Материалы международной конференции
“Алгебра и математическая логика: теория и приложения”,
посвященную 125-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры
Казанского университета члена-корреспондента АН СССР
Николая Григорьевича Чеботарева и 75-летию со дня рождения заведующего кафедрой
академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова

АЛГЕБРА

И

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА:

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

(г. Казань, 24-28 июня 2019 г.)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2019

Казанский (Приволжский)
федеральный университет
Россия, Татарстан
420008, Казань
ул. Кремлевская 18

Kazan (Volga Region)
Federal University
Russia, Tatarstan
420008, Kazan
Kremlevskaya st. 18

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Российский фонд фундаментальных исследований
Издание осуществлено при финансовой поддержке
РФФИ (проекты №19-01-20103 "Научные мероприятия").

УДК 510:512
ББК 22.1

Материалы печатаются в авторской редакции.

Материалы конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.). – Казань: КФУ, 2019. – 181 с.

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на международную кофеернцию “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.), посвященную 125-летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарева и 75-летию со дня рождения заведующего кафедрой академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова.

УДК 510:512
ББК 22.1

Содержание

Тезисы пленарных докладов 13

Ol'shanskiy A. Yu.
ON THE CONJUGACY PROBLEM IN FINITELY PRESENTED GROUPS 13

Podolskii V. V.
MAX-PLUS POLYNOMIALS AND THEIR ROOTS 13

Rybakov V. V.
NON-CLASSICAL MULTI-AGENT LOGICS WITH MULTI-VALUATIONS 13

Tuganbaev A. A.
CENTRALLY ESSENTIAL RINGS 14

Vdovin E. P.
ON SHALEV CONJECTURE FOR SIMPLE GROUPS 15

Volkov M. V.
IDENTITIES OF KAUFFMAN MONOIDS: FINITE AXIOMATIZATION AND ALGORITHMS 16

Wu G.
N-R.E. DEGREES: A SURVEY OF RESEARCH OF PROF MARAT ARSLANOV AND HIS GROUP . 17

Алаев П.Е.
СТРУКТУРЫ, ВЫЧИСЛИМЫЕ ЗА ОГРАНИЧЕННОЕ ВРЕМЯ 17

Арсланов М. М.
ФУНКЦИИ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И КОЛМОГОРОВСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ 17

Артамонов В.А.
ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПОЛНЫЕ КВАЗИГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ 18

Беклемишев Л. Д.
СХЕМЫ РЕФЛЕКСИИ, АЛГЕБРЫ И ПРОГРЕССИИ ТЕОРИЙ 18

Востоков С. В.
СПАРИВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ: ИСТОРИЯ, МОТИВИРОВКА И ПОСЛЕДНИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ 18

Гончаров С.С.
О СТЕПЕНЯХ ТЬЮРИНГА АВТОУСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЧТИ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ 19

Ершов Ю.Л.
О КОРНЯХ МНОГОЧЛЕНОВ НАД НОРМИРОВАННЫМИ ПОЛЯМИ 19

Калимуллин И. Ш.
АВТОМАТНЫЕ И ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНЫЕ СТРУКТУРЫ 19

Кузнецов М.И.
ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБР ЛИ 20

Мазуров В. Д., Лыткина Д. В., Журтов А. Х.
ОБОБЩЁННЫЕ ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА 20

Мантуров В. О.
ON GROUPS G_N^K AND Γ_N^K AND THEIR APPLICATIONS IN ALGEBRA AND TOPOLOGY 21

Попов В. Л.
ЖОРДАНОВЫ ГРУППЫ 21

Ремесленников В.Н.
ЧТО ТАКОЕ УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ? 22

Селиванов В. Л.
О СЛОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ 22

Тезисы секционных докладов 23

Amberg B.
FACTORIZED GROUPS AND SOLUBILITY 23

Azeef Muhammed P. A.
STRUCTURE OF CONCORDANT SEMIGROUPS 23

Baizhanov B. S., Mukankyzy A.
DP-RANK IN DIFFERENT CLASSES OF THEORIES 23

Balbiani P., Tinchev T.
A NOTE ON UNDECIDABILITY OF MODAL DEFINABILITY 25

Bikchentaev A. M.
ON τ-ESSENTIALLY INVERTIBILITY OF τ-MEASURABLE OPERATORS, AFFILIATED WITH A SEMIFINITE VON NEUMANN ALGEBRA 27

Bredikhin D. A.
ON ALGEBRAS OF RELATIONS WITH ONE OF ASSOCIATIVE PRIMITIVE-POSITIVE OPERATIONS 28

Dolgov D. A.
THE LEFT-SHIFT APPROXIMATING K-ARY GCD ALGORITHM 30

Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.
ON COMPOSITIONS OF DISCRETE LINEAR ORDERS WITH STRUCTURES AND THEIR ALGEBRAS 32

Fawwaz Kh.
ON QUASI ISOMETRIES ON HILBERT SPACES 35

Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E.
LATIN SQUARES OVER QUASIGROUPS 36

Gritskova (Kovaleva) V. A.
CHARACTERIZATIONS OF FINITE GROUPS WITH RESTRICTIONS ON THE NUMBER OF CLASSES OF ISOORDIC NON-σ-SUBNORMAL SUBGROUPS 38

Gryzlov A. A.
ON DENSE SUBSETS OF PRODUCTS AND INDEPENDENT MATRICES OF SETS 40

Gumerov R. N.
ON INDUCTIVE SYSTEMS OF SEMIGROUP C^*-ALGEBRAS 41

Ishmukhametov S. T.
ONE EXTENSION OF THE CAPPING MINIMAL DEGREE THEOREM 43

Kazarin L.
INDICES OF ELEMENTS AND THE STRUCTURE OF FINITE GROUP 44

Kuz'min A. M.
IDENTITIES OF ASSOCIATIVE LIE NILPOTENT ALGEBRAS ON THREE GENERATORS 45

Markhabatov N. D., Sudoplatov S. V.
ON RANKS FOR FAMILIES OF THEORIES 46

Monakhov V. S., Trofimuk A. A.
THE SUPERSOLUBILITY OF A GROUP WITH NS-SUPPLEMENTED P-SUBGROUPS 47

Monastyreva A. S.
FINITE NON-NILPOTENT RINGS WITH COMPLETE COMPRESSED ZERO DIVISOR GRAPHS . . 49

Murashka V. I.
GENERALIZED RANK FORMATIONS OF FINITE GROUPS 50

Nhan T. C. Quynh; T. H. N.
ON SQUARE FREE MODULES 52

Omanadze R. Sh., Chitaia I. O.
MAJOR SUBSETS OF R-MAXIMAL SETS AND $Q_{1,N}$-REDUCIBILITY 54

Pinus A. G.
ISOLATED POINTS OF SPACES OF FUNCTIONAL CLONES 55

Roman'kov V. A., Timoshenko E. I.
ON VERBALLY CLOSED SUBGROUPS OF FREE SOLVABLE GROUPS 56

Shakhova S. A.
THE AXIOMATIC RANK OF THE LEVI CLASS GENERATED BY THE ALMOST ABELIAN QUASIVARIETY OF NILPOTENT GROUPS 58

Shirshova E. E.
ON CONVEX DIRECTED SUBGROUPS OF GROUPS WITH THE ALMOST ORTHOGONALITY CONDITION 59

Skuratovskii R. V.
MINIMAL GENERATING SET OF THE COMMUTATOR OF SYLOW SUBGROUPS OF ALTERNATING AND SYMMETRIC GROUPS, AND ITS COMMUTATOR WIDTH 60

Tikhonov S. V.
MAXIMAL SUBFIELDS IN FINITE-DIMENSIONAL SIMPLE ALGEBRAS 61

Tsarev A.
ON THE LATTICE OF ALL τ-CLOSED TOTALLY COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS 62

Vladimirov A. G.
EFFECTIVITY PROPERTIES OF INTUITIONISTIC SET THEORY WITH SOME CHOICE PRINCIPLES AND SOME ADDITIONAL INTUITIONISTIC PRINCIPLES 63

Wu Zh.
ON THE NUMBER OF SYLOW SUBGROUPS IN FINITE ALMOST SIMPLE GROUPS 63

Yamaleev M. M.
ISOLATION FROM SIDE IN TURING DEGREES 64

Yanchev M.
RATIONAL GRADING IN AN EXPRESSIVE DESCRIPTION LOGIC WITH INVERSE AND TRANSITIVE ROLES AND COUNTING 65

Zhuchok A. V.
THE LEAST DIMONOID CONGRUENCES ON THE FREE TRIOID 67

Абызов А. Н., Еряшкин М. С., Тапкин Д. Т.
СТРОГО Q-НИЛЬ-ЧИСТЫЕ КОЛЬЦА 69

Альпин Ю. А., Альпина В. С.
ТЕМПОРАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПОЛУГРУПП НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ 71

Артамонов Д. В.
ЯВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ GL_N МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ 73

Артемов Д. Ю.
КОРЕТРАКТАБЕЛЬНОСТЬ СМЕШАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП 73

Асланян А. Т., Геворгян А. Л., Григорян А. А.
КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ СВОБОДНЫХ ГРУПП БЕСКОНЕЧНО БАЗИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ С. И. АДЯНА 74

Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К.
КЛАССИФИКАЦИЯ И ТИПЫ БАЗИСОВ В ПОЛНОМ ЧАСТИЧНОМ УЛЬТРАКЛОНЕ РАНГА 2 75

Баженов Н. А., Зубков М. В.
ОРДИНАЛЫ РЕАЛИЗУЕМЫЕ ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ 77

Балаба И. Н.
О ГРАДУИРОВАННЫХ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ 77

Балычев С. В., Васильев А. Ф.
О РАЗРЕШИМЫХ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ СО СВОЙСТВОМ $\mathcal{P}_2$ 79

Беняш-Кривец В. В., Жуковец Я. А.
ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ТИТСА В ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ ТИПА $(2, N, 2, 2, 2, 2)$ 81

Бородич Р. В., Селькин М. В.
О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОДГРУПП БЛИЗКИХ К $\mathfrak{F}$-АБНОРМАЛЬНЫМ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ 82

Васильев А. В., Ревин Д. О., Скресанов С. В.
ПРАВИЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ТЕОРЕМА ВИЛАНДА-ХАРТЛИ ДЛЯ СУБМАКСИМАЛЬНЫХ $\mathfrak{X}$-ПОДГРУПП 84

Васильев А. С.
НОРМАЛИЗАТОРЫ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ 85

Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Мельченко А. Г.
КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ $\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОДГРУПП 86

Верёвкин А. Б.
ИНЪЕКТИВНОСТЬ И РАЦИОНАЛЬНОСТЬ 88

Верников Б. М., Шапрынский В. Ю.
сократимые элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп 89

Вершина С. В.
определяемость p –локальных групп минимальными кольцами расщепления 91

Вечтомов Е. М.
алгебраические характеризации дискретности тихоновских пространств 92

Вильданов В. К.
к определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими группами автоморфизмов 93

Галанова Н. Ю.
о некоторых вещественно замкнутых полях с симметричными сечениями 94

Гальмак А. М., Кулаженко Ю. И.
о некоторых неравенствах в полиадических группоидах специального вида 95

Горбунов И. А.
обращение подстановки и теории классической пропозициональной логики 97

Дадажанов Р. Н., Касымов Н. Х.
о вычислимости негативных представлений некоторых типов упорядоченных колец 100

Дудаков С. М.
о неразрешимости алгебры односимвольных языков с операцией конкатенации 101

Дураков Б. Е.
о группах 2-ранга один 103

Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И.
о позитивных формулах с ограниченными кванторами на свободных полугруппах 105

Емельянов К. И., Тронин С. Н.
об одном семействе аналогов протокола обмена ключами anshel-anshel-goldfeld на платформе строгих n-группоидов 107

Еряшкин М. С.
mod-ретрактабельные и cc-коалгебры 108

Зайнетдинов Д. Х.
о предельно монотонной сводимости множеств **109**

Зубей Е. В.
о разрешимости конечной группы с ограничениями на подгруппы шмидта из максимальной подгруппы **109**

Ибрагимов Ф. Н.
о невычислимых позитивных представлениях областей целостности **110**

Ильин С. Н., Хайсанова А. С.
о разложимости матриц над полуполями в произведение перестановочных и почти единичных матриц **111**

Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г., Файзрахманов М. Х.
позитивные нумерации в гиперарифметике **112**

Каморников С. Ф.
характеризация обобщенной подгруппы фраттини конечной разрешимой группы **112**

Карлов Б. Н.
о теории регулярных языков с оператором итерации **114**

Карташов В. К.
о порождающих совокупностях для квазимногообразий коммутативных унарных алгебр и их приложениях **116**

Карташова А. В.
модулярные и дистрибутивные решетки топологий коммутативных унарных алгебр **117**

Касымов Н. Х., Морозов А. С.
о T_1-отделимых нумерациях алгебр с артиновыми решетками конгруэнций **118**

Князев О. В.
о наследственно чистых моногенных полугруппах в классе полугрупп с центральным идемпотентом **120**

Компанцева Е. И., Нгуен Т. К. Ч.
абелевы TI-группы **121**

Кондратьева А. В.
неальтернирующие гамильтоновы дифференциальные формы характеристики 2 . . . . **123**

Кондратьева А. В., Кузнецов М. И.
классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр ли характеристики 2 124

Кондратьева А. В., Кузнецов М. И., Рабиа М. М.
простые подалгебры неальтернирующих гамильтоновых алгебр ли характеристики 2 125

Корнеева Н. Н.
префиксная разрешимость сверхслов для некоторых классов языков . . . 126

Коробков С. С.
проектирования полулокальных колец 127

Кощеева А. К.
семантическое описание полных по п.с. новикову расширений суперинтуиционистской логики ls в языке с несколькими дополнительными константами 128

Кравцова О. В.
полуполевые плоскости, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную Q_8 130

Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В.
об эренфойхтовости P-комбинации упорядоченных теорий 131

Кыров В. А.
коммутативные гиперкомплексные числа в геометрии двух множеств . . . 133

Любимцев О. В.
определяемость вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов 135

Марков В. Т., Туганбаев А. А.
центрально существенные кольца и процесс кэли-диксона 137

Михайлов В. Ю.
об иерархических моделях систем и задаче их устойчивого функционирования 139

Молчанов В. А.
об относительно элементарной определимости класса универсальных графических автоматов в классе полугрупп 141

Молчанов В. А., Хворостухина Е. В.
абстрактная характеризация полугрупп входных сигналов универсальных гиперграфических автоматов 142

Насрутдинов М. Ф., Тронин С. Н.
об одном семействе колец формальных матриц **144**

Путилов С. В.
к теории не простых конечных групп **146**

Пушкарев И. А., Бызов В. А.
алгебраическая структура для пересчетов инцидентностей триад плоского кубического дерева, соответствующих преобразованию донахью **147**

Расстригин А. Л.
формации и псевдомногообразия унарных алгебр **148**

Римацкий В. В.
описание модальных логик со слабым свойством ко-накрытий **150**

Рыбалов А. Н.
о структуре перечислимых степеней генерической сводимости **151**

Секорин В. С.
логика частичной фиксированной точки второго порядка для конечных алгебраических систем **153**

Селиверстов А. В.
заметки о генерической сложности задач распознавания **154**

Сидоров В. В.
изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных действительнозначных функций с max-сложением **156**

Созутов А. И.
о группах с конечным регулярным автоморфизмом **158**

Соколов Е. В., Туманова Е. А.
об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами **160**

Соколов Е. В., Туманова Е. А.
об аппроксимируемости разрешимыми группами некоторых свободных конструкций групп **163**

Сорокина М. М., Максаков С. П.
о направлениях расслоенных и веерных формаций и классов фиттинга конечных групп **165**

Сохор И. Л.
о разрешимости групп с полунормальными или абнормальными подгруппами **168**

Сулейманова Г. С.
КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ НАИВЫСШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ АЛГЕБРЫ ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ **169**

Сыроватская С. В.
О ПОЛУГРУППАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРОГО КЛАССА СВЯЗНЫХ УНАРОВ С ПЕТЛЕЙ **170**

Тапкин Д. Т.
ГРУППА ВНЕШНИХ АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБРЫ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ **171**

Трейер А. В.
УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГРАФОВЫХ ДВУСТУПННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП **172**

Тронин С. Н.
ЦИФРОВАЯ ПОДПИСЬ НА ОПЕРАДНОЙ ОСНОВЕ **173**

Усольцев В. Л.
ОБ АТОМАХ РЕШЕТОК КОНГРУЭНЦИЙ АЛГЕБР С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ПОЧТИ ЕДИНОГЛАСИЯ **174**

Филиппов К. А., Федосенко А. С., Шлёпкин А. К.
О ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ УНИТАРНЫХ ГРУПП СТЕПЕНИ 3 И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ 2-ГРУПП **175**

Хисамиев Н.Г., Тусупов Д.А., Тыныбекова С.Д.
ЭФФЕКТИВНО P, N-РАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ **176**

Ходанович Д. А.
О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ДВУМЯ ПОДГРУППАМИ ПРИМАРНЫХ ИНДЕКСОВ **178**

Шлепкин А. А.
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ ЛИЕВА ТИПА РАНГА 1 И ГРУППАМИ $L_3(2^K)$, $L_4(2^L)$ **179**

Щучкин Н. А.
ГОМОМОРФИЗМЫ ИЗ N-ГРУППЫ В ПОЛУАБЕЛЕВУ N-ГРУППУ **180**

Ядченко А.А.
ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ Π-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП **181**

ТЕЗИСЫ ПЛЕНАРНЫХ ДОКЛАДОВ

ON THE CONJUGACY PROBLEM IN FINITELY PRESENTED GROUPS

A. Yu. Ol'shanskiy
Department of Mathematics, Vanderbilt University (Nashville, USA)
alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

The first examples of finitely presented groups with decidable word problem and undecidable conjugacy problems were found by P. S. Novikov and W. W. Boone in 50'-s. Dehh function $d(n)$ can be regarded as a measure of the complexity of a finitely presented group, and the first examples of the groups with undecidable conjugacy problem have exponential Dehn functions. It is well known, that the conjugacy problem is decidable if $\liminf_{n\to\infty} d(n)/n^2 = 0$. With M.V. Sapir, we have constructed finitely presented groups with quadratic Dehn function and undecidable conjugacy problem. This answers E. Rips' question of 1994.

MAX-PLUS POLYNOMIALS AND THEIR ROOTS

V. V. Podolskii
National Research University Higher School of Economics, Moscow
vpodolskii@hse.ru

Max-plus algebra emerges in many fields of Mathematics such as Algebraic Geometry, Mathematical Physics and Combinatorial Optimization. In part, its importance is related to the fact that it makes various parameters of mathematical objects computationally accessible. Max-plus polynomials play a fundamental role in this, especially for the case of Algebraic Geometry. On the other hand, many algebraic questions behind max-plus polynomials remain open. In this talk we will discuss some recent results on max-plus polynomials and their roots. In particular, we will discuss solvability problem for max-plus linear systems, max-plus analogs of classical Nullstellensatz, Combinatorial Nullstellensatz, Schwartz-Zippel Lemma and Universal Testing Set.

NON-CLASSICAL MULTI-AGENT LOGICS WITH MULTI-VALUATIONS

V. V. Rybakov
Institute of Mathematics and Informatics, Siberian Federal University, Krasnoyarsk,
Institute of Informatics Systems of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk,
(Russian Federation)
Vladimir_ Rybakov@mail.ru

We study various modeling multi-agent reasoning and taking decision by instruments of non-classical logics. The departure point is usage some modifications of relational Kripke-Hinttikka models (in particular the ones with different accessibility relations or with different valuations of the agents knowledge). In particular, a kernel distinction from the standard relational models is introduction of separate valuations for each agents and then computation the global valuation using the all individual ones. We discuss this approach, illustrate it with examples and demonstrate that this is not a mechanical combination of standard models, but much more thin and sophisticated modeling knowledge and computation truth values in multi-agent environment.

Usual most important logical problems are addressed to that logics, in particular the satisfiability problem,the decidability problem and the admissibility problem. We solve them for some logics and find deciding algorithms, for some others that are yet open problems. Illustrating examples for applications to be provided.

The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research, Government of Krasnoyarsk Territory, Krasnoyarsk Regional Fund of Science, the research project No. 18-41-240005

CENTRALLY ESSENTIAL RINGS

A. A. Tuganbaev
National Research University MPEI (Moscow), Lomonosov Moscow State University
tuganbaev@gmail.com

All the results of this report were obtained jointly with V.T. Markov.

We consider only associative rings with $1 \neq 0$.

A ring R with center C is said to be centrally essential if, for any non-zero element $a \in R$, there exist two non-zero elements $x, y \in C$ with $ax = y$, i.e. R_C is an essential extension of the module C_C.

In a centrally essential ring R, all idempotents are central; in addition, if R is semiprime or right (left) nonsingular, then R is commutative.

1.

Let F be the field $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, V be a vector F-space with basis e_1, e_2, e_3, and let $\Lambda(V)$ be the exterior algebra of the space V. Then $\Lambda(V)$ is a centrally essential noncommutative finite ring.

There is a centrally essential ring R such that the ring $R/J(R)$ is not a PI ring. Thus, $R/N(R)$ also is not a PI ring (in particular, the rings $R/J(R)$ and R are not commutative).

2.

If R is a centrally essential ring, then for any commutative monoid G, the monoid ring RG is centrally essential. In particular, the rings $R[x]$ and $R[x, x^{-1}]$ are centrally essential.

Let F be a field of characteristic $p > 0$ and G a finite group.

1. The ring FG is centrally essential if and only if $G = P \times H$, where P is the unique Sylow p-subgroup of the group G, the group H is commutative, and the ring FP is centrally essential.

2. If G is a p-group with nilpotence class $\leqslant 2$, then FG is centrally essential. There exists a group G' of order p^5 such that FG' is not centrally essential.

3.

If R is a finite-dimensional centrally essential algebra, then R is a centrally essential ring $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ the ring $R[[x]]$ is centrally essential $\Leftrightarrow$ the ring $R((x))$ is centrally essential.

Open Question. Is it true that any formal power series ring over a centrally essential ring is centrally essential?

If R is a centrally essential algebra and A is a commutative algebra, then $A \otimes R$ is a centrally essential algebra.

Open Question. Is it true that any tensor product of centrally essential algebras is centrally essential?

4.

The exterior algebra $\Lambda(V)$ of a finite-dimensional vector space V over a field F of characteristic 0 or $p \neq 2$ is a centrally essential ring if and only if $\dim V$ is an odd positive integer. In particular, if F is a finite field of odd characteristic and $\dim V$ is an odd positive integer exceeding 1, then $\Lambda(V)$ is a centrally essential noncommutative finite ring.

5.

A ring R is a right distributive, right Noetherian, centrally essential ring if and only if R is a direct product of finitely many commutative Dedekind domains and uniserial Artinian rings.

Let R be a left Artinian, left uniserial ring with center C and Jacobson radical J and let n be the nilpotence index of the ideal J. If $J^{[\frac{n}{2}} \subseteq C$, then the ring R is centrally essential. **Open question:** Is the converse assertion true?

If a field F has a non-trivial derivation δ, then there is a non-commutative Artinian uniserial centrally essential ring R with $R/J(R) \cong F$.

References

1. [1] Markov, V.T., Tuganbaev, A.A. Centrally essential group algebras. Journal of Algebra. – 2018. – Vol. 512, no. 15. – P. 109-118.
2. [2] Markov, V.T., Tuganbaev, A.A. Centrally essential rings (Russian). Diskretnaya Matematika. – 2018. – Vol. 30, no. 2. – P. 55-61.
3. [3] Markov, V.T., Tuganbaev, A.A. Centrally essential rings which are not necessarily unital or associative (Russian). Diskretnaya Matematika. – 2018. – Vol. 30, no. 4. – P. 41-46.
4. [4] Markov, V.T., Tuganbaev, A.A. Rings essential over their centers, Comm. Algebra, 2019, https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1513012.
5. [5] Markov, V.T., Tuganbaev, A.A. Rings with Polynomial Identity and Centrally Essential Rings. Beiträge zur Algebra und Geometrie, 2019, https://doi.org/10.1007/s13366-019-00447-w.
6. [6] Markov, V.T., Tuganbaev, A.A. Constructions of Centrally Essential Rings. Comm. Algebra, (to appear).

ON SHALEV CONJECTURE FOR SIMPLE GROUPS

E. P. Vdovin
Sobolev Insctitute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
vdovin@math.nsc.ru

Recall that a group word $\omega = \omega(x_1, \ldots, x_d)$ is an element of a free group F_d with free generators $x_1, \ldots, x_d$. We may write $\omega = x_{i_1}^{m_1} \ldots x_{i_k}^{m_k}$ where $i_j \in \{1, \ldots, d\}$, and m_j are integers. For a group G and $g_1, \ldots, g_d \in G$ we write

$$\omega(g_1, \ldots, g_d) = g_{i_1}^{m_1} \ldots g_{i_k}^{m_k} \in G.$$

The corresponding map $\omega : G^d \to G$ is called a word map and its image is denoted by $\omega(G)$. Many papers are devoted to estimate the size of $\omega(G)$. In [1], Larsen and Shalev proved the following

Theorem 1. *Let G be a finite simple group of Lie type and of rank n and $\omega \neq 1$ be a word. Then there exists $N = N(\omega)$ such that if G is not of type A_n or ${}^2A_n$, and $|G| \geqslant N$ then*

$$|\omega(G)| \geqslant cn^{-1}|G|$$

for some absolute constant $c > 0$.

Notice that c depends on ω in Theorem 1. Later in [2], Nikolov and Pyber found a weaker lower bound for the groups of type A_n and ${}^2A_n$. In the expository article [3], Shalev conjectured that Theorem 1 holds for all groups of Lie type.

Conjecture. [3, Conjecture 5.6]. *For every word $\omega \neq 1$ there exists a number $N = N(\omega)$ such that if G is an alternating group of degree n or a finite simple group of Lie type of rank n, and $|G| \geqslant N$, then*

$$|\omega(G)| \geqslant cn^{-1}|G|,$$

where $c > 0$ is an absolute constant.

The main result of our talk is Theorem 2.

Theorem 2. *Let $\omega \in F_d \setminus F_d'$ and $G = \mathrm{PSL}_n^{\varepsilon}(q)$. Then there exists a positive constants N, c depending only on w such that if $|G| \geqslant N$, then*

$$|\omega(G)| \geqslant c\frac{\ln(n)}{n}|G|.$$

References

1. Larsen M., Shalev A. Word maps and Waring type problems // J. Amer. Math. Soc. – 2009. – V. 22. – P. 437–466.
2. Nikolov N., Pyber L. Product decompositions of quasirandom groups and a Jordan type theorem // J. Eur. Math. Soc. – 2011. – V. 13. – P. 1063–1077.
3. Shalev A. Some results and problems in the theory of word maps //ErdЕ‘s Centennial. вЂ“ Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. вЂ“ РЎ. 611-649.

IDENTITIES OF KAUFFMAN MONOIDS: FINITE AXIOMATIZATION AND ALGORITHMS

M. V. Volkov

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg

mikhail.v.volkov@yandex.ru

Kauffman monoids were introduced by Temperley and Lieb in their studies on some problems in statistical physics. Later, they were independently rediscovered as geometric objects by Kauffman in his work on knot theory. Over the past few years it turned out that algebraic properties of Kauffman monoids are of interest too. The talk presents results on equational theories of Kauffman monoids found by the speaker and his coauthors. We have discovered that, even though these theories admit no finite axiomatization, there are certain cases in which the identities of Kauffman monoids can be recognized by polynomial time algorithms.

N-R.E. DEGREES: A SURVEY OF RESEARCH OF PROF MARAT ARSLANOV AND HIS GROUP

G. Wu
Nanyang Technological University, Singapore
guohua@ntu.edu.sg

In this talk, I will give a survey of the achievement of Prof Marat Arslanov and his group in Kazan, with the focus on their work on n-r.e. Turing degrees, enumeration degrees and Q-degrees. Prof Arslanov has done leading research in the structure on d.r.e. Turing degrees since the early of 1980s, who first found a structural difference between r.e. Turing degrees and d.r.e. Turing degrees. After this, he started an extensive research on the isolation phenomenon in the dre degrees, and extended his research to the structures of n-r.e. enumeration degrees and Q-degrees with his students and collaborators. Most of his work is still influential in the society of computability theorists.

СТРУКТУРЫ, ВЫЧИСЛИМЫЕ ЗА ОГРАНИЧЕННОЕ ВРЕМЯ

П.Е. Алаев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
alaev@math.nsc.ru

В докладе планируется обсудить ряд вопросов, связанных с теорией вычислимых структур, а также связь вычислимых структур со структурами, вычислимыми за ограниченное время. В первую очередь в докладе будут рассматриваться примитивно рекурсивные структуры и структуры, вычислимые за полиномиальное время.

ФУНКЦИИ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И КОЛМОГОРОВСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

М. М. Арсланов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
Marat.Arslanov@kpfu.ru

Автором ранее было введено понятие функции без неподвижной точки. Оно, а также различные обобщения и уточнения этого понятия оказались полезными для описания полных относительно различных сводимостей классов множеств. Кроме того, исследования последних лет показали, что классы функций без неподвижных точек могут быть охарактеризованы в терминах Колмогоровской сложности.

Мой доклад будет посвящен изложению этих результатов.

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПОЛНЫЕ КВАЗИГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В.А. Артамонов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва
viacheslav.artamonov@gmail.com

Найдены достаточные условия распознавания полиномиальной полноты конечных квазигрупп по их латинским квадратам. Введена конструкция бипроизведения квазигрупп. Приведены достаточные условия, при которых бипроизведение полиномиальное полных квазигрупп является полным. Это позволяется строить полиномиальное полные квазигруппы любого порядка, являющего степенью 2, начиная с 64. Доказано, что любую конечную квазигруппу можно вложить в полиномиальное полную. Указаны способы построения криптосистеме на основании полиномиальное полных квазигрупп.

СХЕМЫ РЕФЛЕКСИИ, АЛГЕБРЫ И ПРОГРЕССИИ ТЕОРИЙ

Л. Д. Беклемишев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва
lbekl@yandex.ru

СПАРИВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ: ИСТОРИЯ, МОТИВИРОВКА И ПОСЛЕДНИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С. В. Востоков
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
sergei.vostokov@gmail.com

Главной задачей конструктивной теории полей классов является нахождение явной формулы для обобщен- ных законов взаимности. Данные формулы были получены в работах С.В. Востокова [1]. Однако, понимание природы данных формул (в рамках соответствия Вейля–Артина: элементы арифметических локальных полей должны быть аналогами мероморфных функций на римановых поверхностях) не было достигнуто. Частичное продвижение в данном направлении даёт подход Р. Кольмана [2], который предполагает рассмотрение явных формул в частном случае как решений дифференциального уравнения, связанного с интегрируемой системой. Также работа С. В. Востокова и М. А. Иванова [3] даёт связь явных формул с интегралом Шнирельмана, инте- грального оператора p-адической спектральной теории. В данном докладе данные подходы будут объединены, будет дано объяснение формы явных формул исходя из теории интегральных функционалов.

Литература

1. С. В. Востоков, Явная форма закона взаимности, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, том 42, выпуск 6, страницы 1288–1321.

2. Robert F. Coleman, The dilogarithm and the norm residue symbol, Bulletin de la Société Mathématique de France (1981), Volume: 109, page 373-402.

3. С. В. Востоков, М. А. Иванов, Интегральная теорема Коши и классический закон взаимности, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012, том 154, книга 2, страницы 73–82.

О СТЕПЕНЯХ ТЬЮРИНГА АВТОУСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЧТИ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

С.С. Гончаров
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
s.s.goncharov@math.nsc.ru

Доклад посвящен проблеме автоустойчивости моделей отностительно разрешимых представлений. А.Т. Нуртазиным была получена характеризация автоустойчивости моделей относительно разрешимых представлений. Из теоремы А.Т.Нуртазина следует, что автоустойчивость относительно разрешимых представлений влечет почти простоту этих моделей. Вопрос о сложности изоморфизма различных разрешимых представлений исслендовался С.С.Гончаровым и Н.А.Баженовым. Совместно с В.Харизановой и Р.Миллером получен ответ о независимости степеней Тьюринга автоустойчивости моделей в полных разрешимых теориях. Будут обсуждены также некоторые другие результаты и открытые проблемы теории разрешимых моделей.

О КОРНЯХ МНОГОЧЛЕНОВ НАД НОРМИРОВАННЫМИ ПОЛЯМИ

Ю.Л. Ершов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
ershov@math.nsc.ru

Гензелевы нормированные поля. Обобщения леммы Гензеля. Сепарант произвольного многочлена. Теорема о нормах корней и коэффициентов. Теорема о непрерывности корней. Многочлены Брауна.

АВТОМАТНЫЕ И ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

И. Ш. Калимуллин
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
ikalimul@gmail.com

ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБР ЛИ

М.И. Кузнецов
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород
kuznets-1349@yandex.ru, mikhail.kuznetsov@itmm.unn.ru

В докладе обсуждаются новые результаты исследования деформаций алгебр Ли над полями малой характеристики, связанных с классификацией простых алгебр Ли. Рассматриваются основные классы простых алгебр Ли – классические алгебры, алгебры Ли картановского типа, включая неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли четной характеристики, полупростые алгебры Ли. Приводятся примеры новых простых алгебр Ли, возникающих как деформации известных простых и полупростых алгебр. Излагаются результаты общей теории неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли и их фильтрованных деформаций.

ОБОБЩЁННЫЕ ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА

В. Д. Мазуров, Д. В. Лыткина, А. Х. Журтов
ИМ СО РАН, Новосибирск; СибГУТИ, Новосибирск; КБГУ, Нальчик
mazurov@math.nsc.ru

Пусть G — группа, F — её собственная нетривиальная подгруппа. Смежный класс Fx группы G по F называется *примарным смежным классом*, если все элементы из Fx являются p-элементами для одного и того же простого числа p, зависящего от Fx. Периодическая группа G, содержащая нетривиальную собственную нормальную подгруппу F называется *обобщённой группой Фробениуса* с *ядром* F, если Fx является примарным смежным классом для любого элемента $Fx \in G/F$ простого порядка.

Отметим, что любая конечная группа Фробениуса и любая группа Камины [1] ябляются обобщёнными группами Фробениуса.

Доклад посвящён классификации обобщённых групп Фробениуса.

Пусть V — модуль над полем для группы G. Скажем, что для данного простого числа p модуль V является *p'-свободным модулем* (и G действует *p'-свободно* на V), если $vh \neq v$ для любого $0 \neq v \in V$ и любого $1 \neq g \in G$, являющегося p'-элементом, т.е. элементом, порядок которого не делится на p.

Конечные совпадающие со своим коммутантом группы, для которых существует p'-свободный модуль при некотором p, описаны в [2].

Следующий результат описывает конечные обобщённые группы Фробениуса, совпадающие со своим коммутантом.

Теорема 1. *Пусть G — нетривиальная конечная обобщённая группа Фробениуса, совпадающая со своим коммутантом. Тогда её ядро F нильпотентно и G действует p'-свободно на каждом главном факторе G внутри F для любого простого числа p, делящего порядок G/F.*

Кроме того, справедливо одно из следующих утверждений:

(1) F является p-группой для некоторого нечётного простого числа p, делящего $|G:F|$, и $G/O_p(G) \simeq SL_2(p^a)$, $a \geqslant 1$.

(2) F является 2-группой и $G/O_2(G)$ изоморфна $L_2(2^a)$, $a \geqslant 2$, $Sz(2^{2b+1})$ или $L_2(2^{2a+1}) \times Sz(2^{2b+1})$, $(2a+1, 2b+1) = 1$.

(3) F является 3-группой и $G/O_3(G) \simeq SL_2(r)$, $r \in \mathfrak{R} \cup \{7, 17\}$.

(4) F является $\{3, r\}$-группой и $G/F \simeq SL_2(r)$, $r \in \mathfrak{R} \cup \{7, 17\}$.

(5) $G/F \simeq SL_2(5)$.

Здесь $\mathfrak{R}$ *— множество всех простых чисел* r*, удовлетворяющих следующим условиям:*

(a) $r = 2^a \cdot 3^b + 1$ *для* $a \geqslant 2$*,* $b \geqslant 0$*;*

(b) $(r+1)/2$ *— простое число.*

Если фактор-группа конечной обобщённой группы Фробениуса по ядру разрешима, то ядро может быть неразрешимым, как показывает пример обобщённой группы Фробениуса с ядром, изоморфным знакопеременной группе A_6, и фактор-группой по ядру порядка 2. Тем не менее, справедлива следующая

Теорема 2. *Если фактор-группа* G/F *конечной обобщённой группы Фробениуса* G *по ядру* F *не является 2-группой, то* F *разрешима.*

Авторы благодарны профессору А. С. Кондратьеву, обратившему их внимание на группы Камины.

Доклад основан на исследованиях, поддержаных грантом РФФИ (проект No. 19-01-00507).

Литература

1. A. R. Camina, Some conditions which almost characterize Frobenius groups. Israel J. Math., 31, No. 2 (1978), 153–160.
2. P. Fleischmann, W. Lempken, P. H. Tiep, Finite p'-semiregular groups. J. Algebra, 188, No. 2 (1997), 547–579.

ON GROUPS G_N^K AND Γ_N^K AND THEIR APPLICATIONS IN ALGEBRA AND TOPOLOGY

В. О. Мантуров
МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва); Новосибирский Государственный университет (Новосибирск)
vomanturov@yandex.ru

ЖОРДАНОВЫ ГРУППЫ

В. Л. Попов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва
popovvl@mi-ras.ru

Понятие абстрактной жордановой группы, введенное в 2010 году, инспирировано классической теоремой Жордана 1878 г. и теоремой Серра 2008 г. Оно оказалось плодотворным в контексте классических исследований конечных подгрупп групп автоморфизмов различных геометрических объектов, внося в эти исследования новый “социальный” аспект, который касается качественных свойств всех таких подгрупп сразу. Последние годы отмечены значительной активностью в этом направлении.

ЧТО ТАКОЕ УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ?

В.Н. Ремесленников

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск

remesl@ofim.oscsbras.ru

О СЛОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В. Л. Селиванов

Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск;
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
vseliv@ngs.ru

Обсуждаются результаты о вычислимо представимых числовых полях и их связи с упорядоченным полем всех вычислимых вещественных чисел. Будут также рассмотрены вопросы полиномиальной и примитивно рекурсивной представимости числовых полей, а также сложность некоторых алгоритмических проблем в соответствующих представлениях. Рассматриваемые вопросы связаны с алгоритмами компьютерной алгебры.

ТЕЗИСЫ СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

FACTORIZED GROUPS AND SOLUBILITY

B. Amberg
Johannes-Gutenberg University, Mainz (Germany)
amberg@uni-mainz.de

A group G is called factorized, if $G = AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ is the product of two subgroups A and B of G. In the theory of factorized groups triply factorized groups of the form $G = AB = AM = BM$, where M is a normal subgroup of G such that $A \cap B = A \cap M = B \cap M = 1$, often play a decisive role. If M is abelian, there is a one-to-one correspondence of such triply factorized groups with so-called braces. These are generalized radical rings, which were introduced by W.Rump to study certain set-theoretical solutions of the Quantum Yang-Baxter equation. In the case that M is not abelian, triply factorized groups may be constructed using certain near-rings, in particular local near-rings. This means that many problems about braces and local near-rings may studied as questions about triply factorized groups, and vice versa. We will also consider some solubility conditions about factorized groups $G = AB$, where the subgroups A and B contain abelian subgroups with small index.

STRUCTURE OF CONCORDANT SEMIGROUPS

P. A. Azeef Muhammed
Ural Federal University, Ekaterinburg (Russia)
azeefp@gmail.com

Semigroups are natural, yet rather general algebraic objects. Hence structure theorems of semigroups are quite elusive and often provided using partially ordered sets, semilattices, groups, groupoids, small categories etc. as the basic building blocks. Cross-connection theory provides the construction of a semigroup from its ideal structure using two associated small categories. Concordant semigroups were introduced and studied by Armstrong as generalisations of regular semigroups. In this talk, we discuss how the categories arising from the generalised Green relations in the concordant semigroup can be characterised as *consistent categories* and describe their interrelationship using cross-connections. This leads to a category equivalence between the category of concordant semigroups and the category of cross-connected consistent categories. This is a joint work with K.S.S. Nambooripad and P.G. Romeo.

DP-RANK IN DIFFERENT CLASSES OF THEORIES

B. S. Baizhanov, A. Mukankyzy
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan);
Eurasian national university, Nur-Sultan (Kazakhstan)
baizhanov@math.kz, amukankyzy@gmail.com

In this article we will give a notion of a family of relations of equivalence of depth n and consider theories of dp-rank ω and infinity. We will use the properties of superstability and independence introduced by S. Shelah and dp-rank, from P. Simon's article.

Definition 1. *A formula* $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ *has the independence property if for every* $n < \omega$ *there are sequences* $\bar{a}_l (l < n)$ *such that for every* $\omega \subseteq n$,

$$\models (\exists \bar{x})[\bigwedge_{l<n} \varphi(\bar{x}, \bar{a}_l)_{l\in\omega}].$$

T has Independence property (IP property) if some formula $\varphi(x, \bar{y})$ has independence Property.

Theorem 1. *The following are equivalent.*

(1) T *is superstable , i.e. stable in every large enough* λ *(in fact* $\lambda \geqslant 2^{|T|}$*).*

(2) T *is stable in some* λ *for which* $\lambda^{\aleph_0} > \lambda$.

(3) $R^1[x = x, L, (2^{|T|})^{++}] < |T|^+$.

(4) For some $m < \omega$, $R^m(\bar{x} = \bar{x}, L, \infty) < \infty$.

(5) T *is stable and* $D^1(x = x, L, |T|^{++}) < |T|^+$.

(6) T *is stable and for some* $m < \omega, D^m(\bar{x} = \bar{x}, L, \infty) < \infty$.

From this theorem it follows that, if the countable theory T is superstable, then in T does not exist inifinitly branching tree of formulas with one formula in each level.

Definition 2. *A theory* T *has dp-rank* $\geqslant$ *n, if there are formulas* $\varphi_1(x, \bar{y}), \varphi_2(x, \bar{y}), \ldots, \varphi_n(x, \bar{y})$ *and mutually indescernible sequences* $(\bar{a}_i^1)_{i<\omega}$, $(\bar{a}_i^2)_{i<\omega}, \ldots, (\bar{a}_i^n)_{i<\omega}$, *such that for any function* $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \omega$ *the type*

$$\{\varphi_k(x, \bar{a}^k_{\sigma(k)}) : k \leqslant n\} \cup \{\neg\varphi_k(x, \bar{a}^k_i) : i \neq \sigma(k), k \leqslant n\}$$

is consistent.

Definition 3. *A theory T has dp-rank* ω, *if for any* $n < \omega$ T *has dp-rank* $\geqslant$ *n.*

Proposition 1. *There exists an* ω*-stable theory with dp-rank* ω.

Definition 4. *A theory T has dp-rank infinity, if there is countable set of formulas* $\varphi_1(x, \bar{y}), \varphi_2(x, \bar{y}), \ldots$ *and mutually indescernible sequences* $(\bar{a}_i^1)_{i<\omega}$, $(\bar{a}_i^2)_{i<\omega}, \ldots$ *such that for any function* $\sigma : \omega \to \omega$ *the type*

$$\{\varphi_k(x, \bar{a}^k_{\sigma(k)}) : k \leqslant \omega\} \cup \{\neg\varphi_k(x, \bar{a}^k_i) : i \neq \sigma(k), k \leqslant \omega\}$$

is consistent.

Theorem 2. *If theory* T *has dp-rank infinity, then* T *is non-superstable.*

References

1. Shelah S., Classification theory and the number of non-isomorphis models // — 1978.
2. Simon P., Dp-minimality: invariant types and dp-rank // Journal of Symbolic Logic. — 2014. — V. 79 (4). — P. 1025–1045.
3. Tent K., Ziegler M., A course in Model Theory // Lecture notes in Logic. — 2012. — P. 67–70.
4. Bouscaren E., Dimensional order property and pairs of models // Annals of Pure and Applied Logic, vol.41 (1989), P. 205-231.
5. Baizhanov B., Baldwin D., Shelah S., Subsets of Superstable Structures are weakly benign // The Journal of Symbolic Logic, V. 70, N.1, March, 2005, P. 142-150.

A NOTE ON UNDECIDABILITY OF MODAL DEFINABILITY

P. Balbiani, T. Tinchev
Institut de recherche en informatique de Toulouse, CNRS – Toulouse University
France; Sofia University St. Kliment Ohridski, Sofia, Bulgaria
Philippe.Balbiani@irit.fr, tinko@fmi.uni-sofia.bg

Introduction. Let $\mathcal{C}$ be a class of relational structures and let $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ be languages. Suppose that any structure from $\mathcal{C}$ gives semantics for the formulas from any of the languages $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$. Then a formula A from $\mathcal{L}_1$ is called $\mathcal{L}_2$-*definable* if there exists a formula φ from $\mathcal{L}_2$ such that A and φ are valid on the same structures from $\mathcal{C}$. A typical important case is when $\mathcal{C}$ is a class of Kripke frames, i.e. tuples of the type $\langle W, R\rangle$, where $W \neq \varnothing$ and $R \subseteq W \times W$; $\mathcal{L}_1$ is the first-order language with equality and a binary predicate symbol $R_\Box$; $\mathcal{L}_2$ is the propositional modal language. In this case, for a first-order sentence A we simply say that A is modally definable. The modal definability problem—given a first-order sentence A, decide whether it is modally definable—and, respectively, the first-order definability problem have a long story of investigation, see, e.g., [3, 4] and references therein. For the algoritmic projection of the both above mentioned problems one can consult [5–7]. In fact, using Minsky machines technics Chagrova proved the famous theorems saying that modal and first-order definability problems are undecidable in the case of intuitionistic propositional formulas when $\mathcal{C}$ is the class of all Kripke frames. In [6, 7] in a very clear way these technics are applied to the modal language. Nevertheless, it is not clear how to modify their proofs in the case of specific classes of frames, especially when the relation is symmetric.

