z} \sim E_+(z) = \mathbb{R}^{\mathrm{ind}_+(z)}$;*
c) *имеет место следующее представление:*

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) = \bigcup_{z\in\mathcal{R}_0} \mathcal{M}^+_{\varepsilon,z}(t), \tag{7}$$

причем множество $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ компактно в E при каждом $t \in \mathbb{R}$ и при всех $\varepsilon \in [0,1]$;
d) *найдется положительное число α и монотонно возрастающая функция Q, такие, что для любого ограниченного подмножества B в E*

$$\mathrm{dist}_E(U_\varepsilon(\tau+t,\tau)B, \mathcal{A}_\varepsilon(\tau+t)) \le Q(\|B\|_E)e^{-\alpha t},\ \forall\tau \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

e) *выполнена следующая оценка:*

$$\mathrm{dist}^{sym}_E(\mathcal{A}_\varepsilon(t), \mathcal{A}) \le C\varepsilon^{\varkappa},\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ – регулярный аттрактор предельной полугруппы $\{S_t\}$. Здесь константы $C > 0$ и $0 < \varkappa < 1$ не зависят от ε. Напомним, что $\mathrm{dist}^{sym}_E(B_1,B_2) := \mathrm{dist}_E(B_1,B_2) + \mathrm{dist}_E(B_2,B_1)$.

По аналогии с автономным случаем вводится понятие N-составной траекторией процесса $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ (см. определение 2). Оценки (8) и (9) можно улучшить следующим образом.

Следствие 2 *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при* $\varepsilon \le \varepsilon_0$
a) *для любого ограниченного подмножества* $B \subset E$ *и для любой полутраектории* $y(t) := U_\varepsilon(t,\tau)y_\tau,\ y_\tau \in B$, *найдется* N*-составная траектория* $a = a_{y,\tau}(t),\ t \in \mathbb{R}$, *соответствующие куски которой принадлежат неавтономному аттрактору* $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, *причем* $N = N(y_\tau) \le \#\mathcal{R}_0$, *и выполнено неравенство*

$$\|y(t) - a_{y,\tau}(t)\|_E \le C\|y_\tau - a_{y,\tau}(\tau)\|_E e^{-\alpha(t-\tau)},\ t \ge \tau,$$

где положительная константа C *зависит от* B, *но не зависит от* $\varepsilon \le \varepsilon_0, \tau \in \mathbb{R}$ *и от выбора* $y_\tau \in B$.
b) *Для каждой полной траектории* $y_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$ *возмущенного процесса* $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$, *которая принадлежит неавтономному аттрактору* $\mathcal{A}_\varepsilon(\cdot)$, *найдется* N*-составная траектория* $a_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *предельной полугруппы* $\{S_t\}$, *лежащая на аттракторе* $\mathcal{A}_0$, *такая, что*

$$\|y_\varepsilon(t) - a_0(t)\|_E \le C\varepsilon^{\varkappa},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

где константы $C > 0$ *и* $0 < \varkappa < 1$ *не зависят от* $\varepsilon,\ \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Отметим, что в автономном случае свойства N-составных траекторий полугрупп и их (автономных) возмущений подробно изучались в [1]. В неавтономном случае некоторые задачи, связанные с построением N-составных траекторий процессов, рассматривались в [7, 8].

§3. Пример: неавтономное волновое уравнение со слабой диссипацией. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ рассматривается следующее уравнение:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \gamma\partial_t u = -f(u) + g_0(x) + \varepsilon g_1(x,t),\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{10}$$
$$u|_{t=\tau} = u_\tau,\ \partial_t u|_{t=\tau} = p_\tau, \tag{11}$$

содержащее малый параметр $\varepsilon \in [0,1]$. Предполагается, что $\gamma > 0$, нелинейная функция $f \in C^1(\mathbb{R}),\ f(0) = 0$, и выполнено неравенство

$$|f'(v)| \le C\left(|v|^2 + 1\right), \quad \forall v \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

и кроме того функция f удовлетворяет стандартному условию диссипативности

$$\liminf_{|v|\to\infty} f(v)/v > -\lambda_1, \tag{13}$$

где λ_1 – первое собственное значение оператора $-\Delta$ при граничном условии Дирихле (см. [1, 2, 5, 9]).