In [2] it is proven that if a class of frames $\mathcal{C}$ is stable (the definition is given in the next sections) then the problem of deciding the validity of sentences in $\mathcal{C}$ is reducible to the problem of deciding the modal definability of sentences with respect to $\mathcal{C}$. This theorem allows to prove undecidability of the modal definability problem in various classes of frames. Moreover, there it is remarked that the claim remains true if the modal language is replaced by a language that contains a formula that is valid in no frame from $\mathcal{C}$ and satisfies one model theoretic condition (see below). Here we make use of this observation to prove that in several important for point-free topology cases the adequate definability problem is undecidable.

Contact logics language (CLL). A widely accepted opinion is that the Boolean contact algebras, for brevity contact algebras (CA), are appropriate algebraic structures about Whiteheadean approach to point-free topology (see [8, 11]). Contact algebra is a Boolean algebra with binary predicate C_B, $\langle B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, *, C_B\rangle$, satisfying the following conditions:
1. $\neg C_B(0, x)$; 2. $x \neq 0 \to C_B(x, x)$; 3. $C_B(x, y) \to C_B(y, x)$; 4. $C_B(x' \sqcup x'', y) \leftrightarrow C_B(x', y) \vee C_B(x'', y)$ for any $x, x', x'', y \in B$.

A typical CA arises from a topological space $\mathcal{T}$ as follows: the Boolean algebra of all regular closed sets $RC(\mathcal{T})$ with the binary predicate $C_{\mathcal{T}}$ such that $C_{\mathcal{T}}(a, b) \iff a \cap b \neq \varnothing$. (Remark that the meet $\sqcap$ is not the set theoretic intersection from the definition of $C_{\mathcal{T}}$.)

Another examples for CA come from reflexive and symmetric Kripke frames. Let $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ be a Kripke frame with reflexive and symmetric R. If in the Boolean algebra of all subsets of W the predicate C_R is defined by $C_R(a, b) \iff (\exists x \in a)(\exists y \in b)(xRy)$ then we obtain a CA denoted by $CA(W, R)$.

The quantifier-free fragment of the first-order language without equality corresponding to CA is called CLL. That is, the language CLL has a denumerable set Var of Boolean variables, p, q, …; Boolean terms a, b,… and formulas φ, ψ, … defined as follows:

$$a := p \mid 0 \mid 1 \mid a \sqcap b \mid a \sqcup b \mid a^* \quad \varphi := \top \mid \bot \mid (a \leqslant b) \mid C(a, b) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi)$$

Let $\mathcal{B} = \langle B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, *, C_B\rangle$ be a CA. A valuation in $\mathcal{B}$ is a function $v : Var \to B$. The value $v(a)$ of a Boolean term a is defined in a standard way. The relation $(\mathcal{B}, v) \models \varphi$ is defined in a usual way starting from the atomic formulas: $(\mathcal{B}, v) \models (a \leqslant b) \iff v(a) \leqslant_{\mathcal{B}} v(b)$ and $(\mathcal{B}, v) \models C(a, b) \iff C_B(v(a), v(b))$. We say that φ is valid in $\mathcal{B}$, denoted by $\mathcal{B} \models \varphi$, if for every valuation v in $\mathcal{B}$, $(\mathcal{B}, v) \models \varphi$. A formula φ is valid in a reflexive and symmetric Kripke frame $\langle W, R\rangle$ if φ is valid in $CA(W, R)$. For more details the reader is invited to consult [1] and to see how CLL can be considered as a fragment of the propositional modal language with universal modality.

Let us define the binary relation $\preceq$ between reflexive and symmetric Kripke frames as follows:

$\langle W_1, R_1\rangle \preceq \langle W_2, R_2\rangle \iff$ for any φ if $\langle W_1, R_1\rangle \models \varphi$ then $\langle W_2, R_2\rangle \models \varphi$.

In [1] it is proven that $\langle W_1, R_1\rangle \preceq \langle W_2, R_2\rangle$ whenever $\langle W_2, R_2\rangle$ is a p-morphic image of $\langle W_1, R_1\rangle$, i.e. whenever there exists a surjective $f : W_1 \to W_2$ such that for all $x, y \in W_1$, (1) $xR_1y \Rightarrow f(x)R_2f(y)$ and (2) $f(x)R_2f(y) \Rightarrow \exists x_1 \exists y_1(f(x) = = f(x_1) \& f(y) = f(y_1) \& x_1R_1y_1)$.

CLL-stable class of frames. Let $\mathcal{C}$ be a class of reflexive and transitive Kripke frames. $\mathcal{C}$ is said to be CLL-stable if there exists a first-order formula $A(\overline{x}, x)$ and there exists a sentence B such that

(a) for all frames $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{C}$, for all lists $\overline{s}$ of worlds in $\mathfrak{F}$ and for all frames $\mathfrak{F}'$, if $\mathfrak{F}'$ is the relativized reduct of $\mathfrak{F}$ with respect to $A(\overline{x}, x)$ and $\overline{s}$ then $\mathfrak{F}'$ is in $\mathcal{C}$;

(b) for all frames $\mathfrak{F}_0$ in $\mathcal{C}$, there exists frames $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ in $\mathcal{C}$ and there exists a list $\overline{s}$ of worlds in $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{F}_0$ is the relativized reduct of $\mathfrak{F}$ with respect to $A(\overline{x}, x)$ and $\overline{s}$, $\mathfrak{F} \models B$, $\mathfrak{F}' \not\models B$ and $\mathfrak{F} \preceq \mathfrak{F}'$.

Now, from [2] it follows that if a class $\mathcal{C}$ is CLL-stable then the problem of deciding the validity of sentences in $\mathcal{C}$ is reducible to the problem of deciding the CLL-definability of sentences with respect to $\mathcal{C}$.

Let $\mathcal{C}_{r,s}$ be the class of all reflexife and symmetric Kripke frames and $\mathcal{C}^{fin}_{r,s}$ be the class of all finite frames from $\mathcal{C}_{r,s}$. Let $\mathcal{C}_{r,s,c}$ and $\mathcal{C}^{fin}_{r,s,c}$ be the corresponding classes of frames connected in graph theory sence.

Theorem. *The classes* $\mathcal{C}_{r,s}$, $\mathcal{C}^{fin}_{r,s}$, $\mathcal{C}_{r,s,c}$ *and* $\mathcal{C}^{fin}_{r,s,c}$, *are CLL-stable.*

As a corollary we obtain our main result applying results from [10], [9] and an appropriated lemma.

Corollary. *The CLL-definability of first-order sentences with respect to* $\mathcal{C}_{r,s}$ ($\mathcal{C}^{fin}_{r,s}$, $\mathcal{C}_{r,s,c}$, $\mathcal{C}^{fin}_{r,s}$) *is undecidable problem. Moreover, in the case of* $\mathcal{C}^{fin}_{r,s}$ ($\mathcal{C}^{fin}_{r,s,c}$) *it is co-r.e.-hard.*

Acknowledgments. Thanks are due to Bulgarian National Science Fund, contract DN02/15/2016.

References

1. Balbiani P., Tinchev T., Vakarelov D. Modal logics for region-based theory of space // Fundamenta Informaticae. – 2007. – V. 81, № 1–3. – P. 29–82.
2. Balbiani P., Tinchev T. Undecidable problems for modal definability // Journal of Logic and Computation. – 2017. – V. 27, № 3. – P. 901–920.
3. J. van Benthem. A note on modal formulas and relational properties // Journal of Symbolic Logic. – 1975. – V. 40. – P. 85–88.
4. J. van Benthem. Correspondence theory // Handbook of Philosophical Logic, Volume II: Extensions of Classical Logic, Reidel. – 1984. P. 167–247.

5. Chagrova L. An undecidable problem in correspondence theory // The Journal of Symbolic Logic. – 1991. – V. 56. – P. 1261–1272.
6. Chagrov A., Chagrova L. The truth about algorithmic problems in correspondence theory // In Advances in Modal Logic. College Publications. – 2006. – V. 6. – P. 121–138.
7. Chagrov A., Chagrova L. Demise of the algorithmic agenda in the correspondence theory? // Logical Investigations. – 2007. – V. 13. – P. 224–248 (in Russian).
8. Dimov G., Vakarelov D. Contact algebras and region-based theory of space: proximity approach — I // Fundamenta Informaticæ. – 2006. – V.74. – P. 209–249.
9. Lavrov I. Effective inseparability of the set of identically true formulas and the set of formulas with finite counterexamples for certain elementary theories // Algebra i Logika. – 1963. – V. 2. – P. 5–18 (in Russian).
10. Rogers H. Certain logical reduction and decision problems // Annals of Mathematics. – 1956. – V. 64. – P. 264–284.
11. Vakarelov D. Region-based theory of space: algebras of regions, representation theory, and logics // In Mathematical Problems from Applied Logic. Logics for the XXIst Century. II., Springer. – 2007. – P. 267–348.

ON τ-ESSENTIALLY INVERTIBILITY OF τ-MEASURABLE OPERATORS, AFFILIATED WITH A SEMIFINITE VON NEUMANN ALGEBRA

A. M. Bikchentaev
Kazan Federal University, Kazan (Russia)
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann algebra of operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and τ be a faithful normal semifinite trace on $\mathcal{M}$. Let I be the unit of the algebra $\mathcal{M}$. A τ-measurable operator A is said to be *τ-essentially right (or left) invertible* if there exists a τ-measurable operator B such that the operator $I - AB$ (or $I - BA$) is τ-compact [1] (for $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $\tau = \mathrm{tr}$, the canonical trace, see [2]). A necessary and sufficient condition for an operator A to be τ-essentially left invertible is that A^*A (or, equivalently, $\sqrt{A^*A}$) is τ-essentially invertible. We present a sufficient condition that a τ-measurable operator A not be τ-essentially left invertible. For τ-measurable operators A and $P = P^2$ the following conditions are equivalent:

1. A is τ-essential right inverse for P;
2. A is τ-essential left inverse for P;
3. $I - A, I - P$ are τ-compact;
4. PA is τ-essential left inverse for P.

For τ-measurable operators $A = A^3$, $B = B^3$ the following conditions are equivalent:

1. B is τ-essential right inverse for A;
2. B is τ-essential left inverse for A.

Pairs of faithful normal semifinite traces on $\mathcal{M}$ are considered.

References

1. Bikchentaev A.M.: On τ-essentially invertibility of τ-measurable operators, Internat. J. Theor. Phys. **58**(12), 9 pages (2019) https://doi.org/10.1007/s10773-019-04111-w

2. Halmos, P.R. Sunder V.S.: Bounded integral operators on L^2 spaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], 96. Springer-Verlag, Berlin-New York (1978)

ON ALGEBRAS OF RELATIONS WITH ONE OF ASSOCIATIVE PRIMITIVE-POSITIVE OPERATIONS

D. A. Bredikhin

Saratov State Technical University, Saratov (Russia)

bredikhin@mail.ru

Let $Rel(U)$ be the set of all binary relations on a base set U. A set of binary relations $\Phi \subseteq Rel(U)$ closed with respect to some collection Ω of operations on relations forms an algebra (Φ, Ω) called an *algebra of relations.* Theory of algebras of relations is an essential part of modern algebraic logic [1] and has important applications in theory of semigroups [2].

Denote by $R\{\Omega\}$ the class of all algebras isomorphic to the ones whose elements are binary relations and whose operations are members of Ω. Let $V\{\Omega\}$ be the variety and let $Q\{\Omega\}$ be the quasi-variety generated by $R\{\Omega\}$. The following problems naturally arise when the class $R\{\Omega\}$ is considered.

1. *Find a system of axioms for the class* $R\{\Omega\}$.
2. *Find a basis of quasi-identities for the quasi-variety* $Q\{\Omega\}$.
3. *Find a basis of identities for the variety* $V\{\Omega\}$.
4. *Does the class* $R\{\Omega\}$ *form a quasi-variety?*
5. *Does the quasi-variety* $Q\{\Omega\}$ *form a variety?*

Numerous studies have been devoted to solving these problems for various classes of algebras of relations. The first mathematician who treated algebras of relations from the point of view of universal algebra was A.Tarski [3]. He considered algebras of relations (Tarski's algebras of relations) with the following operations: Boolean operations $\cup, \cap, ^-$; operations of relational product $\circ$ and relational inverse $^{-1}$; constant operations Δ (diagonal relation), $\emptyset$ (empty relation), $\nabla = U \times U$ (universal relation). He showed that the class $R\{\circ, ^{-1}, \cup, \cap, ^-, \Delta, \emptyset, \nabla\}$ is not a quasi-variety and the quasi-variety generated by this class forms a variety [4]. R.Lyndon [5] found the infinite base of this variety and J.Monk [6] showed that it is not finitely based.

Operations on relations are usually determined using first-order predicate calculus formulas. Such operations are called *logical.* A logical operation is called *primitive-positive* [7] (in other terminology – *Diophantine* operations [8,9]) if it can be defined by a formula of the first-order predicate calculus containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. Note that the set-theoretical inclusion $\subseteq$ is compatible with all primitive-positive operations. Thus, any algebra of relations with primitive-positive operations (Φ, Ω) can be considered as partially ordered $(\Phi, \Omega, \subseteq)$. The corresponding abstract class of partially ordered algebras will be denoted by

$R\{\Omega,\subseteq\}$. The variety and the quasi-variety generated by the class $R\{\Omega,\subseteq\}$ will be denoted by $V\{\Omega,\subseteq\}$ and $Q\{\Omega,\subseteq\}$ respectively. Problems 1 – 5 for the class $R\{\Omega,\subseteq\}$ are formulated in the same way.

It is interesting to study algebras of relations with a binary operation, i.e., groupoids of relations [10,11]. We concentrate our attention on the following binary primitive-positive operation $*$ on $Rel(U)$ that we will treat as the operation of *reflexive product* and define in the following way:

$$\rho * \sigma = \{(u,v) : (\exists w)(u,w) \in \rho \wedge (w,v) \in \sigma\}.$$

It is easy to verify that this operation is associative, i.e., algebras of relations of the form $(\Phi, *)$ are semigroups. The main results are formulated in the following theorems. Their proofs are based on the description of quasi-equational theories of algebras of relations with primitive-positive operations [8].

A *partially ordered semigroup* is an algebraic system $(A,\cdot,\leqslant)$, where $(A,\cdot)$ is a semigroup and $\leqslant$ is a partial order relation on A that is compatible with multiplication, i.e., $x \leqslant y$ implies $xz \leqslant yz$ and $zx \leqslant zy$ for all $x,y,z \in A$.

Theorem 1. *The quasi-variety $Q\{*,\subseteq\}$ forms a variety in the class of all partially ordered semigroups. A partially ordered semigroup $(A,\cdot,\leqslant)$ belongs to the quasi-variety $Q\{*,\subseteq\}$ if and only if it satisfies the identities:*

$$x^2y = xy \ (1), \quad xy^2 = xy \ (2), \quad xyz = xzy \ (3), \quad xy \leqslant x^2 \ (4).$$

Theorem 2. *The class $R\{*,\subseteq\}$ does not form a quasi-variety. For a partially ordered semigroup $(A,\cdot,\leqslant)$ the following three conditions are equivalent.*

1. *$(A,\cdot,\leqslant)$ belongs to the class $R\{*,\subseteq\}$.*
2. *One of the following conditions holds:*
    - a) *$(A,\cdot,\leqslant)$ satisfies the identity $xy = x^2$ (5);*
    - b) *$(A,\cdot,\leqslant)$ contains the zero element o and satisfies the axioms: $y^2 \neq o \Rightarrow$ $\Rightarrow xy = x^2$ (6), $o \leqslant x$ (7).*
3. *$(A,\cdot,\leqslant)$ satisfies the axioms: $xy = x^2 \vee yz = zy = y^2$ (8), $xy = yx = x \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 \leqslant z$ (9).*

Corollary 1. *The quasi-variety $Q\{*\}$ forms a variety. A semigroup $(A,\cdot)$ belongs to the quasi-variety $Q\{*\}$ if and only if it satisfies the identities (1) – (3).*

Corollary 2. *The class $R\{*\}$ does not form a quasi-variety. For a semigroup $(A,\cdot)$ the following three conditions are equivalent.*

1. *$(A,\cdot)$ belongs to the class $R\{*\}$.*
2. *One of the following conditions holds:*
    - a) *$(A,\cdot)$ satisfies the identity (5);*
    - b) *$(A,\cdot)$ contains the zero element o and satisfies the axiom (6).*
3. *$(A,\cdot)$ satisfies the axiom (8).*

References

1. Andréka H., Neméti I., Sain, I.: Algebraic Logic. In: Handbook of Philosophical Logic, vol 2, 2nd ed., pp. 133–247. Kluwer Academic Publishers (2001)
2. Schein B.M.: Relation algebras and function semigroups. Semigroup Forum **1**, 1–62 (1970)
3. Tarski A.: On the calculus of relations. J. Symbolic Logic **6**, 73–89 (1941)
4. Tarski A.: Contributions to the theory of models, III. Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wet. 58, 56-64; (1956).
5. Lyndon R.C.: The representation of relation algebras, II. Ann. Math. **63**, 294–307 (1956)
6. Monk J.D. On representable relation algebras. Michigan Math. J. **11**, 207–210 (1964)
7. Böner P., Pöschel, F.R.: Clones of operations on binary relations. Contributions to general algebra **7**, 50–70 (1991)
8. Bredikhin D.A.: On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations. Sib. Math. J. **38**, 23–33 (1997)
9. Bredikhin D.A.: On algebras of relations with Diophantine operations. Dokl. Math. **57**, 435–436 (1998)
10. Bredikhin D.A.: On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification. Algebra Universalis **73**, 43-52 (2014)
11. Bredikhin D.A.: On generalized subreducts of Tarski's algebras of relations with the operation of bi-directional intersection. Algebra Universalis **79**, Article 77. 16 pp (2018)

THE LEFT-SHIFT APPROXIMATING K-ARY GCD ALGORITHM

D. A. Dolgov

Kazan Federal University, Kazan (Russia)

Dolgov.kfu@gmail.com

Computing greatest common divisor (GCD) is the one of the oldest problem in mathematics. Euclidian algorithm is the oldest gcd algorithm. It is based on the following recurrent formula $gcd(u,v) = gcd(v, u \mod v)$, which is applied until the second argument is null.

The k-ary gcd algorithm was proposed by Sorrenson. He described right-shift and left-shift versions of k-ary gcd algorithm [1]. It is based on the following recurrent formula $gcd(u,v) = gcd(v, \frac{xu+yv}{k})$, which is applied until the second argument is null. The special case of the right-shift k-ary gcd, that called "generalised binary gcd was proposed independently by Jebelean and Weber [2, 3], another version was described by Sorenson [5].

Let $k > 1$, $s \geqslant 1$, $e \geqslant 0$, $u \geqslant v > 0$ be integers, k, s be algorithm parameters. u, v have no common divisors with k. The main idea of a right-shift k-ary gcd is to find small coefficients x, y: $xu + yv = 0 \mod k$. The main idea of a left-shift k-ary gcd is to find coefficients x, y: $\frac{vk^e}{u} \approx \frac{x}{y}$, $vk^e \leqslant u < vk^{e+1}$. Ishmukhametov was introduced approximating k-ary gcd [4]. In this article we introduce left-shift approximating algorithm $LSAPGCD$. The $makeodd(x)$ function makes the number odd. The $findab(u, v, k)$ function returns two pairs of coefficients (a, b), (c, d): $\frac{vk^e}{u} \approx$ $\approx \frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}$, that are used in two reductions in the $LSAPGCD$ algorithm. We use Farey series to find the best approximation of the $\frac{vk^e}{u}$ fraction.

Algorithm 1 $LSAPGCD(u, v, k, s)$

```
while $uv \neq 0$ do
  if $u < v$ then
    $(u, v) = (v, u)$
  end if
  $t = \lfloor \log_2 v \rfloor - s\lfloor \log_2(k) \rfloor$
  $u' = \lfloor u/2^t \rfloor,\ v' = \lfloor v/2^t \rfloor$
  if $\frac{u'}{v'} \geqslant k+1$ then
    $u = u - \lfloor u'/v' \rfloor v$
  else
    $v' = v'k^e \ where\ v'k^e \leqslant u' < v'k^{e+1}$
    $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = findab(u', v', k)$
    $u = makeodd(|bvk^e - au|)$
    $v = makeodd(|dvk^e - cu|)$
  end if
end while
```

Consider reduction in a single iteration. Modular reduction is $\lfloor \log_2 u \rfloor + 2 > u >$ $> \frac{u}{u \mod v} \geqslant \frac{u}{v-1} > \frac{u}{v}$. Due to the Sorenson's theorem left-shift k-ary reduction is $\frac{u}{|bvk^e - au|} \geqslant k+1$. Therefore, it is possible to compare the lower bounds of reductions by choosing one or another algorithm depending on the current situation. If we want to refuse of long division $\frac{u}{v}$, we can use approximating value $\frac{u'}{v'}$ like in the listing of $LSAPGCD$ algorithm. Also we can compare difference of the binary length of input numbers u, v: $\lfloor \log_2(u) \rfloor - \lfloor \log_2(v) \rfloor \geqslant k+1$. But it is a more rough estimate. Instead of using modular reduction, we can use the dmod operation [3].

In the begining of the findab function we approximate the value of $\frac{v'}{u'}$. We construct the Farey series of order k. Like in the right-shift approximating gcd algorithm we compute $z = \frac{v'}{u'}$. If $z \geqslant 2$, take subinterval $[\frac{1}{z+1}; \frac{1}{z}]$, otherwise, take subinterval $[\frac{z-1}{z}; \frac{z}{z+1}]$. In both cases the chosen interval contains $\frac{v'}{u'}$. So, we find interval $(\frac{p_l}{q_l}, \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}})$ that $\frac{v'}{u'} \in (\frac{p_l}{q_l}, \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}})$. If $|\frac{v'}{u'} - \frac{p_l}{q_l}| > \frac{1}{q_l(k+1)}$ or $|\frac{v'}{u'} - \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}}| > \frac{1}{q_{l+1}(k+1)}$ then we find mediant of this interval $\frac{p_l+p_{l+1}}{q_l+q_{l+1}}$ and choose left part $(\frac{p_l}{q_l}, \frac{p_l+p_{l+1}}{q_l+q_{l+1}})$ or right part $(\frac{p_l+p_{l+1}}{q_l+q_{l+1}}, \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}})$ of the first interval depending on where $\frac{v'}{u'}$ is included. We repeat this process until $|\frac{v'}{u'} - \frac{p_l}{q_l}| > \frac{1}{q_l(k+1)}$ or $|\frac{v'}{u'} - \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}}| > \frac{1}{q_{l+1}(k+1)}$. If $|\frac{v'}{u'} - \frac{p_l}{q_l}| \leqslant \frac{1}{q_l(k+1)}$ and $|\frac{v'}{u'} - \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}}| \leqslant \frac{1}{q_{l+1}(k+1)}$ then we have result matrix, for example $\begin{pmatrix} p_l & q_l \\ p_l + p_{l+1} & q_l + q_{l+1} \end{pmatrix}$. Usage of successive Farey fractions does not lead to accumulation of spurious factors, because for two successive Farey fractions $\frac{p_l}{q_l}$, $\frac{p_{l+1}}{q_{l+1}}$ we have $p_l q_{l+1} - p_{l+1} q_l = 1$ [6], [7].

Theorem. *Let* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *is a result matrix of the findab function and* $u > v > 0$, $k \geqslant 2$ *are natural numbers. Then* $gcd(u, v) = gcd(au + bv, cu + dv)$.

References

1. Sorenson J.: Two fast GCD Algorithms. Journal of Algorithms **1**(16), 110–144 (1994).
2. Jebelean T.: Generalization of the Binary GCD Algorithm. ISSAC '93 Proceedings of the 1993 international symposium on Symbolic and algebraic computation: abstracts of the international conference, pp. 111–116.
3. Weber K.: The accelerated integer GCD algorithm. Journal ACM Transactions on Mathematical Software **6**(37), 734–739 (1995).
4. Ishmukhametov S.T.: An approximating k-ary GCD Algorithm. Lobachevskii Journal of Mathematics **6**(37), 723–728 (2016).
5. Sorenson J.: An analysis of the generalized binary GCD algorithm. Lectures in Honour of Hugh Cowie Williams (41), 254–258 (2004).
6. Hardy G.H., Wright E.M.: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Oxford University Press, 433 p. (1975).
7. Sedjelmaci S. M.: Jebelean-Weber's algorithm without spurious factors. Information Processing Letters **6**(102), 247–252 (2007).

ON COMPOSITIONS OF DISCRETE LINEAR ORDERS WITH STRUCTURES AND THEIR ALGEBRAS

D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (Russia); International Information Technology University, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan); Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)

dima-pavlyk@mail.ru, b.kulpeshov@iitu.kz, sudoplat@math.nsc.ru

Algebras of binary formulas were studied in a series of papers both in general case [1–3] and for theories of ordered structures [4–7].

We consider both compositions of structures and compositions of theories, for discrete linear orders and given structures, as well as related algebras.

Let $U = U^- \,\dot{\cup}\, \{0\} \,\dot{\cup}\, U^+$ be an alphabet consisting of a set U^- of *negative elements*, a set U^+ of *positive elements*, and zero 0. As above we write $u < 0$ for any element $u \in U^-$, $u > 0$ for any element $u \in U^+$, and $u \cdot v$ instead of $\{u\} \cdot \{v\}$ considering an operation $\cdot$ on the set $\mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}$.

A groupoid $\mathfrak{P} = \langle \mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}; \cdot \rangle$ is called an I*-groupoid* if it satisfies the following conditions:

- the set $\{0\}$ is the unit of the groupoid $\mathfrak{P}$;

- the operation $\cdot$ of the groupoid $\mathfrak{P}$ is generated by the function $\cdot$ on elements in U such that every elements $u, v \in U$ define a nonempty set $(u \cdot v) \subseteq U$: for any sets $X, Y \in \mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}$ the following equality holds:

$$X \cdot Y = \bigcup \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\};$$

- if $u < 0$ then the sets $u \cdot v$ and $v \cdot u$ consist of negative elements for any $v \in U$;

- if $u > 0$ and $v > 0$ then the set $u \cdot v$ consists of non-negative elements;

- for any $u > 0$ there is a unique *inverse* element $u^{-1} > 0$ such that $0 \in (u \cdot u^{-1}) \cap$ $\cap\, (u^{-1} \cdot u)$;

- if a positive element u belongs to a set $v_1 \cdot v_2$ then u^{-1} belongs to $v_2^{-1} \cdot v_1^{-1}$;

- for any elements $u_1, u_2, u_3 \in U$ the following inclusion holds:

$$(u_1 \cdot u_2) \cdot u_3 \supseteq u_1 \cdot (u_2 \cdot u_3),$$

and the strict inclusion

$$(u_1 \cdot u_2) \cdot u_3 \supset u_1 \cdot (u_2 \cdot u_3)$$

may be satisfied only for $u_1 < 0$ and $|u_2 \cdot u_3| \geqslant \omega$;

- the groupoid $\mathfrak{P}$ contains the *deterministic* subgroupoid $\mathfrak{P}_d^{\geqslant 0}$ (being a monoid) with the universe $\mathcal{P}(U_d^{\geqslant 0}) \setminus \{\varnothing\}$, where $U_d^{\geqslant 0} = \{u \in U^{\geqslant 0} \mid u^{-1} \cdot u = \{0\}\}$; and any set $u \cdot v$ is a singleton for $u, v \in U_d^{\geqslant 0}$.

Let $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ be structures of relational languages $\Sigma_{\mathcal{M}}$ and $\Sigma_{\mathcal{N}}$, respectively. We define the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ of $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ satisfying $\Sigma_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]} = \Sigma_{\mathcal{M}} \cup \Sigma_{\mathcal{N}}$, $M[N] = M \times N$ and the following conditions:

1) if $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$;

2) if $R \in \Sigma_{\mathcal{N}} \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $a_1 = \ldots = a_n$ and $(b_1, \ldots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$;

3) if $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \cap \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$, or $a_1 = \ldots = a_n$ and $(b_1, \ldots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$.

The theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ is called the *composition* $T_1[T_2]$ of the theories $T_1 =$ $= \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ and $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

By the definition, the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is obtained replacing each element of $\mathcal{M}$ by a copy of $\mathcal{N}$.

The composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is called *E-definable* if $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ has an $\emptyset$-definable equivalence relation E whose E-classes are universes of the copies of $\mathcal{N}$ forming $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$. By the definition, each E-definable composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is represented as a E-combination [8] of copies of $\mathcal{N}$ with an extra-structure generated by predicates on $\mathcal{M}$ and linking elements of the copies of $\mathcal{N}$.

Notice that compositions preserve the transitivity of theories. Besides, if the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is E-definable then the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ uniquely defines the theories $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, and vice versa.

Let λ be a positive cardinality, $\mathcal{M}_\lambda = \langle M_\lambda, < \rangle$ be a discrete linearly preordered set obtained from $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}; \leqslant \rangle$ by replacements of all elements by antichains A having the same cardinality λ.

Clearly, the theory $T_\lambda = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_\lambda)$ is transitive, i.e., has unique 1-type.

The structure $\mathcal{M}_\lambda$ is linearly ordered if and only if $\lambda = 1$. In such a case the algebra $\mathfrak{P}_{\mathbb{Z}}$ of binary isolating formulas for the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ is generated by the monoid $\mathfrak{P}'_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}; + \rangle$ assuming that all labels for $\mathbb{Z}$ are non-negative.

Now we put isomorphic structures $\mathcal{N}$, with a transitive theory, on each antichain A of $\mathcal{M}_\lambda$. The obtained structure is the E-definable composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ having a transitive theory. It can be considered as a variant of transitive arrangements of structures [9].

It was shown in [1, 2] that each algebra $\mathfrak{P}$ of binary isolating formulas of a fixed isolated type is an I-groupoid with non-negative labels and it can be realized by a structure $\mathcal{N}$, with a transitive theory, using a syntactic generic construction.

Considering the compositions $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$, we obtain the following:

Theorem. *For any I-groupoid $\mathfrak{P}$, consisting of non-negative labels, there is a theory T with a type $p \in S(T)$ and a regular labelling function $\nu(p)$ such that $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\mathbb{Z}}[\mathfrak{P}]$.*

This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546), Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

References

1. Sudoplatov S.V., Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk : NSTU, 2018.
2. Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), 380–407.
3. Sudoplatov S.V., Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), 408–433.
4. Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On algebras of distributions of binary formulas for quite o-minimal theories // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-Mathematical Series, 300:2 (2015), 5–13.
5. Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures // Algebra and Logic, 56:1 (2017), 13–36.
6. Baikalova K.A., Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Palyutin E.A., Sudoplatov S.V. On algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered enrichments // Russian Mathematics, 62:4 (2018), 1–12.
7. Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On algebras of distributions for binary formulas for quite o-minimal theories // Algebra and Logic, 57:6 (2018).
8. Sudoplatov S.V., Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 24 (2018), 65–84.
9. Sudoplatov S.V., Transitive arrangements of algebraic systems // Siberian Mathematical Journal, 40:6 (1999), 1142–1145.

ON QUASI ISOMETRIES ON HILBERT SPACES

Kh. Fawwaz
Institute of Mathematics and Mechanics of Kazan Federal University, Kazan (Russia)
khattab1058@hotmail.com

This paper aims to investigating some extensions of a quasi isometries on Hilbert spaces.

Quasi isometries and partial isometries provide an extensively studied extension of isometries. They have played significant role in structural study on Hilbert space operators. In the present paper we study some extensions of notion of n-quasi isometry on Hilbert space the definition of which is given below.

Definition 1. A bounded linear operator T is called a quasi isometry if $T^{*2}T^2 = T^*T$.

Definition 2. A bounded linear operator T is called a n-quasi isometry if $T^{*n}T^n = T^*T$.

Definition 3. A bounded linear operator T is called a quasinormal operator if operator T commutes with T^*T.

Definition 4. A bounded linear operator T is called a partial isometry if $TT^*T = T$. In this case T^*T and TT^* are projections.

It is clear that every isometry is a quasi-isometry, whereas an idempotent opertor is a quasi-isometry but need not to be an isometry. On the other hand, a quasi isometry which is an m-isometry turns out to be an isometry.

Proposition 1. *Let T be a n-quasi isometry ($T^{*n}T^n = T^*T$) ($n \geqslant 1$). Then T is a partial isometry.*

Proposition 2. *If T is a n-idempotent operator. Then T is a n-quasi isometry ($n \geqslant 1$).*

Theorem 3. *Let T be a n-quasi isometry ($T^{*n}T^n = T^*T$) ($n \geqslant 1$). Then T^k is a n-quasi isometry ($k > 1$).*

Theorem 4. *Let T be a n-quasi isometry ($T^{*n}T^n = T^*T$) ($n \geqslant 1$). If T is a compact operator, then T is a finite-dimensional operator.*

Theorem 5. *If T is a 2-idempotent operator. Then T is a n-quasi isometry, where ($n \geqslant 3$).*

References

1. S.M. Patel, A note on quasi-isometries, Glasnik Matematicki, 35(55) (2000), 113–118.

2. J. Agler, M. Stankus, m-isometries transformations of Hilbert space, I, Integral Equations and Operator Theroy, 21 (1995), 383–427.

LATIN SQUARES OVER QUASIGROUPS

A. V. Galatenko, V. A. Nosov, A. E. Pankratiev
Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia)
agalat@msu.ru

A finite quasigroup is a pair (Q, f) where Q is a finite set and f is a binary operation on Q such that for any $a, b \in Q$ equations $f(x, a) = b$ and $f(a, y) = b$ are solvable. Thus all rows and columns of the Cayley table are permutations; such tables are called Latin squares. Obviously a Latin square defines a Cayley table of some quasigroup.

Latin squares are a promising structure from cryptographic point of view. Shannon proved that a Latin square-based tabular substitution cipher is perfectly secure [1]. Currently there exists a large number of more practical cryptographic primitives (symmetric and public key ciphers, hash functions) based on Latin squares (see e.g. the survey [2]). Cryptographic applications require the ability to generate a large number of Latin squares (i.e. to make key space rich enough) with "good" properties (e.g. polynomial completeness that guarantees NP-hardness of solving equations on key bits, and absence of Latin subsquares that guarentees that the corresponding transformation will not degrade; algorithms for detection of polynomial completeness are studied e.g. in [3]; we focus on subsquares).

V. A. Nosov proposed a construction for generation of Latin squares of order 2^n, $n \in \mathbb{N}$ ([4]). In this case rows, columns and entries of a Latin square can be identified by Boolean n-tuples encoding the number (enumeration starts from 0). Thus matrix representation can be substituted with a functional one:

$$z_i = F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \tag{1}$$

$i = 1, \dots, n$, where $(z_1, \dots, z_n)$ is an element of the Latin square at the intersection of the row $(x_1, \dots, x_n)$ and the column $(y_1, \dots, y_n)$, $F_1, \dots, F_n$ are $2n$-ary Boolean functions. Consider the case

$$F_i = x_i \oplus y_i \oplus G_i\left(\pi_1(x_1, y_1), \dots, \pi_n(x_n, y_n)\right), \tag{2}$$

where $\pi_1, \dots, \pi_n$ are some binary Boolean functions. We say that the system $(G_1, \dots, G_n)$ is proper if for any two distinct n-tuples $(s_1, \dots, s_n)$ and $(t_1, \dots, t_n)$ there exists a position i, $1 \leqslant i \leqslant n$, such that $s_i \neq t_i$, but $G_i(s_1, \dots, s_n) = G_i(t_1, \dots, t_n)$. The definition directly implies that the ith variable is dummy for G_i. Relations (1), (2) determine a Latin square for any choice of $\pi_1, \dots, \pi_n$ if and only if the system $(g_1, \dots, g_n)$ is proper ([4]). Nosov and Pankratiev showed that the criterion holds if the order is k^n for some $k \in \mathbb{N}$, the operation $\oplus$ is replaced with addition in some Abelian group of order k, and Boolean encoding and functions are replaced with encoding and functions of k-valued logic ([5]). Thus a single proper family can generate up to $\left(k^{k^2}\right)^n$ Latin squares. However as it will be shown below all such squares contain a subsquare of order 1 (or equivalently every quasigroup defined by such Latin square contains a subquasigroup of order 1).

The construction can be further extended in the following way. Suppose Q is a finite set, $Q = \{0, \dots, k-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $(Q, f_1), \dots, (Q, f_n)$ are quasigroups. Rewrite the relation (2) in the following way:

$$F_i = f_i\left(x_i, f_i\left(y_i, G_i\left(\pi_1(x_1, y_1), \dots, \pi_n(x_n, y_n)\right)\right)\right), \tag{3}$$

$i = 1, \dots, n$, where $\pi_1, \dots, \pi_n$ are binary k-valued functions, G_i are n-ary k-valued functions. The following assertion holds.

Theorem 1. *Relations (1), (3) specify a Latin square for any choice of* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ *if and only if the family* $(G_1, \ldots, G_n)$ *is proper.*

Remark. *The assertion of Theorem 1 remains valid for any arrangement of parentheses in the right-hand side of (3).*

Remark. *The construction is unimprovable in a sense, i.e. if some* f_i *are not quasigroup operations then it is impossible to construct* $(G_1, \ldots, G_n)$ *such that the resulting operation is a quasigroup one for arbitrary* $\pi_1, \ldots, \pi_n$*.*

Theorem 2. *Suppose that* $(Q, f_1), \ldots, (Q, f_n)$ *are groups. Then for any proper family* $(G_1, \ldots, G_n)$ *and any choice of* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ *the quasigroup specified by the relations (1), (3) contains a unique subquasigroup of order 1.*

Theorem 3. *Suppose that* $k = 2$*. Then for any proper family* $(G_1, \ldots, G_n)$ *and any choice of* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ *the quasigroup specified by the relations (1), (3) contains a unique subquasigroup of order 1.*

Note that for the case $k = 3$, f_1 defined by the table $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ there are no subquasigroups.

A family of functions $(G_1, \ldots, G_n)$ is called triangular if variables and functions can be consistently renumbered so that variables $x_i, \ldots, x_n$ are dummy for G_i, $i = 1, \ldots, n$. In particlular G_1 is a constant. It can be easily seen that all triangular families are proper. Inversely, a proper family of order 1 (i.e. a single constant) is obviously triangular. The same result holds for the case $n = 2$.

Lemma. *Suppose that* $n = 2$*. Then any proper family is triangular.*

If a Latin square is generated by group operations and a triangular proper family then it contains a large Latin subsquare.

Theorem 4. *Suppose that* $(Q, f_1), \ldots, (Q, f_n)$ *are groups,* $(G_1, \ldots, G_n)$ *is a triangular family. Then for any choice of* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ *the quasigroup specified by the relations (1), (3) contains a subquasigroup of order* k^{n-1}*.*

Theorem 5. *Suppose that* $k = 2$*,* $(G_1, \ldots, G_n)$ *is a triangular family. Then for any choice of* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ *the quasigroup specified by the relations (1), (3) contains a subquasigroup of order* 2^{n-1}*.*

Remark. *The example presented above shows that the assertion does not hold in the general case.*

Piven ([6]) proposed a construction that allows one to obtain additional Latin squares by applying permutations to indices of x_i and y_j in (3). Exhaustive search in case $k = n = 2$ showed that there exist quasigroups free of subquasigroups (e.g. class 24 in [6]) and quasigroups with several subquasigroups of order 1 (e.g. class 22 in [6]).

Список литературы

1. C. Shannon, “Communication theory of secrecy systems”, *Bell System Techn. J.,* **28**:4 (1949), 656–715.

2. M. M. Glukhov, “On appplications of quasigroups in cryptography”, *Applied Discrete Mathematics,* 2 (2008), 28–32 (in Russian).

3. A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, “The complexity of decision of polynomial completeness of finite quasigroups”, *Discrete Mathematics,* **30**:4 (2018), 3–11 (in Russian).

4. V. A. Nosov, “Construction of classes of latin squares in a boolean database”, *Intelligent systems,* **4**:3–4 (1999), 307–320 (in Russian).

5. V. A. Nosov, A. E. Pankratiev, “Latin squares over Abelian groups”, *Journal of Mathematical Sciences,* **149**:3 (2008), 1230–1234.

6. N. A. Piven, “Investigation of quasigroups generated by proper families of Boolean functions of order 2”, *Intelligent Systems. Theory and Applications,* **22**:1 (2018), 21–35 (in Russian).

CHARACTERIZATIONS OF FINITE GROUPS WITH RESTRICTIONS ON THE NUMBER OF CLASSES OF ISOORDIC NON-σ-SUBNORMAL SUBGROUPS

V. A. Gritskova (Kovaleva)
Francisk Skorina Gomel State University, Gomel (Belarus)
vika.kovalyova@rambler.ru

All considered groups are finite and G always denotes a finite group. The symbol $\pi(G)$ denotes the set of all primes dividing the order of G. Two groups A and B are called *isoordic* if $|A| = |B|$.

In what follows, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is, $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$, and we put, following [1], $\sigma(G) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$. G is said to be *σ-soluble* [1] if every chief factor H/K of G is *σ-primary*, that is, H/K is a σ_i-group for some $i = i(H/K)$.

Recall also that a subgroup A of G is called *σ-subnormal* in G [1] if it is $\mathfrak{N}_\sigma$-*subnormal in* G in the sense of Kegel [2], that is, there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i = 1, \ldots, n$.

We use $i_\sigma(G)$ to denote the *number of classes of isoordic non-σ-subnormal subgroups* of G.

Note that in the classical case when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ (we use here and below the notation in [3]), G is σ^1-soluble if and only if G is soluble and a subgroup A of G is σ^1-subnormal in G if and only if it is subnormal in G. In the other classical case when $\sigma = \sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}$, G is σ^π-soluble if and only if G is π-separable and a subgroup A of G is σ^π-subnormal in G if and only if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = G$$

such that either A_{i-1} is normal in A_i or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is a π-group or a π'-group for all $i = 1, \ldots, n$. In the theory of π-soluble groups ($\pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$) we often deal with the partition $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \ldots, \{p_n\}, \pi'\}$ of $\mathbb{P}$, and G is $\sigma^{1\pi}$-soluble if and only if G is π-soluble. Note also that a subgroup A of G is $\sigma^{1\pi}$-subnormal in G if and only if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is a π'-group for all $i = 1, \ldots, n$, that is, A is $\mathfrak{F}$-*subnormal* in G in the sense of Kegel [2], where $\mathfrak{F}$ is the class of all π'-groups.

The σ-subnormal subgroups have found applications in the analysis of many open questions (see, in particular, the recent papers [1], [3]– [11] and the survey [12]). In [13], we prove the following criterion of σ-solubility of finite groups.

Theorem 1 [13, Theorm 1.2]. *If $i_\sigma(G) \leqslant 2|\sigma(G)|$, then G is σ-soluble.*

As an application of Theorem 1, we get from this result in the case when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ the following criterion of solubility.

Corollary 1. *If the number of all classes of isoordic non-subnormal subgroups of G is at most $2|\pi(G)|$, then G is soluble.*

The following special case of Corollary 1 is the main result in [14].

Corollary 2 (Lu, Meng [14, Theorem 1.1(1)]). *If the number of conjugacy classes of non-subnormal subgroups of G is at most $2|\pi(G)|$, then G is soluble.*

In the case when $\sigma = \sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}$, we get from Theorem 1 the following result.

Corollary 3. *If $i_{\sigma^\pi}(G) \leqslant 4$, then G is π-separable.*

In the case when $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \ldots, \{p_n\}, \pi'\}$, we get from Theorem 1 the following

Corollary 4. *If $i_{\sigma^{1\pi}}(G) \leqslant 2|\sigma^{1\pi}(G)|$, then G is π-soluble.*

Recall that G is said to be *σ-decomposable* (Shemetkov [15]) or *σ-nilpotent* (Guo and Skiba [16]) if $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ for some σ-primary groups $G_1, \ldots, G_n$. Note that in the case when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, G is σ^1-nilpotent if and only if G is nilpotent. In the case when $\sigma = \sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}$, G is σ^π-nilpotent if and only if G is *π-decomposable*, that is, $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$. Note also that if $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \ldots, \{p_n\}, \pi'\}$, G is $\sigma^{1\pi}$-nilpotent if and only if it is *π-special* [17], that is, $G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G)$.

From Theorem 1 we get also the following criterion of σ-nilpotency (see Theorem 1.7 in [13]).

Theorem 2. *If $i_\sigma(G) \leqslant |\sigma(G)| - 2$, then G is σ-nilpotent.*

Note that the restrictions on $i_\sigma(G)$ in Theorems 1 and 2 cannot be weakened. For Theorem 1 it follows from the example of the alternating group of degree 5 in the case when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3, 5\}'\}$. For Theorem 2 it follows from the example of the symmetric group of degree 3, where $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}'\}$.