Предполагается, что "автономнная" внешняя сила $g_0 \in L_2(\Omega)$, "неавтономная" внешняя сила $g_1 \in L_2^b(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$, т.е.,

$$\|g_1\|^2_{L_2^b(\mathbb{R},L_2(\Omega))} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|g_1(\cdot,s)\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty.$$

При любым $\varepsilon \in [0,1]$ задача (10)–(11) имеет, и притом единственное, решение $u(t) := u(\cdot,t)$, для которого $u \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_\tau; H_0^1(\Omega))$ и $\partial_t u \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_\tau; L_2(\Omega))$, где $\mathbb{R}_\tau =$

$[\tau,\infty)$, и C_{b} обозначает пространство непрерывных ограниченных функций (см. [1, 2, 5, 9, 10, 11]). Обозначим

$$y_\tau = (u_\tau, p_\tau) \in E,\ y(t) = (u(t), \partial_t u(t)) \in E,\ E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega),$$

где $u(t)$ – решение задачи (10)–(11). Тогда $y \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_\tau; E)$ и $y(\tau) = y_\tau$. Кроме того, функция $y(t)$ удовлетворяет оценке:

$$\|y(t)\|_E^2 \leq C_1 \|y_\tau\|_E^4 e^{-\beta(t-\tau)} + C_2, \quad \forall t \geq \tau, \tag{14}$$

для некоторых $C_1, C_2 > 0$ и $\beta > 0$, которые не зависят от $\varepsilon \in [0,1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $y_\tau \in E$ (см. [1, 2, 5, 12]).

Задача (10)–(11) порождает *динамический процесс* $\{U_\varepsilon(t,\tau)\} := \{U_\varepsilon(t,\tau) \mid t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$, действующий в пространстве E по формуле $U_\varepsilon(t,\tau) y_\tau = y(t)$ при всех $y_\tau \in E$. Из (14) следует, что процесс $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ имеет равномерное (по $\tau \in \mathbb{R}$ и по $\varepsilon \in [0,1]$) *поглощающее множество*

$$\mathcal{B}_0 = \{y \in E \mid \|y\|_E \leq 2C_2\}.$$

Следовательно, выполнено условие **V**.

Рассмотрим предельное автономное уравнение (10) при $\varepsilon = 0$. В этом случае процесс $\{U_0(t,\tau)\} = \{S_{t-\tau}\}$ является динамической полугруппой, у которой имеется глобальный аттрактор $\mathcal{A}_0 \Subset E$ (см. [1, 2, 10, 11]). Кроме того, как показано в [1], полугруппа $\{S_t\}$ принадлежит классу $C^1(E,E)$, и для производной по Фреше $S_t'(y)$ выполнено неравенство

$$\|S_t'(v)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq Q(\|y\|_E) e^{Kt},\ \forall t \geq 0, \tag{15}$$

где константа $K > 0$ и монотонная функция Q не зависят от t. Функция $S_1'(y)$ равномерно непрерывна на ограниченных подмножествах E. Из этого свойства, а также из (14) и (15) вытекает выполнение аналитических условий **I**. В [1] доказано, что условие гиперболичности **II** выполнено для автономных волновых уравнений вида (10) (при $\varepsilon = 0$), если g_0 принадлежит некоторому открытому и плотному подмножеству $L_2(\Omega)$. Поэтому предположим, что для выбранной функции g_0 условие **II** выполнено. Проверим условие **III.** Свойство **III a)** уже установлено, а в [1] было доказано существование у полугруппы $\{S_t\}$ глобальной функции Ляпунова $\Phi : E \to E$, для которой

$$\Phi(y(t)) - \Phi(y(\tau)) = -\int_\tau^t \|\partial_t u(\cdot, s)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds,$$

где $y(t) = (u(\cdot,t), \partial_t u(\cdot,t))$ – любое решение (10) при $\varepsilon = 0$. Очевидно, отсюда вытекают условия **III b),c)**. Проверены все условия теоремы 1, из которой следует, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}_0$ автономной полугруппы $\{S_t\}$ задачи (10)–(11) при $\varepsilon = 0$ является регулярным. В частности, он представим в виде (2) и обладает свойством экспоненциального притяжения (3). Отметим, что впервые регулярность глобального аттрактора для автономного волнового уравнения вида (10) при $\varepsilon = 0$ была доказана в [3] (см. также [1, 10]).