References

1. Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups, J. Algebra, 2015, 436, 1–16.

2. Kegel O. H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten, Arch. Math., 1978, 30(3), 225–228.

3. Skiba A. N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups, J. Algebra, 2018, 495, 114–129.

4. Skiba A. N. A generalization of a Hall theorem, J. Algebra and its Applications, 2015, 15(4), 21–36.

5. Beidleman J. C., Skiba A. N. On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups, J. Group Theory, 2017, 20(5), 955–964.

6. Guo W., Zhang Chi, Skiba A. N., Sinitsa D. A. On H_σ-permutably embedded subgroups of finite groups, Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova, 2018, 139, 143–158.

7. Huang J., Hu B., Wu X. Finite groups all of whose subgroups are σ-subnormal or σ-abnormal, Comm. in Algebra, 2017, 45(1), 4542–4549.

8. Al-Sharo Kh. A., Skiba A. N. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups, Comm. in Algebra, 2017, 45, 4158–4165.

9. Hu B., Huang J., Skiba A. N. Groups with only σ-semipermutable and σ-abnormal subgroups, Acta Math. Hungar., 2017, 153(1), 236–248.

10. Guo W., Skiba A. N. On the lattice of $\Pi_{\mathfrak{J}}$-subnormal subgroups of a finite group, Bull. Austral. Math. Soc., 2017, 96(2), 233–244.

11. Guo W., Skiba A. N. On Π-quasinormal subgroups of finite groups, Monatsh. Math., 2018, 185(3), 443–453.

12. Skiba A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups, Comm. Math. Stat., 2016, 4, 281–309.

13. Kovaleva V. A. A criterion for a finite group to be σ-soluble, Comm. in Algebra, 2018, 46(12), 5410–5415.

14. Lu J., Meng W. Finite groups with non-subnormal subgroups, Comm. in Algebra, 2017, 45(5), 2043–2046.

15. Shemetkov L. A. Formations of finite groups, 1978, Moscow, USSR: Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature.

16. Guo W., Skiba A. N. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups, J. Group Theory, 2015, 18, 191–200.

17. Chunikhin S. A. Subgroups of finite groups, 1964, Minsk, BSSR: Nauka i Tehnika.

ON DENSE SUBSETS OF PRODUCTS AND INDEPENDENT MATRICES OF SETS

A. A. Gryzlov
Udmurt State University, Izhevsk (Russia)
gryzlov@udsu.ru

By the classical Hewitt-Marczewski-Pondiczery theorem the Tychonoff product of 2^{ω} many separable spaces is separable.

We consider the problem of the existence in the Tychonoff product of 2^{ω} many separable spaces a dense countable subset, which contains no nontrivial convergent in the product sequences and therefore is sequentially closed.

The first result was proved by W.H. Priestley. He proved [4] that such dense set exists in the Tychonoff product of 2^{ω} many closed unit intervals.

For our constructions we use independent matrices of subsets, defined by J. van Mill [3]. The notion of the independent matrix generelizes the classical notion of the independent family of sets.

Using indepependent matrices we prove the following.

A countable dense set, which contains no nontrivial convergent in the product sequences exsists:

- in the product of 2^{ω} many separable not single point Hausdorff spaces [1];
- in the product $Z^{2^{\omega}}$ of a not single point separable T_1-space Z [2].

Supported by Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project number 1.5211.2017/8.9.

References

1. A. A. Gryzlov. On dense subsets, convergent sequences and projections of Tychonoff products, Topology and its Applications, 233 (2018), 52–60.

2. A. A. Gryzlov. On dense subsets of Tychonoff products of T[1]-spaces, Topology and its Applications, 248 (2018), 164–175.

3. J. van Mill. A remark on the Rudin-Keisler order of ultrafilters, Houston Journal of Mathematics, vol. 9, no. 1 (1983), 125–129.

4. W. H. Priestley. A sequentially closed countable dense subset of I^I, Proc. Amer. Math. Soc., 24(2) (1970), 270–271.

ON INDUCTIVE SYSTEMS OF SEMIGROUP C^*-ALGEBRAS

R. N. Gumerov

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan (Russia)

Renat.Gumerov@kpfu.ru

The report is devoted to inductive systems of reduced semigroup C^*-algebras for semigroups of rational numbers and their limits.

The main part of motivation for our study comes from the results on morphisms between projective systems of topological groups and their limits [1]. A part of motivation for studying inductive systems of C^*-algebras comes from algebraic quantum field theory (see, for example, [2]). The general framework of algebraic quantum field theory is given by a covariant functor. Usually that functor acts from a category associated to a partially ordered set into a category describing the algebraic structure of local observables. The standard assumption in quantum physics is that the second category consists of unital C^*-algebras and their unital $*$-homomorphisms. Thus one has an inductive system of algebras of local observables over a partially ordered set.

A simple example of an inductive system $\mathcal{F} = (K, \{A_i\}, \{\sigma_{ji}\})$ of C^*-algebras over a directed set $(K, \leqslant)$ is that in which $\{A_i \mid i \in K\}$ is *a net of C^*-subalgebras* of a given C^*-algebra A. By this, one means that each A_i is a C^*-subalgebra containing the unit $\mathbb{I}_A$ of the algebra A, $A_i \subset A_j$ and $\sigma_{ji} : A_i \longrightarrow A_j$ is the inclusion mapping whenever $i, j \in K$ and $i \leqslant j$. Given such a net $\mathcal{F}$, the norm closure of the union of all A_i is itself a C^*-subalgebra of A which is a simple example of an inductive limit in the category of C^*-algebras and their $*$-homomorphisms.

The basic tool of the algebraic approach to quantum fields over a spacetime is a net of C^*-algebras over a set defined as a suitable set of regions of the spacetime ordered under inclusion [2].

Here, we recall the definition of reduced semigroup C^*-algebras for semigroups in the group of all rational numbers $\mathbb{Q}$. To do this we assume that Γ is an arbitrary subgroup in the group $\mathbb{Q}$. The positive cone in the ordered group Γ is denoted by the symbol

$$\Gamma^+ := \Gamma \cap [0, +\infty).$$

As usual, the symbol $l^2(\Gamma^+)$ stands for the Hilbert space of all square summable complex-valued functions on the additive semigroup Γ^+:

$$l^2(\Gamma^+) := \{f : \Gamma^+ \to \mathbb{C} : \sum_{\gamma \in \Gamma^+} |f(\gamma)|^2 < +\infty\}.$$

Recall that the inner product in the space $l^2(\Gamma^+)$ is given by the formula

$$< f, g >:= \sum_{\gamma\in\Gamma^+} f(\gamma)\overline{g(\gamma)}.$$

The canonical orthonormal basis in the Hilbert space $l^2(\Gamma^+)$ is denoted by $\{\, e_g \mid g \in \Gamma^+ \,\}$. That is, for arbitrary elements $g, h \in \Gamma^+$, we set $e_g(h) = \delta_{g,h}$, where

$$\delta_{g,h} := \begin{cases} 1, & \text{if } g = h\,; \\ 0, & \text{if } g \neq h\,. \end{cases}$$

Let us consider the C^*-algebra of all bounded linear operators $B(l^2(\Gamma^+))$ in the Hilbert space $l^2(\Gamma^+)$. For every element $g \in \Gamma^+$, we define the isometry $V_g \in B(l^2(\Gamma^+))$ by

$$V_g e_h := e_{g+h},$$

where h is an element of the semigroup Γ^+.

We denote by $C^*_r(\Gamma^+)$ the C^*-subalgebra in the C^*-algebra $B(l^2(\Gamma^+))$ generated by the set of isometries $\{\, V_g \mid g \in \Gamma^+ \,\}$. The algebra $C^*_r(\Gamma^+)$ is called *the reduced semigroup C^*-algebra of the semigroup* Γ^+.

It is worth noting that in the similar way a semigroup C^*-algebra can be defined for an arbitrary left cancellative semigroup. This algebra is a very natural object because it is generated by the regular representation for a given semigroup. The study of such semigroup C^*-algebras goes back to L. A. Coburn, R. G. Douglas, G. J. Murphy. There is a large literature on the subject at the present time (see, for example, [3, 4] and references there in).

In the case when Γ is the group of all integers $\mathbb{Z}$, the semigroup C^*-algebra $C^*_r(\mathbb{Z}^+)$ is often called *the Toeplitz algebra.*

The report is concerned with inductive systems of Toeplitz algebras and their limits. We discuss results concerning morphisms of these objects that are contained in [5, 6].

The research was funded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities, project № 1.13556.2019/13.1.

References

1. R. N. Gumerov, *On finite-sheeted covering mappings onto solenoids,* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (9), 2771–2778 (2005).

2. R. Haag, *Local quantum physics: fields, particles, algebras, Springer Texts and Monographs in Physics, 2nd. rev. and enlarged ed.* (1996).

3. X. Li, *Nuclearity of semigroup C^*-algebras and the connection to amenability,* Adv.Math., V. 244, 626-662 (2013).

4. E. V. Lipacheva and K. H. Hovsepyan, *Automorphisms of some subalgebras of the Toeplitz algebra,* Sib. Math. J., 57 (3), 525–531 (2016).

5. R. N. Gumerov, *Limit Automorphisms of C^*-algebras Generated by Isometric Representations for Semigroups of Rationals,* Sib. Math. J. 59 (1), 73–84 (2018).

6. R. N. Gumerov, *Inductive Limits for Systems of Toeplitz Algebras,* Lobachevskii J. Math., 40 (4), 481–490 (2019).

ONE EXTENSION OF THE CAPPING MINIMAL DEGREE THEOREM

S. T. Ishmukhametov
Kazan Federal University, Kazan (Russia)
Shamil.Ishmukhametov@kpfu.ru

In 1998 Angsheng Li and Dongping Yang published in the Journal of Symbolic Logic an article [1] containing incorrect proof of the assertion that there exists a pair of computably enumerable (c.e.) degrees $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, $\mathbf{0} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$ such that any minimal degree $\mathbf{m} < \mathbf{a}$ satisfies also $\mathbf{m} < \mathbf{b}$.

The author [2] refuted their claim by proving an opposite theorem that for any c.e. degrees $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, $\mathbf{0} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$ there is a minimal degree $\mathbf{m} < \mathbf{a}$ incomparable with $\mathbf{b}$. Thus any c.e. degree $\mathbf{b}$ in a lower cone $\mathbf{D}(\leqslant \mathbf{a})$ is cappable to $\mathbf{0}$ by a minimal degree $\mathbf{m}$. In the proof we used a new version of the priority argument to work with non-computable sets.

The team of four authors [3] proved a generalization of our theorem dropping a restriction on degree $\mathbf{b}$ to be c.e. Their theorem says that for any non-zero c.e. degree $\mathbf{a}$ and any non-zero degree $\mathbf{b}$ below $\mathbf{a}$ there is a minimal degree $\mathbf{m} < \mathbf{a}$ incomparable with $\mathbf{b}$. We show in our report how to use our method to prove the latter result.

Let c.e. set $A \in \mathbf{a}$ and $B = \Phi(A) \in \mathbf{b}$ be given. We need to construct a set $M \leqslant_T A$, satisfying the set of requirements:

$$\begin{aligned} &N_e : \ M_e = \Phi_e(M) \ total \to \ (M = \Gamma_e(M_e)) \ or \ M_e = \Delta_e), \\ &P_e : \ M \neq \Theta_e(B), \end{aligned}$$

where $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ and $\{\Theta_e\}_{e\in\omega}$ are effective enumerations of all partial computable functionals. Clearly, the written requirements ensure all set of required properties.

The difference between these requirements and those set in [2] is a new property of set B to be non-c.e. But this obstacle is easily dropped via the use of reduction $B = \Phi(A)$. Indeed, we need only to reach $P_e : \ M \neq \Theta_e(B)$ (which is equivalent to $M \neq \Theta_e(\Phi(A)))$. Since any change of functional $\Theta_e(\Phi(A)(n)$ causing inequality $M(n) \neq \Theta_e(\Phi(A))(n)$ is preceded by a change of c.e. set A at the interval bounded by use function $\varphi(\theta_e(n))$ then we have a permission to change $M(n)$ at this step so this observation preserves all strategies described in [2] safe to work as earlier. So some cosmetic changes to proof are required to obtain the theorem proved in [3].

References

1. Li A., Yang D. Bounding Minimal Degrees by Computably Enumerable Degrees // J. Symb.Log, **63**, 4 (1998), 1319-1347.

2. Ishmukhametov S.T. On a problem of Cooper and Epstein // J. Symb.Log, **68**, 1 (2003), 52-64.

3. Durrant B., Lewis-Pye A., Ng K.M., Riley J. Computably enumerable Turing degrees and the meet property // Proc. Amer.Math.Soc. 144 (2016), 1735-1744

INDICES OF ELEMENTS AND THE STRUCTURE OF FINITE GROUP

L. Kazarin
Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl
kazarin@uniyar.ac.ru

Let G be a finite group and $x \neq 1$ is an element of G. A well-known result of W. Burnside [1] states that if the number of conjugates of x is a power of a prime p, then G contains a proper normal subgroup H such that $xH \in Z(G/H)$. In particular, it is possible that $x \in H$. In each case G is not simple. Later it was proved in [2] that the normal closure of an element x in G is a soluble $\pi(\{x\}) \cup \{p\}$-group. A. and R. Camina's [3] proved that the normal closure H of x is an extension of a p-group by an abelian group.

Denote by the *index* of an element x the number of elements of G, that are conjugate with x in G (i.e. $i_g(x) = |G : C_G(x)|$). Using the above results, M. F. Felipe, A. Martinez-Pastor and V. M. Ortiz-Sotomayor [4] have proved recently the following

Theorem 1. *Let $G = AB$ be a finite group such that $i_G(x)$ is a prime power for all prime power elements $x \in A \cup B$. Then $G/F(F)$ is abelian. G has abelian Sylow subgroups if and only if $F(G)$ is abelian.*

The following is a generalization of the above result:

Theorem 2. *Let $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ be a finite group, that is generated by primary elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$. If indices $i_G(x_i)$ are prime powers for each $i \in$ $\in \{1, 2, \ldots, n\}$, then $G/F(G)$ is a group which is a product of abelian normal subgroups. In particular, $G = F_2(G)$.*

Theorem 3. *Let G be a finite non-abelian group containing subgroups A and B such that $\pi(G) = \pi(A) \cup \pi(B)$. If for each primary element $x \in (A \cup B)$ its index is a prime-power, then AB is a soluble normal subgroup of G.*

Clearly, in this case the subgroup AB satisfies the conclusion of Theorem 1.

The author likes to thank the Programme VIP-008 and the State Programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project N1.12873.2018/12.1

References

1. Burnside W. On groups of order $p^a q^b$. Proc. London Math. Soc., 2 (1904), 388–392.
2. Kazarin L.S. On Burnside's p^α-lemma. Math. Notes, 48:2 (1990), 749–751.
3. Camina A.R., Camina R.D. Implications of conjugacy class size. J. Group Theory, 1(3) (1998), 257–269.
4. Felipe M.J., Martinez-Pastor A., Ortiz-Sotomayor V.M. Prime power indices in factorized groups. Mediterr. J. Math., ArXiv: 1705.00842v1[math.GR] 2 May 2017.

IDENTITIES OF ASSOCIATIVE LIE NILPOTENT ALGEBRAS ON THREE GENERATORS

A. M. Kuz'min
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal (Brazil)
amkuzmin@ya.ru

Let $\varPhi$ be an associative and commutative unital ring, $\mathcal{A}$ the free unital associative algebra of countable rank over $\varPhi$, and $\mathcal{T}^{(n)}$ the T-ideal of $\mathcal{A}$ generated by the iterated commutator $\Big[\big[\ldots[a_1, a_2], \ldots, a_{n-1}\big], a_n\Big]$, $n \geqslant 2$. A number of authors [1] – [15], at different times, studied questions related with the possibility to include the product $\mathcal{T}^{(m)}\mathcal{T}^{(k)}$ into $\mathcal{T}^{(m+k-1)}$. Briefly, at the moment, it is known that $3\mathcal{T}^{(m)}\mathcal{T}^{(k)} \subseteq \mathcal{T}^{(m+k-1)}$ whenever at least one of the numbers m, k is odd [1, 5, 8, 14] and, on the other hand, $\mathcal{T}^{(2m)}\mathcal{T}^{(2k)} \nsubseteq \mathcal{T}^{(2m+2k-1)}$ [4, 8]. We present some results on the similar inclusion for the free 3-generated unital subalgebra $\mathcal{A}_3$ of $\mathcal{A}$. Namely, we prove that, for T-ideals $\mathcal{T}^{(n)} \cap \mathcal{A}_3 = \mathcal{T}_3^{(n)}$, the inclusion $\mathcal{T}_3^{(m)}\mathcal{T}_3^{(k)} \subseteq \mathcal{T}_3^{(m+k-1)}$ holds for all m, k with no restrictions on the ground ring $\varPhi$. In consequence, we obtain that, for every partition $k_1 + \ldots + k_t = n - 1$, the relatively free Lie nilpotent algebra $\mathcal{A}_3/\mathcal{T}_3^{(n)} = \mathcal{A}_3^{(n)}$ satisfies a multilinear identity of the form $\mathrm{c}_{k_1}x_1\mathrm{c}_{k_2}x_2\ldots\mathrm{c}_{k_{t-1}}x_{t-1}\mathrm{c}_{k_t} = 0$, where each $\mathrm{c}_k = \mathrm{c}_k\,(y_1, \ldots, y_k \mid z_1, \ldots, z_k)$ stands for the polynomial $\mathrm{c}_k = \bigg[\Big[\ldots\big[[y_1, z_1]\,y_2, z_2\big]\,y_3, \ldots, z_{k-1}\Big]\,y_k, z_k\bigg]$. In particular, it yields that $\mathcal{A}_3^{(n)}$ is strong Lie nilpotent of index n and the T-ideal $\mathcal{T}_3^{(n-1)}$ lies in the center $Z\big(\mathcal{A}_3^{(n)}\big)$. Moreover, we establish that the condition of the partition cannot be weakened up to the case $k_1 + \ldots + k_t < n - 1$. Finally, we prove that the additive module of $\mathcal{A}_3^{(n)}$ has no torsion.

Joint work with Sergey V. Pchelintsev.

References

1. A. Bapat, D. Jordan, Lower central series of free algebras in symmetric tensor categories, J. Algebra 373 (2013) 299–311, doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.10.001.

2. S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuszmaul, J. Li, Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields, J. Algebra 372 (2012) 251–274, doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.07.052.

3. R. R. Dangovski, On the maximal containments of lower central series ideals, Preprint (2016), arXiv:1509.08030v2.

4. G. Deryabina, A. Krasilnikov, Products of commutators in a Lie nilpotent associative algebra, J. Algebra 469 (2017) 84–95, doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.08.031.

5. G. Deryabina, A. Krasilnikov, On some products of commutators in an associative ring, Preprint (2018), arXiv:1812.03585.

6. P. Etingof, J. Kim, X. Ma, On universal Lie nilpotent associative algebras, J. Algebra 321 (2009), no. 2, 697–703.

7. A. S. Gordienko, Codimensions of commutators of length 4, Russ. Math. Surv. 62 (2007) 187–189; translation from Usp. Mat. Nauk 62 (2007) 191–192, doi.org/10.1070/RM2007v062n01ABEH004383.

8. A. V. Grishin, S. V. Pchelintsev, On centres of relatively free associative algebras with a Lie nilpotency identity, Sb. Math. 206 (2015) 1610–1627; translation from Mat. Sb. 206 (2015) 113–130, doi.org/10.1070/SM2015v206n11ABEH004506.

9. N. Gupta, F. Levin, On the Lie ideals of a ring, J. Algebra 81 (1983) 225–231, doi.org/10.1016/0021-8693(83)90217-X.

10. D. Krakowski and A. Regev, The polynomial identities of the Grassman algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 181 (1973) 429–438, doi.org/10.2307/1996643.

11. V. N. Latyshev, Über die endliche Erzeugbarkeit eines T-ideals mit dem Element $[x_1, x_2, x_3, x_4]$/ On finite generation of a T-ideal with the element $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ (Russian), Sib. Mat. Zh. 6 (1965) 1432–1434.

12. S. Pchelintsev, Relatively free associative algebras of ranks 2 and 3 with Lie nilpotency identity and systems of generators of some T-spaces, Preprint in Russian with English summary (2018), arXiv:1801.07771.

13. V. M. Petrogradsky, Codimension growth of strong Lie nilpotent associative algebras, Commun. Algebra 39 (2011) 918–928, doi.org/10.1080/00927870903527592.

14. R. K. Sharma and J. B. Srivastava, Lie ideals in group rings, J. Pure Appl. Algebra 63 (1990) 67–80, doi.org/10.1016/0022-4049(90)90056-N.

15. I. B. Volichenko, The T-ideals generated by the element $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Preprint no. 22, Inst. Math. Acad. Sci. Beloruss. SSR (1978) 13 pp. (Russian).

ON RANKS FOR FAMILIES OF THEORIES

N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov
Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics,
Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
nur_24.08.93@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

We consider dynamics of rank $\mathrm{RS}(\cdot)$ and degree $\mathrm{ds}(\cdot)$ [1] for subfamilies of families of theories.

Let $\overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ be the set of all complete elementary theories of a relational language Σ.

For a set $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ we denote by $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ the set of all theories $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is a structure of some E-class in $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$, $\mathcal{A}_E = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \in \mathcal{T}$ [2]. As usual, if $\mathcal{T} = \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ then $\mathcal{T}$ is said to be *E-closed*.

For a set $\mathcal{T}$ of theories in a language Σ and for a sentence φ with $\Sigma(\varphi) \subseteq \Sigma$ we denote by $\mathcal{T}_\varphi$ the set $\{T \in \mathcal{T} \mid \varphi \in T\}$. Any set $\mathcal{T}_\varphi$ is called the *φ-neighbourhood*, or simply a *neighbourhood*, for $\mathcal{T}$, or the (φ-)*definable* subset of $\mathcal{T}$. The set $\mathcal{T}_\varphi$ is also called (*formula-* or *sentence-*)*definable* (by the sentence φ) with respect to $\mathcal{T}$, or (*sentence-*)*$\mathcal{T}$-definable*, or simply *s-definable.*

Proposition [3]. *If $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ is an infinite set and $T \in \overline{\mathcal{T}}_\Sigma \setminus \mathcal{T}$ then $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ (i.e., T is an accumulation point for $\mathcal{T}$ with respect to E-closure Cl_E) if and only if for any formula $\varphi \in T$ the set $\mathcal{T}_\varphi$ is infinite.*

If $\mathcal{T}$ is a family of theories and Φ is a set of sentences, then we put $\mathcal{T}_\Phi = \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} \mathcal{T}_\varphi$ and the set $\mathcal{T}_\Phi$ is called (*type-* or *diagram-*)*definable* (by the set Φ) with respect to $\mathcal{T}$, or (*diagram-*)*$\mathcal{T}$-definable*, or simply *d-definable.*

Theorem 1. *Let $\mathcal{T}$ be a family of a countable language Σ and with* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$, *$\alpha \in \{0,1\}$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Then there is a d-definable subfamily $\mathcal{T}_\Phi$ such that* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Phi) = \alpha$ *and* $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\Phi) = n$.

Notice that the arguments in the proof of Theorem 1 do not work for $\alpha \geqslant 2$ since taking infinitely many disjoint s-definable infinite subfamilies $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ we can not guarantee that $\varphi_i \not\vdash_{\mathcal{T}} \psi_j$ for infinitely many $\mathcal{T}$-disjoint sentences ψ_j. Thus constructing d-definable e-minimal [4] subfamilies $\mathcal{T}_i$ of $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ it is possible to obtain $\mathrm{RS}\left(\bigcup\limits_i \mathcal{T}_i\right) \geqslant 3$, not $\mathrm{RS}\left(\bigcup\limits_i \mathcal{T}_i\right) = 2$.

At the same time, constructing countably many d-definable subfamilies $\mathcal{T}_i$ of $\mathcal{T}_{\varphi_i}$, $i \in \omega$, with pairwise inconsistent φ_i, we can choose some infinite $I \subseteq \omega$, such that accumulation points T_i for $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, form an e-minimal family. Thus, possibly loosing the d-definability we obtain a d_∞-definable subfamily $\mathcal{T}' = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ with $\mathrm{RS}(\mathcal{T}') = 2$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}') = 1$. Taking some n disjoint $\mathcal{T}'$ we obtain a subfamily $\mathcal{T}''$, being the union of $\mathcal{T}'$, with $\mathrm{RS}(\mathcal{T}') = 2$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}') = n$.

Now we can continue the process for greater countable ordinals α obtaining a d_∞-definable subfamily $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ with $\mathrm{RS}(\mathcal{T}^*) = \alpha$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}^*) = n$ for given $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Theorem 2. *Let $\mathcal{T}$ be a family of a countable language Σ and with* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$, *$\alpha$ be a countable ordinal, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Then there is a d_∞-definable subfamily $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ such that* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}^*) = \alpha$ *and* $\mathrm{ds}(\mathcal{T}^*) = n$.

This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132349, AP05132546), the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a).

References

1. Sudoplatov S.V. Ranks for families of theories and their spectra // arXiv:1901.08464v1 [math.LO], 2019.
2. Sudoplatov S.V. Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 24 (2018), 65–84.
3. Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 16 (2016), 131–144.
4. Sudoplatov S.V. Approximations of theories // arXiv:1901.08961v1 [math.LO], 2019.

THE SUPERSOLUBILITY OF A GROUP WITH NS-SUPPLEMENTED P-SUBGROUPS

V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk
Francisk Skorina Gomel State University, Gomel (Belarus)
victor.monakhov@gmail.com, alexander.trofimuk@gmail.com

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. We use the standard notations and terminology of [1]. The set of all prime divisors of the order of G is denoted by $\pi(G)$. The semidirect product of a normal subgroup A and a subgroup B is denoted by $[A]B$.

By the Zassenhaus Theorem ([1, IV.2.11]), a group G with cyclic Sylow subgroups has a cyclic Hall subgroup H such that the quotient G/H is also cyclic. In particular, G is supersoluble. A group G with abelian Sylow subgroups may be non-soluble (for example, $PSL(2,5)$) and the compositional factors of G are known [2].

In some papers, the sufficient conditions of solubility and supersolubility of a group in which Sylow subgroups permute with some subgroups were established. For example, the supersolubility of a group G such that every Sylow subgroup P of G permutes with subgroups of some supplement of P in G was obtained in works [3], [4]. Groups in which all maximal subgroups of every Sylow subgroup have properties close to the properties of normal subgroups were studied in [5]– [8].

The following concept was introduced in [9].

Definition 1. Two subgroups A and B of a group G are said to be *NS-permutable*, if they satisfy the following conditions:

(1) whenever X is a normal subgroup of A and $p \in \pi(B)$, there exists a Sylow p-subgroup B_p of B such that $XB_p = B_pX$;

(2) whenever Y is a normal subgroup of B and $p \in \pi(A)$, there exists a Sylow p-subgroup A_p of A such that $YA_p = A_pY$.

Moreover, if $G = AB$, we say that G is an *NS-permutable product* of the subgroups A and B.

The totally permutable [10] and totally c-permutable [11] subgroups are NS-permutable [9, Lemma 2]. The supersolubility of a group $G = AB$ such that it is the NS-permutable product of supersoluble subgroups A and B was obtained in [9].

We introduce the following

Definition 2. A subgroup A of a group G is said to be *NS-supplemented* in G, if there exists a subgroup B of G such that:

(1) $G = AB$;

(2) whenever X is a normal subgroup of A and $p \in \pi(B)$, there exists a Sylow p-subgroup B_p of B such that $XB_p = B_pX$.

In this case we say that B is a *NS-supplement* of A in G.

We proved the following theorems:

Theorem 1. *Let P be a Sylow p-subgroup of G. If P is NS-supplemented in G, then G is p-supersoluble in each of the following cases:*

(1) $p \neq 3$;

(2) $p = 3$ and G is 3-soluble.

Corollary 1.1. *If all non-cyclic Sylow subgroups of G are NS-supplemented in G, then G is supersoluble.*

Example 1. *The group $PSL(2,7)$ is an NS-supplement of its Sylow 3-subgroup. Hence we can not omit the condition ≪group is 3-soluble≫ in Theorem 1.*

Theorem 2. *Let G be a p-soluble group and P be its Sylow p-subgroup. If for every maximal subgroup P_i of P and every $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, there exists a Sylow q-subgroup Q in G such that $P_iQ = QP_i$, then G is p-supersoluble.*

It is easy to see that the NS-supplemented maximal subgroups of P satisfy Theorem 2, therefore we have the following corollary.

Corollary 2.1. *Let G be a p-soluble group and P be its Sylow p-subgroup. If every maximal subgroup of P is NS-supplemented in G, then G is p-supersoluble.*

Since a solvable group with a cyclic Sylow p-subgroup is p-supersoluble, Corollary 2.1 implies

Corollary 2.2. *Let G be a soluble group. If all maximal subgroups of any non-cyclic Sylow subgroup of G are NS-supplemented in G, then G is supersoluble.*

Example 2. *In the simple group $PSL(2,5) = A_5$ all maximal subgroups of any Sylow subgroup are NS-supplemented. Hence we can not omit the solubility in Corollary 2.2.*

References

1. B. Huppert. *Endliche Gruppen I.* Springer (Berlin-Heidelberg-New York, 1967).
2. J. H. Walter. Characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups. *Annals of math.,* **89**:3 (1969), 405–514.
3. W. Guo. Finite groups with seminormal Sylow subgroups. *Acta Mathematica Sinica,* **24**:10 (2008), 1751–1758.
4. V. S. Monakhov. Finite groups with seminormal Hall subgroups. *Mathematical notes,* **80**:4 (2006), 542–549.
5. S. Li, Z. Shen, J. Liu and X. Liu. The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups. *J. Algebra*, **319** (2008), 4275–4287.
6. A. N. Skiba. On weakly s-permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra,* **315** (2007), 192–209.
7. V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups. *J. Group Theory,* **17**:5 (2014), 889–895.
8. V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk. Supersolubility of a finite group with normally embedded maximal subgroups in Sylow subgroups. *Siberian Math. J.,* **59**:5 (2018), 922–930.
9. M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda, A. Martinez-Pastor, M. D. Perez-Ramos. On finite products of groups and supersolubility. *J. Algebra,* **323** (2010), 2922–2934.
10. A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. *Products of finite groups.* (Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2010).
11. W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups. *Publ. Math. Debrecen,* **68**:3-4 (2006), 433–449.

FINITE NON-NILPOTENT RINGS WITH COMPLETE COMPRESSED ZERO DIVISOR GRAPHS

A. S. Monastyreva
Altai State University, Barnaul (Russia)
akuzmina1@yandex.ru

Let R be a associative ring. $D(R)$ denotes the set of all (one sided and two-sided) zero-divisors of R. Also, $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$. For any $a \in R$, we denote $l(a) = \{x \in R;\ xa = 0\}, r(a) = \{x \in R;\ ax = 0\}$. For $x, y \in D(R)$, we say that $x \sim y$ if and only if $r(x) \cup l(x) = r(y) \cup l(y)$. It is clear that $\sim$ is a equivalence relation. The class of x is denoted by $[x]$.

The compressed zero-divisor graph $\Gamma_\sim(R)$ of an ring R is the looped graph whose vertices are all classes $[x]$ where $x \in D(R)^*$, and two vertices $[x]$ and $[y]$ are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$.

Such graphs for commutative case are studied in [1–3].

We study structure of a finite non-nilpotent ring R such that the compressed zero divisor graphs $\Gamma_\sim(R)$ is complete with loops.

References

1. N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Communications in Algebra, **38** (2010), 2965–2980.

2. S. Spiroff, C. Wickham, *A Zero-Divisor Graph Determined by Equivalence Classes of Zero Divisors*, Communications in Algebra, **39** (2011), 2338–2348.

3. N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3*, Communications in Algebra, **41** (2013), 765–775.

GENERALIZED RANK FORMATIONS OF FINITE GROUPS

V. I. Murashka

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel (Belarus)

mvimath@yandex.ru

All groups considered here are finite. A function of the form $f : \mathbb{P} \cup \{0\} \to \{formations\}$ is called a composition definition. Recall [1, p. 4] that a formation $\mathfrak{F}$ is called *composition* or *Baer-local* if

$$\mathfrak{F} = (G \mid G/G_{\mathfrak{S}} \in f(0) \text{ and } G/C_G(\overline{H}) \in f(p) \quad \text{for every abelian } p\text{-chief factor } \overline{H} \text{ of } G)$$

for some composition definition f. A formation is composition (Baer-local) [2, IV, 4.17] if and only if it is *solubly saturated*, i.e. from $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{F}$ it follows that $G \in \mathfrak{F}$, where $G_{\mathfrak{S}}$ is the soluble radical of G. Recall that any nonempty composition formation $\mathfrak{F}$ has an unique composition definition F such that $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ for all primes p and $F(0) = \mathfrak{F}$ (see [1, 1, 1.6]). In this case F is called the *canonical composition definition* of $\mathfrak{F}$.

Recall that a chief factor $\overline{H}$ of G is called $\mathfrak{X}$-*central* in G provided $\overline{H} \rtimes G/C_G(\overline{H}) \in \mathfrak{X}$ (see [3, p. 127–128]), otherwise it is called $\mathfrak{X}$-*eccentric.* The symbol $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ denotes the $\mathfrak{X}$-*hypercenter* of G, that is, the largest normal subgroup of G such that every chief factor $\overline{H}$ of G below it is $\mathfrak{X}$-central. If $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups, then $\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}}(G) = \mathrm{Z}_\infty(G)$ is the hypercenter of G. If $\mathfrak{F}$ is a composition formation, then by [1, 1, 2.6] $\mathfrak{F} = (G \mid Z_{\mathfrak{F}}(G) = G)$.

Let $\overline{N}$ be a chief factor of G. Then $\overline{N} = \overline{N}_1 \times \ldots \times \overline{N}_n$ where $\overline{N}_i$ are isomorphic simple groups. The number $n = r(\overline{N}, G)$ is the *rank* of $\overline{N}$ in G. A *rank function* R [2, VII, 2.3] is a map which associates with each prime p a set $R(p)$ of natural numbers. For each rank function let

$$\mathfrak{E}(R) = (G \in \mathfrak{S} \mid \text{for all } p \in \mathbb{P} \text{ each } p\text{-chief factor of } G \text{ has rank in } R(p)).$$

Note that $\mathfrak{E}(R)$ is a formation. Heineken [4] and Harman [5] characterized all rank functions R for which $\mathfrak{E}(R)$ is local. Analogues questions for formations not of full characteristic were studied by Huppert [6], Kohler [7] and Harman [4]. Haberl and Heineken [8] characterized all rank functions R for which $\mathfrak{E}(R)$ is a Fitting formation. In this paper we generalize the previous construction:

Definition 1. (1) *A generalized rank function $\mathcal{R}$ is a map defined on direct products of isomorphic simple groups by*

(*a*) *$\mathcal{R}$ associates with each simple group S a pair $\mathcal{R}(S) = (A_{\mathcal{R}}(S), B_{\mathcal{R}}(S))$ of possibly empty disjoint sets $A_{\mathcal{R}}(S)$ and $B_{\mathcal{R}}(S)$ of natural numbers.*

(b) *If* N *is the direct products of simple isomorphic to* S *groups, then* $\mathcal{R}(N) = = \mathcal{R}(S)$.

(2) *Let* $\overline{N}$ *be a chief factor of* G. *We shall say that* a generalized rank *of* $\overline{N}$ *in* G *lies in* $\mathcal{R}(\overline{N})$ *(briefly* $gr(\overline{N}, G) \in \mathcal{R}(\overline{N})$*) if* $r(\overline{N}, G) \in A_{\mathcal{R}}(\overline{N})$ *or* $r(\overline{N}, G) \in B_{\mathcal{R}}(\overline{N})$ *and if some* $x \in G$ *fixes a composition factor* $\overline{H}/\overline{K}$ *of* $\overline{N}$ *(i.e.* $\overline{H}^x = \overline{H}$ *and* $\overline{K}^x = \overline{K}$*), then* x *induces an inner automorphism on it.*

(3) *With each generalized rank function* $\mathcal{R}$ *and a class of groups* $\mathfrak{X}$ *we associate a class*

$$\mathfrak{X}(\mathcal{R}) = (G \mid \overline{H} \notin \mathfrak{X} \text{ and } gr(\overline{H}, G) \in \mathcal{R}(\overline{H}) \text{ for every } \mathfrak{X}\text{-eccentric chief factor } \overline{H} \text{ of } G)$$

We shall say that a generalized rank function $\mathcal{R}$ is hereditary if for any simple group S holds:

(a) from $a \in A_{\mathcal{R}}(S)$ it follows that $b \in A_{\mathcal{R}}(S)$ for any natural $b|a$;

(b) from $a \in B_{\mathcal{R}}(S)$ it follows that $b \in A_{\mathcal{R}}(S) \cup B_{\mathcal{R}}(S)$ for any natural $b|a$.

Theorem 1. *Let* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ *be a composition formation with the canonical composition definition* F *and* $\mathcal{R}$ *be a generalized rank function. Then*

$\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ *is a composition formation with the canonical composition definition* $F_{\mathcal{R}}$ *such that* $F_{\mathcal{R}}(0) = \mathfrak{F}(\mathcal{R})$ *and* $F_{\mathcal{R}}(p) = F(p)$ *for all* $p \in \mathbb{P}$.

(2) *If* $\mathfrak{F}$ *is normally hereditary and* $\mathcal{R}$ *is hereditary, then* $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ *is normally hereditary.*

Recall [9] that a group is called *c-supersoluble* if every its chief factor is a simple group.

Corollary 1.1 [10, Theorem 1]. *The class* $\mathfrak{U}_c$ *of all c-supersoluble groups is a composition formation with the canonical composition definition* h *such that* $h(p) = = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ *for every prime* p *and* $h(0) = \mathfrak{U}_c$.

In [11] the class $w\mathfrak{U}$ of widely supersoluble groups was introduced. It is a hereditary saturated formation of soluble groups. Recall [12] that a group is called widely c-supersoluble if its abelian chief factors are $w\mathfrak{U}$-central and other chief factors are simple groups.

Corollary 1.2 [12, Theorem A]. *The class* $\mathfrak{U}_{cw}$ *of all widely* c*-supersoluble groups is a normally hereditary composition formation with the canonical composition definition* h *such that* $h(p) = \mathfrak{N}_p(G|G \in w\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}_p\mathcal{A}(p-1))$ *for every prime* p *and* $h(0) = \mathfrak{U}_{cw}$.

In [13] Guo and Skiba introduced the class $\mathfrak{F}^*$ of quasi-$\mathfrak{F}$-groups for a saturated formation $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}^* = (G \mid \text{ for every } \mathfrak{F}\text{-eccentric chief factor } \overline{H} \text{ and every } x \in G,\ x \text{ induces an inner automorphism on } \overline{H}).$$

Corollary 1.3 [13, Theorem 2.6]. *For every saturated formation* $\mathfrak{F}$ *containing all nilpotent groups with the canonical local definition* F, *the formation* $\mathfrak{F}^*$ *is composition with the canonical composition definition* F^* *where* $F^*(p) = F(p)$ *for every prime* p *and* $F^*(0) = \mathfrak{F}^*$. *Moreover, if the formation* $\mathfrak{F}$ *is normally hereditary, then* $\mathfrak{F}^*$ *is also normally hereditary.*

References

1. W. Guo. Structure theory for canonical classes of finite groups (Springer, 2015).
2. K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups (Walter de Gruyter, 1992).
3. L. A. Shemetkov, A. N. Skiba. Formations of algebraic systems (Nauka, Moscow, 1989). (In Russian)

4. H. Heineken. Group classes defined by chief factor ranks. *Boll. Un. Mat. Ital. B* **16** (1979) 754–764.

5. D. Harman. Characterizations of some classes of finite soluble groups. Ph.D. thesis, University of Warwick, 1981.

6. B. Huppert. Zur Gaschiitzschen Theorie der Formationen. *Math. Ann.* **164** (1966) 133–141.

7. J. Kohler. Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index. *Canad. J. Math.* **16** (1964) 435-442.

8. K. L. Haberl, H. Heineken. Fitting classes defined by chief factor ranks. *J. London Math. Soc.* **29** (1984) 34-40.

9. V. A. Vedernikov. On some classes of finite groups. *Dokl. Akad. Nauk BSSR* **32**(10) (1988) 872–875. (In Russian)

10. A. F. Vasil'ev, T. I. Vasilyeva. On finite groups whose principal factors are simple groups. *Russian Math.* (Iz. VUZ) **41**(11) (1997) 8–12.

11. A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, V.N. Tyutyanov. On the finite groups of supersoluble type, *Sib. Math. J.* **51**(6) (2010) 1004–1012.

12. A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva, E. N. Myslovets. Finite widely c-supersoluble groups and their mutually permutable products, *Siberian Math. J.* **57**(3) (2016) 476–485.

13. W. Guo, A. N. Skiba. On finite quasi-$\mathfrak{F}$-groups. *Comm. Algebra* **37** (2009) 470–481.

ON SQUARE FREE MODULES

T. C. Quynh; T. H. N. Nhan

Department of Mathematics, Danang University, 459 Ton Duc Thang, Danang city (Vietnam); Faculty of Basic Sciences, Vinh Long University of Technology Education, Vinhlong city (Vietnam)

tcquynh@dce.udn.vn; tcquynh@live.com, tranhoaingocnhan@gmail.com

1. INTRODUCTION

Throughout this paper all rings are assumed to be associated with a nonzero unity element, while all modules are assumed to be unitary right modules.

A module M is said to be *square free (SF)* if whenever its submodules is isomorphism to $N^2 = N \oplus N$ for some module N, then $N = 0$ (see [1, Definitions 2.34]). This means that, a module is square-free if there is no nonzero submodule isomorphic to a square. For example, $\mathbb{Z}$ is a SF-module as a $\mathbb{Z}$-module. The notion of square free modules has been around for a long time and is very important in group, ring and module theories. Dually, a module is said to be *dual square free (DSF)* if whenever its factor module is isomorphic to N^2 for some module N, then $N = 0$. This means that, a module M is DSF if M has no proper submodules A and B with $M = A + B$ and $M/A \cong M/B$ (see [2], [4] for more details). In [2], the authors also introduce the concept of simply-distinct modules: A right R-module M is called *simply-distinct* if, whenever M_1 and M_2 are distinct maximal submodules of M, then $M/M_1 \cong M/M_2$ (see [2, Definitions 2.11]).

In this paper, we continue the study of SF-modules. We give some other properties of SF-modules. Next we show that if $M = A \oplus B$, where A is a SF-module and $B = = \oplus_{i=1}^{n} S_i$ is a finite direct sum of non-isomorphic simple submodules, then M is a SF-module if and only if A and B are orthogonal. We introduce and describe the class of simple-distinct modules and establish a connection between SF-modules and simple-distinct modules.

2. SOME FUNDAMENTAL PROPERTIES

The following proposition give some other properties of SF-modules.

Proposition. The following conditions on a right R-module M are equivalent:

A. M is a SF-module.

B. If L is a submodule of M such that $L \cong N \oplus N$ for some N, then $N = 0$.

C. If $A \cap B = 0$, where $A, B \leqslant M$, then A and B are orthogonal.

D. If $A \cap B = 0$, where $A, B \leqslant M$, then $\mathrm{Mor}(A, B) = 0$.

E. If $A \cap B = 0$, where $A, B \leqslant M$, then $\mathrm{ISO}(A, B) = 0$.

We give conditions which allow direct sums of orthogonal submodules to be SF.

Proposition. Let $M = A \oplus B$, where A is a SF-module and $B = \oplus_{i=1}^{n} S_i$ is a finite direct sum of non-isomorphic simple submodules. Then M is a SF-module if and only if A and B are orthogonal.

Example. We have that $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}_p$ are orthogonal, thus $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ is a SF-module.

Next we introduce the concept of simple-quasi-injective modules and simple-distinct modules.

Definition. A module M is said to be *simple-quasi-injective* if every homomorphism from any simple submodule of M into M can be extended to an endomorphism of M.

Definition. A right R-module M is called *simple-distinct* if whenever M_1 and M_2 are distinct simple submodule of M, then $M_1 \ncong M_2$.

We now describe the class of simple-distinct modules.

Proposition. The following conditions on a right R-module M are equivalent:

A. M is simple-distinct.

B. If f and g are nonzero homomorphism from a simple submodule of M into M, then $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

C. $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ for simple submodule A of M and all submodules B of M with $A \cap B = 0$.

Proposition. If M is a simple-distinct right R-module, then every simple submodule of M is fully invariant. The converse holds in the case where M is simple-quasi-injective.

We now establish a connection between SF-modules and simple-distinct modules.

Proposition. If either R is a right semi-artinian ring or M is a right R-module with essential socle, then the following conditions are equivalent:

A. M is a SF-module.

B. M is a simple-distinct module.

The following statement follows directly from the previous propositions.

Proposition. Let M be a simple-quasi-injective module with essential socle. Then the following conditions are equivalent:

A. M is a SF-module.

B. M is a simple-distinct module.

C. Every simple submodule of M is fully invariant.

Corollary. If $M = A \oplus B$ is a SF-module and $f : A \to B$ is an R-homomorphism, then $\mathrm{Ker} f$ is essential in A.

Corollary. Let M be a SF-module with $Z(M) = 0$. If $M = A \oplus B$ then $\mathrm{Hom}(A, B) = 0 = \mathrm{Hom}(B, A)$.

References

1. Mohamed S. H., M*ü*ller B. J. Continuous and discrete modules. – London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press. – 1990. – V. 147.
2. Yasser Ibrahim and Mohamed Yousif Dual-square-free modules // Communications in Algebra. – 2019. – doi:10.1080/00927872.2018.1543429.
3. Birkenmeier G. F., Park J. K., Rizvi S. T. Extensions of Rings and Modules. – New York:Springer. – 2013.
4. Keskin T*ü*t*ü*nc*ü*, D., Kikumasa I., Kuratomi Y., Shibata, Y. On dual of square free modules // Communications in Algebra. – 2018. – V. 46, Is.8, P. 3365–3376.
5. Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. – New York:Springer-Verlag. – 1974.

MAJOR SUBSETS OF R-MAXIMAL SETS AND $Q_{1,N}$-REDUCIBILITY

R. Sh. Omanadze, I. O. Chitaia
I.Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi (Georgia)
roland.omanadeze@tsu.ge, i.chitaia@gmail.com

We say that a set A is $Q_{1,N}$-reducible to a set B, if there exists a computable function f such that, the following three conditions are satisfied: (i) $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B)$, (ii) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset)$, and (iii) $\bigcup_{x \in \omega} W_{f(x)}$ is computable. This relation due to [1] , generates the $Q_{1,N}$-degrees. Condition (i) characterizes Q-reducibility, which yields the Q-degrees; (i) and (ii) together define Q_1-reducibility, generating the Q_1-degrees.

Our notation and terminology are standard, and can be found e.g., in [2, 3].

In this talk we will present the following results.

Theorem 1. *Let M be an r-maximal set, A be a major subset of M, B and C be arbitrary sets such that $B \leqslant_{Q_{1,N}} M \setminus A$, $C \leqslant_{Q_{1,N}} M \setminus A$ and $M \setminus A \leqslant_{Q_{1,N}} B \oplus C$. Then $M \setminus A \leqslant_m B$ or $M \setminus A \leqslant_m C$.*

Corollary 1. *Let M be an r-maximal set, A be a major subset of M. Then the $Q_{1,N}$-degree of $M \setminus A$ is not the least upper bound of any $Q_{1,N}$-incomparable $Q_{1,N}$-degrees a and b such that the Q-degrees of $A \in a$ and $B \in b$ are Q-incomparable.*

Theorem 2. *Let A be a Σ^0_2 set, B be a c.e. set and $A \leqslant_Q B$. Then there exists a c.e. set C such that $A \leqslant_{Q_{1,N}} C \leqslant_Q B$.*

Theorem 3. *The c.e. $Q_{1,N}$-degrees are not dense.*

Theorem 4. *If A is an r-maximal set and B is a non-r-maximal hyperhypersimple set, then either $A \mid_{Q_{1,N}} B$ or there exist a non-r-maximal hyperhypersimple set C and an r-maximal set D such that $A \leqslant_{Q_{1,N}} D \leqslant_{Q_{1,N}} C \leqslant_{Q_{1,N}} B$.*

Corollary 2. *There exist infinite collections of $Q_{1,N}$-degrees $\{a_i\}_{i\in\omega}$ and $\{b_j\}_{j\in\omega}$ such that for every i, j*

A. $a_i <_{Q_{1,N}} a_{i+1}$, $b_{j+1} <_{Q_{1,N}} b_j$, and $a_i <_{Q_{1,N}} b_j$;

B. every a_i consists entirely of maximal sets;

C. every b_j consists entirely of non-r-maximal hyperhypersimple sets.

Theorem 5. *M be an r-maximal set. Then there are c.e. sets A, B such that $A \subset_m B$, $B \subset_m M$ and $A \equiv_{Q_1} B$, but $A \nleq_m B$ and $B \nleq_m A$.*

References

1. V. Bulitko. *On ways of characterizing complete sets.* Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya, 55(2):227–253, 1991.
2. H. J. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* MIT Press, 1967.
3. R. I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets.* Springer Science & Business Media, 1999.

ISOLATED POINTS OF SPACES OF FUNCTIONAL CLONES

A. G. Pinus

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

ag.pinus@gmail.com

For any set A let us denote by F_A the set of all functional clones on the set A. Given $\mathcal{F} \in F_A$ and $n \in \omega$ denote by $\mathcal{F}^{(n)}$ the n-fragment of the clone $\mathcal{F}$, i.e. the collection of all at most n-ary functions on $\mathcal{F}$. In [1], we defined the following natural metrics on the set F_A as follows. For $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in F_A$

$$d(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\min\{n \in \omega \mid \mathcal{F}_1^{(n)} \neq \mathcal{F}_2^{(n)}\}}, & \text{if } \mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2; \\ 0, & \text{if } \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2. \end{cases}$$

Then $\mathcal{F}_A = \langle F_A; d\rangle$ is a metric space such that on this space the operations on the lattice $L_A = \langle F_A; \wedge, \vee\rangle$ of all functional clones on A are continuous.

In [1–3] we noticed some properties of the spaces $\mathcal{F}_A$. Here we mark some properties of clones $\mathcal{F}$ in the case when $\mathcal{F}$ is an isolated point in the space $\mathcal{F}_A$.

Proposition 1. *Let A be a set, $\mathcal{F}$ be an isolated point of the space $\mathcal{F}_A$ and for $n \in \omega$ let $\langle \mathcal{F}^{(n)}\rangle$ be the clone generated by the fragment $\mathcal{F}^{(n)}$. Then for any $m > n$ and for any m-ary function $h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ on A the clone $\langle \mathcal{F}^{(n)}\rangle$ contains an m-ary function $h'(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ such that the equalities $h'(a_1, a_2, \ldots, a_m) = h(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ hold for any m-tuple $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle$ containing at least $n + 1$ pairwise different elements in A.*

Proposition 2. *Let A be a space, $\mathcal{F} \in F_A$ be a discriminator clone (i.e. a clone containing the discriminator function), and n be a natural number such that $n \geqslant 3$. If for any $m > n$ and for any m-ary function $h(x_1, x_2, \dots, x_m)$ on A the clone $\langle \mathcal{F}^{(n)} \rangle$ contains an m-ary function $h'(x_1, x_2, \dots, x_m)$ such that the equalities $h'(a_1, a_2, \dots, a_m) = h(a_1, a_2, \dots, a_m)$ hold for any m-tuple $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ containing at least $n+1$ pairwise different elements in A then the clone $\mathcal{F}$ is an isolated point of the space $\mathcal{F}_A$.*

Theorem 1. *Let A be a set and $\mathcal{F}$ be a discriminator clone. Then any neighborhood of $\mathcal{F}$ in the space $\mathcal{F}_A$ contains an isolated point of this space.*

References

1. Pinus A. G. Dimensions of functional clones and metric on this collection // Siberian electronic mathematical reports. – 2016. – V. 13. – P. 366–374.
2. Pinus A. G. Fragments of functional clones // Algebra and Logic. – 2017. – V. 56, No 4. – P. 318–323.
3. Pinus A. G. On the spaces of functional clones // to appear.

ON VERBALLY CLOSED SUBGROUPS OF FREE SOLVABLE GROUPS

V. A. Roman'kov, E. I. Timoshenko

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

romankov48@mail.ru, etim45@gmail.com

Let G be a group and let $F(X)$ be a free group of countably infinite rank with basis $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. A subgroup H of G is called *verbally closed* if for any word $w \in F(X)$ and element $h \in H$ equation $w(x_1, \dots, x_n) = h$ (termed *split equation*) has a solution in G if and only if it has a solution in H for every $w \in F(X)$. This notion was introduced by Mysnikov and the first author in [1], where the following statement was established. Let F_n be a free group of a finite rank n. Then for a subgroup H of F_n the following conditions are equivalent: H is a retract of F_n, H is a verbally closed subgroup of F_n, H is an algebraically closed subgroup of F_n. Recall that a subgroup H is called *algebraically closed* in a group G if for every finite system of equations $S = \{E_i(x_1, \dots, x_n, H) = 1 \mid i = 1, \dots, m\}$ with constants from H the following holds: if S has a solution in G then it has a solution in H. Then we recall that a subgroup H of a group G is called a *retract* of G, if there is a homomorphism (termed *retraction*) $\phi : G \to H$ which is identical on H. Any retract is algebraically closed, and any algebraically closed subgroup is verbally closed. Similar results were proved for free nilpotent groups by Khisamiev and the first author in [2] and [3].

Lemma 1 [2]. Let G be a group and let N be a verbal subgroup of G. If H is a verbally closed subgroup of G then its image H_N is verbally closed in $G_N = G/N$.

For any free abelian group A_n of rank n, a subgroup H is verbally closed if and only if it is a direct factor of A_n.

By S_{rd} we denote a free solvable group of rank r and the derived length d. In particular, S_{r2} denotes a free metabelian group of rank r.

Theorem 1. Let $H = gp(g, f)$ be a two-generated subgroup of $G = S_{rd}, r, d \geqslant 2$, or more generally, of a free polynilpotent group $G = F_r(\mathcal{A}\mathcal{N}_{c_1} \dots \mathcal{N}_{c_l}), r \geqslant 2, l \geqslant 1$. Then the following conditions are equivalent:

1) H is a retract of G.

2) H is a verbally closed subgroup of G.

3) H is an algebraically closed subgroup of G.

In the proof of this theorem we apply test elements that exist in every free non abelian solvable group of rank 2 and in every free non nilpotent polynilpotent group of rank 2 (see [4] - [7]).

For any group G, G_{ab} denotes the abelianization $G/[G,G]$ of G. Then $\text{rank}_{ab}(G)$ stands for rank of G_{ab}.

Proposition 1. Let H be a finitely generated verbally closed subgroup of $S_{rd}, r, d \geqslant 2$, such that $\text{rank}_{ab}(H) = 1$. Then H is retract of S_{rd}.

Proposition 2.

A. Let H be finitely generated subgroup of $S_{rd}, r, d \geqslant 2$, such that $\text{rank}_{ab}(H) = r$. Then any retraction $S_{rd} \to H$ is identical map.

B. Let H be a verbally closed subgroup of S_{r2}. If $\text{rank}_{ab}(H) = r$ then $G = H$.

Now we give a generalization of the concept of the verbal closure. For any $k \in \mathbb{N}$, a subgroup H of a group G is called a k*-verbally closed* in G, if and only if every system of k split equations of the form

$$w_i(x_1, \ldots, x_n) = h_i, h_i \in H, i = 1, \ldots, k,$$

of any number n of variables having a solution in G, is solvable in H.

Theorem 2. Any k-verbally closed $(k+1)$-generated subgroup H of $S_{r2}, r \geqslant 2$, such that $\text{rank}_{ab}(H) = k+1$, is a retract of S_{r2}.

A part of results was published in preprint [8] and in note [9].

Aknowledgements. The research of the second author was supported by Russian Foundation for Basic Research, project 18-01-00100.

References

1. Myasnikov A., Roman'kov V. Verbally closed subgroups of free groups // J. Group Theory. – 2014. – V. 17, Is. 1. – 29–40.
2. Roman'kov V. A., Khisamiev N. G. Verbally and existentially closed subgroups of free nilpotent groups // Algebra and Logic. – 2013. – V. 52, Is. 4. – P. 336–351.
3. Roman'kov V. A. Khisamiev N. G. Existentially closed subgroups of free nilpotent groups // Algebra and Logic. – 2014. – V. 53, Is. 1. – P. 29–38.
4. Roman'kov V. A. Test elements for free solvable groups of rank 2 // Algebra and Logic. – 2001. – V. 40, Is. 2. – P. 106–111.
5. Timoshenko E. I. Computing test rank for a free solvable group // Algebra and Logic. – 2006. – V. 45, Is. 4. – P. 254–260.
6. Timoshenko E.I. Endomorphisms and universal theories of solvable groups. – Novosibirsk: NSTU Publishers. – 2011. – 327 p.
7. Gupta C. K., Timoshenko E. I. Test rank for some free polynilpotent groups // Algebra and logic. – 2003. – V. 42, Is. 1. – P. 20–28.
8. Roman'kov V. A., Timoshenko E. I. Two-generated verbally closed subgroups of free solvable groups // Preprint: arXiv Math.: 1901.05806v1 [math. GR]. – 17 Jan 2019. – 9 p.

9. Roman'kov V. A., Timoshenko E.I. On verbally closed subgroups of a free solvable groups // Herald of Omsk University. – 2019. – V. 24, Is. 1. P. 9–16.

THE AXIOMATIC RANK OF THE LEVI CLASS GENERATED BY THE ALMOST ABELIAN QUASIVARIETY OF NILPOTENT GROUPS

S. A. Shakhova
Altai State University, Barnaul, Russia
sashakhova@gmail.com

For an arbitrary class $\mathcal{M}$ of groups, we denote by $L(\mathcal{M})$ a class of all groups G in which the normal closure $(a)^G$ of each element $a \in G$ belongs to $\mathcal{M}$. The class $L(\mathcal{M})$ is called a Levi class generated by $\mathcal{M}$. In [1] it was stated that if $\mathcal{M}$ is a quasivariety of groups, then $L(\mathcal{M})$ is also a quasivariety of groups. Levi classes of nilpotent quasivarieties of groups were treated in [2-6].

Denote by $\mathcal{N}_c$ the variety of nilpotent groups of class at most c, by $\mathcal{N}_{c,\infty}$ the quasivariety of torsion-free nilpotent groups of class at most c, by $\mathcal{N}_{c,p}$ the variety of nilpotent groups of class at most c and exponent p, and by $F_n(\mathcal{M})$ the free group of rank n in $\mathcal{M}$.

Consider groups having the following representations in $\mathcal{N}_2$:

$$H_p = gr(x, y \parallel [x, y]^p = 1),$$

$$H_{p^s} = gr(x, y \parallel x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1).$$

Quasivarieties $qF_2(\mathcal{N}_2)$, qH_{p^s} (except qH_{2^1}), qH_p, where p runs through the set of prime numbers, constitute an exhaustive list of almost Abelian quasivarieties of nilpotent groups.

In [4], it was proved that for any $p \neq 2$, the following equalities are true:

$$L(qF_2(\mathcal{N}_{2,p})) = \mathcal{N}_{3,p}, L(qF_2(\mathcal{N}_2)) = \mathcal{N}_{3,\infty}.$$

Levi classes $L(qH_p)(p \neq 2)$ were studied in [5], and Levi classes $L(qH_{p^s})(p \neq 2, s \geqslant 2)$, in [6]. All of these classes, as it turned out, are defined by systems of quasi-identities in infinite number of variables. In [7], it was shown that $L(qH_{p^s})(p \neq 2, s \geqslant 2)$ is finitely axiomatizable, i.e., it can be defined by a finite system of quasi-identities.

In the present paper, we state that the following theorem is true.

Theorem. *The axiomatic rank of the quasivariety $L(qH_p)(p \neq 2)$ is finite, i.e. it can be defined by a system of quasi-identities in finite number of variables.*

References

1. Budkin A. I. Levi quasivarieties // Sib. Math. J. – 1999. – V. 40, Is. 2. – P. 225–228.
2. Budkin A. I. Levi classes generated by nilpotent groups // Algebra and Logic. – V. 39, Is. 6. – P. 363–369.
3. Budkin A.I., Taranina L.V. On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups // Sib. Math. J. – V. 41, Is. 2. – P. 218–223.
4. Lodeishchikova V. V. On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups // Izv. Altai State Univ. – V. 61, Is.1. – P. 26–29.
5. Lodeishchikova V. V. The Levi classes generated by nilpotent groups // Sib. Math. J. –2010. – V. 51, Is. 6. – P. 1075-1080.

6. Lodeishchikova V. V. Levi quasivarieties of exponent p s // Algebra and Logic. – 2011. – V. 50, Is. 1. – P. 17–28.
7. Shakhova S. A. The axiomatic rank of Levi classes // Algebra and Logic. – 2018. – V. 57, No. 5. – P. 381–394.

ON CONVEX DIRECTED SUBGROUPS OF GROUPS WITH THE ALMOST ORTHOGONALITY CONDITION

E. E. Shirshova
Moscow Pedagogical State University, Moscow (Russia)
shirshova.elena@gmail.com

Let G be a partially ordered group (*po*-group), and $G^+ = \{g \in G |\ e \leqslant g\}$. G is called *a directed group* if there exists an upper bound for every two elements of G. A subgroup M of a *po*-group G is said to be *convex* if equalities $a \leqslant g \leqslant b$ imply $g \in M$ for any elements $a, b \in M$ and $g \in G$. A convex directed subgroup M of a *po*-group G is called *a value of an element* $g \in G$ *(a regular subgroup)* whenever M is maximal with respect to not containing g among convex directed subgroups of G.

Let us denote by $L(G)$ the set of all convex directed subgroups of a *po*-group G.

Positive elements a and b are called to be *almost orthogonal* in a *po*-group G whenever inequalities $g \leqslant a, b$ imply the validity of inequalities $g^n \leqslant a, b$ for all elements $g \in G$ and all integers $n > 0$. Elements, whose greatest lower bound is equal to zero, possess this property.

A convex subgroup M of a *po*-group G is called *a rectifying subgroup* whenever the set of all right cosets of the group G by the subgroup M is a linearly ordered set.

Theorem 1. *Suppose G is a po-group, and M is a rectifying directed subgroup of G; then the following assertions hold:*

1) if $M \subset H$ and $M \subset K$ for any subgroups $H \in L(G)$ and $K \in L(G)$; then either $H \subseteq K$ or $K \subseteq H$;

2) if $a \in G^+ \setminus M$; then there exists a unique value A of the element a for which $M \subseteq A$.

A *po*-group G is referred to *groups with the almost orthogonality condition* whenever each element $g \in G$ has a representation $g = ab^{-1}$ for some almost orthogonal elements a and b of G. This subclass of directed groups includes lattice-ordered groups.

Theorem 2. *Suppose G is a group with the almost orthogonality condition and M is a subgroup of G; then the following conditions are equivalent:*

1) M is a rectifying directed subgroup;

2) if a and b are almost orthogonal elements in the group G, then either $a \in M$ or $b \in M$.

It is said that a subgroup $M \in L(G)$ is *meet irreducible* whenever for every $N_i \in L(G)$ an equality $M = \cap_{i \in I} N_i$ implies that there exists an index j for which $M = N_j$.

Theorem 3. *Suppose G is a group with the almost orthogonality condition, and M is a convex directed subgroup of G; then the following conditions are equivalent:*

1) M is a regular subgroup;

2) M is meet irreducible.

MINIMAL GENERATING SET OF THE COMMUTATOR OF SYLOW SUBGROUPS OF ALTERNATING AND SYMMETRIC GROUPS, AND ITS COMMUTATOR WIDTH

R. V. Skuratovskii
IAMP department of computer science, Kiev (Ukraine)
ruslan@imath.kiev.ua

The definition of the commutator length could be found in [1]. The commutator width of a group G, denoted by $cw(G)$, is the maximum of the commutator lengths of the elements of its derived subgroup $[G, G]$. The size of minimal generating sets of the Sylow 2-subgroup $Syl_2 A_{2^k}$ of A_{2^k} is found. We prove that the commutator width of Sylow 2-subgroups of alternating group A_{2^k}, symmetric group S_{2^k} and $C_p \wr B$ are equal to 1. The paper presents a structure of commutator subgroup of Sylow 2-subgroups alternating groups. We prove that the commutator width [1] of an arbitrary element of a permutational wreath product of cyclic groups C_{p_i}, $p_i \in \mathbb{N}$ is 1. As it was proven in [3] there are subgroups G_k and B_k in a group of automorphisms of restricted binary rooted tree $AutX^{[k]}$ such that $G_k \simeq Syl_2 A_{2^k}$ and $B_k \simeq Syl_2 S_{2^k}$ respectively.

Theorem. *An element* $(g_1, g_2)\sigma^i \in G'_k$ *iff* $g_1, g_2 \in G_{k-1}$ *and* $g_1 g_2 \in B'_{k-1}$.

Lemma. *For any group* B *and integer* $p \geqslant 2$ *the following inequality is true*

$$cw(B \wr C_p) \leqslant \max(1, cw(B)).$$

Lemma. *For prime* $p > 2$ *and* $k > 1$ *the commutator width of* $Syl_p(A_{p^k})$ *and of* $Syl_p(S_{p^k})$ $k > 1$ *equal to 1.*

Futher, we analized the structure of the elements from $Syl_2 S'_{2^k}$ and obtained the following result.

Theorem. *Elements of* $Syl_2 S'_{2^k}$ *have the following form* $Syl_2 S'_{2^k} = \{[f, l] \mid f \in B_k, l \in G_k\} = \{[l, f] \mid f \in B_k, l \in G_k\}$.

Moreover, we have obtained a more general result about the commutator width for finite wreath product of finite cyclic groups.

Corollary. *If* $W = C_{p_k} \wr \ldots \wr C_{p_1}$ *then for* $k \geqslant 2$ *we have* $cw(W) = 1$.

Lemma. *For prime* $p > 2$ *and* $k > 1$ *the commutator width of* $Syl_p(A_{p^k})$ *and of* $Syl_p(S_{p^k})$ $k > 1$ *equal to 1.*

Proposition. *The commutator of Sylow 2-subgroup* $(Syl_2 A_{2^k})'$ *has order* 2^{2^k-k-2}.

Proposition. *The second commutator of Sylow 2-subgroup* $(Syl_2 A_{2^k})$ *has the order* 2^{2^k-3k+1}.

Corollary. *The Frattini factor of* $(Syl_2 A_{2^k})'$ *is isomorphic to elementary abelian subgroup* $(C_2)^{2k-3}$. *Any minimal generator set of* $(Syl_2 A_{2^k})'$. *has* $2k-3$ *generators.*

Theorem. *The commutator width of the group* $Syl_2 A_{2^k}$ *is equal to* 1 *for* $k \geqslant 2$.

Example. *The minimal generating set of* $Syl'_2(A_8)$ *consists of 3 generators:* $(1,3)(2,4)(5,7)(6,8)$, $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)(5,8)(6,7)$. *The commutator* $Syl'_2(A_8) \simeq \simeq C_2^3$ *that is an elementary abelian 2-group of order 8. Minimal generating set of* $Syl'_2(A_{16})$ *consist of* $5 = 2 \cdot 4 - 3$ *generators:* $(1,4,2,3)(5,6)(9,12)(10,11)$, $(1,4)(2,3)(5,8)(6,7)$, $(1,2)(5,6)$, $(1,7,3,5)(2,8,4,6)(9,14,12,16)(10,13,11,15)$, $(1,7)(2,8)(3,6)(4,5)(9,16,10,15)(11,14,12,13)$.

Example. *Size* $Syl''_2(A_{16}) = 32$, *a size of direct product* $Syl'_2(A_8)^2 = 64$ *but due to relation on second level of* $Syl''_2(A_{16})$ *the direct product* $(Syl'_2(A_8))^2$ *transforms in subdirect* $Syl'_2(A_8) \boxtimes Syl'_2(A_8)$ *that has feasible combination on* X^2 *2 times less.*

References

1. *Muranov A.* Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width. arXiv:math/0608688v4 [math.GR] 12 Sep 2009.
2. *Skuratovskii R.* Generators and relations for Sylows p-subgroup of group S_n. (in ukranian) Naukovi Visti KPI. 2013, N. 4, pp. 94–105.
3. *Skuratovskii R. V.* Involutive irreducible generating sets and structure of sylow 2-subgroups of alternating groups. ROMAI J., **13**, Issue 1, (2017), pp. 117–139.

MAXIMAL SUBFIELDS IN FINITE-DIMENSIONAL SIMPLE ALGEBRAS

S. V. Tikhonov

Byelorussian State University, Minsk (Byelorussia)

tikhonovsv@bsu.by

The genus $\mathbf{gen}(D)$ of a finite-dimensional central division algebra D over a field F is defined as the collection of classes $[D'] \in Br(F)$, where D' is a central division F-algebra having the same maximal subfields as D. This means that D and D' have the same degree n, and a field extension K/F of degree n admits an F-embedding $K \hookrightarrow D$ if and only if it admits an F-embedding $K \hookrightarrow D'$. Different variations of the notion of the genus are mentioned in [1].

In [3], we show that the fact that quaternion division algebras D and D' have the same maximal subfields does not imply that the matrix algebras $M_l(D)$ and $M_l(D')$ have the same maximal subfields for $l > 1$. Moreover, for any $n > 1$, we construct a field L such that there are two quaternion division L-algebras D and D' and a central division L-algebra C of degree and exponent n such that $\mathbf{gen}(D) = \mathbf{gen}(D')$, but the algebras $D \otimes C$ and $D' \otimes C$ do not have the same maximal subfields.

In particular, this gives negative answers to questions formulated in [2, footnote 1 and Remark 2.2].

References

1. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A., Division algebras with the same maximal subfields // Russian Math. Surveys. – 2015. – V. 70, № 1. – P. 83–112.
2. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A., The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and some generalizations // arXiv:1802.00299.
3. Tikhonov S. V. On genus of division algebras // arXiv:1904.03933.

ON THE LATTICE OF ALL τ-CLOSED TOTALLY COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS

A. Tsarev

Department of Mathematics, Jeju National University, 690-756, Jeju (South Korea)
alex_ vitebsk@mail.ru

The concept of Skiba's subgroup functor turned out to be useful in research on the general class theory. In each group G, we select a system of subgroups $\tau(G)$. We say that τ is a *subgroup functor* if (1) $G \in \tau(G)$ for every group G; and (2) for every epimorphism $\varphi : A \to B$ and any $H \in \tau(A)$ and $T \in \tau(B)$, we have $H^{\varphi} \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. If $\tau(G) = \{G\}$ then the functor τ is called *trivial.* In the sequel, we will consider only subgroup functors τ such that for any group G all subgroups of $\tau(G)$ are subnormal in G. For any set of groups $\mathfrak{X}$ the symbol S_{τ} denotes the set of groups H such that $H \in \tau(G)$ for some group $G \in \mathfrak{X}$. A class of groups $\mathfrak{F}$ is called τ*-closed* if $\mathrm{S}_{\tau}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. A *formation* is a class of finite groups $\mathfrak{F}$ satisfying the following two conditions: (1) if $G \in \mathfrak{F}$, then $G/N \in \mathfrak{F}$; and (2) if G/N_1, $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, then $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$, for any N, N_1, $N_2 \trianglelefteq G$. In particular, a formation $\mathfrak{F}$ is called τ*-closed* if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for every group G of $\mathfrak{F}$.

Saturated formations introduced by Gaschütz are classical classes of finite groups, composition formations form a broader family of classes and have many interesting applications in group theory. By Baer's theorem, composition formations are precisely solvably saturated formations. A formation $\mathfrak{F}$ is said to be *solvably saturated* if it contains each group G with $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ for some solvable normal subgroup N of G, and any saturated formation is solvably saturated. A formation is called *totally composition* if it is n-multiply composition for all positive integers n; for more details see [2].

The concept of composition formation has been developed analogously to the concept of saturated formation. In broad outline, the both run parallel, but not all the properties of saturated formations can be translated directly for composition formations. Both the lattice of all totally saturated formations [5] and the lattice of all totally composition formations [3] are inductive. Safonov [1] proved that the lattice of all totally saturated formations is algebraic, and it is already known that the lattice of all multiply composition formations is algebraic [2]. However, the following problem is still of a special interest.

Question (see [2, Problem 1]). *Is the lattice of all totally composition formations algebraic?*

Our main result is:

Theorem. *The lattice* c_{∞}^{τ} *of all* τ*-closed totally composition formations of finite groups is algebraic.*

Corollary [4]. *The lattice* c_{∞} *of all totally composition formations of finite groups is algebraic.*

References

1. Safonov V. G. The property of being algebraic for the lattice of all τ-closed totally saturated formations // Algebra and Logic. – 2006. – V. 45, в„–. 5. – P. 353–356.
2. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups // Ukrainian Math. Journal. – 2000. – V. 52, в„–. 6. – P. 898–913.
3. Tsarev A. Inductive lattices of totally composition formations // Revista Colombiana de Matemáticas. – 2018. – V. 52, в„– 2. – P. 161–169.
4. Tsarev A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups // Ricerche mat. – 2019. – https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3.

5. Vorob'ev N.N. On one question of the theory of local classes of finite groups // Problems in Algebra Proc. F. Scorina Gomel State Univ., Gomel. – 1999. – V. 14. – P. 132–140.

EFFECTIVITY PROPERTIES OF INTUITIONISTIC SET THEORY WITH SOME CHOICE PRINCIPLES AND SOME ADDITIONAL INTUITIONISTIC PRINCIPLES

A. G. Vladimirov
Lomonosov State University, Moscow, Russia
moskvich7707@mail.ru

We consider some effectivity properties of $ZFI2C$ with the principle DCS, and each of the following choice principles: Axiom of Countable Choice (AC_ω), Axiom of Dependend Choice (DC), and Axiom of Relativized Dependend Choice (RDC).

Specifically, let T be an extension of $ZFI2C$ or $ZFI2C+DCS$ by addition of each of principles AC_ω, DC, and RDC. We prove that the theory T has the following properties:

1. Disjunctive property (DP): if $T \vdash \varphi \vee \psi$, then $T \vdash \varphi$ or $T \vdash \psi$;

2. Numerical existence property (EP_ω): If $T \vdash \exists a \varphi(a)$ then there is a number n, such that $T \vdash \varphi(n)$;

3. Markov rule (MR): if $T \vdash \forall a(\varphi(a) \vee \neg\varphi(a))$ and $T \vdash \neg\neg\exists a\varphi(a)$, then $T \vdash \exists a\varphi(a)$;

4. Extended Church rule (CR): if $T \vdash \forall a[\neg\psi(a) \to \exists b\varphi(a;b)]$ then there is a number e, such that $T \vdash \forall a[\neg\psi(a) \to \varphi(a;\{e\}(a))]$;

5. Uniformization rule (UR): if $T \vdash \forall x\exists a\varphi(x;a)$ then $T \vdash \exists a\forall x\varphi(x;a)$;

6. The UZ rule (UZR): if $T \vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ then $T \vdash \forall x\varphi(x)$ or $T \vdash \forall x\psi(x)$.

In each of these rules each formula is closed, and conclusion of each rule is constructed effectively by proof of antecedents.

Let's remark, that the following additional intuitionistic principles: the Markov Principle (M), the Uniformization Principle UP, the Extended Church Thesis (ECT), the principle UZ are realizable in our semantic, too, and so, they can be added to the theory T with all statements 1–6 hold.

Finally, $ZFI2C+DCS+M+RDC$ doesn't prove $CH \vee \neg CH$, where CH is a form of the Continuum Hypothesis.

As for the proof technique, we use a Kleene-style self-validating semantic for extensional set theory.

ON THE NUMBER OF SYLOW SUBGROUPS IN FINITE ALMOST SIMPLE GROUPS

Zh. Wu
University of Science and Technology of China, Anhui (China)
zhfwu@mail.ustc.edu.cn

Let G be a finite group and p a prime. Denote by $\nu_p(G)$ the number of Sylow p-subgroups of G. Following [1], we say that a group G satisfies **DivSyl(p)** if $\nu_p(H)$ divides $\nu_p(G)$ for every subgroup H of G. In [1] it is proven that G satisfies **DivSyl(p)**, if groups of induced automorphisms of all nonabelian composition factors satisfy the same condition. So two natural problems arise:

Problem 1. *How often almost simple group satisfies* **DivSyl(p)***?*

Problem 2. *If all composition factors of a group G does not satisfy* **DivSyl(p)**, *can we state that the group G does not satisfy* **DivSyl(p)**?

In [2], for every prime p, a complete classification of groups isomorphic to $PSL_2(q)$ and satisfying **DivSyl(p)** is obtained. In particular, it is proven that infinite number of groups isomorphic to $PSL_2(q)$ satisfy **DivSyl(p)** for every prime p. Note also that in [3], it is proven that every p-solvable group satisfy **DivSyl(p)**. In particular, solvable groups satisfy **DivSyl(p)** for every prime p. The main goal of our paper is to show that a simple group satisfying **DivSyl(p)** should be small in some sense. This means that "almost for all"finite simple group S, there exists a prime p such that S does not satisfy **DivSyl(p)**. In this case, "almost for all"means that for all, except some groups of bounded order or of bounded Lie rank.

Theorem. *Let G be an alternating simple group or a finite simple group of Lie type. In the second case assume also that the Lie rank of G is at least* 15 *(in particular, G is classical). Then there exists a prime r such that G does not satisfy* **DivSyl(r)**.

As to the second problem, we provide an example showing that it has a negative answer. Moreover this example can be extended to a wide class of groups, so one can not expect that the information on **DivSyl(p)** can be completely obtained only in terms of composition factors.

References

1. Guo W., Vdovin E. P. Number of Sylow subgroups in finite groups // J. Group Theory. – 2018. – V. 21, Is. 4. – P. 695–712.
2. Wu Z., Guo W., Vdovin E. P. On the number of Sylow subgroups in special linear groups of degree 2 // Algebra Logic. – 2017. – V. 56, Is. 6. – P. 498-501.
3. Navarro G. Number of Sylow subgroups in p-solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – V. 131, Is.10. – P. 3019–3020.

ISOLATION FROM SIDE IN TURING DEGREES

M. M. Yamaleev

Kazan Federal University, Kazan, Russia

mars.yamaleev@kpfu.ru

Given 2-c.e. Turing degree $\mathbf{d}$, we say that $\mathbf{d}$ is *isolated from side* if there exists a c.e. degree $\mathbf{a}$ such that $\mathbf{d} \nleqslant \mathbf{a}$ and for any c.e. degree $\mathbf{w} \leqslant \mathbf{d}$ it holds $\mathbf{w} \leqslant \mathbf{a}$. This notion generalizes the well-studied notion of isolation introduced by Cooper and Yi [3], where they required $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ instead of $\mathbf{d} \nleqslant \mathbf{a}$. Isolation from side was used implicitly in works [2, 5] where they obtain series of model-theoretic properties of n-c.e. Turing degrees, later it was introduced in [4].

By Sacks Splitting Theorem it is easy to see that no c.e. degree can be isolated from side by other c.e. degree, in particular it holds for the case of usual isolation. On the other hand, one can find some isolated/non-isolated properly 2-c.e. Turing degree. So far, we know only examples of properly 2-c.e. degrees isolated from side, and don't know examples for the opposite case. This gives an idea to use isolation from side in order to distinguish c.e. degrees from properly 2-c.e. degrees by some formula. Working towards this direction according to the proposal from [1] we obtain the following structural results.

Theorem 1. *Any low properly 2-c.e. Turing degree* $\mathbf{d}$ *is isolated from side.*

In the setting of weak truth table degrees we can go through the class of all properly 2-c.e. degrees.

Theorem 2. *Any properly 2-c.e. wtt-degree* $\mathbf{d}$ *is isolated from side.*

The author is supported by RFBR, project No. 18-31-00420.

References

1. Arslanov M. M., Yamaleev M. M. On the Problem of Definability of the Computably Enumerable Degrees in the Difference Hierarchy // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39, № 5. –P. 634—638.

2. Cai M., Shore R.A., Slaman T.A. The n-r.e. degrees: undecidability and Σ_1 substructures // Journal of Mathematical Logic. – 2012. – V. 12. – P. 1–30.

3. Cooper S. B., Yi X. Isolated d. r. e. degrees // Preprint series 17, Universiry of Leeds, Dept of Pure Math. – 1995.

4. Wu G., Yamaleev M. M. Isolation: motivations and applications // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2012. – V. 154, № 2. – P. 204—217.

5. Yang Y., Yu L., On Σ_1-structural differences among Ershov hierarchies // J. Symb. Logic. – 2006. – V. 71. – P. 1223–1236.

RATIONAL GRADING IN AN EXPRESSIVE DESCRIPTION LOGIC WITH INVERSE AND TRANSITIVE ROLES AND COUNTING

M. Yanchev
Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Sofia, Bulgaria
yanchev@fmi.uni-sofia.bg

Description Logics (DLs) are a family of formalisms widely used in knowledge-based systems. The representation in their languages of transitive relations, in different possible ways [2], and also of inverse relations, is important for dealing with complex objects. *Transitive roles* (i.e. relations in DLs) permit such objects to be described by referring to their components without specifying a particular level of decomposition. *Inverse roles* enable the language to describe both the whole by means of its components and vice versa, for example `has_part` and `is_part_of`.

Reducing the complexity of reasoning, especially to the point permitting practical and efficient use, is a permanent goal in DLs. In [3] an optimized PSPACE tableaux algorithm is presented for $\mathcal{ALCNI}_{R^+}$—a DL from the $\mathcal{AL}$ family with transitive and inverse roles, and the counting (or *grading*—a term coming from the modal counterparts of DLs [1]) concepts (formulae) called *number restrictions.*

Another concept constructors, called *part restrictions* [8], are capable of distinguishing a part of a set of successors, and in that way they realize *rational grading.* These constructors are analogues of the modal operators for rational grading [5] which generalize the majority operators [4]. They are $MrR.C$ and (the dual) $WrR.C$, where r is a rational number in $(0, 1)$, R is a non-transitive role, and C is a concept. The intended meaning of $MrR.C$ is '(strongly) More than r-part of R-successors (or R-neighbors, in the presence of inverse roles) of the current object possess the property C'. Part restrictions essentially enrich the expressive capabilities of DLs. One example of their use is to express the notion of qualifying majority in a voting system:

$$M\tfrac{2}{3}\,\mathsf{voted.Yes}$$

Formally, the interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, .^{\mathcal{I}})$ of part restrictions, for any concept C, non-transitive role R, and rational number $r \in (0,1)$, is defined as follows. $R^{\mathcal{I}}(x)$ denotes the set of $R^{\mathcal{I}}$-neighbors of x, $R^{\mathcal{I}}(x, C)$ denotes the set of $R^{\mathcal{I}}$-neighbors of x which are in $C^{\mathcal{I}}$, i.e. $\{y \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}} \text{ and } y \in C^{\mathcal{I}}\}$, and $\sharp M$ denotes the cardinality of a set M.

$$(MrR.C)^{\mathcal{I}} := \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \sharp R^{\mathcal{I}}(x, C) > r.\sharp R^{\mathcal{I}}(x)\}$$
$$(WrR.C)^{\mathcal{I}} := \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \sharp R^{\mathcal{I}}(x, \neg C) \leqslant r.\sharp R^{\mathcal{I}}(x)\} \;\Big(= (\neg MrR.\neg C)^{\mathcal{I}}\Big)$$

Presburger constraints in the language of extended modal logic EXML [6], a many-relational language with only independent relations, capture both integer and rational grading, and they have rich expressiveness. The modal rational grading operators are expressible by the presburger constraints. Another, combinatorial, approach to grading in modal logics uses the so called *Majority digraphs* [7]. In this approach the grading with real coefficients can be expressed additionally.

Nonetheless, the use of separate rational grading, having its place also in modal logics, proves markedly beneficial in DLs. Part restrictions can be combined in a DL with different concepts and roles. *Indices technique* [12], specially designed for exploring the part restrictions, permits to design completion rules, dealing with part restriction, and to give an adequate rule application strategy, all to guarantee the correctness of the tableaux algorithm. This technique allows following a common way of obtaining decidability and complexity results in rational grading languages with various expressivity. In particular, reasoning complexity results—polynomial, NP, and co-NP—concerning a range of description logics from the $\mathcal{AL}$ family with part restrictions added, are obtained [9], [8], [10], as well as PSPACE results for Description and modal logics [8], [11], [12].

Now, we consider DL $\mathcal{ALCQPI}_{R^+}$ where qualifying number restrictions (instead of number restrictions) and part restrictions are allowed additionally to the syntax of $\mathcal{ALCNI}_{R^+}$. Modifying the tableaux algorithm presented in [3], we give a PSPACE tableaux algorithm for $\mathcal{ALCQPI}_{R^+}$. Essentially, we use the indices technique to cope with part restrictions. We extend both the set of the tableaux properties and the set of completion rules to reflect the presence of part restrictions. The indices technique provides us with a kind of 'horizontal blocking' of the completion tree generation process which is crucial for the algorithm termination, as it limits the branching of the tree caused by part restrictions. As a result the reasoning complexity in the extended logic remains in PSPACE. Finally, we prove:

Theorem. *The presented tableaux algorithm is a PSPACE decision procedure for the satisfiability and subsumption of $\mathcal{ALCQPI}_{R^+}$-concepts.*

References

1. Fine K. In so many possible worlds // Notre Dame Journal of formal logic. – 1972. – V. 13, № 4. – P. 516–520.

2. Sattler U. A concept language extended with different kinds of transitive roles // In G. Görz and S. Hölldobler, editors, *20. Deutsche Jahrestagung für Künstliche Intelligenz*, number 1137 in Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer Verlag. – 1996.

3. Horrocks I., Sattler U., Tobies S. A PSpace algorithm for deciding $\mathcal{ALCNI}_{R^+}$ satisfiability // LTCS-Report 98-08, LuFg Theoretical Computer Science, RWTH Aachen, Germany. – 1998.
4. Pacuit E., Salame S. Majority logic // Book of Abstracts, Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2004). – 2004. – P. 598–605.
5. Tinchev T., Yanchev M. Modal operators for rational grading // Book of Abstracts, International Conference Pioneers of Bulgarian Mathematics, Sofia, Bulgaria. – 2006. – P. 123–124.
6. Demri S., Lugiez D. Presburger modal logic is PSPACE-complete // LNCS 4130, Automated Reasoning (IJCAR 2006), London:Springer-Verlag. – 2006.
7. Lai T., Endrullis J., Moss L. S. Majority Digraphs // ArXiv e-print 1509.07567, September 2015.
8. Yanchev M. Part restrictions: adding new expressiveness in description logics // Abstracts of Informal Presentations, CiE. – 2012. – P. 144. – http://www.mathcomp.leeds.ac.uk/turing2012/WScie12/Images/abstracts-booklet.pdf.
9. Yanchev M. Part restrictions in description logics: reasoning in polynomial time complexity // Contributed Talk Abstracts, LC. – 2012. – P. 38–39. – http://www.mims.manchester.ac.uk/events/workshops/LC2012/abs/contrib.pdf.
10. Yanchev M. Part restrictions in description logics with union and counting constructors // Collection of Abstracts, CiE. – 2013. –P. 43. – https://cie2013.wordpress.com/2013/06/29/downloadable-material/.
11. Yanchev M. PSPACE rational grading with inverse relations and intersection of relations // Collection of Abstracts, International conference 'Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications', Kazan, Russia. – 2014. – P. 168. – https://kpfu.ru/portal/docs/F344663063/__Main.pdf.
12. Yanchev M. A description logic with part restrictions: PSPACE-complete expressiveness // A. Beckmann, E. Csuhaj-Varjú, and K. Meer, editors, Collection of Unpublished Abstracts, Budapest, Hungary. – CiE. – 2014. – P. 261–270.

THE LEAST DIMONOID CONGRUENCES ON THE FREE TRIOID

A. V. Zhuchok

Luhansk Taras Shevchenko National University, Starobilsk (Ukraine)

zhuchok.av@gmail.com

Following [1], a trioid is a nonempty set T equipped with three binary associative operations $\dashv$, $\vdash$, and $\perp$ satisfying the following axioms:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \qquad (T1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \qquad (T2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \qquad (T3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{T4}$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{T5}$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{T6}$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{T7}$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \tag{T8}$$

for all $x, y, z \in T$. A dimonoid [2] is a nonempty set T equipped with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ satisfying the axioms $(T1)$–$(T3)$.

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. Let X be an arbitrary nonempty set, and let ω be an arbitrary word over the alphabet X. The length of ω is denoted by ℓ_ω. For any $n, k \in \mathbb{N}$ and $L \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $L \neq \varnothing$, we let $L + k = \{m + k \mid m \in L\}$ and denote the least (greatest) number of L by L_{min} (L_{max}).

Let $F[X]$ be the free semigroup on X. Define operations $\dashv$, $\vdash$, and $\perp$ on

$$F = \{(w, L) \mid w \in F[X], L \subseteq \{1, 2, \ldots, \ell_w\}, L \neq \varnothing\}$$

by

$$(w, L) \dashv (u, R) = (wu, L), \quad (w, L) \vdash (u, R) = (wu, R + \ell_w),$$
$$(w, L) \perp (u, R) = (wu, L \cup (R + \ell_w))$$

for all $(w, L), (u, R) \in F$. By Lemma 7.1 and Theorem 7.1 from [3], $(F, \dashv, \vdash, \perp)$ is the free trioid. It is denoted by $FT(X)$.

If ρ is a congruence on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ such that two operations of $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ coincide and it is a dimonoid, we say that ρ is a dimonoid congruence [4]. A dimonoid congruence ρ on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ is called a $d_{\dashv}^{\perp}$-congruence (respectively, $d_{\vdash}^{\perp}$-congruence) [4] if operations $\dashv$ and $\perp$ (respectively, $\vdash$ and $\perp$) of $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ coincide. If ρ is a congruence on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ such that all operations of $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ coincide, we say that ρ is a semigroup congruence.