Наконец рассмотрим волновое уравнение (10) с неавтономным возмущением $\varepsilon g_1(x,t)$ при $\varepsilon > 0$ и соответствующий ему динамический процесс $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$ в пространстве E. Проверим аналитические свойства **IV**. Аналогично автономному случаю доказывается, что $U_\varepsilon(t,\tau) \in C^1(E,E)$ при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и при $t \geq \tau$, устанавливается равномерная непрерывность производных по Фреше $U_\varepsilon'(\tau+1,\tau)(y)$ на ограниченных подмножествах E, и, кроме того, по аналогии (15) выводится неравенство

$$\|U'_\varepsilon(\tau+t,\tau)(y)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \le Q(\|y\|_E)e^{Kt},\ \forall t\ge 0, \tag{16}$$

где константа K и монотонная функция Q не зависят от $\varepsilon \in [0,1], \tau \in \mathbb{R}$. Следовательно, выполнено **IV a)**. Свойство инъективности **IV b)** легко вытекает из свойств волновых уравнений, в которых можно обратить время и получить корректную задачу. Наконец, стандартным образом (см. [1, 5, 13]) устанавливаются оценки

$$\|U_\varepsilon(\tau+t,\tau)y - S_t y\|_E + \|U'_\varepsilon(\tau+t,\tau)(y) - S'_t(y)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \le \varepsilon Q_1(\|y\|_E)e^{K_1 t},\ \forall t\ge 0,$$

где константа K_1 и монотонная функция Q_1 не зависят от $\varepsilon \in [0,1], \tau \in \mathbb{R}$. Значит, все условия теоремы 2 выполнены для динамических процессов $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}$, отвечающих неавтономной задаче (10)–(11). В частности, она имеет неавтономный регулярный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon(t), t\in\mathbb{R}$, представимый в виде (7), обладающий свойством экспоненциального притяжения (8), и отклонение которого от регулярного аттрактора $\mathcal{A}_0$ предельного автономного волнового уравнения не превосходит величины $O(\varepsilon^{\varkappa})$ при некотором положительном $\varkappa < 1$. Наконец, следствие 2 позволяет описывать структуру неавтономного аттрактора с помощью N-составных траекторий процесса.

В заключении отметим, что в работах [13, 14] изучались глобальные и обратные аттракторы неавтономных диссипативных волновых уравнений, содержащих неавтономные быстро осциллирующие по времени возмущения. Для аттракторов, построенных в этих работах, были доказаны свойства, близкие к свойствам (8) и (9), которые характеры для регулярных аттракторов. В работе [15] были построены регулярные аттракторы для потенциальных систем реакции-диффузии с малыми неавтономными возмущениями. Использовался аналог теоремы 2 с дополнительными ограничениями, которые удалось исключить в теореме 2 (см. замечание 3).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00339 и № 12-01-00203), а также Минобрнауки РФ (соглашение № 8502).

Список литературы

[1] *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.

[2] *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988. 648 p.

[3] *Babin A.V., Vishik M.I.* // J. Math. Pures et Appl. 1983. V.62. P.441–491.

[4] *Hale J., Rougel G.* // Ann. Mat. Pura Appl. 1990. V.4 (154). P.19–67.

[5] *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence: AMS, 2002. 363 p.

[6] *Haraux A.*, Systèmes dynamiques dissipatifs et applications, Masson, Paris, 1991. 132 p.

[7] *Goritskij A.Yu. , Vishik M.I.* // Rend. Accad. Naz. XL, Mem di Math. e Appl. 1997. V.115. P.106–146.

[8] *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Матем. сб. 2003. V.194. N.9. C.3–30.

[9] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М.: Мир, 1972. 588 с.

[10] *Hale J.K.* Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. Math. Surveys and Mon. V.25. Providence: Amer. Math. Soc. 1988. 198 p.

[11] *Ladyzhenskaya O.A.* Attractors for semigroups of evolution equations. Cambridge University Press, 1991, 73 p.

[12] *Zelik S.* // Comm.Pure Appl.Anal. 2004. V. 3. N. 4, P.921–934.

[13] *Zelik S.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A. 2006. V. 136. P. 1053–1097.

[14] *Chepyzhov V.V., Pata V., Vishik M.I.* // J. Math. Pures Appl. 2008. V.90. P.469–491.

[15] *Вишик М.И., Зелик С.В., Чепыжов В.В.* // Матем. сб. 2013. V.204. N.1. C.3–46.

С.В.Зелик
University of Surrey, Guildford, United Kingdom

В.В.Чепыжов
Институт проблем передачи информации им.А.А.Харкевича
Российской Академии наук, Москва,
Национальный исследовательский университет ‘‘Высшая школа экономики’’,
Москва