Theorem. *Let $FT(X)$ be the free trioid and $(w, L), (u, R) \in FT(X)$.*

(i) Define a relation $\widetilde{\sigma_{\dashv}^{\perp}}$ on $FT(X)$ by

$$(w, L)\widetilde{\sigma_{\dashv}^{\perp}}(u, R)$$

if and only if

$$w = u \quad \text{and} \quad L_{min} = R_{min}.$$

Then $\widetilde{\sigma_{\dashv}^{\perp}}$ is the least $d_{\dashv}^{\perp}$-congruence on $FT(X)$.

(ii) Define a relation $\widetilde{\sigma_{\vdash}^{\perp}}$ on $FT(X)$ by

$$(w, L)\widetilde{\sigma_{\vdash}^{\perp}}(u, R)$$

if and only if

$$w = u \quad \text{and} \quad L_{max} = R_{max}.$$

Then $\widetilde{\sigma_{\vdash}^{\perp}}$ is the least $d_{\vdash}^{\perp}$-congruence on $FT(X)$.

(iii) Define a relation $\widetilde{\sigma}$ on $FT(X)$ by

$$(w, L)\widetilde{\sigma}(u, R)$$

if and only if $w = u$. Then $\widetilde{\sigma}$ is the least semigroup congruence on $FT(X)$.

References

1. Loday, J.-L., Ronco, M.O. Trialgebras and families of polytopes. Contemp. Math. **346**, 369–398 (2004).
2. Loday, J.-L. Dialgebras. In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math., vol. **1763**, Berlin: Springer-Verlag, 7–66 (2001).
3. Zhuchok, A.V. Trioids. Asian-European J. Math. **8**, no. 4, 1550089 (23 p.) (2015). doi: 10.1142/S1793557115500898.
4. Zhuchok, A.V. Free commutative trioids. Semigroup Forum **98**, no. 2, 355–368 (2019). doi: 10.1007/s00233-019-09995-y.

СТРОГО Q-НИЛЬ-ЧИСТЫЕ КОЛЬЦА

А. Н. Абызов, М. С. Еряшкин, Д. Т. Тапкин
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
aabyzov@kpfu.ru, mikhail.eryashkin@gmail.com, danil.tapkin@yandex.ru

Кольцо называется *чистым*, если каждый его элемент представим в виде суммы обратимого элемента и идемпотента. Изучение чистых колец было инициировано в работе [1]. Кольцо называется *строго чистым*, если каждый его элемент представим в виде суммы коммутирующих обратимого элемента и идемпотента. Понятие строго чистого кольца было введено и изучено в работе [2]. Кольцо называется *(строго) ниль-чистым,* если каждый его элемент является суммой (коммутирующих) нильпотентного элемента и идемпотента. Ниль-чистые и строго ниль-чистые кольца были введены и изучены в работе [3]. Всякое (строго) ниль-чистое кольцо является (строго) чистым.

Кольцо R называется *строго q-ниль-чистым,* если каждый элемент из R представим в виде суммы коммутирующих q-потента и нильпотента. Строго q-ниль-чистые кольца изучены в статье [4]. Строго 3-ниль-чистые кольца в последнее время были изучены в работах [5], [6]. Имеет место следующее описание строго q-ниль-чистых колец.

Теорема 1. *Пусть $q > 1$ – натуральное число. Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R – строго q-ниль чистое кольцо;*
2) *для каждого $r \in R$ элемент $r^q - r$ является нильпотентным;*
3) *$J(R)$ – ниль-идеал и всякое примитивное справа фактор-кольцо кольца R имеет вид $M_n(F)$, где F – конечное поле, и $\mid F \mid^i -1 \mid q-1$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Следствие 2. *Если R – строго q-ниль чистое кольцо, то каждое подкольцо R и каждое фактор-кольцо кольца R также является строго q-ниль чистым кольцом.*

Теорема 3. *Пусть $q > 1$ – натуральное число, F – конечное поле характеристики p, $n \in \mathbb{N}$ и каждая матрица $A \in M_n(F)$ представима в виде суммы коммутирующих q-потентной матрицы и идемпотентной матрицы. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *$\mid F \mid^i -1 \mid q-1$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$;*

2) *$p^s \mid q-1$, где $s \in \mathbb{Z}$ и p^s – наименьшая степень p, которая больше или равна n;*

3) *$M_n(F)$ – строго q-ниль-чистое кольцо.*

В ([3, вопрос 3]) была поставлена проблема: является ли полное кольцо матриц $M_n(R)$ ниль-чистым, если R – ниль-чистое кольцо. В статье [7] было показано, что положительное решение этой проблемы эквивалентно положительному решению гипотезы Кёте в классе алгебр над полем $\mathbb{F}_2$. Напомним, что гипотеза Кёте утверждает, что всякое кольцо, содержащее ненулевой одностороний ниль-идеал, содержит также ненулевой двусторонний ниль-идеал.

Теорема 4. *Следующие условия равносильны:*

1) *если R – строго ниль-чистое кольцо, то $M_2(R)$ – 4-строго-ниль-чистое кольцо;*

2) *если R – строго ниль-чистое кольцо, то для каждого $r \in M_2(R)$ элемент $r^4 - r$ является нильпотентным;*

3) *если R – ниль-алгебра над полем $\mathbb{F}_2$, то $M_2(R)$ – ниль-кольцо;*

4) *проблема Кёте имеет положительное решение в классе $\mathbb{F}_2$-алгебр.*

Теорема 5. *Пусть p – простое число. Следующие условия равносильны:*

1) *если R – строго p-ниль-чистая $\mathbb{F}_p$-алгебра, то $M_2(R)$ – p^2-строго-ниль-чистое кольцо;*

2) *если R – ниль-алгебра над полем $\mathbb{F}_p$ и $n \geqslant 1$, то $M_n(R)$ – ниль-кольцо;*

3) *проблема Кёте имеет положительное решение в классе $\mathbb{F}_p$-алгебр.*

В работах [8] и [9] описаны кольца, у которых каждый элемент является соответственно суммой двух идемпотентов и двух трипотентов. В [9, проблема 6.4] была поставлена проблема об описании колец, у которых каждый элемент является суммой двух (коммутирующих) p-потентов, где p – простое число.

Пусть $q, p \in \mathbb{Z}$, причем p – простое. Обозначим через $s_2(q,p)$ наибольшее $s \in \mathbb{N}$ такое, что $p^s | q-1$. Тогда $q - 1 = p^{s_2(q,p)}k$ и $(p,k) = 1$. Обозначим через $s_1(q,p)$ – порядок элемента p в $\mathbb{Z}_k$.

Теорема 6. *Пусть R – кольцо. Если каждый элемент является суммой двух коммутирующих q-потентов и нильпотента, то $J(R)$ – ниль-идеал, $R \cong \prod_{i=1}^{r} R_{p_i}$, где R_{p_i} такие, что $R_{p_i}/J(R_{p_i})$ является подпрямым произведением колец вида $M_n(F)$, где F – поле с p_i^l элементами, причем tl делит $s_1(q,p_i)$, и каждый элемент поля из p_i^{tl} элементов является суммой двух коммутирующих q-потентов для любого $t \in \overline{1,n}$.*

Теорема 7. *Пусть R – кольцо. Следующие условия равносильны:*

1) *каждый элемент $r \in R$ является суммой двух коммутирующих 5-потентов;*

2) *имеет место изоморфизм$R \cong R_2 \times R_3 \times R_5 \times R_{13}$, где*
   - a) *R_{13} является подпрямым произведением поля $\mathbb{F}_{13}$;*
   - b) *R_5 является подпрямым произведением поля $\mathbb{F}_5$;*
   - c) *R_3 является подпрямым произведением полей $\mathbb{F}_3$ и $\mathbb{F}_9$;*
   - 4) *$R_2/J(R_2)$ является подпрямым произведением поля $\mathbb{F}_2$ и группа $U(R_2)$ имеет экспоненту 4;*

Литература

1. W. K. Nicholson, Lifting idempotents and exchange rings, Trans. Amer. Math. Soc., 229 (1977), 269-278.
2. W. K. Nicholson, Strongly clean rings and Fitting's lemma, Communications in Algebra, 27:8 (1999), 3583–3592.
3. A. J. Diesl, Nil clean rings, J. Algebra, 383 (2013), 197-211.
4. А.Н. Абызов, Строго q-ниль-чистые кольца, Сиб. матем. журн., 60:2 (2019), 197-200.
5. H. Chen, M.Sheibani Rings in which elements are sums of tripotents and nilpotents, J. Algebra Appl., 17:3 (2018), 1850042, 11 pp.
6. Y. Zhou, Rings in which elements are sum of nilpotents, idempotents and nilpotents J. Algebra Appl., 217:1 (2018), 1850009, 7 pp.
7. J. Matczuk, Conjugate (nil) clean rings and Kothe's problem, J. Algebra Appl., 16 (2017), Article 1750073.
8. Y. Hirano, H. Tominaga, Rings in which every element is the sum of two idempotents, Bull Aust Math Soc., 37:2 (1988), 161-164.
9. Z. Ying, T. Kosan, Y. Zhou, Rings in which every element is a sum of two tripotents, Can. Math. Bull., 59:3 (2016), 661-672.

ТЕМПОРАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПОЛУГРУПП НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина
КФУ, Казань; КНИТУ (КХТИ), Казань
yalpin@kpfu.ru, alpina.valentina@yandex.ru

По известной теореме Фробениуса неприводимая неотрицательная матрица либо примитивна, либо перестановочно подобна матрице вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

с квадратными диагональными блоками, причём в матрице $A^r = \operatorname{diag}(A_{11}^{(r)}, A_{22}^{(r)}, \dots, A_{rr}^{(r)})$ диагональные блоки примитивны (см. например, [1]). Число $r = r(A)$ называется индексом импримитивности матрицы A. Матрица A — пример блочно-мономиальной матрицы. Вообще, матрицу будем называть блочно-мономиальной, если в каждой блочной строке и блочном столбце она имеет ровно один ненулевой блок.

Мультипликативная полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n называется неприводимой, если для любых индексов $i, j \in \{1, \dots, n\}$ в полугруппе найдётся матрица с положительным (i, j)-элементом. Полугруппа $\mathcal{P}$ называется примитивной, если она содержит положительную матрицу. Протасов и Войнов [2] доказали следующее обобщение теоремы Фробениуса: любая неприводимая полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов либо примитивна, либо посредством одного перестановочного подобия все матрицы полугруппы приводятся к блочно-мономиальной форме, причём преобразованная полугруппа содержит блочно-диагональную матрицу с положительными диагональными блоками.

Ключевую роль в теореме Протасова–Войнова играет понятие индекса импримитивности полугруппы неотрицательных матриц. Скажем, что индексы i и j совместимы полугруппой $\mathcal{P}$, если существует матрица $A \in \mathcal{P}$, в которой i-я и j-я строки в некотором общем столбце имеют положительные элементы. Индексом импримитивности полугруппы $\mathcal{P}$ называется максимальное число $r(\mathcal{P})$ индексов, любые два из которых несовместимы полугруппой $\mathcal{P}$. Это понятие является естественным обобщением понятия индекса импримитивности, известного из теории Перрона–Фробениуса, поскольку индекс импримитивности полугруппы, порожденной неприводимой неотрицательной матрицей A, совпадает с $r(A)$ (см. [2]).

Теорема Протасова–Войнова вызывает естественный интерес к полугруппам неотрицательных блочно-мономиальных матриц более общего вида. Далее через $\mathcal{P}$ обозначается произвольная полугруппа блочно-мономиальных матриц блочного порядка k без нулевых строк. Множество $\mathcal{P}_s$ диагональных (s, s)-блоков матриц полугруппы $\mathcal{P}$ образует мультипликативную полугруппу. Эта полугруппа называется s-й темпоральной компонентой полугруппы $\mathcal{P}$ $(s = 1, 2, \dots, k)$. Понятие темпоральной компоненты введено в [3], приводимые ниже свойства темпоральных компонент доказаны в [4].

Теорема 1. *Индекс импримитивности полугруппы $\mathcal{P}$ равен сумме индексов импримитивности её темпоральных компонент:*

$$r(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P}_1) + \dots + r(\mathcal{P}_k).$$

Полугруппа $\mathcal{P}$ называется блочно-неприводимой, если для любых $s, t \in \in \{1, 2, \dots, k\}$ полугруппа содержит матрицу с ненулевым (s, t)-блоком.

Теорема 2. *Если полугруппа $\mathcal{P}$ блочно-неприводима, то индексы импримитивности темпоральных компонент совпадают.*

Работа первого автора выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.12878.2018/12.1.

Литература

1. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967.
2. Protasov V. Yu., Voynov A. S. *Sets of nonnegative matrices without positive products* // Linear Algebra Appl. – V. 437. – 2012 – P. 749-765.
3. Альпин Ю. А., Альпина В. С. *Темпоральные компоненты полугруппы неотрицательных матриц. Обобщение теоремы Минка о структуре неприводимой матрицы* // Записки научн. семин. ПОМИ. – Т. 463. – 2017. – С. 5-12.
4. Альпин Ю. А., Альпина В. С. *Индексы импримитивности темпоральных компонент полугруппы неотрицательных матриц* // Записки научн. семин. ПОМИ. – Т. 472. – 2018. – С. 17-30.

ЯВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ GL_N МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

Д. В. Артамонов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Москва

artamonov.dmitri@gmail.com

Рассмотрим группу $GL_n(\mathbb{C})$ и функции на этой группе. Имеется действие $GL_n(\mathbb{C})$ на эти функции, при котором элемент $X \in GL_n(\mathbb{C})$ действует по правилу $f(g) \mapsto f(gX)$. Переходя к алгебрам Ли получаем соответственно действие gl_n. Любое конечномерное неприводимое представление gl_n реализуется как подпредставление в пространстве функции на этой группе. В докладе будет обсуждаться задача явного описания такого подпредставления (то есть явного построения базисных функций и описания действия генераторов алгебры на эти базисные элементы).

Для этого прежде всего функции на элементе $X \in GL_n(\mathbb{C})$ будут записаны как обычные функции от миноров матрицы X. Затем будут явно выписаны дифференциальные соотношения, выполнение которых необходимо для попадания соответствующей функции в подпредставление. Идеал, порождённый этими соотношениями, оказывается тесно связанным с хорошо изученным объектом дифференциальной алгебры – торическими идеалами в алгебре Вейля.

С помощью метода диаграмм Ньютона будут получены базисные решения. Дифференциальные соотношения помогут описать действие генераторов алгебры на эти базисные решения.

КОРЕТРАКТАБЕЛЬНОСТЬ СМЕШАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Д. Ю. Артемов

Московский педагогический государственный университет, Москва

dyu.artemov@mail.ru

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Левый R-модуль M называется *ретрактабельным* [1], если для каждого его ненулевого подмодуля N выполнено $\mathrm{Hom}_R(M,\, N) \neq 0$. Левый R-модуль M называется *коретрактабельным* [2], если для каждого его собственного подмодуля N выполнено $\mathrm{Hom}_R(M/N,\, M) \neq 0$.

В работе [3] рассматриваются классы ретрактабельных и коретрактабельных модулей над кольцом целых чисел (т. е. ретрактабельные и коретрактабельные абелевы группы). Абелева группа A называется *ретрактабельной*, если для каждой её ненулевой подгруппы B выполняется

$$\mathrm{Hom}(A,\, B) \neq 0.$$

Абелева группа A называется *коретрактабельной*, если для каждой её собственной подгруппы B выполняется

$$\mathrm{Hom}(A/B,\, A) \neq 0.$$

В [3] приводится полное описание следующих классов абелевых групп: ретрактабельные абелевы группы, коретрактабельные абелевы группы без кручения и коретрактабельные периодические абелевы группы. Настоящая работа завершает исследование [3]. Здесь приводится полное описание класса коретрактабельных смешанных абелевых групп.

Все группы, о которых пойдёт речь в дальнейшем, предполагаются абелевыми. Через $t_p(A)$ будем обозначать p-компоненту группы A, $\mathbb{Q}$ — обозначение аддитивной группы всех рациональных чисел, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — обозначение квазициклической p-группы (p — простое число).

Теорема 1. *Пусть A — смешанная группа, содержащая подгруппу вида $\mathbb{Q}$. Группа A является коретрактабельной тогда и только тогда, когда она для любого простого числа p содержит подгруппу вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

Теорема 2. *Пусть A — смешанная группа, не содержащая подгрупп вида $\mathbb{Q}$. Группа A является коретрактабельной тогда и только тогда, когда для всех простых чисел p таких, что A не содержит подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, любая факторгруппа группы A также не содержит подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и дополнительно $t_p(A)$ отлична от нуля.*

Литература

1. Khuri S.M. Endomorphism rings and lattice isomorphism // J. Algebra. 1979. V. 56. I. 2. P. 401–408.

2. Amini B., Ershad M., Sharif H. Coretractable modules // J. Aust. Math. Soc. 2009. V. 86. I. 3. P. 289–304.

3. Артемов Д.Ю. Ретрактабельные и коретрактабельные абелевы группы // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2018». Секция «Математика и механика». Подсекция «Математическая логика, алгебра и теория чисел». 9–13 апреля 2018 г. М.: МАКС Пресс, 2018.

   URL: `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/index.htm` (дата обращения: 17.04.2019).

КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ СВОБОДНЫХ ГРУПП БЕСКОНЕЧНО БАЗИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ С. И. АДЯНА

А. Т. Асланян, А. Л. Геворгян, А. А. Григорян

Российско-Армянский Университет, Ереван

haikaslanyan@gmail.com, amirjan.gevorgian@gmail.com,
hayk.grigoryan27@gmail.com

Первые примеры бесконечных независимых систем групповых тождеств (от двух переменных) были построены С.И.Адяном в [1] (см. также [2]). Этим было дано конструктивное решение известной проблемы конечного базиса теории групп, которая была поставлена Б.Нейманом в 1937 г. Этот результат вошел в монографию 1975 года, где доказано (см. [3, глава VII]), что при любом нечетном $n \geqslant 1003$ следующее семейство тождеств от двух переменных

$$(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1, \qquad (1)$$

где параметр p пробегает все простые числа, является независимой, т.е. ни одно из этих тождеств не является следствием остальных. Отсюда следует, что для любого нечетного $n \geqslant 1003$ существует континуум различных многообразий $\mathcal{A}_n(\Pi)$, соответствующих различным множествам простых чисел Π. При этом, при фиксированном $m > 1$ существует континуум неизоморфных групп $\Gamma(m, n, \Pi)$, где $\Gamma(m, n, \Pi)$ – относительно свободная группу ранга m многообразия $\mathcal{A}_n(\Pi)$.

Легко понять, что все многообразия, определенные тождествами вида (1), содержат бернсайдово многообразие $\mathcal{B}_n$ всех групп, удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$. Напоминаем, что *свободной бернсайдовой группой* $B(m,n)$ называется свободная группа ранга m многообразия $\mathcal{B}_n$.

Дальнейшее изучение групп $\Gamma(m,n,\Pi)$ дано в работе [4], где доказано, что централизатор любого неединичного элемента каждого из относительно свободных групп $\Gamma(m,n,\Pi)$ – циклический. Показано, что все указанные группы имеют тривиальный центр, любая их абелева подгруппа – циклическая и любая их нетривиальная нормальная подгруппа – бесконечна. Для свободных групп Γ всех многообразий $\mathcal{A}_n(\Pi)$ получен также ответ на вопрос об описании автоморфизмов полугруппы $End(\Gamma)$ поставленный Б.Плоткиным в 2000 г. В частности, доказано, что для любой из этих групп $\Gamma(m,n,\Pi)$ группа автоморфизмов полугруппы $End(\Gamma(m,n,\Pi))$ канонически вложено в группу $Aut(\Gamma(m,n,\Pi))$. Нами доказана

Теорема. *Любая конечная подгруппа каждой свободной группы* $\Gamma(m,n,\Pi)$ *произвольного ранга* $m \geqslant 1$ *бесконечно базируемых многообразий групп* $\mathcal{A}_n(\Pi)$ *является циклической группой.*

Подчеркнем, что аналогичное утверждение для свободных бернсайдовых групп $B(m,n)$ нечетного периода $n \geqslant 665$ и любого ранга раннее было доказано С.И.Адяном в [3] (см. гл VII [3]), а для абсолютно свободных групп оно очевидно.

Исследование частично выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1A306.

Литература

1. S.I. Adjan, Infinite irreducible systems of group identities, Math. USSR-Izv., 4:4 (1970), 721–739.
2. A. Yu. Ol'shanskii, On the problem of a finite basis of identities in groups, Math. USSR-Izv., 4:2 (1970), 381–389.
3. S.I. Adian, The Burnside problem and identities in groups, Springer-Verlag. Berlin-New York, Results in Mathematics and Related Areas, 1979, 95.
4. S. I. Adian, V. S. Atabekyan, On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian, Izv. Math., 81:5 (2017), 889–900.

КЛАССИФИКАЦИЯ И ТИПЫ БАЗИСОВ В ПОЛНОМ ЧАСТИЧНОМ УЛЬТРАКЛОНЕ РАНГА 2

С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев
Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
badmaevsa@mail.ru, goran5@mail.ru

В теории дискретных функций активно исследуются мультифункции – функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве значений подмножества множества A. При определении суперпозиции для мультифункций на A, где $|A| = k$, мы по сути имеем дело с подмножеством множества всех функций 2^k-значной логики. Заметим, что обычная суперпозиция, которая рассматривается для функций k-значной логики, в данном случае не подойдет. К настоящему времени известны два вида суперпозиции для мультфункций [1, 2].

Пусть $A = \{0,1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$$P_{2,n}^{\bar{*}} = \{f | f : A^n \to F\}, P_2^{\bar{*}} = \bigcup_n P_{2,n}^{\bar{*}},$$

$$P_{2,n}^{*} = \{f | f \in P_{2,n}^{\bar{*}} \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| \leqslant 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2^{*} = \bigcup_n P_{2,n}^{*}.$$

$$P_{2,n}^{-} = \{f | f \in P_{2,n}^{\bar{*}} \text{ и } 1 \leqslant |f(\tilde{\alpha})| \leqslant 2 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2^{-} = \bigcup_n P_{2,n}^{-}.$$

$$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\bar{*}} \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup_n P_{2,n}.$$

Функции из P_2 называют функциями алгебры логики, из P_2^* – частичными функциями на A, из P_2^- – гиперфункциями на A, из $P_2^{\bar{*}}$ – мультифункциями на A.

Задача о принадлежности функций максимальным (предполным) классам является достаточно известной, например, для функций алгебры логики она решена в [3]. Используя разбиение множества всех функций на классы эквивалентности по отношению принадлежности максимальным классам, можно оценить мощности всевозможных базисов, описать все типы базисов, исследовать решетку замкнутых классов.

В [4] описаны все максимальные частичные ультраклоны мультифункций на A. В докладе рассматривается вопрос о принадлежности мультифункций максимальным частичным ультраклонам. Количество максимальных частичных ультраклонов, равное 12, дает верхнюю оценку числа классов разбиения, как мощность множества всех подмножеств множества максимальных частичных ультраклонов, т. е. 2^{12}. Исследование свойств мультифункций позволяет понизить эту оценку. Компьютерный эксперимент установил, что мультифункции от трех переменных дают 91 класс эквивалентности. Таким образом, нам удалось получить следующие утверждения.

Теорема 1. *Число классов мультифункций, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 91.*

Теорема 2. *Число классов функций алгебры логики, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 15.*

Теорема 3. *Число классов частичных функций, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 49.*

Теорема 4. *Число классов гиперфункций, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 28.*

Полный компьютерный перебор показал, что имеется 1 тип базисов мощности 1, 690 типов базисов мощности 2, 7940 типов базисов мощности 3, 2830 типов базисов мощности 4, базисов большей мощности не существует.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект №18-31-00020.

Литература

1. Перязев, Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. — 2009. — Т. 151. — Книга 2. — С. 120–125.

2. Пантелеев, В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонауч. серия. — 2009. — №2 (68). — С. 60–79.

3. Яблонский С.В. О суперпозициях функций алгебры логики // Математический сборник. — 1952. — Т. 30 (72), № 2. — С. 329–348.

4. Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 450–474.

ОРДИНАЛЫ РЕАЛИЗУЕМЫЕ ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Н. А. Баженов, М. В. Зубков
ИМ СО РАН, Новосибирск; КФУ, Казань
bazhenov@math.nsc.ru, maxim.zubkov@kpfu.ru

Мы следуем подходу работы [1]. Все рассматриваемые отношения эквивалентности имеют область определения ω. Будем говорить, что в.п. отношение эквивалентности E реализует порядковый тип γ, если существует линейный порядок $\mathcal{L}$ определенный на ω такой, что E является конгруэнцией для $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}/E$ имеет порядковый тип γ. Обозначим $Ord(E)$ класс всех ординалов реализуемых вычислимо перечислимым отношением эквивалентности E. Было получено описание всех возможных $Ord(E)$. А именно, была доказана теорема:

Теорема. *Если $Ord(E)$ содержит ординал меньше ω^2, то $Ord(E)$ имеет один из следующих видов: $(\omega\cdot n, \omega\cdot(n+1))$, $[\omega\cdot n, \omega\cdot(n+1))$, $[\omega\cdot n, \omega_1^{CK})$. Причем каждый указанный вид реализуется для некоторого в.п. отношения эквивалентности E.*

Так же будут рассмотрены $Ord(E)$ не содержащие ординалов меньших ω^2, но содержащие ординалы меньшие ω^ω.

Второй автор поддержан грантом РФФИ №18-31-00174.

Литература

1. Gavryushkin A., Khoussainov B., Stephan F. Reducibilities among equivalence relations induced by recursively enumerable structures // Theoretical Computer Science. – 2016. – V. 612. – P. 137–152.

О ГРАДУИРОВАННЫХ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ

И. Н. Балаба
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тула
ibalaba@mail.ru

Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными с единицей, градуированные мультипликативной группой G.

В теории градуированных колец значительную роль играют градуированные тела, то есть градуированные кольца, каждый ненулевой однородный элемент которых является обратимым. Несмотря на то, что градуированные тела не являются телами в обычном смысле, они сами и градуированные модули над ними обладают свойствами, аналогичными свойствам тел и линейных пространств над телами (см. [1]).

Градуированный модуль над градуированным телом являются gr-свободным, то есть обладают базисом, состоящим из однородных элементов. Хорошо известно, что если $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ конечно порожденный градуированный правый

D-модуль с базисом состоящим из однородных элементов $v_1, v_2, \dots, v_n$, $v_i \in \in V_{g_i^{-1}}$ $(i = 1, \dots, n)$, то его градуированное кольцо эндоморфизмов $\mathrm{END}_D(V)$ изоморфно кольцу матриц $M_n(D)(g_1, \dots, g_n) = \bigoplus_{h \in G} M_n(D)_h(g_1, \dots, g_n)$, где

$$M_n(D)_h(g_1, \dots, g_n) = \begin{pmatrix} D_{g_1^{-1}hg_1} & D_{g_1^{-1}hg_2} & \dots & D_{g_1^{-1}hg_n} \\ D_{g_2^{-1}hg_1} & D_{g_2^{-1}hg_2} & \dots & D_{g_2^{-1}hg_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{g_n^{-1}hg_1} & D_{g_n^{-1}hg_2} & \dots & D_{g_n^{-1}hg_n} \end{pmatrix}.$$

Такие градуировки на матричных кольцах называются *хорошими*, все матричные единицы являются однородными элементами.

Градуированным центром $Z_{gr}(D)$ тела D назовем максимальное градуированное подкольцо центра $Z(D)$, оно порождено однородными центральными элементами кольца D. Ясно, что $Z_{gr}(D)$ является градуированным полем.

Теорема 1. *Пусть D – градуированныое тело, Z – его градуированный центр и F – максимальное градуированное подполе в D. Тогда $D \bigotimes_Z F$ является gr-плотным кольцом в градуированном кольце эндоморфизмов $\mathrm{END}_F(D)$ тела D, рассматриваемого как градуированный модуль над F. Если тело D конечномерно над градуированным центром Z, то $D \bigotimes_Z F$ изоморфно кольцу матриц $M_n(F)(g_1, \dots, g_n)$ над градуированным полем F, снабженному хорошей градуировкой.*

Пусть F – градуированное поле и A – градуированная алгебра над F. Алгебру A назовем *центральной*, если все ее центральные однородные элементы лежат в F.

Следующая теорема является градуированным аналогом теоремы Нётер-Сколема.

Теорема 2. *Пусть A – конечномерная центральная gr-простая алгебра над градуированным полем F и B – gr-простая подалгебра алгебры A. Если φ – гомоморфизм алгебры B в A, то существует ненулевой однородный элемент $a \in A_g$ $(g \in Z(G))$, такой, что $\varphi(y) = a^{-1}ya$ для всех $y \in B$.*

Следствие. Пусть A gr-простая алгебра, конечномерная над своим градуированным центром, тогда любой автоморфизм алгебры A, сохраняющий градуировку и оставляющий неподвижными элементы центра, является внутренним.

Теорема 3. *Пусть F – градуированное поле и A – градуированная конечномерная центральная gr-простая алгебра над F. Тогда существует градуированное тело D, являющееся конечномерной центральной gr-простой F-алгеброй, такое что алгебра A изоморфна алгебре матриц $M_n(D)(g_1, \dots, g_n)$ для некоторых $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$.*

Отметим, что в [2] был доказан аналог теоремы Нётер-Сколема в случае, когда G – абелева группа без кручения, а в [3] изучались градуированные простые центральные алгебры в случае абелевой градуировки. В работах [4, 5] дана полная классификация с точностью до эквивалентности конечномерных градуированных алгебр с делением над полем действительных чисел, градуированных конечной абелевой группой.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-41-710004-р-а.

Литература

1. Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышевский сборник. 2005. Том 6, № 4(16). С. 6–23.

2. Hwang Y.-S., Wadsworth A.R.Correspondences between valued division algebras and graded division algebras // J. Algebra. 1999. V. 220. P. 73–114.

3. Hazrat R., Millar J. R. On graded simple algebras // arXiv:1003.4538 [math.KT]

4. Bahturin Y., Zaicev M. Simple graded division algebras over the field of real numbers // Linear Algebra and its Applications. 2016. Том 490. P. 102–123.

5. Rodrigo-Escudero A. Classificftion of division gradings on finite-dimentional simple real algebras // Linear Algebra and its Applications. 2016. Том 493. P. 164–182.

О РАЗРЕШИМЫХ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ СО СВОЙСТВОМ $\mathcal{P}_2$

С. В. Балычев, А. Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

sergej.balychev@gmail.com, formation56@mail.ru

В дальнейшем рассматриваются только конечные группы. Напомним, что группа G является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если $G = A_1A_2 \cdots A_n$ и $A_iA_j = A_jA_i$ для любых пар чисел $i, j \in$ $\in \{1, 2, \ldots n\}$.

Исследования групп с такой факторизацией базируются на фундаментальных работах Ф. Холла, С.А. Чунихина, Хупперта, Виландта, Кегеля, Л.С. Казарина. Современные результаты в этом направлении можно найти в монографии [1].

В работе [2] Амберг, Л.С. Казарин и Хефлинг предложили следующее

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп и k — натуральное число. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_k$ для $\mathfrak{X}$-групп, если $\mathfrak{X}$-группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ в том случае, когда G может быть записана в виде произведения n подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что для каждого выбора индексов $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$ группа $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех групп, то в дальнейшем мы будем просто говорить, что класс $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_k$.

В [2] были полностью описаны все разрешимые наследственные классы и насыщенные классы групп, имеющие свойство $\mathcal{P}_1$ для разрешимых групп, а также приведены серии формаций со свойством $\mathcal{P}_1$.

В настоящем сообщении мы исследуем разрешимые насыщенные формации со свойством $\mathcal{P}_2$ для заданной наследственной насыщенной формации $\mathfrak{X}$.

Известно, что формации всех нильпотентных групп (Кегель [3]), всех разрешимых групп (Л.С. Казарин [4]) имеют свойство $\mathcal{P}_2$.

Нам потребуется конструкция формации $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ [5] (см. также [6–8]).

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$*-субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Согласно [5] для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп G таких, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

В работе [5] установлено, что если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией. В [6] найдены необходимые и достаточные условия, при которых $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет свойство* $\mathcal{P}_2$, *когда* $\mathfrak{F}$ *является формацией Фиттинга и* $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Отметим, что для любого натурального $k \geqslant 2$ можно привести пример разрешимой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, имеющей свойство $\mathcal{P}_k$, но не обладающей свойством $\mathcal{P}_{k-1}$, и для которой выполняется $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Определение 3. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется S_{ch}-замкнутым, если $\mathfrak{X}$ вместе со всякой группой G содержит все её подгруппы Шмидта.

Понятие S_{ch}-замкнутой формации было введено и изучалось в работе [9].

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— разрешимая* S_{ch}*-замкнутая насыщенная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет свойство* $\mathcal{P}_2$, *когда* $\mathfrak{F}$ *имеет такой полный локальный экран* f, *что* $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, *если* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *и* $f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда любая наследственная насыщенная подформация* $\mathfrak{F}$ *из* $\mathfrak{X}$ *имеет свойство* $\mathcal{P}_2$ *для* $\mathfrak{X}$*-групп, когда* $\mathfrak{X}$ *состоит из групп с нильпотентным коммутантом.*

Литература

1. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of Finite Groups. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010.

2. Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б. Конечные группы с кратными факторизациями // Фундаментальная и прикладная математика. 1998 Т. 4, № 4. С. 1251–1263.

3. Kegel O. H. Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. Vol. 87, № 1. S. 42–48.

4. Казарин Л. С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журн. 1991. Т. 34, № 7-8. С. 947–950.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2011. № 4(9). С. 86–91.

6. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.

7. Монахов В. С., Сохор И. Л. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 851–863.

8. Murashka V. I. Finite groups with given sets of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // Asian-European J. of Math. doi.org/10.1142/S1793557120500734.

9. Vasil'ev A. F., Murashka V. I. On the influence of the fitting subgroup on the products of finite soluble groups // ПФМТ. 2015. № 4(25). С. 59–63.

ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ТИТСА В ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ ТИПА $(2, N, 2, 2, 2, 2)$

В. В. Беняш-Кривец, Я. А. Жуковец
Белорусский государственный университет, Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка (Минск, Беларусь)
benyash@tut.by, y.zhukovets@gmail.com

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Э. Б. Винберг [1] ввел в рассмотрение обобщенные тетраэдральные группы, имеющие копредставление вида

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3 \mid {x_1}^{k_1} = {x_2}^{k_2} = {x_3}^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = \\ = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geqslant 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ — циклически редуцированное слово в свободном произведении $\big\langle x_i \mid {x_i}^{k_i} = 1\big\rangle * \big\langle x_j \mid {x_j}^{k_j} = 1\big\rangle$, которое не является собственной степенью. Существует гипотеза [2], что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени в работах [2-6] эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп, кроме групп следующего вида:

$$\Big\langle x_1, x_2, x_3 \mid {x_1}^{k_1} = {x_2}^{k_2} = {x_3}^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^2 = ({x_1}^{\alpha} {x_3}^{\beta})^2 = ({x_2}^{\gamma} {x_3}^{\delta})^2 = 1\Big\rangle,$$

где $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geqslant \frac{1}{2}$. Отметим также, что в [4] гипотеза Розенбергера доказана в следующих случаях: 1) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < \frac{1}{2}$, за исключением случая $k_3 = 2$ и $(k_1, k_2) = (3, 8)$, $(3, 10)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 6)$. В данной работе мы рассмотрим группы с копредставлением

$$\Gamma = \big\langle a, b, c \mid a^2 = b^n = c^2 = R(a, b)^2 = (b^{\alpha} c)^2 = (ac)^2 = 1\big\rangle, \qquad (1)$$

где $R(a, b) = ab^{u_1}ab^{u_2} \dots ab^{u_s}$, $1 \leqslant u_i < n$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть Γ — обобщенная тетраэдральная группа, определенная в (1), $U = u_1 + ... + u_s$, $s > 1$. Пусть n делится либо на простое число $p \geqslant 7$, либо на одно из чисел 8, 9, 25. Если выполняется одно из условий:*

1) $(U, n) = 1$,

2) s нечетно, n делится на 8, U четно и U не делится на 8,

то группа Γ содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.

Литература

1. Э. Б. Винберг. Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями. // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 9. С. 3–12.

2. B. Fine, G. Rosenberger. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999.

3. J. Howie, N. Kopteva. The Tits alternative for generalized tetrahedron groups. // J. Group Theory. 2006. V. 9. P. 173–189.

4. B. Fine, A. Hulpke, V. große Rebel, G. Rosenberger. The Tits alternative for spherical generalized tetrahedron groups. // Algebra Colloquium. 2008. V. 15, N 4. P. 541–554.

5. V. große Rebel, M. Hahn, G. Rosenberger. The Tits alternative for Tsaranov's generalized tetrahedron groups. // Groups-Complexity-Cryptology. 2009. V. 1, N 2. P. 207–216.

6. B. Fine, A. Hulpke, V. große Rebel, G. Rosenberger, S. Schauerte. The Tits alternative for short generalized tetrahedron groups. // Scientia. Series A: Mathematical Sciences. 2011. V. 21. P. 1–15.

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОДГРУПП БЛИЗКИХ К $\mathfrak{F}$-АБНОРМАЛЬНЫМ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р. В. Бородич, М. В. Селькин
Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины, Гомель (Беларусь)
Borodich@gsu.by

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп является одной из классических задач, восходящих к работе Фраттини [1]. В 50-х годах теорема Фраттини получила развитие в работах Гашюца [2], Дескинса [3]. Дальнейший интерес к подгруппам фраттиниевого типа в значительной степени связан с развитием теории формаций (см. монографии [4, 5]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ — множество автоморфизмов группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq$ $\subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [5] будем говорить, что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

Функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно, так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ — характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и группа G имеет группу операторов A. Через $D_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Если в группе G

все максимальные A-допустимые θ-подгруппы содержат $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, то положим $D_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)=G$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* S_n*-замкнутая локальная формация и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *— абнормально полный подгрупповой функтор. Если* N *— нормальная* A*-допустимая* θ*-подгруппа группы* G *и* $N/N\cap D_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}$, *тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N=N_1\times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $N_2\subseteq\Phi_{\theta}(G,A)$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* S_n*-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *— абнормально полный подгрупповой функтор. Если* N *— нормальная* A*-допустимая* θ*-подгруппа группы* G *и* $N/N\cap D_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}$, *то* $N\in\mathfrak{F}$.

В случае, когда функтор θ выделяет все подгруппы, то получаем

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* S_n*-замкнутая локальная формация и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если* N *— нормальная* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $N/N\cap D^{\mathfrak{F}}(G,A)\in\mathfrak{F}$, *тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N=N_1\times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $N_2\subseteq\Phi(G,A)$.

Если к тому же положить, что группа операторов A является единичной, то подгруппа $D_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ совпадает с подгруппой $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и мы получаем соответствующий результат работы [4].

Литература

1. Frattini G. *Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni* // Atti Acad. Dei Lincei 1885. Vol. 1. P. 281–285.

2. Gaschütz W. *Über die* Φ*-Untergruppen endlicher Gruppen* // Math. Z. 1953. Bd. 58. S. 160–170.

3. Deskins W. E. *A condition for the solvability of a finite group* // Ill.J.Math. 1961. Vol. 5. № 2, P. 306–313.

4. Селькин М. В. *Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп.* Мн.:Беларуская навука, 1997.

5. Скиба А. Н. *Алгебра формаций.* Мн.:Беларуская навука, 1997.

ПРАВИЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ТЕОРЕМА ВИЛАНДА-ХАРТЛИ ДЛЯ СУБМАКСИМАЛЬНЫХ $\mathfrak{X}$-ПОДГРУПП

А. В. Васильев, Д. О. Ревин, С. В. Скресанов
ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
vasand@math.nsc.ru, revin@math.nsc.ru, s.skresanov@g.nsu.ru

Всюду далее через $\mathfrak{X}$ обозначен фиксированный непустой класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Классическая теорема Виланда-Хартли (см., например, [1, леммы 2 и 3], [2, глава 5, (3.20)$'$], [3, теорема 13.2]) утверждает:

Теорема I. *Пусть G — конечная группа и A — ее нормальная подгруппа. Тогда для любой максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы H группы G справедливы следующие утверждения:*

(*i*) $N_A(H \cap A)/(H \cap A)$ *не содержит неединичных $\mathfrak{X}$-подгрупп;*

(*ii*) *в частности, $H \cap A = 1$ тогда и только тогда, когда A не содержит неединичных $\mathfrak{X}$-подгрупп.*

Эта теорема позволила Х.Виланду в работах [3, 4] ввести понятие субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы. Определения, данные в этих работах, слегка отличаются, и мы будем субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы в смысле [3] называть также сильно субмаксимальными.

Определение. Подгруппа H группы G называется *субмаксимальной в смысле* [3] или *сильно субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой* (соответственно, *субмаксимальной в смысле* [4] или просто *субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой*), если G можно вложить в качестве нормальной (соответственно, субнормальной) подгруппы в подходящую группу G^* таким образом, чтобы H совпала с $G \cap K$ для некоторой максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы K группы G^*.

Используя это определение, теорему Виланда-Хартли можно эквивалентно переформулировать в следующем виде.

Теорема I*. *Пусть G — конечная группа и H — ее сильно субмаксимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа. Тогда $N_G(H)/H$ не содержит неединичных $\mathfrak{X}$-подгрупп.*

В докладе мы обсудим следующие вопросы.

- Для каких целей может быть использовано понятие субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы?
- Эквивалентны ли определения субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы, данные в [3] и [4]?
- Какое из этих двух определений следует считать правильным?
- Справедлив ли аналог теоремы I* для субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп, анонсированный в [4]?

При поддержке Российского научного фонда (проект №19-11-00039).

Литература

1. Hartley B. A theorem of Sylow type for a finite groups // Math. Z. – 1971. – V. 122, № 4. – P. 223–226.
2. Suzuki M. Group Theory II. – Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo, 1986.
3. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen endlicher Ordnung // Vorlesung an der Universität Tübingen im Wintersemester 1963/64, Helmut Wielandt: Mathematical Works, Vol. 1. Group theory (ed. B. Huppert and H. Schneider, de Gruyter, Berlin). – 1994. – P. 607–655.
4. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups, Santa Cruz, 1979, Proc. Sympos. Pure Math., V. 37, Providence RI: Amer. Math. Soc. – 1980. – P. 161–173.

НОРМАЛИЗАТОРЫ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ

А. С. Васильев

НГУ, Новосибирск

a.vasilev1@g.nsu.ru

Изучению силовских подгрупп уделяется особое внимание в теории конечных групп. Строение силовских подгрупп в простых группах найдено в работах Калужнина, Шевалле, Ри, Вейра, Картера и Фонга. В 2005 году А. С. Кондратьев описал нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах.

В докладе будет представлено строение нормализаторов силовских r-подгрупп в линейных и унитарных группах для нечётных r.

Положим $GL_n^+(q) = GL_n(q)$ и $GL_n^-(q) = GU_n(q)$. Для числа m через m_r обозначена наибольшая степень числа r, делящая число m, и $m_{r'} = m/m_r$.

Теорема 1. *Пусть* $G = GL_n^\eta(q)$, *где* $\eta = \pm 1$ *или знак этого числа,* r *— нечетное простое число, такое, что* $(q, r) = 1$. *Положим*

$$e = \min\{k \geqslant 1 \mid (\eta q)^k \equiv 1 \pmod r\},$$

$n = ae + c$, *где* $0 \leqslant c < e$, *и зафиксируем* r*-ичное представление числа* a

$$a = a_0 + a_1 r + \ldots + a_\nu r^\nu.$$

Тогда для силовской r*-подгруппы* R *группы* G *справедливо*

$$R = 1_c \times R_0^{a_0} \times \ldots \times R_\nu^{a_\nu},$$

где 1_c *— тривиальная подгруппа в* $GL_c^\eta(q)$, *а* R_i *— силовская* r*-подгруппа группы* $G_i = GL_{er^i}^\eta(q)$, *и*

$$N_G(R) = GL_c^\eta(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i \wr Sym_{a_i},$$

$$N_G(R)/R = GL_c^\eta(q) \times \prod_{i=0}^{\nu} N_i/R_i \wr Sym_{a_i},$$

где $N_i = N_{G_i}(R_i)$. *Кроме того,*

$$R_i = C_{(q^e-\eta^e)_r} \wr \underbrace{C_r \wr \ldots \wr C_r}_{i\ \text{раз}}$$

и

$$N_i/R_i = C_{(q^e-\eta^e)_{r'}} \rtimes C_e \times \underbrace{C_{r-1} \times \ldots \times C_{r-1}}_{i\ \text{раз}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $G = GL_n^\eta(q), S = SL_n^\eta(q)$, $R \in Syl_r(G), P = R \cap S \in Syl_r(S)$. *Тогда в случае* $(r, n, (q-\eta)_r) = (3, 3, 3)$ *имеют место изоморфизмы*

$$P \simeq 3^{1+2}, N_S(P) \simeq 3^{1+2} \rtimes \mathbf{Q}_8,$$

где 3^{1+2} *— это экстраспециальная группа порядка* 27 *периода* 3, *а* $\mathbf{Q}_8$ *— группа кватернионов; в частности,* $N_S(P) > N_G(R) \cap S$. *В остальных случаях имеет место равенство*

$$N_S(P) = N_G(R) \cap S.$$

Кроме того, если $^{-} : S \to S/Z(S) = PSL_n^\eta(q)$ *– канонический эпиморфизм, то*

$$\overline{P} \in Syl_r(\overline{S}) \text{ и } N_{\overline{S}}(\overline{P}) = \overline{N_S(P)}.$$

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00039).

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ $\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. Г. Мельченко
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, melchenkonastya@mail.ru

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Свойства нормализаторов примарных подгрупп, т. е. локальных подгрупп, широко применяются при классификации простых неабелевых групп, а также при изучении непростых, в частности, разрешимых групп. Например, в [1] доказано, что необходимым и достаточным условием нильпотентности группы является нильпотентность нормализаторов ее силовских подгрупп (кратко, силовских нормализаторов). В [2] приведен обзор работ, в которых исследовались связи между свойствами группы и принадлежностью насыщенной формации ее силовских нормализаторов.

В настоящем сообщении изучается зависимость свойств группы от способа вложения в нее силовских нормализаторов.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_{n-1} \leqslant H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leqslant H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и π — некоторое множество простых чисел. Будем обозначать через $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ следующий класс групп:

$\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $N_G(P)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G для любой силовской q-подгруппы P из G и $q \in \pi \cap \pi(G))$.

По определению $G \in \mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$, если $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi \cap \pi(G) = \emptyset$. Для множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ вместо $\mathrm{w}_\mathbb{P}^*\mathfrak{F}$ используется обозначение $\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется S_H-замкнутым, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой G содержит любую холлову подгруппу из G.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ *— гомоморф такой, что* $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\tau^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ *и* $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ *для любого множества простых чисел τ, содержащего π, и любой формации $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственный класс, то $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ — S_H-замкнутая формация, причем* $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F} = \mathrm{w}_\pi^*(\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F})$.

Согласно [3] арифметическая длина разрешимой группы G определяется как $\max\{l_p(G)\}$, где $l_p(G)$ — p-длина группы G и p пробегает все простые числа из $\pi(G)$. Отметим, что класс всех разрешимых групп, арифметическая длина которых не превосходит 1, является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп, чья арифметическая длина не превосходит 1. Тогда* $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1 [4]. *Если $\mathfrak{N}^2$ — формация всех метанильпотентных групп, то* $\mathrm{w}^*\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}^2$.

Следствие 2.2 [4]. *Если $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ — формация всех групп с нильпотентным коммутантом, то* $\mathrm{w}^*\mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Следствие 2.3. *Если $\mathfrak{F}$ — формация всех разрешимых групп, арифметическая длина которых не превосходит 1, то* $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Замечание. В работе [5] была введена и изучалась конструкция класса $\mathrm{w}\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ обозначает класс групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. В работе [6] рассматривались более общие конструкции классов групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Для формации $\mathfrak{F}$ выполняется $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Если $\pi = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, у которой $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathrm{W}\mathfrak{F} = \overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F}$. Обратное включение в общем случае не выполняется. Так, например, по [5, следствие D2] $\mathrm{w}\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп, а $\mathrm{w}^*\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}^2$.

Литература

1. Bianchi M. G., Gillio Berta Mayri A., Hauck P. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch. Math. 1986. V. 47. P. 193–197.

2. D'Aniello A., Kazarin L. S., Mart´inez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D. A Survey on Sylow Normalizers and Classes of groups // Appl. Math. Sci. 2014. V. 8, № 134. P. 6745–6752.

3. Семенчук В. Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. 1979. Т.18, № 3. С. 348–382.

4. Васильев А. Ф. Конечные группы с сильно К-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2018. № 4(37). С. 66–71.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2011. № 4(9). С. 86–91.

6. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.

ИНЪЕКТИВНОСТЬ И РАЦИОНАЛЬНОСТЬ

А. Б. Верёвкин
Ульяновский государственный университет, Ульяновск
abverevkin@gmail.com

Пусть $A \cong k[x]$ – алгебра полиномов от одной переменной над полем k. Рассмотрим пространство k–линейных функций $\big(k[x]\big)^* = \mathrm{Hom}_k(k[x],\, k)$. Оно является $k[x]$–модулем относительно такого действия: для $l \in \big(k[x]\big)^*$, $P(x)$ и $Q(x) \in$ $\in k[x]$ зададим правило $\big(l \cdot P(x)\big)\big(Q(x)\big) = l\big(P(x)\cdot Q(x)\big)$. Тогда для любого $k[x]$–модуля $M_{k[x]}$ есть изоморфизм $\mathrm{Hom}_{k[x]}\big(M_{k[x]}\,,\, \big(k[x]\big)^*_{k[x]}\big) \cong \mathrm{Hom}_k(M_k\,, k_k) \cong \big(M\big)^*$, поэтому $k[x]$–модуль $\big(k[x]\big)^*$ – инъективен.

Для $l \in \big(k[x]\big)^*$ определим производящий ряд $H_l(t) = \sum_{n\geqslant 0} l\,(\,x^n)\cdot t^n$, однозначно определяющий функцию l.

Лемма. *Следующие условия эквивалентны:*

- *ряд* $H_l(t)$ *– рационален;*
- $\dim_k\big(l \cdot k[x]\big) < \infty$;
- $\mathrm{RAnn}_{k[x]}(l) \neq 0$;
- *пространство* $\mathrm{Ker}(l)$ *содержит ненулевой идеал* $k[x]$;
- *последовательность* $\big(l(1)\,, l(x)\,, l(x^2)\,, \ldots\big)$ *начиная с некоторого номера становится линейно рекуррентной.*

Из этого технического утверждения вытекает интересный факт:

Теорема. *Множество функций* $l \in \big(k[x]\big)^*$ *с рациональным рядом* $H_l(t)$ *образует инъективный* $k[x]$*–подмодуль* $\big(k[x]\big)^*$. *Над алгебраически замкнутым полем* k *он является инъективной оболочкой суммы всех одномерных* $k[x]$*–модулей.*

Доказательство: Из коммутативности $k[x]$ несложно выводится, что указанное множество является подмодулем $\big(k[x]\big)^*_{k[x]}$. А из предыдущей леммы следует, что этот подмодуль не имеет собственных существенных расширений в инъективном модуле $\big(k[x]\big)^*_{k[x]}$ и поэтому сам является инъективным. Прямая сумма всех одномерных $k[x]$–модулей вкладывается в $\big(k[x]\big)^*_{k[x]}$ в виде функций с рациональным производящим рядом вида $P(t)/Q(t)$ с условиями: $Q(0) = 1$, $Q(t)$ не имеет кратных корней и $\deg P(t) \leqslant \deg Q(t)$.

СОКРАТИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ НАДКОММУТАТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
bvernikov@gmail.com, vshapr@yandex.ru

Имеется целый ряд работ, посвященных изучению специальных элементов в решетке всех многообразий полугрупп и некоторых ее подрешетках. Обзор результатов, полученных в этом направлении до 2015 г., можно найти в [5]. Многообразие полугрупп называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразие всех коммутативных полугрупп. Совокупность всех надкоммутативных многообразий образует подрешетку в решетке всех многообразий полугрупп. Мы обозначаем эту подрешетку через $\mathbb{OC}$. Специальные элементы ряда типов в решетке $\mathbb{OC}$ изучались в работах [1, 4].

Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называется *сократимым*, если для любых $y, z \in$ $\in L$ из того, что $x \vee y = x \vee z$ и $x \wedge y = x \wedge z$ вытекает, что $y = z$. В работе [3] авторами и Д.В. Скоковым получено полное описание сократимых элементов в решетке всех многообразий полугрупп. В данной работе получено полное описание сократимых элементов в решетке $\mathbb{OC}$. Чтобы сформулировать это описание, нам понадобится ряд обозначений.

Обозначим через F свободную полугруппу счетного ранга над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Если $\mathbf{u} \in F$, то через $\ell(\mathbf{u})$ обозначается длина слова $\mathbf{u}$, через $\ell_i(\mathbf{u})$ — число вхождений x_i в $\mathbf{u}$, а через $\mathrm{con}(\mathbf{u})$ — множество всех букв, входящих в запись $\mathbf{u}$. Тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ называется *уравновешенным*, если $\ell_i(\mathbf{u}) = \ell_i(\mathbf{v})$ для всех i. Общеизвестно, что всякое тождество, выполненное в некотором надкоммутативном многообразии, уравновешено.

Пусть m и n — натуральные числа такие, что $2 \leqslant m \leqslant n$. *Разбиением числа n на m частей* называется кортеж натуральных чисел $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$ такой, что $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_m$ и $\sum_{i=1}^m \ell_i = n$. Числа $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ называются *компонентами* разбиения λ. Через $\Lambda_{n,m}$ обозначается множество всех разбиений числа n на m частей. Положим $\Lambda = \bigcup_{2\leqslant m\leqslant n} \Lambda_{n,m}$.

Если $\mathbf{u} \in F$, то через $\mathrm{part}(\mathbf{u})$ обозначается разбиение числа $\ell(\mathbf{u})$ на $|\mathrm{con}(\mathbf{u})|$ частей, состоящее из чисел $\ell_i(\mathbf{u})$ для всех i таких, что $x_i \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$ (числа $\ell_i(\mathbf{u})$ располагаются в $\mathrm{part}(\mathbf{u})$ в невозрастающем порядке). Если тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ уравновешено, то, очевидно, $\ell(\mathbf{u}) = \ell(\mathbf{v})$, $|\mathrm{con}(\mathbf{u})| = |\mathrm{con}(\mathbf{v})|$ и $\mathrm{part}(\mathbf{u}) = \mathrm{part}(\mathbf{v})$.

Пусть $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in \Lambda_{n,m}$. Обозначим через $W_{n,m,\lambda}$ множество всех слов $\mathbf{u}$ таких, что $\ell(\mathbf{u}) = n$, $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $\ell_i(\mathbf{u}) \geqslant \ell_{i+1}(\mathbf{u})$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m-1$ и $\mathrm{part}(\mathbf{u}) = \lambda$. Очевидно, что всякое уравновешенное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ такое, что $\ell(\mathbf{u}) = \ell(\mathbf{v}) = n$, $|\mathrm{con}(\mathbf{u})| = |\mathrm{con}(\mathbf{v})| = m$ и $\mathrm{part}(\mathbf{u}) = \mathrm{part}(\mathbf{v}) =$ $= \lambda$, эквивалентно некоторому тождеству $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ такому, что $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in W_{n,m,\lambda}$.

Для разбиения $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in \Lambda_{n,m}$ определим числа $q(\lambda)$, $r(\lambda)$ и $s(\lambda)$ следующим образом: $q(\lambda)$ — число компонент разбиения λ, равных 1; $r(\lambda)$ — сумма всех компонент этого разбиения, которые больше 1 (если таких компонент нет, то $r(\lambda) = 0$); $s(\lambda) = \max\{r(\lambda) - q(\lambda) - \delta, 0\}$, где $\delta = 0$, если $n = 3$, $m = 2$ и $\lambda = (2, 1)$, и $\delta = 1$ в противном случае. Для всякого $k \geqslant 0$ через λ^k обозначается следующее разбиение числа $n + k$ на $m + k$ частей: $\lambda^k = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ раз}})$.

В частности, $\lambda^0 = \lambda$. Назовем надкоммутативное многообразие полугрупп $\mathbf{V}$ *жадным*, если для любых натуральных чисел m и n таких, что $2 \leqslant m \leqslant n$, и любого разбиения $\lambda \in \Lambda_{n,m}$ из того, что в $\mathbf{V}$ выполнено некоторое нетривиальное тождество вида $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_{n,m,\lambda}$, вытекает, что в $\mathbf{V}$ выполнено всякое тождество такого вида. Через $\mathrm{var}\,\Sigma$ обозначается многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Для разбиения $\lambda \in \Lambda_{n,m}$ положим $\mathbf{W}_{n,m,\lambda} = \operatorname{var}\{\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_{n,m,\lambda}\}$ и $\mathbf{S}_\lambda = \bigwedge_{i=0}^{s(\lambda)} \mathbf{W}_{n+i,m+i,\lambda^i}$.

Элемент x решетки L называется *нейтральным*, если для любых $y, z \in L$ элементы x, y и z порождают дистрибутивную подрешетку в L, и *дистрибутивным* [*стандартным*], если для любых $y, z \in L$ выполнено равенство $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z)$ [соответственно $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$]. *Кодистрибутивные* и *костандартные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным и стандартным соответственно. Всякий нейтральный элемент стандартен и костандартен, а всякий [ко]стандартный элемент [ко]дистрибутивен и сократим (см. [2, Section III.2]). В абстрактных решетках свойства быть элементами шести обсуждаемых типов попарно не эквивалентны.

Теорема. *Для надкоммутативного многообразия полугрупп* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathbf{V}$ *— сократимый элемент решетки* $\mathbb{OC}$;

б) $\mathbf{V}$ *— дистрибутивный элемент решетки* $\mathbb{OC}$;

в) $\mathbf{V}$ *— кодистрибутивный элемент решетки* $\mathbb{OC}$;

г) $\mathbf{V}$ *— стандартный элемент решетки* $\mathbb{OC}$;

д) $\mathbf{V}$ *— костандартный элемент решетки* $\mathbb{OC}$;

е) $\mathbf{V}$ *— нейтральный элемент решетки* $\mathbb{OC}$;

ж) $\mathbf{V}$ *— жадное многообразие;*

з) *либо* $\mathbf{V}$ *— многообразие всех полугрупп, либо* $\mathbf{V} = \bigwedge_{i=1}^{k} \mathbf{S}_{\lambda_i}$ *для некоторых* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$.

Эквивалентность условий б)–ж) доказана в [1], а эквивалентность условий ж) и з) — в [4]. В данной работе доказана эквивалентность условий а) и ж).

Оба автора поддержаны РФФИ (первый — грантом 17-01-00551, второй — грантом 18-31-00443) и Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект 1.6018.2017/8.9).

Литература

1. Верников Б. М. *Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп* // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 5. – С. 670–678.
2. Grätzer G. Lattice Theory: Foundation // Birkhäuser, Springer Basel AG. – 2011.
3. Shaprynskiˇi V. Yu., Skokov D. V., Vernikov B. M. Cancellable elements of the lattices of varieties of semigroups and epigroups // Commun. in Algebra. – Принято к печати. – DOI: 10.1080/00927872.2019.1590585; available at: https://arxiv.org/abs/1810.01610.
4. Shaprynskiˇi V. Yu., Vernikov B. M. Special elements in the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited // Order. – 2011. – V. 28, № 1. – P. 139–155.
5. Vernikov B. M. Special elements in lattices of semigroup varieties // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2015. – V. 81, № 1–2. – P. 79–109.

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ P –ЛОКАЛЬНЫХ ГРУПП МИНИМАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ РАСЩЕПЛЕНИЯ

С. В. Вершина
Московский Педагогический Государственный Университет, Москва
svetlanavershina@gmail.com

Абелева группа без кручения A называется *p–локальной* (p — простое число), если она является модулем над кольцом дискретного нормирования $\mathbb{Z}_p$ — локализации кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого числа p. Поле K называется *полем расщепления группы A,* если $A \otimes R \cong D \oplus F$, где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — пополнение $\mathbb{Z}_p$ в p–адической топологии, D — делимый R–модуль, F — свободный R–модуль. Кольцо R в этом случае называется *кольцом расщепления группы A*. Кольцо расщепления, не содержащее собственных сервантных подколец расщепления группы A, называется *минимальным кольцом расщепления группы A.* Поле расщепления называется *минимальным полем расщепления группы A,* если не содержит собственных полей расщепления группы A.

Будем говорить, что группа A из класса $\mathcal{A}$ определяется с точностью до изоморфизма минимальным кольцом расщепления R_A, если для любой группы $B \in \mathcal{A}$ из изоморфизма минимальных колец расщепления этих групп $R_A \cong R_B$ следует изоморфизм групп $A \cong B$.

Выделим следующие классы неразложимых групп без кручения с минимальным кубическим полем расщепления K :

- $\mathcal{A}$: группы ранга 2 p–ранга 1;
- $\mathcal{B}$: группы ранга 3 p–ранга 1;
- $\mathcal{C}$: группы ранга 3 p–ранга 2.

Теорема 1 [2]. *Классами групп $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ исчерпываются все неразложимые p – локальные группы без кручения с минимальным кубическим полем расщепления.*

Теорема 2. *В классе групп $\mathcal{A}$ каждая группа определяется с точностью до изоморфизма своим минимальным кольцом расщепления.*

Теорема 3. *В классе групп $\mathcal{B}$ каждая группа определяется с точностью до изоморфизма своим минимальным кольцом расщепления.*

Следствие. *В классе групп $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ из изоморфизма минимальных колец расщепления $R_A \cong R_B$ для групп A и B следует изоморфизм групп $A \cong B$ в том и только в том случае, если $r(A) = r(B)$.*

Теорема 4. *В классе $\mathcal{C}$ каждая группа определяется своим минимальным кольцом расщепления с точностью до квазиизоморфизма, но не изоморфизма.*

Данные результаты дают полный ответ на поставленный в [1] вопрос от условиях определяемости с точностью до изоморфизма p–локальной группы без кручения с минимальным кубическим полем расщепления своим минимальным кольцом расщепления.

Литература

1. Glaz S., Vinsonhaler S., Wickless W. Splitting rings for p-local torsion-free groups, in Zerodimensional commutative rings // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York. – 1995. – V. 171. – P. 223—239.

2. Vershina S. V. Indecomposable p-Local Torsion-Free Groups with Quadratic and Cubic Splitting Fields // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 230, № 3. – P. 364–371.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ДИСКРЕТНОСТИ ТИХОНОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Е. М. Вечтомов
Вятский государственный университет, Киров (Россия)
vecht@mail.ru

Мы приводим характеризации свойства дискретности произвольного тихоновского пространства X в терминах кольца $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на X и его подполукольца $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций.

Напомним некоторые топологические и алгебраические понятия. Топологическое пространство называется тихоновским (хьюиттовским), если оно гомеоморфно подпространству (соответственно, замкнутому подпространству) тихоновской степени числовой прямой $\mathbb{R}$. Тихоновское пространство называется: экстремально несвязным, если замыкание любого его открытого множества открыто; P-пространством, если нуль-множество $f^{-1}(0)$ каждой функции $f \in C(X)$ открыто. Кардинал k называется измеримым (по Уламу), если на множестве всех подмножеств множества X мощности k существует счетно-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера μ, для которой $\mu(X) = 1$ и $\mu(\{x\}) = 0$ для всех точек $x \in X$; в противном случае кардинал k называется неизмеримым. Теоретико-множественное предположение о неизмеримости всех кардиналов называют аксиомой Улама.

Под коммутативным полукольцом понимается алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими, что умножение дистрибутивно относительно сложения, существует нейтральный по сложению элемент – нуль 0, являющийся поглощающим по умножению, и существует нейтральный по умножению элемент — единица 1. Коммутативное полукольцо S называется: самоинъективным, если S инъективно как (правый) S-полумодуль; самоинъективным по Бэру, если для любого идеала J полукольца S каждый гомоморфизм S-полумодуля J в S-полумодуль S продолжается до гомоморфизма S-полумодуля S в себя.

Известно, что хьюиттовость дискретного пространства равносильна неизмеримости его мощности [5, Theorem 12.2]. Теорема Исбелла утверждает, что экстремально несвязные P-пространства неизмеримой мощности дискретны [5, 12H.6]. А. А. Киселев [4, ч. 1, с. 17; ч. 2, с. 143] доказал противоречивость аксиоматической системы Цермело – Френкеля (ZF) в предположении существования слабо недостижимого кардинала. Хорошо известно, что измеримые кардиналы слабо недостижимы. Непротиворечивость самой системы ZFC (с аксиомой выбора C) не подвергается сомнению. Значит, в общепринятой теории множеств ZFC все кардиналы неизмеримы, т. е. выполняется аксиома Улама.

Теорема 1. *Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1. *X — дискретное пространство;*
2. *X — экстремально несвязное P-пространство;*
3. *в X все открытые множества C-расширяемы;*
4. *кольцо $C(X)$ самоинъективно;*
5. *полукольцо $C^+(X)$ самоинъективно по Бэру;*
6. *$C^+(X)$-полумодуль $C(X)$ инъективен по Бэру.*

См. [3, Т. 1, теоремы 8.18, 11.21; 6, § 14]. Заметим, что ненулевые идеалы полуколец $C^+(X)$ не инъективны.

Теорема 2. [1, 2] *Для произвольного топологического пространства X эквивалентны следующие условия:*

1. *X дискретно;*
2. *$C(X)$-модуль $\mathbb{R}^X$ проективен;*

3. $C(X)$-модуль $\mathbb{R}^X$ — свободный;

4. $C(X)$-модуль $\mathbb{R}^X$ есть модуль Безу, т. е. все его конечнопорожденные подмодули — циклические;

5. $C(X)$-модуль $\mathbb{R}^X$ дистрибутивен, т. е. решетка его подмодулей дистрибутивна.

Заметим, что в условиях 2)—5) вместо $C(X)$-модуля $\mathbb{R}^X$ можно взять $C^+(X)$-полумодуль $(\mathbb{R}^+)^X$. Доказательство теоремы 2 проводится в рамках содержательной (наивной) теории множеств.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект N 1.5879.2017/8.9.

Литература

1. Е. М. Вечтомов. О модуле всех функций над кольцом непрерывных функций // Математические заметки. 1980. Т. 28. № 4. С. 481—490.
2. Е. М. Вечтомов. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F-пространства // Математические заметки. 1983. Т. 34. № 3. С. 321—332.
3. Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. Элементы функциональной алгебры: монография: в 2 т. — Киров: ООО ”Издательство ”Радуга-ПРЕСС”, 2016. Т. 1, 384 с. Т. 2, 316 с.
4. А. А. Киселев. Недостижимость и субнедостижимость. В 2 ч. — Минск: Изд. центр ТГУ, 2011. Ч. 1, 114 с. Ч. 2, 155 с.
5. L. Gillman, M. Jerison. Rings of continuous functions. New York, 1976. 300 pp.
6. E. M. Vechtomov. Rings of continuous functions with values in topological field // Journal of mathematical sciences (New York). 1996. Vol. 78. N 6. P. 702—753.

К ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ФАКТОРНО ДЕЛИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП СВОИМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ

В. К. Вильданов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород
kadirovi4@gmail.com

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

Смешанные факторно делимые группы конечного ранга определили А. А. Фомин и У. Уиклесс в работе [1]. Группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа.

Вопрос определяемости факторно делимой группы ранга 1 своей группой автоморфизмов в классе всех таких групп рассмотрен в работе [4]. Определяемость факторно делимых групп своими полугруппами эндоморфизмов рассматривались в работах [2], [3].

Класс всех факторно делимых групп ранга 1 обозначим $\mathcal{QD}_1$. Кроме того, нам потребуется следующее

Определение. *Будем говорить, что конечная циклическая группа* A слабо определяется своей группой автоморфизмов, *если для любой конечной циклической группы* $B \ncong A$ *из условия* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ *следует, что число ненулевых компонент* B_p *группы* B *больше, чем число ненулевых компонент* A_p *группы* A.

Теорема 1. [4, Теорема 3.] *Группа* $A \in \mathcal{QD}_1$ *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathcal{QD}_1$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{t}(A)$ *— циклическая группа (возможно, нулевая), слабо определяющаяся своей группой автоморфизмов, и* $pA \neq A$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$ *таких, что* $A_p = 0$.

Назовем группу G однородной вполне разложимой факторно делимой группой, если $G = \bigoplus_n A$, где $A \in \mathcal{QD}_1$. Класс всех таких групп обозначим $\mathcal{QD}^*$.

Теорема 2. *Группа* $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$ *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathcal{QD}^*$*, если группа* A *определяется в классе* $\mathcal{QD}_1$ *своей группой автоморфизмов.*

Теорема 3. *Группа* $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$ *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $2-$*делимых групп из* $\mathcal{QD}^*$*, если* $2A = A$ *и* $n > 2$.

Для $n > 3$ требование $2-$делимости в теореме 3 можно опустить.

Литература

1. Fomin A. A., Wickless W., Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126, № 1. – P. 45–52.

2. Вильданов В. К., Любимцев О. В., Чистяков Д. С., *Об определяемости смешанных абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов* // Математические заметки. – 2018. – Т. 103. – №3. – С. 364–371.

3. Любимцев О. В., Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 10. – С. 75–82.

4. Timoshenko E. A., Vildanov V. K. On determinability of a quotient divisible Abelian group of rank 1 by its automorphism group // Алгебра и логика: теория и приложения : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В. М. Левчука. Красноярск. – 24–29 июля 2016 г. – С. 120–122.

О НЕКОТОРЫХ ВЕЩЕСТВЕННО ЗАМКНУТЫХ ПОЛЯХ С СИММЕТРИЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Н. Ю. Галанова

ТГУ, Томск

galanova@math.tsu.ru

В данной работе, принимая континуум-гипотезу, исследуем сечения полей ограниченных формальных степенных рядов со счетными носителями. Пусть $L = \{t_\gamma\}_{\gamma \in \omega_1}$ — линейно упорядоченное множество инверсно подобное ординалу ω_1, $< G, \cdot, \leqslant >$ — линейно упорядоченная делимая абелева группа, упорядоченно изоморфная $G = \mathbb{Q}[[L, \aleph_0]]$ (см. [1]), $\mathbb{R}[[G, \aleph_1]]$ — поле ограниченных формальных степенных рядов $x = \sum\limits_{g \in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbb{R}$, $supp(x) = \{g \in G | r_g \neq 0\}$ — вполне антиупорядоченное подмножество группы G, $|supp(x)| < \aleph_1$, т. е. поле состоит из всевозможных рядов со счетными носителями (см. [2-3]). Пусть K наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbb{R}[[G,\aleph_1]]$, содержащее G. Обозначим через H наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbb{R}[[G,\aleph_1]]$ содержащее K и все усечения [4] ряда $x_{\omega_1} = \sum\limits_{t_\gamma \in L} 1 \cdot t_\gamma$. Сечение (A,B) вещественно замкнутого упорядоченного поля $F \subset \mathbb{R}[[G]]$ является симметричным (по Пестову) iff $\exists x \in \mathbb{R}[[G]] \setminus F \quad A < x < B$ (см. [5]). Используя результаты из [4-6] получим

Теорема. *(1)* $K \subsetneq H \subset \mathbb{R}[[G,\aleph_1]]$.

(2) Поле K *имеет симметричные сечения типа* $(\aleph_0,\aleph_0)$.

(3) Элементы вещественного замыкания простого трансцендентного расширения $\overline{H(x_{\omega_1})} \setminus H$ *порождают в поле* H *симметричные сечения типа* $(\aleph_1,\aleph_1)$.

Литература

1. *Galanova N.Yu.* An investigation of the fields of bounded formal power series by means theory of cuts. Acta Appl. Math., 2005, 85, 121–126.
2. *Галанова Н.Ю.*, *Пестов Г.Г.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов. Алгебра и логика, 2008, 47, № 2, 174–185.
3. *Dales H.J., Woodin H.* Super real fields. Oxford: Clarenden Press, 1996.
4. *Галанова Н.Ю.* О симметричных сечениях одного вещественно замкнутого поля. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2018, № 53, 5–15.
5. *Галанова Н.Ю.* Линейно упорядоченные поля с симметричными сечениями. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2017, № 46, 14–20.
6. *Saharon Shelah.* Quite Complete Real Closed fields. Israel Journal of Mathematics, 2004, 142, 261–272.

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко
Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв;
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель
halm54@mail.ru; kulazhenko@bsut.by

Полиадическим группоидом специального вида называется полиадический группоид с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и n-арной операции η. Полиадические операции специального вида первоначально были определены в [1]. Частными случаями l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ для случая

$$n = 2, s = m, k = m-1, l = m, \sigma = (12\ldots m-1)$$

являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил и изучал в [2]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы.

Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

Теорема 1. *Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, неодноэлементный n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \ldots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ $(a \neq e_r)$, а также $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_r, a_j = a, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_r),$$

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \ \ldots, \ e_1}_{k}), \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \ \ldots, \ e_2}_{k}), \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \ \ldots, \ e_{n-1}}_{k}). \qquad (1)$$

Тогда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \ \ldots \ \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{r-1}\mathbf{a}\mathbf{e}_{r+1} \ldots \mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \ \ldots \ \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}). \qquad (2)$$

Полагая в теореме 1 $r = 1$, получим следующий результат.

Следствие 1 [3]. *Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, неодноэлементный n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \ldots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ $(a \neq e_1)$, а также $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_1, a_j = a, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_1),$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ *— те же, что и в (1). Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \ \ldots \ \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \ \ldots \ \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}).$$

Полагая в теореме 1 $r = n-1$, получим ещё один результат.

Следствие 2 [4]. *Пусть для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, неодноэлементный n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \ldots e_{n-1}$. Зафиксируем элемент $a \in A$ $(a \neq e_{n-1})$, а также $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = a, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_{n-1}),$$

$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ *– те же, что и в (1). Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \ \ldots \ \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \ \ldots \ \ \mathbf{e}_1 \ \ldots \ \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}).$$

Следующая теорема может быть получена из теоремы 1, если в ней для $n \geqslant 3$ положить $a = e_{n-1}$.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и для некоторого* $r \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ *подстановка* σ^r *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$*, где* $n \geqslant 3$*, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$*, что* $e_{n-1} \neq e_r$*. Зафиксируем* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$*, для которого* $\sigma^r(j) \neq j$*, положим*

$$\boldsymbol{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_r, a_j = e_{n-1}, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_r),$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ *с помощью (1). Тогда верно неравенство* (2).

Следующая теорема может быть получена из теоремы 1, если в ней для $n \geqslant 3$ положить $a = e_1$.

Теорема 3. *Пусть* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *и для некоторого* $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *подстановка* σ^r *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$*, где* $n \geqslant 3$*, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$*, что* $e_1 \neq e_r$*. Зафиксируем* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$*, для которого* $\sigma^r(j) \neq j$*, положим*

$$\boldsymbol{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_r, a_j = e_1, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_r),$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ *с помощью (1). Тогда верно неравенство* (2).

Литература

1. Гальмак А. М., Русаков А. Д. О полиадических операциях на декартовых степенях // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

2. Post E. L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, no. 2. – P. 208–350.

3. Гальмак А. М. О неабелевости полиадических группоидов специального вида // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2019. – № 1(53). – С. 13–21.

4. Гальмак А. М. О не n-полуабелевости полиадических группоидов специального вида // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1. – С. 31–39.

ОБРАЩЕНИЕ ПОДСТАНОВКИ И ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

И. А. Горбунов
ТвГУ, Тверь
i_gorbunov@mail.ru

(Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 17-03-00818-ОГН и № 18-011-00869-а.)

Классическую логику будем рассматривать в языке с алфавитом $\langle \Pi, \Sigma, \Upsilon \rangle$, где

- $\Pi = \{p_i : i \geqslant 1\}$ — множество *пропозициональных переменных*,
- Σ — некоторая полная система связок,
- $\Upsilon = \{(,)\}$ — множество вспомогательных символов.

Для обозначения пропозициональных переменных зачастую будем использовать метаобозначения.

Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle \Pi, \Sigma, \Upsilon \rangle$, будем называть *формулой*. Множество всех формул будем обозначать посредством F.

Оценкой называем отображение $\nu : \Pi \to \{0, 1\}$. Значение формулы φ при оценке ν будем обозначать посредством $\nu(\varphi)$. Будем писать $\nu(\Gamma) = 1$, если при оценке ν все формулы множества Γ принимают значение 1. Множество всех оценок обозначим посредством Θ.

Буквой L обозначим множество всех тождественно-истинных формул, это множество будем называть *множеством тавтологий*.

Отношение *логического следования* $\vdash$ определим следующим образом: для любого множества формул Γ и формулы φ

$$\Gamma \vdash \varphi \leftrightharpoons \forall \nu \in \Theta \ (\nu(\Gamma) = 1 \Rightarrow \nu(\varphi) = 1).$$

Теорией будем называть не совпадающее с F множество формул, замкнутое по отношению логического следования.

Подстановкой будем называть гомоморфное продолжение отображения $\varepsilon : \Pi \to F$ на множество всех формул, это продолжение будем обозначать тоже ε. Для любого множества формул Γ посредством $\varepsilon\Gamma$ будем обозначать результат применения подстановки ε ко всем формулам этого множества. Множество всех подстановок обозначим посредством E.

Обращением подстановки ε будем называть операцию взятия прообраза множества формул для данной подстановки. Обозначать эту операцию будем ε^{-1}. Таким образом, для любого множества формул Γ имеем:

$$\varepsilon^{-1}(\Gamma) = \{\varphi : \varepsilon\varphi \in \Gamma\}.$$

В работе [1] (стр. 14) приведена лемма Сушко, из которой следует, что для любой теории T классической логики и любой подстановки ε верно, что множество $\varepsilon^{-1}(T)$ тоже является теорией классической логики. Множество всех прообразов множества L относительно всех подстановок образует некоторое множество теорий. Возникает вопрос о том, как связаны между собой множество всех теорий и множество всех прообразов множества тавтологий? Для ответа на него рассмотрим следующую конструкцию.

Упорядочим множество переменных произвольным образом. Сопоставим каждой оценке $\nu \in \Theta$ последовательность, состоящую из значений переменных при данной оценке.

Множеству всех оценок Θ сопоставим граф $G = \langle V, E \rangle$, представляющий собой два бинарных дерева. Для каждой из вершин $a \in V$ мы определим *вес вершины* $s(a) \in \{0, 1\}$ следующим образом:

- корню левого дерева сопоставим вес 0, а корню правого — вес 1;
- всякой вершине, достижимой из предыдущей, по левому ребру сопоставим вес 0;
- всякой вершине, достижимой из предыдущей, по правому ребру сопоставим вес 1.

Заметим, что последовательность весов вершин любой начинающейся с корня ветви графа G образует последовательность, соответствующую некоторой оценке $\nu \in \Theta$. При этом последовательность любой оценки $\nu \in \Theta$ представлена ветвью в графе G.

Индексом вершины a будем называть последовательность весов всех вершин подветви, исходящей из корня и заканчивающейся на a. Всякий индекс кодирует некоторое натуральное число, которое будем называть *значением индекса*.

Всякой теории T сопоставим множество оценок $\Theta_T = \{\nu \in \Theta : \nu(T) = 1\}$ и подграф Θ_T, состоящий только из тех ветвей графа G, которые соответствуют оценкам из Θ_T.

Последовательность весов всех вершин графа Θ_T, имеющих индекс длиной n, упорядоченную согласно возрастанию значений индексов, будем называть *n-слоем*. Каждый n-слой, при необходимости, дополним до 2^n элементов последним значением слоя. Полученную строку будем рассматривать как строку значений некоторой булевой функции $f_n(q_1, \ldots, q_n)$, где последовательность $(q_1, \ldots, q_n)$ — начальный сегмент последовательности всех переменных. Посредством π_n обозначим формулу логики от тех же переменных, которая представляет функцию $f_n(q_1, \ldots, q_n)$.

Теории T сопоставим подстановку ε_T, которую определим следующим образом: $\varepsilon_T p_i = \pi_i$ для любого $i \geqslant 1$. Эту подстановку назовём *точной унифицирующей подстановкой для теории T*.

Заметим, что всякая подстановка ε действует на множестве Θ как одноместная операция, определённая следующим образом:

$$\forall \nu \in \Theta \ (\varepsilon\nu = \mu \in \Theta) \Leftrightarrow \forall i \geqslant 1 \ (\nu(\varepsilon p_i) = \mu(p_i)).$$

Для операции ε_T верны следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любой оценки $\nu \in \Theta$ верно, что $\varepsilon_T \nu \in \Theta_T$.*

Лемма 2. *Для любой оценки $\nu \in \Theta_T$ верно, что $\varepsilon_T \nu = \nu$.*

Откуда следует

Теорема 1. *Для всякой непротиворечивой теории T классической пропозициональной логики верно равенство $\varepsilon_T^{-1}(L) = T$.*

Таким образом, *для классической логики множество всех непротиворечивых теорий и множество $\{\varepsilon^{-1}(L) : \varepsilon \in E\}$ совпадают, то есть каждая непротиворечивая теория классической логики является прообразом множества всех тождественно-истинных формул при некоторой подстановке.*

В связи с наличием точной унифицирующей подстановки для каждой непротиворечивой теории классической логики возникает вопрос об алгоритме поиска такой подстановки.

Теорема 2. *Для любой непротиворечивой конечно-аксиоматизируемой теории существует алгоритм, который по конечному списку аксиом теории строит её точную унифицирующую подстановку.*

Логики, непротиворечивые (по Посту) теории которых являются прообразами множества тавтологий при некоторой подстановке, будем называть *субституциональными*. В связи с наличием таких логик возникает ряд открытых вопросов.

Существуют ли субституциональные логики отличные от классической?

Верно ли, что всякая максимальная логика является субституциональной?

Верно ли, что всякая полная по Посту логика является субституциональной?

Литература

1. *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // www.studialogica.org/wojcicki

О ВЫЧИСЛИМОСТИ НЕГАТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ УПОРЯДОЧЕННЫХ КОЛЕЦ

Р. Н. Дададжанов, Н. Х. Касымов
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент;
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент
dadajonovrn59@mail.ru, nadim59@mail.ru

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1–3].

Общеизвестно, что всякое позитивное представление стандартной модели арифметики $\Omega = \langle\omega;\ 0, s, +, *\rangle$ в сигнатуре $\Sigma = \langle 0, s, +, *\rangle$ (где ω обозначает множество натуральных чисел, а Σ-символы имеют очевидные естественные интерпретации) является вычислимым (см., например, [4]). Более того, вычислимы также любые позитивные представления обеднений Ω_0, Ω_1, Ω_2 модели Ω в обедненных сигнатурах $\Sigma_0 = \langle 0, s\rangle, \Sigma_1 = \langle 0, s, +\rangle, \Sigma_2 = \langle 0, s, +, *\rangle$ соответственно (заметим, что Σ_1 является языком арифметики Пресбургера, а Σ_2 — арифметики Пеано).

Менее известен тот факт, что Ω обладает негативными невычислимыми представлениями [5]. В теоретической информатике под реализационной полнотой некоторой “стандартной” модели программной спецификации понимается единственность позитивного представления этой модели, т. е. вычислимая изоморфность всех позитивных представлений упомянутой модели [4]. С этой точки зрения стандартная модель арифметики Пеано не является реализционно полной относительно ее негативных представлений, поскольку имеется как минимум два негивных представления — обычное вычислимое и негативное невычислимое.

Рассмотрим упорядоченное унитарное кольцо $\Re = \langle R; +, *, \leqslant\rangle$ в сигнатуре $\langle +, *, \leqslant\rangle$ (предполагается выполненность условия согласованности кольцевых операций с линейным порядком). Допустим, что $\Re$ упорядочено отношением $\leqslant$ по типу целых чисел Z. Тогда верна

Теорема 1. *Всякое негативное представление кольца $\Re$ вычислимо и любая пара таких представлений вычислимо изоморфна.*

С другой стороны, очевидно, что всякое позитивное представление такого кольца также вычислимо и все его вычислимые представления вычислимо изоморфны.

Таким образом, введение согласованного линейного порядка для широкого класса естественных колец гарантирует единственность эффективного представления как в классе позитивных, так и негативных представлений.

В работе [4] С. С. Гончаров предложил рассматривать стандартную модель арифметики $\Omega_{\leqslant}$ в сигнатуре $\langle 0, s, +, *, \leqslant\rangle$ (в качестве аксиом (=спецификации) принимаются стандартные определения для операций, аксиомы линейного порядка $\leqslant$, согласованного с операциями, и схема аксиом индукции). Назовем эту систему аксиом $A_{\leqslant}$.

Незначительная модификация метода доказательства теоремы 1 позволяет убедиться в справедливости следующих утверждений

Следствие 1. *Всякое негативное представление модели $\Omega_{\leqslant}$ вычислимо.*

Следствие 2. *Модель $\Omega_{\leqslant}$ имеет единственное негативное представление.*

Следствие 3. *Стандартная модель $\Omega_{\leqslant}$ теории $A_{\leqslant}$ вычислимо устойчива как относительно позитивных, так и относительно негативных представлений.*

Следствие 4. *Стандартная модель $\Omega_{\leqslant}$ теории $A_{\leqslant}$ реализационно полна в классе позитивных и негативных представлений.*

Замечание. В теоретическом программировании одной из ключевых задач является проблема единственности эффективной реализации абстрактной модели данных, т.е. эквивалентности (=вычислимой изоморфности) различных релизаций некоторой стандартной модели для заданной спецификации. Под эффективным представлением модели обычно понимается позитивное. Однако, негативные представления порой несут не менее важную семантическую информацию о свойствах стандартной модели спецификации (обоснования этого тезиса см. в [6]), поэтому представляется целесообразным рассматривать в качестве представлений модели данных ее алгоритмические представления и в других нижних классах иерархии Клини-Мостовского. Одним из уточнений такого подхода является рассмотрение в качестве алгоритмических представлений не только позитивных, но и негативных. В рамках такого подхода стандартная модель арифметики Пеано (тем более, арифметики Пресбургера) не является реализационно полной. Тем не менее, с точки зрения реализационной полноты, при добавлении естественного порядка, реализационная полнота (относительно как позитивных, так и негативных представлений) может иметь место.

Литература

1. Соар Р. И. Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств. – Казань: Казанское математическое общество. – 2000. – 576 с.
2. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. – М.: Наука. – 1977. – 416 с.
3. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга. – 1999. – 360 с.
4. Гончаров С. С. Модели данных и языки их описаний // Вычислительные системы, Труды ИМ СО РАН. – 1985. – № 107. – С. 52–70.
5. Khoussainov B. M., Slaman T., Semukhin P. Π_1^0-presentations of algebras // Arch.Math.Logic. – 2006. – V. 45, Is. 6. – P. 769–781.
6. Касымов Н. Х. Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, No. 3. – С. 145–176.

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ АЛГЕБРЫ ОДНОСИМВОЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ С ОПЕРАЦИЕЙ КОНКАТЕНАЦИИ

С. М. Дудаков
Тверской госуниверситет, Тверь
sergeydudakov@yandex.ru

Как известно, теория языка всех слов с операцией конкатенации неразрешима при наличии хотя бы двух символов [2]. Для односимвольного алфавита соответствующая алгебра изоморфна аддитивному моноиду натуральных чисел, поэтому имеет разрешимую теорию. Возникает вопрос: что можно сказать о теории, в которой классические словарные операции, например, конкатенация, применяются не к отдельным словам, а к целым языкам. В качестве носителя в этом случае выступает какое-либо множество языков, обладающее необходимыми свойствами замкнутости. Одним из наиболее «естественных» является класс автоматных языков, который замкнут относительного очень многих действий [3]. В работе [1] показано, что если сигнатура включает в себя объединение, а также ещё хотя бы одну из операций: конкатенацию или итерацию, то теория множества автоматных языков будет неразрешимой даже для однобуквенного алфавита. Более того, продемонстрировано, что степень неразрешимости такой теории эквивалентна полной элементарной арифметике.

Мы усиливаем этот результат, доказывая, что одной операции конкатенации языков достаточно, чтобы такая теория класса регулярных языков была алгоритмически эквивалентна полной элементарной арифметике.

Итак, мы рассматриваем алгебру $\mathfrak{A}_{\&} = (A, \&)$, состоящую из множества A регулярных языков в алфавите $\{a\}$ с операцией конкатенации, и теорию этой алгебры. Первоначально мы доказываем определимость в этой теории некоторых отношений и констант.

Теорема 1. *В алгебре $\mathfrak{A}_{\&}$ определимы пустой язык $\varnothing$; язык E, содержащий одно только пустое слово ε; множество A_1 одноэлементных языков; язык $\{a\}$; множество A_ε языков, содержащих пустое слово.*

Из этого вытекает структура алгебры $\mathfrak{A}_{\&}$.

Теорема 2. *Алгебра $\mathfrak{A}_{\&}$ является декартовым произведением определимых подалгебр A_1 и A_ε, дополненным нулевым элементом $\varnothing$.*

Алгебра $(A_1, \&)$ изоморфна аддитивному моноиду натуральных чисел, поэтому её теория эквивалентна арифметике Пресбургера.

Для второй алгебры $\mathfrak{A}_\varepsilon = (A_\varepsilon, \&)$ мы доказываем дальнейшие результаты об определимости. Центральный технический результат можно сформулировать так.

Теорема 3. *В алгебре $\mathfrak{A}_\varepsilon$ определимо отношение $R(x, y, z)$, означающее следующее: существуют натуральные n, m, $n > 0$, для которых $x = \{\varepsilon, a^n\}$, $y = \{\varepsilon, a^n, a^{2n}, \ldots, a^{mn}\}$, $z = \{\varepsilon, a^{mn}\}$.*

Это отношение R открывает путь к интерпретации натуральных чисел и арифметических операций в алгебре $\mathfrak{A}_\varepsilon$. Для начала выберем произвольный язык x_0 вида $x_0 = \{\varepsilon, a^n\}$. Тогда каждое натуральное число m интерпретируется языком $\ell_m = \{\varepsilon, a^{mn}\}$. В частности, ноль интерпретируется языком E, а единица — самим языком x_0. Следовательно, областью интерпретации будут такие языки ℓ, для которых выполнено $(\exists y)R(x_0, y, \ell)$. Используя отношение R, можно выразить сложение: $m + k = q$ соответствует

$$\ell_m + \ell_k = \ell_q \iff (\exists y_m, y_k)(R(x_0, y_m, \ell_m) \wedge R(x_0, y_k, \ell_k) \wedge R(x_0, y_k y_m, \ell_q)).$$

Теперь легко интерпретируется отношение порядка $m \leqslant k$:

$$\ell_m \leqslant \ell_k \iff (\exists \ell)\ell + \ell_m = \ell_k.$$

Немного сложнее определяется умножение. Сначала мы выразим его для взаимно простых чисел m и k. Для этого нужно указать наименьшее положительное q, которое будет делиться на m и k одновременно. Заметим, что отношение $(\exists y)R(\ell_u, y, \ell_v)$ фактически означает делимость v на u. Поэтому произведение q взаимно простых m и k можно определить так:

$$\begin{aligned}\ell_m \times \ell_k = \ell_q \iff &(\exists y)R(\ell_m, y, \ell_q) \wedge (\exists y)R(\ell_k, y, \ell_q) \wedge \ell_q \neq E \wedge \\ &\wedge (\forall \ell)((\exists y)R(\ell_m, y, \ell) \wedge (\exists y)R(\ell_k, y, \ell) \wedge \ell \neq E \to \ell_q \leqslant \ell).\end{aligned}$$

Поскольку числа u и $u+1$ всегда взаимно просты, то с помощью их произведения выражается и умножение произвольных m и k, $m \times k = q$ определяется следующим образом:

$$\ell_m \times \ell_k = \ell_q \iff (\ell_m + \ell_k) \times (\ell_m + \ell_k + x_0) = \ell_m \times (\ell_m + x_0) + \ell_k \times (\ell_k + x_0) + \ell_q + \ell_q.$$

Таким образом, обе операции элементарной арифметики: сложение и умножение — могут быть проинтерпретированы в алгебре $\mathfrak{A}_\varepsilon$. С другой стороны, в работе [1] показана возможность обратного: операции над регулярными языками можно проинтерпретировать в элементарной арифметике, если использовать для представления каждого языка числовой код конечного автомата, распознающего этот язык. Комбинируя эти результаты, мы получаем такое утверждение.

Теорема 4. *Теория алгебры $\mathfrak{A}_\varepsilon$ (и, следовательно, алгебры $\mathfrak{A}_\&$) неразрешима и алгоритмически эквивалентна полной элементарной арифметике.*

Полученный результат может быть обобщён, так как используемые нами действия очень ограничены. Фактически в доказательствах от множества языков A требуется замкнутость относительно конкатенации, её обращения (если $a\ell \in A$, то $\ell \in A$), добавления и удаления любого слова. В частности, таким условиям удовлетворяют класс всех языков и класс всех конечных языков.

Язык в односимвольном алфавите можно рассматривать как множество натуральных чисел — длин слов. Тогда конкатенация таких языков соответствует сложению подмножеств в аддитивном моноиде натуральных чисел. Поэтому в качестве следствия можно получить такие результаты.

Теорема 5. *Алгебра конечных подмножеств со сложением в аддитивном моноиде натуральных чисел имеет неразрешимую теорию, которая алгоритмически эквивалентна полной элементарной арифметике. Алгебра всех подмножеств со сложением в аддитивном моноиде натуральных чисел имеет неразрешимую теорию, которая алгоритмически эквивалентна полной арифметике второго порядка.*

Этот результат контрастирует с тем, что, например, бесконечная прямая сумма этого же моноида с собой имеет разрешимую теорию (совпадает с арифметикой Сколема).

Литература

1. Dudakov S., Karlov B. On Decidability of Regular Languages Theories // CSR 2019 proceedings, LNCS 11532 (to be published).
2. Grzegorczyk A. Undecidability without Arithmetization // Studia Logica, 79 (2), 163–230 (2005).
3. Hopcroft J.E., Motwani R., Ullman J.D. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. 3rd edn. Pearson, Harlow, Essex (2013).

О ГРУППАХ 2-РАНГА ОДИН

Б. Е. Дураков

Сибирский федеральный университет, Красноярск

durakov96@gmail.com

Как доказал Бернсайд, в конечной группе с циклической силовской 2-подгруппой все элементы нечетного порядка составляют нормальную подгруппу. Для бесконечных периодических групп это утверждение неверно даже в случае, когда силовская 2-подгруппа имеет порядок 2 и является центром группы.

В 1973 г. В.П. Шунков в [1] поставил вопрос 4.75: *пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию i, и пусть силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально циклическими группами, либо обобщенными группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO_{2'}(G)$ центральным элементом в $G/O_{2'}(G)$?*

Здесь $O_{2'}(G) = O(G)$ — максимальная нормальная в G подгруппа, не содержащая инволюций. Другими словами, верна ли теоремы Бернсайда и Бруэра-Сузуки в классе периодических групп?

Ответ на него неизвестен даже при условии квазицикличности централизатора $C_G(i)$ (вопрос В.Д. Мазурова 15.54 [1]). Ответ положителен, когда G действует (точно) дважды транзитивно на множестве $G/C_G(i)$ [3], и когда $C_G(i)$ — квазициклическая группа, не максимальная в G [2]. Вопрос 4.75 тесно связан с вопросами 10.62 и 11.13 из [1], причем на вопрос 11.13 уже получен отрицательный ответ в [4].

В докладе приведены некоторые результаты, относящиеся к решению данных вопросов в группах с дополнительными условиями, в том числе условиями конечности. Так, инволюция i группы G называется *конечной*, если она порождает с каждой сопряжённой с ней инволюцией группы G конечную подгруппу.

Доказательство следующей теоремы опубликовано в статье А. И. Созутова и автора [5].

Теорема 1.*Группа G с обособленной, не максимальной в G 2-подгруппой C и конечной инволюцией локально конечна и является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и локально циклическим, или (обобщенно) кватернионным дополнением C.*

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.*Пусть G — группа с обособленной в G 2-подгруппой T и каждая тройка инволюций из G порождает в ней конечную подгруппу. Тогда G локально конечна и является группой Фробениуса с абелевым ядром $O(G)$ и локально циклическим или (обобщенно) кватернионным дополнением T.*

По более общему вопросу 4.75 получен следующий результат.

Теорема 3.*Пусть группа G удовлетворяет условиям вопроса 4.75 [1] и инволюция i порождает с каждым элементом конечного порядка, не делящегося на 4, конечную подгруппу. Тогда $iO(G) \in Z(G/O(G))$.*

В частности, вопрос 4.75 [1] решается положительно в классе сопряженно бинарно конечных групп. Однако даже для класса сопряжённо бипримитивно конечных групп вопрос 4.75 пока открыт.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

Литература

1. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп – 6-17 изд.– Новосибирск, 1978–2012 гг.
2. Созутов А.И. О группах с квазициклическим централизатором конечной инволюции // Сиб. матем. журн.– Сентябрь–октябрь, 2016. Т. 57, № 5.– С. 1127-1130.
3. Сучков Н.М. О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп // Алгебра и логика.– 2001.– Т. 40, № 3.– С. 344-351.
4. Созутов А.И., Дураков Е.Б. О двух вопросах из Коуровской тетради // Алгебра и логика.– 2013.– Т. 52, № 5.– С. 632-637.
5. Созутов А.И., Дураков Б.Е. О группах с обособленной 2-подгруппой // Математические заметки.– 2019.– Т. 105.– С. 428-432.

О ПОЗИТИВНЫХ ФОРМУЛАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ КВАНТОРАМИ НА СВОБОДНЫХ ПОЛУГРУППАХ

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль
durnev@uniyar.ac.ru, ovzetkina@yandex.ru

Обозначим через S_m – свободную полугруппу ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно, а при $m = 3$ вместо a_1, a_2 и a_3 – a, b и c. Заметим, что S_1 – циклическая полугруппа. В дальнейшем речь будет идти только о нециклических (некоммутативных) полугруппах S_m, т.е. будем считать, что $m \geqslant 2$. Особый интерес по ряду причин представляют "пограничные" случаи – свободные полугруппы $S_2 = \langle a, b\rangle$ с двумя свободными образующими a и b и $S_3 = \langle a, b, c\rangle$ с тремя свободными образующими a, b и c.

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории нециклической свободной полугруппы.* Из результата В. Куайна легко следует *алгоритмическая неразрешимость позитивной теории свободной нециклической полугруппы* (этот факт в работе В. Куайна не отмечается).

В работе [2] был существенно усилен этот результат – доказана алгоритмическая неразрешимость для позитивных формул вида

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(y,z,x_1,x_2,x_3,a,b) \,=\, u_i(y,z,x_1,x_2,x_3,a,b)).$$

В ряде работ на полугруппе S_m рассматриваются два отношения частичного порядка $\leqslant$ и $\subseteq$, определяемые естественным образом

для произвольных элементов X и Y полугруппы S_m:

$X \leqslant Y \iff$ существует такой элемент Z полугруппы S_m, что $Y = XZ$;

$X \subseteq Y \iff$ существуют такие элементы U и Z полугруппы S_m, что $Y = UXZ$.

Это позволяет рассматривать формулы с ограниченными кванторами вида $(Qz)_{z\leqslant t}$ и $(Qz)_{z\subseteq t}$, где Q – это $\forall$ или $\exists$, а t – слово от переменных и образующих полугруппы S_m, не содержащее переменной z.

По произвольной конечно определенной полугруппе

$$S \,=\, \langle\, a, b \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \,\rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу $\Phi'_S(X, Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leqslant cXcx}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cXcxcYc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cXcxcYc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cXcxcYc}$$
$$(cXcxcYc \,=\, zax_1 \vee cXcxcYc \,=\, zbx_1 \vee$$
$$\vee \bigvee_{i=1}^{n} (cXcxcYc \,=\, zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3 \vee cXcxcYc \,=\, zcx_1B_ix_2cx_1A_ix_2cx_3)).$$

Лемма. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S (равны в полугруппе S) $\iff$ на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A, B)$.

Для удаления из формулы знака дизъюнкции $\vee$ воспользуемся обозначениями и результатами работы [3]. Следуя этой работе полагаем для произвольного слова w $\langle w\rangle = wawb$. В цитируемой работе доказана эквивалентность для произвольной полугруппы S_m $(m \geqslant 2)$

$$\bigvee_{i=1}^{n} W = W_i \iff (\exists Z)(\exists Z')U = ZVZ',$$

где $v = WW_1 \dots W_n$, $V = \langle v\rangle^2 W\langle v\rangle^2$, $U = \langle v\rangle^2 W_1\langle v\rangle^2 W_2\langle v\rangle^2 \dots \langle v\rangle^2 W_n\langle v\rangle^2$.

Легко видеть, что $Z, Z' \subseteq U$. Это дает возможность по формуле $\Phi'_S(X,Y)$ построить формулу $\Phi_S(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leqslant t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2} w = v,$$
$$\text{где } t = cXcx,\ t_1 = cXcxcYc,\ t_2 = U$$

такую, что для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S (равны в полугруппе S) $\iff$ на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi_S(A,B)$.

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, а в качестве формулы $\Phi_S(X)$ – формулу $\Phi_S(X,B)$, получим

Теорема. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi_S(X)$ *с параметром* X *вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leqslant t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2}$$
$$w(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c) = u(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, *элементу свободной полугруппы* S_2, *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_3 *позитивная формула* $\Phi_S(X)$.

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор $\exists$, а вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе S_m формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограниченные, и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.

Литература

1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic. // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.

2. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы. // ДАН СССР. 1973. Том 211, №4. С. 772-774.

3. Karhumaki J., Mignosi F., Plandowski W. On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables. // Bull. Belg. Math. Soc. 1993. P. 293-303.

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ АНАЛОГОВ ПРОТОКОЛА ОБМЕНА КЛЮЧАМИ ANSHEL-ANSHEL-GOLDFELD НА ПЛАТФОРМЕ СТРОГИХ N-ГРУППОИДОВ

К. И. Емельянов, С. Н. Тронин
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
kirillemelyanov11041995@gmail.com, sntrnn@gmail.com

Теория групп является традиционным аппаратом алгебраической криптографии [1], [2]. В нашей работе предпринята попытка перенести некоторые идеи теоретико-групповой криптографии (или криптографии на групповой платформе) на платформы ассоциативных структур более общего вида – строгих n-категорий [3], [4, глава 2].

Мы будем использовать определение строгой n-категории из [3] (с.32-33), и строгого n-группоида ([3], Определение 1.1. на с. 33-34). Наши обозначения также соответствуют [3]. Определения достаточно громоздки, и воспроизвести их здесь нет возможности.

Ранее было показано [5], как перенести известный криптографический протокол Anshel-Anshel-Goldfeld (см., например, [1], с.38-39) на 2-группоиды, т.е. на 2-категории [6, глава 12, 12.3, с.312], в которых обратимы все 1-морфизмы, а все 2-морфизмы обратимы как относительно вертикальной, так и относительно горизонтальной суперпозиций.

В случае строгих n-группоидов требуется обратимость всех морфизмов относительно всех имеющихся супепозиций. Напомним, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и для каждого j, $0 \leqslant j < i$, в n- категории существует суперпозиция $*_j$. При $n = 1$ это суперпозиция морфизмов в обычном категорном смысле.

Известно, что для любого $0 < i < n$, и любых $0 \geqslant k \neq t < i + 1$, классы морфизмов C_{i-1}, C_i, C_{i+1} вместе с суперпозициями $*_k$, $*_t$ образуют структуру, аналогичную 2-категории. Это позволяет перенести результат [5], и получить протокол, который по данным конечным открытым семействам i-морфизмов и $(i + 1)$-морфизмов вырабатывает секретный $(i + 1)$-морфизм.

Используя этот протокол, можно, предполагая дополнительно известными некоторые конечные семейства морфизмов из C_{i+2}, C_{i+3}, $\ldots$, C_m, получить протокол, который вычисляет общий секретный ключ как m-морфизм из C_m, $i < m \leqslant n$.

Криптостойкость данного протокола существенно зависит от конкретного n-группоида, выбранного для реализации протокола. Поиск подходящих для задач криптографии n-группоидов будет следующей целью наших исследований.

Литература

1. Романьков В.А. Алгебраическая криптография: монография. – Омск: Изд-во Ом. гос ун-та, 2013. 136 с.

2. Myasnikov A., Shpilrain V., Ushakov A. Non-commutative cryptography and complexity of group-theoretic problems. – Amer. Math. Soc., 2011. 402 p.

3. Kapranov M.M., Voevodsky V.A. $\infty-$groupoids and homotopy types // Cahiers de Topol. et Geom. Diff. Categ. 1991. T. 32. P. 29-46.

4. Simpson C. Homotopy theory of higher categories. – Cambridge Univ. Press, 2012. xvii+634 p.

5. Емельянов К. И. О некоторых криптографических протоколах, конструируемых с использованием техники 2-категорий // Труды Мат. центра имени

Н. И. Лобачевского. Т.56. Лобачевские чтения–2018. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. С. 109-111.

6. Маклейн С. Категории для работающего математика. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с.

MOD-РЕТРАКТАБЕЛЬНЫЕ И CC-КОАЛГЕБРЫ

М. С. Еряшкин
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
mikhail.eryashkin@gmail.com

Все рассматриваемые коалгебры, если не оговорено противное, определены над полем $\mathbf{k}$. Через $\Delta : C \to C \otimes C$ будем обозначать коумножение, а через $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$ — коединицу коалгебры Хопфа C.

Комодуль M называется *ретрактабельным*, если $\mathrm{Hom}^C(M, N) \neq 0$ для любого ненулевого подкомодуля N комодуля M. Коалгебра C называется *правой mod-ретрактабельной коалгеброй*, если каждый правый комодуль над C является ретрактабельным. Комодуль M называется *коретрактабельным*, если $\mathrm{Hom}^C(M/N, M) \neq 0$ для любого ненулевого подкомодуля N комодуля M. Коалгебра C называется *правой CC-коалгеброй*, если каждый правый комодуль над C является коретрактабельным.

CC-кольца и mod-ретрактабельные кольца изучались в ряде работ различными авторами. Например, в [1] показано, что классы SV-колец и регулярных mod-ретрактабельных колец, у которых каждый примитивный образ артинов, совпадают. В [2] было показано, что совпадают классы коммутативных mod-ретрактабельных и коммутативных полуартиновых колец. Коретрактабельные модули изучались в [3]. Описание правых CC-колец было получено в [4] и [5]. Также в [5] было получено описание совершенных mod-ретрактабельных колец. В общем случае описание mod-ретрактабельных колец еще не получено. Так как C^* является алгеброй для каждой коалгебры C, и A^* является коалгеброй для каждой конечномерной алгебры A, то представляет интерес изучение mod-ретрактабельных и CC-коалгебр.

Удалось получить следущее описание mod-ретрактабельных коалгебр и CC-коалгебр.

Теорема. *Пусть C – коалгебра. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(1) коалгебра C является правой CC-коалгеброй;

(2) коалгебра C является правой mod-ретрактабельной коалгеброй;

(3) $C = \bigoplus C_i$, где каждая коалгебра C_i является коалгеброй коматриц над max-коалгеброй, которая имеет единственный правый простой подкомодуль.

Как видно из теоремы класс правых mod-ретрактабельных коалгебр совпадает с классом правых CC-коалгебр.

Литература

1. Абызов А. Н. О некоторых классах полуартиновых колец // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 5. – С. 955–966.

2. Kosan M. T. Zemlicka J. Mod-retractable rings // Commun. Algebra. – 2014. – Vol. 42, no. 3. – P. 998–1010.

3. Amini B., Ershad M., Sharif H. Coretractable modules // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. – 2009. – Vol. 86, no. 3. – P. 289–304.

4. Zemlicka J. Completely coretractable rings // Bull. Iran. Math. Soc. – 2013. – Vol. 39, no. 3. – P. 523–528.

5. Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Ретрактабельные и коретрактабельные модули // Фундамент. и прикл. матем. – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 5–20.

О ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННОЙ СВОДИМОСТИ МНОЖЕСТВ

Д. Х. Зайнетдинов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

damir.zh@mail.ru

Доклад посвящен изучению предельно монотонных множеств, а также исследованию основных структурных свойств предельно монотонной сводимости между множествами. В работе получено описание алгоритмической зависимости между предельно монотонной сводимостью множеств, определенной в терминах Σ-сводимости семейств начальных сегментов натуральных чисел, и Σ-определимостью абелевых групп.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 18-31-00420.

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОДГРУППЫ ШМИДТА ИЗ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ

Е. В. Зубей

ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель

ekaterina.zubey@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы.

Группа с нильпотентной максимальной подгруппой нечетного порядка является разрешимой [1]. Эта теорема нашла отклик во многих работах (см., например, [2, 3]).

Если максимальная подгруппа M группы G ненильпотентна, то в M существует подгруппа Шмидта (ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны). От свойств подгрупп Шмидта из M зависит строение группы G, в частности, является ли она разрешимой.

Напомним, что подгруппа A группы G называется *полунормальной* в G, если существует подгруппа B в G такая, что $G = AB$ и AX — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы X из B. Группы, у которых некоторые подгруппы Шмидта полунормальны или субнормальны, исследовались в [4]– [7].

Доказана следующая

Теорема. *Пусть M — максимальная подгруппа конечной группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что $P' \leqslant Z(P)$ и M A_4-свободна. Если каждая подгруппа Шмидта из M полунормальна или субнормальна в G, то группа G разрешима.*

Следствие. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и порядок M нечетен. Если каждая подгруппа Шмидта из M полунормальна или субнормальна в G, то G разрешима.*

Здесь X', $Z(X)$ — коммутант и центр группы X, а A_4 — знакопеременная группа степени 4.

Литература

1. Thompson J. Finite groups with fixed point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Sci., U.S.A. 1959. Vol. 45, №. 4. P. 578–581.

2. Белоногов В. А. Один признак разрешимости групп четного порядка // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 2. С. 458–459.

3. Монахов В. С. О влиянии свойств максимальных подгрупп на строение конечной группы // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 2. С. 183–190.

4. Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.

5. Княгина В. Н., Монахов В. С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

6. Ведерников В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.

7. Al-Sharo Kh. A., Skiba A. N. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Commun. Algebra. 2017. Vol. 45. P. 4158–4165.

О НЕВЫЧИСЛИМЫХ ПОЗИТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ ЦЕЛОСТНОСТИ

Ф. Н. Ибрагимов

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент

farkh-i@yandex.com

Базовые понятия, используемые в работе, содержатся в [1–3].

Фундаментальные алгебраические понятия поля и его обобщения – области целостности, являются классическими объектами исследования в математической логике, которая, в частности, занимается описанием алгоритмических свойств колец, заданных теми или иными представлениями [1]. Важнейшими среди алгоритмических представлений этих объектов являются вычислимые, называвшиеся прежде конструктивными [2, 3], т. е. такие, которые изоморфны кольцам, носителями которых являются вычислимые (алгоритмически разрешимые) подмножества множества натуральных чисел, а операции сложения и умножения представлены подходящими вычислимыми операциями.

Более точно, если $\langle R; +, \times\rangle$ – произвольное не более чем счетное кольцо и ν – отображение из ω на R, для которого существуют такие вычислимые бинарные операции $\oplus, \otimes$ (представляющие соответствующие операции кольца на номерах/кодах его элементов в представлении ν), что $\forall x, y \in \omega\ [\nu x + \nu y = \nu(x \oplus y)]$ и $\forall x, y \in \omega\ [\nu x \times \nu y = \nu(x \otimes y)]$ (т. е. ν является эффективным гомоморфизмом), то ν называется нумерацией (алгоритмичским представлением) кольца R.

Ядром представления ν кольца R называется эквивалентность $\{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y\}$.

Определение. *Кольцо R называется вычислимо (позитивно, негативно) представимым, если существует его представление с вычислимым (перечислимым, коперечислимыи) ядром.*

Нетрудно заметить, что вычислимость представления кольца равносильна одновременной позитивности и негативности этого представления. Наиболее изученными объектами в теории абстрактной вычислимости являются поля. Т. к. любое поле является простой алгеброй (т. е. в нем отсутствуют собственные идеалы), то всякое позитивное представление поля является вычислимым. С другой стороны, всякое бесконечное вычислимо представимое поле обладает негативными невычислимыми представлениями [4]. Таковы же и бесконечные области целостности. Тем не менее, принципиальный вопрос о существовании области целостности, обладающей невычислимым позитивным представлением оставался открытым.

Следующая теорема показывает, что в отличие от полей, все позитивные представления которых вычислимы, позитивные области целостности не обязаны быть вычислимыми

Теорема. *Существует невычислимая позитивная область целостности.*

Следствие. *Существует позитивная область целостности, эффективно не вложимая ни в какое эффективно невырожденное поле.*

Литература

1. Ершов Ю. Л. *Теория нумераций.* М.: Наука, 1977, 416 с.
2. Ершов Ю. Л. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* М.: Наука, 1980, 416 с.
3. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. *Конструктивные модели.* Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.
4. Khoussainov B., Slaman T., Semukhin P. Π^0_1-*Presentasions of Algebras.* Archive for Mathematical Logic, 2006, 45, no. 6, 769–781.

О РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЦ НАД ПОЛУПОЛЯМИ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ И ПОЧТИ ЕДИНИЧНЫХ МАТРИЦ

С. Н. Ильин, А. С. Хайсанова
КФУ, Казань
Sergey.Ilyin@kpfu.ru; alena.hajsanova@gmail.com

Хорошо известно, что любая квадратная матрица над произвольным полем элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к диагональной 0-1-матрице. Из этого факта легко вытекает, что любая квадратная матрица над полем представима в виде произведения некоторого числа матриц, каждая из которых является либо перестановочной матрицей, либо отличается от единичной матрицы ровно одним элементом. Матрицы последнего типа будем называть *почти единичными*, а матрицы, разложимые в произведение перестановочных и почти единичных матриц, — I*-разложимыми*. Таким образом, всякая квадратная матрица над произвольным полем I-разложима.

Пусть теперь S — полуполе с идемпотентным сложением, причем отношение естественного порядка $\leqslant$ на S, где $a \leqslant b \Leftrightarrow a + b = b$, является линейным порядком. Примерами таких полуполей могут служить часто встречающееся в прикладных задачах полуполе $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$ неотрицательных вещественных чисел, а также его подполуполя, в том числе, полуполе $(\mathbb{Q}_+, \max, \cdot)$ и двухэлементная булева алгебра $\mathbb{B}_2$. Следующие результаты дают ответ на вопрос об I-разложимости матриц порядков 2 и 3 над полуполями указанного типа.

Теорема 1. *Всякая матрица порядка 2 над S является I-разложимой.*

Теорема 2. *Матрица A порядка 3 над S не является I-разложимой в точности тогда, когда в каждой ее строке и каждом столбце имеется ровно один нулевой элемент или для подходящих квазиперестановочных матриц P и Q матрица PAQ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix},$$

где $a, c < b \leqslant 1$ и $d < 1$.

ПОЗИТИВНЫЕ НУМЕРАЦИИ В ГИПЕРАРИФМЕТИКЕ

И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко, М. Х. Файзрахманов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
marat.faizrahmanov@gmail.com

Доклад посвящен вопросам существования позитивных и разрешимых вычислимых нумераций семейств всех Π^1_1- (Σ^1_1-)подмножеств заданных цилиндров. Выбор семейств указанного типа обосновывается их совпадением с семействами всех Σ-подмножеств наследственно конечных надстроек графов этих цилиндров.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННОЙ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С. Ф. Каморников
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
sfkamornikov@mail.ru

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые m-функторы, т. е. m-функторы, определенные на классе всех разрешимых конечных групп.

Согласно [1], подгрупповым m-функтором называется функция θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G. При этом предполагается, что если $\theta(G) = \{M_1, \dots, M_n, G\}$, то $\theta(G^\alpha) = \{M_1^\alpha, \dots, M_n^\alpha, G^\alpha\}$ для любого изоморфизма $\alpha : G \to G^\alpha$.

Подгрупповой m-функтор θ называется регулярным, если выполняются следующие условия:

1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \theta(G)$ следует $MN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \theta(G/N)$ следует $M \in \theta(G)$.

Если θ — подгрупповой m-функтор, то через $\Phi_\theta(G)$ обозначается обобщенная подгруппа Фраттини (θ-подгруппа Фраттини) группы G, которая определяется как пересечение всех подгрупп, принадлежащих $\theta(G)$. Отметим, что если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит все максимальные подгруппы из G, то $\Phi_\theta(G) = \Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Из основного результата работы [2] следует, что для получения подгруппы $\Phi(G)$ разрешимой группы G можно ограничиться пересечением лишь некоторых

$3n$ ее максимальных подгрупп, где n — число дополняемых факторов некоторого главного ряда группы G.

Другой подход, направленный на сокращение числа максимальных подгрупп, пересечение которых дает подгруппу Фраттини, предложен В. С. Монаховым в [3], где установлено, что для любой разрешимой группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением всех тех максимальных подгрупп M из G, для которых выполняется равенство $MF(G) = G$ (здесь $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G).

В [4] отмеченные подходы объединены: для группы G доказано, что если n — длина G-главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n - 3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.

В следующей теореме этот результат распространяется на все θ-подгруппы Фраттини группы G.

Теорема. *Пусть θ — регулярный подгрупповой m-функтор и G — конечная разрешимая группа, для которой $\Phi_\theta(G) \neq G$. Если n — длина G-главного ряда группы $Soc(G/\Phi_\theta(G))$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n-3k$ максимальные θ-подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_\theta(G)$.*

Для некоторых регулярных подгрупповых функторов θ условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ выполняется для любой неединичной группы G (это имеет место, например, для подгруппового функтора θ, выделяющего в каждой группе все ее максимальные подгруппы). Однако для большинства функторов θ условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ ограничивает группу G. В частности, если θ — регулярный подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе все ее абнормальные максимальные подгруппы, то условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ равносильно тому, что группа G не является нильпотентной.

Как отмечено в [4], в общем случае оценка числа максимальных подгрупп, приведенная в теореме, является точной. В то же время для ряда конкретных подгрупповых функторов θ и групп G со специальными свойствами (например, для S_4-свободных групп) она может быть улучшена.

Литература

1. Каморников С. Ф., Селькин М. В. *Подгрупповые функторы и классы конечных групп.* – Мн.: Белорусская наука. – 2003. – 256 с.

2. Kamornikov S. F. *Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups* // Int. J. Group Theory. – 2017. – V. 6. – no. 2. – p. 1–5.

3. Монахов В. С. *Замечание о максимальных подгруппах конечных групп* // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47. – № 4. – С. 31–33.

4. Каморников С. Ф. *Об одной характеризации подгруппы Фраттини конечной разрешимой группы* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23. – № 4. – С. 176–180.

О ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ С ОПЕРАТОРОМ ИТЕРАЦИИ

Б. Н. Карлов
Тверской государственный университет, г. Тверь
bnkarlov@gmail.com

Регулярные языки являются одним из основных объектов изучения в теории формальных языков. Также они имеют многочисленные практические приложения в разработке трансляторов, обработке текстовых данных и пр. Для регулярных языков разрешимы многие естественные алгоритмические проблемы, такие как проблема эквивалентности, принадлежности, пустоты, бесконечности и др. (см. [1]). Однако перечисленные вопросы относятся к конкретным языкам, а не к их семейству в целом. Мы изучаем класс регулярных языков как алгебраическую систему сигнатуры $\Omega = (\varnothing^{(0)}, {}^{*(1)})$, в которой основным множеством является множество всех регулярных языков в некотором фиксированном алфавите $\Sigma = \{\, a_1, \ldots, a_m \,\}$, а символы $\varnothing$ и * интерпретируются как пустое множество и оператор итерации соответственно. Теория первого порядка этой системы (см. [2]) обозначается T_{st}. В работе [3] доказано, что эта теория допускает эффективную элиминацию кванторов, а значит, она разрешима. Мы исследуем возможность «естественной» аксиоматизации теории T_{st}, а также её ёмкостную сложность.

Наши основные результаты состоят в следующем.

Теорема 1. *Теория* T_{st} *определяется следующим множеством аксиом:*

$S1$. $(\forall x)(x^*)^* = x^*$;

$S2$. $\varnothing^* \neq \varnothing$;

$S3$. $(\forall x)(x^* = \varnothing^* \to (x = \varnothing \vee x = \varnothing^*))$;

$S4_n$. $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Big(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i^* = x_i \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n}\bigwedge\limits_{j=i+1}^{n} x_i \neq x_j\Big)$;

$S5_n$. $(\forall x)\Big((x^* = x \wedge x \neq \varnothing^*) \to (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Big(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i^* = x \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n}\bigwedge\limits_{j=i+1}^{n} x_i \neq x_j\Big)\Big)$.

Истинность этих формул на множестве регулярных языков проверяется непосредственно. Для доказательства полноты мы рассматриваем теорию T'_{st}, определяемую аксиомами $S1$–$S5$. Далее мы рассматриваем семейство алгебраических систем $\mathfrak{S}_{\alpha,\beta}$, где α и β — произвольные кардиналы. Основным множеством системы $\mathfrak{S}_{\alpha,\beta}$ является

$$\{\,\varnothing, \varnothing^*\,\} \cup \{\, a_{i,j} \colon i \in \alpha, j \in \beta \,\} \cup \{\, b_i \colon i \in \alpha \,\},$$

а операция * определяется следующим образом:

$$a_{i,j}^* = b_i^* = b_i \text{ для всех } i, j.$$

Мы доказываем, что теория T'_{st} является счётно категоричной. Фактически, мы проверяем, что все её счётные модели изоморфны $\mathfrak{S}_{\omega,\omega}$. Тогда T'_{st} полна по теореме Лося-Воота. Так как теория T_{st} также полна и имеет общую модель с T'_{st}, то эти теории совпадают.

Множество аксиом $S1$–$S5$ является бесконечным. Используя теорему компактности и критерий конечной аксиоматизируемости теории через аксиоматизируемость дополнения её класса, мы доказываем, что обойтись конечным числом аксиом нельзя:

Теорема 2. *Теория* T_{st} *не является конечно аксиоматизируемой.*

В любой несчётной мощности α теория T_{st} уже не является категоричной, поскольку модели $\mathfrak{S}_{\alpha,\omega}$ и $\mathfrak{S}_{\omega,\alpha}$ не изоморфны. Это утверждение усилено в теореме 3. Если α — бесконечный кардинал, то через $\mu_1(\alpha)$ мы обозначаем мощность множества всех кардиналов меньших α, а через $\mu_2(\alpha)$ мы обозначаем мощность множества всех бесконечных кардиналов меньших α.

Теорема 3. *Если* α *— бесконечный кардинал, то теория* T_{st} *имеет ровно* $\mu_1(\alpha)^{\mu_2(\alpha)}$ *неизоморфных моделей мощности* α.

Результат о ёмкостной сложности теории T_{st} основан на следующей теореме:

Теорема 4. *Если* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant n$, *то в* n*-игре Эренфойхта на системах* $\mathfrak{S}_{\alpha,\beta}$ *и* $\mathfrak{S}_{\gamma,\delta}$ *Повторитель имеет выигрышную стратегию.*

Выигрышная стратегия Повторителя состоит в следующем: он выбирает итерацию тогда и только тогда, когда Разрушитель выбирает итерацию. Обе системы содержат n итераций, а каждая из них является итерацией по меньшей мере n различных элементов. Поскольку игра длится только n ходов, то Повторитель при выборе очередного элемента всегда может сохранить частичный изоморфизм.

Теорема 4 позволяет свести проверку истинности формулы длины n на системе $\mathfrak{S}_{\omega,\omega}$ к проверке её истинности на конечной системе $\mathfrak{S}_{n,n}$. Поскольку основное множество последней системы содержит $O(n^2)$ элементов, то проверку истинности формулы можно выполнить в полиномиальной памяти. Так как любая модель теории T_{st} содержит два различных элемента, то это позволяет свести к теории T_{st} PSPACE-полную проблему истинности булевых формул с кванторами, если интерпретировать один из элементов как истину, а другой — как ложь. Итак, справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Теория* T_{st} *является* PSPACE*-полной.*

Ещё одно следствие теоремы 4 — элементарная эквивалентность систем $\mathfrak{S}_{\alpha,\beta}$ и $\mathfrak{S}_{\gamma,\delta}$ для бесконечных кардиналов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. В частности, элементарно эквивалентны алгебраические системы со следующими основными множествами: регулярные языки, контекстно-свободные языки, рекурсивные языки, рекурсивно перечислимые языки, все языки (в некотором фиксированном алфавите). В силу же счётной категоричности первые четыре алгебраические системы даже изоморфны.

Литература

1. Aho A. V., Ullman J. D. The Theory of Parsing, Translation and Compiling. Volume 1: Parsing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1972.
2. Boolos G. S., Burgess J. P., Jeffrey R. C. Computability and Logic. 5th edn. Cambridge University Press, New York, 2007.
3. Dudakov S., Karlov B. On Decidability of Regular Languages Theories // CSR 2019 proceedings, LNCS 11532 (to be published).

О ПОРОЖДАЮЩИХ СОВОКУПНОСТЯХ ДЛЯ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ КОММУТАТИВНЫХ УНАРНЫХ АЛГЕБР И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

В. К. Карташов
Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
Волгоград
kartashovvk@yandex.ru

В работах [1, 2] для исследования базисов квазитождеств и решеток квазимногообразий унаров (т. е. алгебр с одной унарной операцией) достаточно эффективно использовалось понятие Q-критической алгебры.

Конечно-порожденная алгебра называется *Q-критической*, если она не разлагается в подпрямое произведение собственных подалгебр (т. е. подалгебр, неизоморфных самой алгебре). С помощью техники Q-критических алгебр были решены многие вопросы, связанные со свойствами базисов квазитождеств и решеток квазимногообразий унаров.

Для случая унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, в настоящее время Q-критические алгебры не описаны. Поэтому попытки решения упомянутых выше вопросов предпринимаются, как правило, для достаточно узких классов [3–5].

В настоящем сообщении в произвольном квазимногообразии коммутативных унарных алгебр выделяется подкласс так называемых *NQ-критических* алгебр. Этот класс включает в себя класс всех Q-критических алгебр и, поэтому, в некоторых случаях представляет собой порождающую совокупность для данного квазимногообразия. Это означает, что информация о свойствах NQ-критических алгебр может быть использована для исследования свойств квазимногообразий.

В данном сообщении эта идея демонстрируется для коммутативных унарных алгебр конечного типа, каждая связная компонента которых является сильно связной (т. е. порождается любым своим элементом).

Такие алгебры называются *ssc-алгебрами* (sums of strongly connected algebras). Интерес к ним во многом объясняется тем, что каждая конечная алгебра содержит некоторую ssc-алгебру в качестве подалгебры.

Свойства конгруэнций ssc-алгебр изучались ранее [6].

Далее через Ω^* обозначается свободный моноид слов над алфавитом Ω.

Теорема 1. *Связная коммутативная унарная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ конечного типа является ssc-алгеброй тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию, определяемому тождеством вида $wx = x$ для некоторого слова $w \in \Omega^*$, содержащего все сигнатурные символы из Ω.*

Напомним [7], что класс алгебр называется *обобщенным многообразием*, если он замкнут относительно гомоморфных образов, подалгебр, конечных декартовых произведений и любых декартовых степеней алгебр, входящих в него.

Теорема 2. *Класс всех ssc-алгебр конечного типа является обобщенным многообразием.*

Следствие. *Конечные коммутативные ssc-алгебры конечного типа образуют псевдомногообразие.*

Теорема 3. *Для любого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ ssc-алгебр конечного типа решетка $L_q(\mathfrak{M})$ подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{M}$ конечна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ порождается конечным множеством конечных алгебр.*

Отсюда вытекает

Теорема 4. *Всякая конечная коммутативная ssc-алгебра имеет конечный базис квазитождеств.*

Литература

1. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. 1980. Том 27, № 1. С. 7–20.
2. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Том 19, № 2. С. 173–193.
3. Горбунов В. А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Том 16, № 5. С. 507–548.
4. Casperson D., Hyndman J., Mason J., Nation J. B., Schaan B. Existence of finite bases for quasi-equations of unary algebras with 0 // Internat. J. Algebra Comput. 2015. Vol. 25, no. 6. P. 927–950.
5. Бесценный И. П. Квазитождества конечных унарных алгебр // Алгебра и логика. 1989. Том 28, № 5. С. 493–512.
6. Карташова А. В. О решетках конгруэнций прямых сумм сильно связных коммутативных унарных алгебр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Том 13, выпуск 4(2). С. 57–62.
7. Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // Journal of Algebra. 1985. Vol. 92. P. 104–115.

МОДУЛЯРНЫЕ И ДИСТРИБУТИВНЫЕ РЕШЕТКИ ТОПОЛОГИЙ КОММУТАТИВНЫХ УНАРНЫХ АЛГЕБР

А. В. Карташова

Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
Волгоград
kartashovaan@yandex.ru

В данном сообщении охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр конечного типа, решетка топологий которых модулярна, дистрибутивна или булева. Описаны классы всех модулярных и дистрибутивных решеток, каждая из которых изоморфна решетке топологий некоторой коммутативной унарной алгебры конечного типа.

Аналогичные вопросы для класса алгебр с одной унарной операцией решены ранее в [1].

Решетки топологий алгебр других сигнатур (группы, кольца, модули) рассматривались, например, в [2]–[4].

Под *топологией на алгебре* $\mathfrak{A}$ понимается топология на ее носителе, относительно которой каждая сигнатурная операция непрерывна. Топологии на алгебре $\mathfrak{A}$ образуют полную решетку по включению. Будем обозначать ее через $\Im(\mathfrak{A})$.

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной*, если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$, $a \in A$.

Если связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A}$ имеет наименьшую по включению подалгебру, то будем называть ее *ядром* этой алгебры и обозначать через $Ker\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех связных коммутативных унарных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ с ядром, каждая из которых удовлетворяет следующим условиям:

1) для каждого элемента $a \in \mathfrak{A} \setminus Ker\mathfrak{A}$ множество $(a) \setminus Ker\mathfrak{A}$ одноэлементно, где (a) – подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная элементом a;

2) для любых двух различных элементов $a, b \in A \setminus Ker\mathfrak{A}$ существует операция $f_{a,b} \in \Omega$ такая, что $f_{a,b}(a) \in Ker\mathfrak{A}$ и $f_{a,b}(b) = b$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра конечного типа. Тогда решетка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий этой алгебры модулярна в том и только в том случае, когда либо $|A| \leqslant 2$, либо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$.*

Для любой унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ через Ω^* обозначается свободный моноид слов с порождающим множеством Ω относительно композиции.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра конечного типа. Тогда решетка $\Im(\mathfrak{A})$ топологий этой алгебры дистрибутивна в том и только в том случае, когда либо $|A| \leqslant 2$, либо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ и найдется слово $u \in \in \Omega^*$ такое что, для любых $f \in \Omega$, $b \in Ker\mathfrak{A}$ справедливо равенство $f(b) = u^n(b)$ при некотором $n \in \mathbf{N}$.*

Теорема 3. *Пусть L – произвольная модулярная решетка. Тогда L изоморфна решетке топологий $\Im(\mathfrak{A})$ некоторой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ конечного типа в том и только в том случае, когда L изоморфна решетке подгрупп некоторой конечной абелевой группы.*

Следствие 1. *Пусть L – произвольная дистрибутивная решетка. Тогда L изоморфна решетке топологий $\Im(\mathfrak{A})$ некоторой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ конечного типа в том и только в том случае, когда L изоморфна решетке подгрупп некоторой конечной циклической группы.*

Следствие 2. *Пусть L – произвольная дистрибутивная решетка. Тогда L изоморфна решетке топологий $\Im(\mathfrak{A})$ некоторой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ конечного типа в том и только в том случае, когда L изоморфна решетке подгрупп некоторой конечной циклической группы, порядок которой свободен от квадратов.*

Литература

1. Kartashova A. V. On lattices of topologies of unary algebras // J. of Math. Sci. 2003. Vol. 114, no. 2. P. 1086–1118.

2. Arnautov V. I., Ermakova G. N. Lattice of all topologies of countable module over countable rings // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2016. Vol. 2. P. 63–70.

3. Lamper M. Complements in the lattice of all topologies of topological groups // Archivum Mathematicum. 1974. Vol. 10, no. 4. P. 221–230.

4. Šmarda B. The lattice of topologies of topological l-groups // Czech. Math. J. 1976. Vol. 26, no. 1. P. 128–136.

О T_1-ОТДЕЛИМЫХ НУМЕРАЦИЯХ АЛГЕБР С АРТИНОВЫМИ РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ

Н. Х. Касымов, А. С. Морозов

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
nadim59@mail.ru, morozov@math.nsc.ru

Со всеми неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в работах Р. Соара [1], Ю. Л. Ершова и С. С. Гончарова [2, 3], А. И. Мальцева [4].

Как обычно, всюду определенная функция, действующая из множества натуральных чисел ω в ω называется вычислимой, если существует вычисляющий ее алгоритм [1]. Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется вычислимым (вычислимо перечислимым, коперечислимым), если его характеристическая функция вычислима (α есть область значений подходящей вычислимой функции, α является дополнением вычислимо перечислимого множества).

Пусть $\langle A; \Sigma \rangle$ – универсальная алгебра эффективной сигнатуры Σ. Отображение ν из множества натуральных чисел ω на A называется нумерацией алгебры A, если существует вычислимое семейство F вычислимых функций, представляющих Σ-операции алгебры A в нумерации ν, т.е. для всякого символа Σ-операции $\sigma \in \Sigma$ алгебры A равномерно эффективно найдется такая вычислимая функция $f \in F$, что $\sigma\nu\overline{x} = \nu f \overline{x}$.

Нумерация ν алгебры A называется вычислимой (позитивной, негативной), если ее ядро (т.е. отношение эквивалентности $Ker\,\nu = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y\}$) вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо).

Пусть η – эквивалентность на ω. Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется η-замкнутым, если $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \rightarrow y \in \alpha$, т.е. если α является объединением подходящих η-классов; η-замкнутое множество называется η-конечным (η-бесконечным, η-кобесконечным), если оно является объединением конечного числа η-классов (бесконечного, соответственно кобесконечного множества η-классов).

Нумерация ν алгебры A называется отделимой (вычислимо отделимой), если для всякой пары чисел, различных по модулю $Ker\,\nu$, найдется $Ker\,\nu$-замкнутое вычислимо перечислимое (вычислимое) множество, содержащее в точности одно из этих чисел.

Очевидно, что совокупность вычислимо перечислимых (вычислимых) $Ker\,\nu$-замнутых множеств образует базу естественной перечислимой (вычислимой) топологии.

В работе [5] дана следующая структурная характеризация вычислимо отделимо нумерованных алгебр, подчеркивающая исключительную роль негативных алгебр с точки зрения вычислимо отделимых: нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами (под аппроксимируемостью понимается наличие семейства разделяющих морфизмов, см. Ю.Л.Ершов [2]. Из этой характеризации вытекает факт негативности всякой вычислимо отделимо нумерованной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций (далее, для краткости, – АРК-алгебры).

Известно [6], что нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами (эффективную отделимость см. также в Ю.Л.Ершов [2].

Отсюда следует, что всякая отделимая нумерация АРК-алгебры является эффективно отделимой, т.е. алгоритмическая сложность ядра такой нумерации заведомо не выходит за рамки класса Π^0_2-множеств. С другой стороны, существуют отделимые (даже вычислимо отделимые) нумерованные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций, алгоритмические сложности ядер которых превосходят любую наперед заданную.

Таким образом, алгоритмические сложности ядер отделимых, но не негативных нумераций АРК-алгебр (если они существуют) могут находиться только в относительно узком диапазоне между негативными (Π^0_1-) и Π^0_2-нумерациями.

При этом, хотя построить пример отделимой, но не негативной алгебры не представляет труда (тривиальный пример – алгебра пустой сигнатуры, алгоритмически реализуемая связным двоеточием, в котором один элемент представлен вычислимо перечислимым невычислимым множеством, а второй – его дополнением), все известные примеры T_1-отделимых нумераций АРК-алгебр оказывались негативными, что привело к возникновению предположения о негативности T_1-отделимых нумераций АРК-алгебр [6]. Например, простейшей бесконечной

T_1-отделимой АРК-алгеброй является алгебра предшествования $P = \langle\omega; p\rangle$, где $p(n+1) = n, p(0) = 0$ (заметим, что всякая T_1-отделимая нумерация конечной алгебры вычислима, т.е, в частности, негативна). Негативными также являются любые отделимые нумерации полей [7].

Легко показать, что всякая T_2-отделимая нумерация алгебры P является негативной.

Теорема 1. *Существует T_1-отделимо нумерованная АРК-алгебра не являющаяся негативной.*

Более того, даже алгебра P имеет такую нумерацию.

Отметим, что для любой такой нумерации ν алгебры P имеется весьма богатое семейство вычислимо перечислимых $Ker\,\nu$-замкнутых множеств (в частности, в соответствующую топологию входит не только семейство всех $Ker\,\nu$-коконечных множеств, что очевидно, но и целое семейство $Ker\,\nu$-кобесконечных множеств). Тем не менее, не существует пары нетривиальных непересекающихся вычислимо перечислимых $Ker\,\nu$-замкнутых множеств.

Литература

1. Соар Р. И. Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств. – Казань:Казанское математическое общество. – 2000. – 576 с.
2. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. – М.: Наука. – 1977. – 416 с.
3. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга. – 1999. – 360 с.
4. Мальцев А. И. Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16, №. 3. – С. 3–60.
5. Касымов Н. Х. Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, №. 3. – С. 145–176.
6. Касымов Н. Х. О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57, №. 1. – С. 47–66.
7. Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н. Отделимые нумерации тел и эффективная вложимость в них колец // Сибирский математический журнал. – 2019. – Т. 60, No. 1. – С. 82–94.

О НАСЛЕДСТВЕННО ЧИСТЫХ МОНОГЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ В КЛАССЕ ПОЛУГРУПП С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ИДЕМПОТЕНТОМ

О. В. Князев

Омский государственный педагогический университет, Омск

knyazev50@rambler.ru

В [1] делается обзор результатов и проблем, связанных с такими понятиями для универсальных алгебр как полнота, редуцированность, примарность и чистота. В этой работе, в частности, ставится задача (проблема 3.17): *описать наследственно чистые алгебры данного многообразия алгебр.* Мы изучаем наследственно чистые полугруппы в классе полугрупп с центральным идемпотентом (см., например, [2], [3]).

Напомним некоторые определения. Полугруппы с центральным идемпотентом рассматриваются здесь как алгебры с бинарной ассоциативной операцией — умножением и нульарной операцией — выделением идемпотента, коммутирующего со всеми элементами алгебры.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с центральным идемнотентом; $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. Заметим, что класс $\mathbf{N}$ — всех полугрупп с выделенным нулем и класс $\mathbf{M}$ — всех моноидов являются подмногообразиями многообразия $\mathbf{V}$. В дальнейшем под словом "полугруппа" понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}-$вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий выделенный идемпотент. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$*вербалом* полугруппы A. Подполугруппу B полугруппы A называют *чистой* в A, если равенство $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$. Если все подполугруппы полугруппы A являются чистыми, то A называют *наследственно чистой полугруппой.*

Через $\langle a \rangle_{2,m}$ обозначим моногенную полугруппу, которые в классе полугрупп с центральным идемпотентом можно задать следующими копредставлением:

$$\langle a \rangle_{2,m} = \langle a \mid a^2 = a^{2+m} \rangle,$$

где m – произведение различных простых чисел или $m = 1$.

Теорема. *Моногенная полугруппа A является наследственно чистой полугруппой в классе всех полугрупп с центральным идемпотентом тогда и только тогда, когда полугруппа $A = \langle a \rangle_{2,m}$.*

Литература

1. Мартынов Л. М. *Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы* // Сиб. электрон. матем. изв., 2016, Т. 13, С. 181–241.

2. Князев О. В. *О наследственно чистых полугруппах с центральным идемпотентом* // Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 10-13 ноября 2014 г.). Тезисы докладов. Новосибирск, 2014, С. 132.

3. Князев О. В. *Чистые полугруппы с центральным идемпотентом* // Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 19-22 ноября 2018 г.). Тезисы докладов. Новосибирск, 2018, С. 195.

АБЕЛЕВЫ TI-ГРУППЫ

Е. И. Компанцева, Т. К. Ч. Нгуен

МПГУ, Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва;
Московский государственный педагогический университет, Москва
kompantseva@yandex.ru, trangnguyen.ru@gmail.com

Согласно [1], подкольцо A ассоциативного кольца R называется метаидеалом индекса n, если существует такой ряд $A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = R$, что A_i является идеалом A_{i+1} для всех $i = 0, \cdots, n-1$. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Филиальные кольца изучались, например, в [2-4] и др. Абелева группа G называется TI-группой, если любое ассоциативное кольцо с аддитивной группой G филиально. Понятие TI-группы было введено в [5], там же описаны периодические TI-группы.

Настоящая работа посвящена изучению алгебраически компактных TI-групп. Абелева группа G называется алгебраически компактной, если она является прямым слагаемым группы, допускающей компактную топологию. В [6] показано, что кольцо на произвольной абелевой группе G вкладывается в некоторое алгебраически компактное кольцо, а именно в кольцо на сервантно-инъективной оболочке группы G. Поэтому изучение колец на алгебраически компактных группах может дать полезную информацию о свойствах колец с произвольной аддитивной группой.

Поскольку, как отмечалось выше, в классе периодических абелевых групп TI-группы описаны в [5], в дальнейшем мы рассматриваем только группы, не являющиеся периодическими. Как обычно, $\mathbb{Q}, \widehat{\mathbb{Z}}_p$ – группы рациональных и целых p-адических чисел соответственно, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\mathbb{Z}(n)$ – циклическая группа порядка n.

Следующая теорема сводит проблему описания TI-групп к случаю редуцированных абелевых групп.

Теорема 1. *Нередуцированная непериодическая абелева группа* G *является* TI*-группой тогда и только тогда, когда* $G = \mathbb{Q}$ *или* $G = \mathbb{Q} \oplus [\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}_0} \mathbb{Z}(p)]$ *при некотром* $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$.

Теорема 2. *Пусть* G *– редуцированная алгебраически компактная группа, не являющаяся периодической. Группа* G *является* TI*-группой тогда и только тогда, когда* G *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p$, *где* $p \in \mathbb{P}$,

2) $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Z}(n)$, *где* $p \in \mathbb{P}$, $(p, n) = 1$, n *– натуральное число, свободное от квадратов,*

3) $G = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}_0} \mathbb{Z}(p)$, *где* $\mathbb{P}_0$ *– бесконечное подмножество множества* $\mathbb{P}$.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 существенно используется описание всех умножений на редуцированных алгебраически компактных группах [7], которое выявляет тесную связь между кольцевыми структурами и базисными подмодулями p-адических компонент и позволяет строить алгебраически компактные кольца.

Литература

1. Baer R. Meta ideals. Report conf. linear algebras. June. 1956. // Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Counil. 1957. №502. P. 33–52.

2. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.

3. Sands A. D. On ideals in over-rings // Publ. Math. Debrecen. 1988. V. 35. P. 273–279.

4. Filipowicz M., Puczylowski E. R. On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen 2005. Vol. 66. P. 257–267.

5. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33-41.

6. Fuchs L. Abelian groups. Switz.: Springer International Publishing, 2015.

7. Kompantseva E. I. Torsion-free rings // J. Math. Sci. 2010. Vol. 171. №2. P. 213-247.

НЕАЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

А. В. Кондратьева
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород
alisakondr@mail.ru

Симметричные гамильтоновы формы в разделенных степенях были введены в [1]. Но рассматривались только классические формы, аналогичные тем, которые соответствуют гамильтоновым супер态алгебрам Ли [2]–[3]. В работе [4] дано инвариантное определение комплекса симметрических дифференциальных форм $S\Omega$. В докладе рассматриваются неальтернирующих гамильтоновых формы $\omega = \omega(0) + d\varphi + \sum\limits_{i<j} b_{ij} x_i^{(2^{m_i}-1)} x_j^{(2^{m_j}-1)} dx_i dx_j$, где $\varphi \in \mathfrak{m}^{(2)} S\Omega^1$ – 1-форма с коэффициентами в виде многочленов из $\mathcal{O}_n(\mathcal{F})$ (см. [5]) степени 2 и выше, b_{ij} – элементы основного поля, m_i – высота элемента x_i, а $\omega(0)$ приведена к каноническому виду. Приводится условие на высоты переменных, при котором форма сводится к виду $\omega = \omega(0)$. Доказывается, что если условие не выполняется, то форма приводится к виду $\omega = \omega(0) + \sum\limits_{i<j} b_{ij} x_i^{(2^{m_i}-1)} x_j^{(2^{m_j}-1)} dx_i dx_j$. Более того, путем дальнейших упрощений форма приводится к виду:

$$\omega = dx_1dx_2 + \ldots + dx_{2r-1}dx_{2r} + \varepsilon_1 dx_2^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{2r-1} dx_{2r}^{(2)} + dx_{2r+1}^{(2)} + dx_{2r+2}^{(2)} + \ldots + dx_n^{(2)} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{(2r-1)'} (1-\varepsilon_i)(a_i x_i^{(2^{m_i}-1)} x_t dx_i dx_t + \delta_{a_i}^0 b_i x_{i+1}^{(2^{m_{i+1}}-1)} x_t dx_i dx_t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{(2r-1)'} \varepsilon_i b_i x_{i+1}^{(2^{m_{i+1}}-1)} x_t dx_i dx_t + \sum_{i\in I} c_i x_i x_t dx_i dx_t.$$

Здесь r – целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant r \leqslant n/2$, $\varepsilon_j = 0$ или 1, сумма $\sum\limits_{i=1}^{(2r-1)'}$ идет по нечетным индексам, $t = \min\{i \mid i \in I\}$ и $I = \{i \mid \overline{\omega(0)}_{ii} \neq 0\}$, где $\overline{\omega(0)}$ – обратная матрица формы $\omega(0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00900/а.

Литература

1. Bouarrouj S., Grozman P., Lebedev A., Leites D. *Divided power(co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan Matrix* // Homology, Homotopy Appl., 12 (2010), 237–248.

2. Bouarroudj S., Grozman P., Lebedev A., Leites D., Shchepochkina I. *New simple Lie algebras in characteristic 2* // Math. Research Notices, 2009 (2015), 1–16.

3. Yier U., Leites D., Messaoudene M., Shchepochkina I. *Examples of simple vectorial Lie algebras in characteristic 2* // J. Nonlin. Math. Phys., 17, Suppl. 1 (2010), 311–374.

4. Кузнецов М. И., Кондратьева А. В., Чебочко Н. Г. *О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2* // Матем. журнал. (НАН Казахстана). – 2016. – т. 16. – № 2. – с. 54–65.

5. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – т. 33. – № 2. – с. 251–322.

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕАЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ АЛГЕБР ЛИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

А. В. Кондратьева, М. И. Кузнецов
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Нижний Новгород
alisakondr@mail.ru, kuznets-1349@yandex.ru

Доклад посвящен разработанной авторами общей теории неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли над полем характеристики 2. Серия гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2 с простейшей симметрической скобкой Пуассона, была построена Lei Lin [1]. Некоторые алгебры этой серии изоморфны алгебрам Капланского Kap1 [2]. Отметим, что построение фильтрованных деформаций градуированных алгебр Ли и их реализаций является составной частью проблемы классификации простых модулярных алгебр Ли.

Неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли интесивно исследовались D. Leites, U. Yier, S. Bouarrouj, M. Messaoudene, P. Grozman, A. Lebedev, I. Schepochkina в направлении распространения идей и методов теории супералгебр Ли на случай алгебр Ли четной характеристики. Был построен комплекс симметрических дифференциальных форм в разделенных степенях, что привело к более естественному определению неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли, проведен анализ градуированных алгебр с точки зрения продолжений Картана, рассмотрены некоторые алгебры Воличенко (см. [3]-[5]).

Авторы получили классификацию градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли, основанную на построенной теории инвариантов неальтернирующих симметрических билинейных форм характеристики 2 относительно группы автоморфизмов флага. Показано, что фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли соответствуют неальтернирующим гамильтоновым формам с полиномиальными коэффициентами. Отметим, что классические градуированные гамильтоновы алгебры Ли имеют фильтрованные деформации, которые соответствуют дифференциальным формам с неполиномиальными коэффициентами [6]. Более того, доказывается, что при достаточно общих условиях, например, когда высоты переменных больше 1, градуированные неальтернирующие гамильтоновы алгебры являются жесткими относительно фильтрованных деформаций, в отличие от классических гамильтоновых алгебр. Доказывается инвариантность стандартной максимальной подалгебры. Дается описание дифференцирований и автоморфизмов фильтрованных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли. Все результаты справедливы за исключением некоторых случаев, когда число переменных $n = 2,\ 3$, или 4. В докладе дается инвариантное определение комплекса симметрических дифференциальных форм и описание его когомологий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18-01-00900/а.

Литература

1. L. Lin, *Non-alternating Hamiltonian algebra P(n, m) of characteristic 2* // Comm. Alg., (21) (1993), 399–411.
2. I. Kaplansky, *Simple Lie algebras of characteristic 2* // Lect. Notes Math., 933 (1982), 127–129.
3. S. Bouarrouj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, *Divided power(co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan Matrix* // Homology, Homotopy Appl., 12 (2010),237–248.
4. S. Bouarroudj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, I. Shchepochkina, *New simple Lie algebras in characteristic 2* // Math. Research Notices, 2009 (2015),1–16.
5. U. Yier, D. Leites, M. Messaoudene, I. Shchepochkina, *Examples of simple vectorial Lie algebras in characteristic 2* // J. Nonlin. Math. Phys., 17, Suppl. 1 (2010), 311–374.
6. С. М. Скрябин, *Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней* // Матем. сб. 181 (1990), 114–133.

ПРОСТЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ НЕАЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ АЛГЕБР ЛИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

А. В. Кондратьева, М. И. Кузнецов, М. М. Рабиа

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

alisakondr@mail.ru, kuznets-1349@yandex.ru, rabiannovgorod91@gmail.com

В настоящее время известно множество серий простых алгебр Ли над полем характеристики 2, отличных от классических алгебр Ли и алгебр Ли картановского типа. Тем не менее, многие из них имеют сходство с указанными выше основными классами алгебр Ли. При исследовании неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли авторы обнаружили простые 15-мерные алгебры Ли, близкие к классическим алгебрам. В докладе дается их описание. Пусть $P(n)$ – неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли над полем характеристики 2, состоящая из функций Гамильтона, которые являются полиномами в разделенных степенях от переменных $x_1, \ldots, x_n$ по модулю констант, со скобкой Пуассона $\{f,\ g\} = = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \partial_i g$.

В случае $n = 4$ существует параметрическое семейство простых алгебр Ли, аналогичное известному семейству алгебр Каца-Кострикина $L(\varepsilon)$ характеристики 3. Положим $w_i = \Pi_{j \neq i} x_j,\ z = x_1^{(2)} + \ldots + x_4^{(2)}$. Пусть $(a,\ b) \in P^1$ – точка проективной прямой. Алгебра Ли $P(4)$ содержит новое параметрическое семейство простых градуированных 15-мерных подалгебр $L(a,\ b) = L_{-1} + L_0 + L_1$, $L_{-1} =< x_1, \ldots, x_4 >$, $L_0 =< x_i x_j,\ i \neq j > + < z >$, $L_1 =< a z x_i + b w_i,\ i = = 1,\ 2,\ 3,\ 4 >$. Эти алгебры являются новыми, по крайней мере, в классе простых градуированных алгебр Ли.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18-01-00900/а.

ПРЕФИКСНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СВЕРХСЛОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЯЗЫКОВ

Н. Н. Корнеева
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
Natalia.Korneeva@kpfu.ru

В [1] была рассмотрена задача префиксной реализуемости для сверхслова и введено понятие префиксной разрешимости сверхслова относительно класса регулярных языков. В данной работе аналогичное понятие вводится и исследуется для класса контекстно-свободных языков и некоторых его подклассов.

Контекстно-свободные языки – это языки, задаваемые контекстно-свободной грамматикой, или, что эквивалентно, языки, распознаваемые недетерминированными автоматами с магазинной памятью (МП-автоматами). В случае МП-автоматов классы распознаваемых языков различны для недетерминированного и детерминированного случая. В детерминированном случае также различаются классы распознаваемых языков по допускающему состоянию и пустому магазину. Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$ – класс контекстно-свободных языков, $\mathcal{L}_{AS}$ и $\mathcal{L}_{NS}$ – классы языков, распознаваемых детерминированными МП-автоматами по допускающему состоянию и пустому магазину соответственно, $\mathcal{L}_R$ – класс регулярных языков. Известно, что $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{L}_{AS} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$ и $\mathcal{L}_{NS} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$ [2].

Сверхслово называется $\mathcal{L}$-*префиксно разрешимым* (где $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$, $\mathcal{L}_{AS}$, $\mathcal{L}_{NS}$ или $\mathcal{L}_R$), если для любого языка из $\mathcal{L}$ можно определить, существует ли префикс сверхслова, принадлежащий этому языку. В случае $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ – это определение префиксной разрешимости из [1].

Поскольку каждому из указанных классов языков соответствует некоторый класс автоматов, то можно сформулировать определение следующим образом: сверхслово $\mathcal{L}$-префиксно разрешимо (где $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$, $\mathcal{L}_{AS}$ или $\mathcal{L}_{NS}$), если по любому МП-автомату (недетерминированному/ детерминированному, распознающему язык по допускающему состоянию/ детерминированному, распознающему язык по пустому магазину) можно определить, проходит ли он при чтении сверхслова через допускающее состояние (в третьем случае – опустошает ли он магазин). Аналогично для случая $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$.

В данной работе получены соотношения между возникающими классами префиксно разрешимых сверхслов для указанных выше классов языков:

Теорема 1. *Для сверхслова* x *следующие условия эквивалентны:*

1) x *–* $\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$*-префиксно разрешимо,*

2) x *–* $\mathcal{L}_{AS}$*-префиксно разрешимо,*

3) x *–* $\mathcal{L}_{NS}$*-префиксно разрешимо.*

Теорема 2. *Существует* $\mathcal{L}_R$*-префиксно разрешимое сверхслово* x*, которое не является* $\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$*-префиксно разрешимо.*

Также доказана замкнутость указанных классов сверхслов относительно автоматных преобразований, определяемых при помощи конечных асинхронных автоматов, значит, в частности, и относительно автоматных преобразований, определяемых конечными автоматами Мили.

Теорема 3. *Пусть* $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ *– конечный инициальный асинхронный автомат,* $x \in \Sigma^\infty$ *–* $\mathcal{L}$*-префиксно разрешимое сверхслово (где* $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$*,* $\mathcal{L}_{AS}$*,* $\mathcal{L}_{NS}$*,* $\mathcal{L}_R$*). Тогда* $\omega(s_0, x) \in (\Sigma')^\infty$ *–* $\mathcal{L}$*-префиксно разрешимое сверхслово.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00420 мол_а).

Литература

1. Вялый М. Н., Рубцов А. А. *Алгоритмическая разрешимость задач о поведении автоматов на сверхсловах* // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 3–18.

2. Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Дж. *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений.* – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2002. – 528 с.

ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОЛУЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

С. С. Коробков

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург

ser1948@gmail.com

Рассматриваются ассоциативные кольца. Пусть $M_n(GF(p^k))$ — кольцо всех квадратных матриц порядка n над конечным полем $GF(p^k)$, где n, k — натуральные числа, p — простое число. Следуя [1, стр. 82], назовем конечное кольцо R с единицей *полулокальным (примарным)* кольцом, если $R/\mathrm{Rad}\,R \cong M_n(GF(p^k))$. В частности, любое конечное локальное кольцо является полулокальным. Полулокальные кольца играют важную роль в теории конечных колец. Согласно [2, гл. IV, теорема 3] конечное кольцо R с единицей тогда и только тогда является полулокальным кольцом, когда $R \cong M_n(K)$, где K — локальное кольцо.

Обозначим решётку всех подколец кольца R через $L(R)$. Два кольца R и R' назовем *решёточно изоморфными,* если изоморфны их решётки подколец $L(R)$ и $L(R')$. Решёточный изоморфизм $L(R) \cong L(R')$ обозначим буквой φ и будем называть проектированием кольца R на кольцо R', а кольцо R' переобозначим как R^φ.

Пусть R — полулокальное кольцо и φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^φ. Выясняется следующий

Вопрос: *При каких условиях кольцо, решёточно изоморфное полулокальному кольцу, также является полулокальным кольцом?*

Кольца, решёточно изоморфные локальным кольцам, не всегда являются локальными. Проектирования локальных колец рассматривались в работах [3]– [6]. В них приведены достаточные условия для того, чтобы свойство кольца быть локальным, сохранялось при проектированиях. В частности, доказано, что если локальное кольцо R не является полем и имеет непростое поле вычетов $R/\mathrm{Rad}\,R$, то кольцо R^φ будет локальным кольцом. Кроме того, описаны кольца, не являющиеся локальными, но решёточно изоморфные локальным кольцам. Полученные результаты позволяют перейти к изучению проектирований полулокальных колец, не являющихся локальными кольцами. Решёточные изоморфизмы матричных колец, рассматриваемых над разными типами колец Галуа, изучались в работах [7] и [8]. Из результатов этих работ вытекает решёточная определяемость кольца матриц $M_n(GR(p^k, m))$ при $n > 1$, $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$.

В следующей теореме перечисляются свойства колец, сохраняющиеся при проектированиях полулокальных колец и даётся ответ на поставленный вопрос.

Теорема. *Пусть $R = M_n(K)$, где $n > 1$, K — конечное локальное кольцо. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда кольцо R^φ является полулокальным кольцом и при этом справедливы следующие утверждения:*

1) $\langle e\rangle^\varphi = \langle e'\rangle$, где e и e' — единичные элементы колец R и R^φ соответственно;

2) $\mathrm{char}\,R^\varphi = \mathrm{char}\,R$;

3) $R^\varphi \cong M_n(K')$, где K' — конечное локальное кольцо;

4) $|K'| = |K|$;
5) $(\mathrm{Rad}\,R)^{\varphi} = \mathrm{Rad}\,R^{\varphi}$;
6) $R^{\varphi}/\mathrm{Rad}\,R^{\varphi} \cong R/\mathrm{Rad}\,R$;
7) $|R^{\varphi}| = |R|$;
8) $R^{\varphi} \cong R$, *если* K *— кольцо Галуа.*

Литература

1. McDonald B. R. Finite rings with identity. — New York: Marcel Dekker, 1974. ix+429 pp.

2. Елизаров В. П. Конечные кольца. Основы теории. — Москва: Гелиос, 2006. 304 с.

3. Коробков С. С. Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов // Изв. Урал. гос. ун-та, 2002, № 22, Матем. и механ., Вып. 4. С. 81—93.

4. Коробков С. С. Проектирования колец Галуа // Алгебра и логика, 54, № 1 (2015). С. 16—33.

5. Коробков С. С. Проектирования конечных коммутативных колец с единицей // Алгебра и логика, 57, № 3 (2018). С. 285—305.

6. Коробков С. С. Проектирования конечных локальных колец // Международная конференция "Мальцевские чтения-18": тезисы докладов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 19–22 ноября 2018 г.). — Новосибирск, 2018. С. 155.

7. Коробков С. С. Решёточная определяемость некоторых матричных колец // Матем. сб., 208:1 (2017). С. 97–110.

8. Коробков С. С. Решёточные изоморфизмы конечных ненильпотентных колец // Международная конференция "Мальцевские чтения-17": тезисы докладов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 20–24 ноября 2017 г.). — Новосибирск, 2017. С. 120.

СЕМАНТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛНЫХ ПО П.С. НОВИКОВУ РАСШИРЕНИЙ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ L3 В ЯЗЫКЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ КОНСТАНТАМИ

А. К. Кощеева
Удмуртский государственный университет, Ижевск
kannakst@mail.ru

Пусть Fm — множество формул стандартного пропозиционального языка.

Суперинтуиционистской (с.и.) логикой называется произвольное подмножество $L \subset Fm$, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

Добавим к языку набор дополнительных логических констант $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, получим множество $Fm(\overline{\varphi})$ формул расширенного языка; при этом формулы из Fm назовем *чистыми.*

Явным соотношением для константы φ_i назовем формулу вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, где подформула B не содержит φ_i (но может содержать константы, отличные от φ_i).

Подстановкой на $Fm(\overline{\varphi})$ называется отображение $s\colon Fm(\overline{\varphi}) \to Fm(\overline{\varphi})$, сохраняющее константы и согласованное со стандартными логическими связками.

Следуя Д.П. Скворцову [1], назовем $\overline{\varphi}$*-логикой* множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

$\overline{\varphi}$*-Логика* $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* с.и. логики L, если $L \subseteq \mathcal{L}$ и для всякой чистой формулы A из того, что $A \in L$ следует $A \in \mathcal{L}$.

Проблема новых одноместных связок в с.и. логиках была поставлена П.С. Новиковым и впервые сформулирована в статье Я.С. Сметанича [2].

Подход П.С. Новикова адаптирован к языку с дополнительными константами в работе А.Д. Яшина [3]: $\overline{\varphi}$-логика $\mathcal{L}$ *определяет новые независимые логические константы в* L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любого явного соотношения $\varphi_i{\leftrightarrow}B$ $\overline{\varphi}$-логика $\mathcal{L}{+}\varphi_i{\leftrightarrow}B$ является неконсервативной над L (другими словами, $\mathcal{L}$ *не допускает присоединения* никаких явных соотношений).

$\overline{\varphi}$*-Логика* $\mathcal{L}$ называется *полным по П.С. Новикову расширением* с.и. логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\overline{\varphi}) \setminus \mathcal{L}$ $\overline{\varphi}$-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L (то есть $\mathcal{L}$ не допускает присоединения никакой новой формулы).

Под *проблемой П.С. Новикова для* L понимается описание класса всех полных по Новикову консервативных расширений логики L.

В данной работе проблема Новикова рассматривается применительно к с.и. логике $L3$, которая согласно [4] характеризуется классом $\mathbf{D} = \{D_n \mid n \in \omega\}$, где D_n — конечная корневая шкала высоты 3 с наибольшим элементом и n точками в «среднем слое» — *даймонд* (в работе [5] термину «даймонд» соответствует термин «юла»). В логику $L3$ включены формулы логики Int, а также формулы $bd_3 \rightleftharpoons p_1 \vee (p_1 \to (p_2 \vee (p_2 \to (p_3 \vee \neg p_3))))$ и $kc \rightleftharpoons \neg p \vee \neg\neg p$.

В работе [6] рассмотрена проблема П.С. Новикова применительно к новым константам в предтабличных суперинтуиционистских логиках LC (логика конечных цепей, логика Даммета), $L2$ (логика корневых шкал глубины 2 (вееров), эквивалентна логике LP_2 [7]), $L3$ (логика корневых шкал глубины 3 с наибольшим элементом (даймондов), эквивалентна логике LQ_3 [7]). Получено исчерпывающее описание семейства всех полных по Новикову расширений каждой из предтабличных с. и. логик в языке с несколькими дополнительными константами: для LC и $L2$ семантическое описание всех полных по Новикову расширений дано в терминах классов конечных цепей с раскраской (LC) и конечных вееров с раскраской ($L2$); для $L3$ подобное описание дано для случая одной константы.

В [8] дана классификация семейства полных по Новикову расширений $L3$ в языке с двумя константами и намётки доказательства для случая n констант.

Данной работой мы завершаем классификацию семейства полных по Новикову расширений каждой из предтабличных логик в языке с n дополнительными константами. Результаты, полученные в [6], [8] перенесены на случай n констант в с.и. логике $L3$.

Список литературы

1. Д. П. Скворцов, Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой // в кн.: Исследования по некл. логикам и формальным системам. М., Наука, 1983, 154–174.

2. Я. С. Сметанич, О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Тр. ММО, **9**, ГИФМЛ, М., 1960, 357–371.

3. A. D. Yashin, New intuitionistic logical constants: undecidability of the conservativeness problem // In: Lecture Notes in Computer Science, **1258**, 1997, 460–471.

4. Л. Л. Максимова, Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика, **11**, № 5, 1972, 558–570.

5. Л. Л. Максимова, П. А. Шрайнер, Алгоритмы распознавания табличности и предтабличности в расширениях интуиционистского исчисления // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ, **6**, № 3, 2006, 49—58.

6. А. К. Кощеева, Новые константы в предтабличных суперинтуиционистских логиках: подход П. С. Новикова // Изв. ИМИ УдГУ, № 1(47), 2016, 3–33.

7. T. Hosoi, On intermediate logics, I // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, no. 14, 1967, 293–312.

8. А. К. Кощеева, Новые константы в суперинтуиционистской логике $L3$ // Алгебра и логика: теория и приложения: междунар. конф., посвящ. памяти В. П. Щункова: тез. докл. / Мин. обр. и науки РФ, Сиб. федер. ун-т, Ин-т математики СО РАН, Ин-т выч. моделир. СО РАН. – Красноярск, СФУ, 2013, 77–78.

ПОЛУПОЛЕВЫЕ ПЛОСКОСТИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОДГРУППУ АВТОТОПИЗМОВ, ИЗОМОРФНУЮ Q_8

О. В. Кравцова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

ol71@bk.ru

Полуполевая проективная плоскость является плоскостью трансляций и дуальна плоскости трансляций. Она координатизируется полуполем, т. е. алгебраической системой, удовлетворяющей аксиомам тела, за исключением, возможно, ассоциативности умножения. Известная гипотеза о разрешимости полной группы автоморфизмов всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка ([1], см. также [2], вопрос 11.76, 1990 г.) не имеет опровергающих контрпримеров, но до сих пор не получила общего подхода к доказательству. Проблема редуцируется к доказательству разрешимости группы автотопизмов (автоморфизмов, фиксирующих треугольник) в случае, когда эта группа имеет четный порядок. Обсуждая гипотезу разрешимости, предлагаем рассмотреть полуполевые плоскости, группа автотопизмов которых имеет подгруппу, изоморфную группе кватернионов Q_8, используя метод, описанный в [3].

Теорема. *Пусть* π *– полуполевая плоскость* π *порядка* p^N, *допускающая подгруппу автотопизмов* H, *изоморфную группе кватернионов* Q_8, $p > 2$ *– простое число,* $p-1$ *делится на 4. Тогда* $N = 2n > 2$, *инволюция в* H *является гомологией с осью* $[\infty]$ *и центром* $(0,0)$. *Базис линейного пространства над* $\mathbb{Z}_p$ *может быть выбран так, что регулярное множество плоскости* π *состоит из матриц вида* $\theta(V,U) = \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix}$, *где* $V \in Q$, $U \in K$, Q *и* K *являются регулярными множествами в* $GL_n(p) \cup \{0\}$. *Аддитивные биекции* $m : K \to K$ *и* $f : Q \to Q$ *не тождественны и инволютивны. Плоскость* π *допускает бэровскую инволюцию, координатизирующее полуполе допускает автоморфизм порядка 2.*

Получено матричное представление регулярного множества и подгруппы H. Построены все неизоморфные полуполевые плоскости порядков 5^4 и 13^4 описанного вида. Показано, что полуполевая плоскость порядка p^4, $4|p-1$, не допускает $SL(2,5)$ в группе автотопизмов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-0056 А.

Литература

1. Hughes D. R., Piper F. C. *Projective planes* (Springer–Verlag New–York Inc., 1973).
2. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач* (Новосибирск, 2006).
3. Кравцова О. В. *Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_4*. Известия вузов. Математика. № 9, 2016, с. 10–25.

ОБ ЭРЕНФОЙХТОВОСТИ P-КОМБИНАЦИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ТЕОРИЙ

Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов

Международный университет информационных технологий, Институт математики и математического моделирования Алматы (Казахстан); Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)

b.kulpeshov@iitu.kz, sudoplat@math.nsc.ru

В серии работ [1]– [8] изучались свойства комбинаций теорий. В настоящем докладе мы исследуем P-комбинации упорядоченных теорий и находим необходимые и достаточные условия эренфойхтовости для P-комбинации счетного числа линейно упорядоченных структур.

Если $\langle M_1, <_1\rangle$ и $\langle M_2, <_2\rangle$ — линейные порядки, то их *линейно упорядоченная непересекающаяся комбинация* (или *конкатенация*), обозначаемая через $M_1 + + M_2$, есть линейный порядок $\langle M_1 \cup M_2, <\rangle$, где $a < b \Leftrightarrow ([a,b \in M_1 \wedge a <_1 b]$ или $[a,b \in M_2 \wedge a <_2 b]$ или $[a \in M_1 \wedge b \in M_2])$.

Пусть $M_i := \langle M_i; <_{M_i}, \Sigma_i\rangle$ — линейно упорядоченная структура для каждого $i \in \omega$. Будем обозначать через M' линейно упорядоченную непересекающуюся P-комбинацию структур M_i, $i \in \omega$, в языке $\{<, \Sigma, P_i^1\}_{i\in\omega}$, где $\Sigma = \cup_{i\in\omega}\Sigma_i$, и универсумом комбинации является $\bigcup_{i\in\omega} M_i$; $P_i(M') = M_i$ для каждого $i \in \omega$; либо $P_k(M') < P_m(M')$, либо $P_m(M') < P_k(M')$ для любых $k, m \in \omega$ с условием $k \neq m$. Для определенности мы будем считать что каждая структура M_i вместе со своей сигнатурой входит в P-комбинацию единственным образом, а именно, каждый символ S (кроме символа отношения порядка) сигнатуры Σ_i структуры M_i получает верхний индекс i в сигнатуре Σ для P-комбинации, и имеет место следующее:

(a) для каждого предикатного n-арного символа S сигнатуры Σ_i,

$$M' \models \forall x_1 \dots \forall x_n [S^i(x_1, \dots, x_n) \to \wedge_{j=1}^n P_i(x_j)];$$

(b) для каждого функционального m-арного символа f сигнатуры Σ_i,

$$M' \models \forall x_1 \ldots \forall x_m [\exists x_{m+1} f^i(x_1, \ldots, x_m) = x_{m+1} \to \wedge_{j=1}^{m+1} P_i(x_j)];$$

(c) для каждого константного символа c сигнатуры Σ_i мы имеем $M' \models P_i(c^i)$.

Таким образом, не существует совпадающих отношений (кроме отношения порядка) и функций, действующих в разных P-предикатах.

Для любых $i, j \in \omega$ P*-интервалом* называется следующее множество

$$(P_i, P_j) := \{P_k \mid P_i(M') < P_k(M') < P_j(M')\}.$$

Аналогично мы можем определить P-интервалы $(P_i, P_j]$, $[P_i, P_j)$, $[P_i, P_j]$. Если M' не имеет наименьшего P-предиката, то мы можем определить P-интервал (∞, P_j), где

$$(\infty, P_j) := \{P_k \mid P_k(M') < P_j(M')\}.$$

Рассматривая предикаты P_i вместо элементов в M', замечаем, что сечения в M' заменяются P*-сечениями*, состоящими из разбиений $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ множества всех предикатов P_i с условиями $P_j(M') < P_k(M')$ для $P_j \in \mathcal{P}$ и $P_k \in \mathcal{P}'$. Мы также допускаем возможность для $\mathcal{P} = \emptyset$ или $\mathcal{P}' = \emptyset$, заменяя интервалы (P_j, P_k) посредством $(-\infty, P_k)$ или (P_i, ∞) соответственно.

Будем говорить, что P-сечения $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ являются *ортогональными*, если они реализуются независимо друг от друга.

Для P-сечения $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ число попарно неизоморфных счетных моделей теории $\mathrm{Th}(M')$, в которых реализуется $\mathcal{C}$, а все P-сечения, являющиеся ортогональными сечению $\mathcal{C}$, не реализуются, называется $\mathcal{C}$*-спектром.*

Напомним, что полная счетная теория называется *эренфойхтовой*, если она не является счетно-категоричной и имеет лишь конечное число попарно неизоморфных счетных моделей.

Следующая теорема является критерием эренфойхтовости для P-комбинации счетного числа счетно-категоричных линейно упорядоченных структур.

Теорема 1. *Пусть M_i — счетно-категоричная линейно упорядоченная структура для каждого $i \in \omega$, M' — линейно упорядоченная непересекающаяся P-комбинация этих структур. Тогда $\mathrm{Th}(M')$ эренфойхтова тогда и только тогда, когда не существует бесконечного разбиения M' на бесконечные P-интервалы, и $\mathcal{C}$-спектр конечен для каждого P-сечения $\mathcal{C}$.*

Вспомним, что подмножество A линейно упорядоченной структуры M является *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств M.

В следующих определениях M — линейно упорядоченная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Мы говорим, что тип p *слабо ортогонален* типу q $(p \perp^w q)$, если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A. Мы говорим [9], что тип p *вполне ортогонален* типу q $(p \perp^q q)$, если не существует A-определимой биекции $f : p(M) \to q(M)$. Мы говорим, что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Теорема 2. *Пусть M_i — счетно-категоричная вполне о-минимальная структура, не имеющая первого (последнего) элемента для каждого $i \in \omega$, M' — линейно упорядоченная непересекающаяся P-комбинация этих структур. Тогда $\mathrm{Th}(M')$ вполне о-минимальна $\Leftrightarrow$ M_i является плотной для почти всех $i \in \omega$ (т. е. кроме конечного числа структур в M').*

Теорема 3. *Пусть M — счетно-категоричная вполне о-минимальная структура, M' — линейно упорядоченная непересекающаяся P-комбинация счетного числа копий структуры M. Тогда либо $\mathrm{Th}(M')$ имеет 2^ω счетных моделей, либо $\mathrm{Th}(M')$ является эренфойхтовой.*

Исследования частично поддержаны грантом КН МОН РК (AP05132546), проектом РФФИ (№ 17-01-00531-а), а также программой фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект № 0314-2019-0002.

Литература

1. Sudoplatov S.V. Combinations of structures // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 24 (2018), 82–101.
2. Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 16 (2016), 131–144.
3. Sudoplatov S.V. Families of language uniform theories and their generating sets // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 17 (2016), 62–76.
4. Sudoplatov S.V. On semilattices and lattices for families of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports, 14 (2017), 980–985.
5. Sudoplatov S.V. Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories // Siberian Electronic Mathematical Reports, 14 (2017), 135–150.
6. Sudoplatov S.V. Relative e-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports, 14 (2017), 296–307.
7. Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Families of theories of Abelian groups and their closures // Bulletin of Karaganda University. Mathematics, 92:4 (2018), 72–78.
8. Feferman S., Vaught R. The first order properties of products of algebraic systems // Fund. Math., 47 (1959), 57–103.
9. Kulpeshov B.Sh. Convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories // News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, series physics-mathematics, 227 (2003), 26–31.

КОММУТАТИВНЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ

В. А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск

kyrovVA@yandex.ru

В работах [1] и [2] дается определение однометрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств (ФС ГДМ) ранга $(n+1, m+1)$, которая задается дифференцируемой невырожденной функцией пары точек с открытой и плотной в $R^m \times R^n$ областью определения:

$$f : R^m \times R^n \to R,$$

а также выполняется аксиома феноменологической симметрии: справедлива функциональная связь

$$\Phi(f(\mu_1,\nu_1), f(\mu_1,\nu_2), \ldots, f(\mu_{n+1},\nu_{m+1})) = 0,$$

для открытого и плотного подмножества кортежей $\langle\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\mu_{n+1};\nu_1,\nu_2,\ldots$ $\ldots,\nu_m,\nu_{m+1}\rangle$ длины $n+m+2$ из окрестности $V(\langle\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\mu_{n+1};\nu_1,\nu_2,\ldots$ $\ldots,\nu_m,\nu_{m+1}\rangle) \subset R^{m(n+1)} \times N^{n(m+1)}$. Функция Φ — дифференцируемая и $\mathrm{rang}\Phi =$ $= 1$. Точки из первого множества обозначаются μ, μ_1, $\mu_2\ldots$, а точки из второго множества — ν, ν_1, $\nu_2\ldots$

В координатах функция пары точек ФС ГДМ ранга $(n+1,m+1)$ задается в виде

$$f(\mu,\nu) = f(x^1(\mu),\ldots,x^m(\mu),\xi^1(\nu),\ldots,\xi^n(\nu)),$$

где $x^1(\mu),\ldots,x^m(\mu)$ — координаты точки $\mu \in R^m$, а $\xi^1(\nu),\ldots,\xi^n(\nu))$ — координаты точки $\nu \in R^n$.

Доказано, что существуют ФС ГДМ только рангов $(n+1,n+1)$, $(n+2,n+1)$ и $(4,2)$, причем $n \geqslant 1$ [1]:

ФС ГДМ ранга $(n+1,n+1)$:

$$f(\mu,\nu) = x^1(\mu)\xi^1(\nu) + \cdots + x^n(\mu)\xi^n(\nu);$$

$$f(\mu,\nu) = x^1(\mu)\xi^1(\nu) + \cdots + x^{n-1}(\mu)\xi^{n-1}(\nu) + x^n(\mu) + \xi^n(\nu);$$

ФС ГДМ ранга $(n+2,n+1)$:

$$f(\mu,\nu) = x^1(\mu)\xi^1(\nu) + \cdots + x^n(\mu)\xi^n(\nu) + \xi^{n+1}(\nu);$$

ФС ГДМ ранга $(4,2)$:

$$f(\mu,\nu) = \frac{x(\mu)\xi^1(\nu) + \xi^2(\nu)}{x(\mu) + \xi^3(\nu)}.$$

Рассмотрим вещественную коммутативную ассоциативную алгебру $(s+1)$-мерных гиперкомплексных чисел L. Примером таких алгебр служат алгебра комплексных чисел, алгебра кватернионов.

Произвольное гиперкомплексное число имеет вид $x = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_s i_s$, где $x_0, x_1, \ldots, x_s \in R$, $i_0 = 1$, $i_1,\ldots,i_s$ — мнимые единицы. Сложение, умножение на действительное число определяются покомпонентно, а произведение записывается следующим образом: $\forall x,y \in L\;\; xy = \sum_{k,l=0}^{s} x_k y_l i_k i_l$. Произведение мнимых единиц $i_k i_l \in L$ определяется специальной матрицей умножения, которая в общем случае неизвестна [1], [3].

Теорема. *Комплексификация коммутативными $(s+1)$-мерными гиперкомплексными числами однометрических ФС ГДМ рангов $(n+1,n+1)$, $(n+2,n+1)$ и $(4,2)$, причем $n \geqslant 1$, дает $(s+1)$-метрические ФС ГДМ тех же рангов. Функции пары точек этих ФС ГДМ имеют вид:*

ФС ГДМ ранга $(n+1,n+1)$:

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = y^1(\mu)\eta^1(\nu) + \cdots + y^n(\mu)\eta^n(\nu);$$

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = y^1(\mu)\eta^1(\nu) + \cdots + y^{n-1}(\mu)\eta^{n-1}(\nu) + y^n(\mu) + \eta^n(\nu);$$

ФС ГДМ ранга $(n+2,n+1)$:

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = y^1(\mu)\eta^1(\nu) + \cdots + y^n(\mu)\eta^n(\nu) + \eta^{n+1}(\nu);$$

ФС ГДМ ранга $(4,2)$*:*

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = \frac{y(\mu)\eta^1(\nu) + \eta^2(\nu)}{y(\mu) + \eta^3(\nu)},$$

где $y, y^1, \ldots, y^n$, $\eta^1, \ldots, \eta^{n+1} \in L$.

Приведенные здесь результаты являются продолжением исследований, опубликованных в работе [2].

Литература

1. Михайличенко Г. Г., Мурадов Р. М. *Физические структуры как геометрии двух множеств.* (ГАГУ, Горно-Алтайск, 2008).
2. Михайличенко Г. Г., Кыров В. А. *Гиперкомплексные числа в некоторых геометриях двух множеств. I*, Изв. вузов. Матем., (7), 19–29(2017).
3. Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа.* (Наука, М., 1973).

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ФАКТОРНО ДЕЛИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП СВОИМИ ПОЛУГРУППАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

О. В. Любимцев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород
oleg_ lyubimcev@mail.ru

Пусть Λ — некоторый класс абелевых групп. Говорят, что группа $A \in \Lambda$ определяется своей полугруппой $E^\star(A)$ эндоморфизмов в классе Λ, если всякий раз из изоморфизма $E^\star(A) \cong E^\star(B)$, где $B \in \Lambda$, следует изоморфизм $A \cong B$. В работе найдены абелевы группы из класса $\mathcal{QD}_{cd}$ вполне разложимых факторно делимых абелевых групп, которые принадлежат подклассу $\mathcal{QD}_{cd}(E^\star)$ групп, определяющихся своими полугруппами эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{cd}$. Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа [1]. Факторно делимая группа называется *вполне разложимой*, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1.

Предложение 1 [2, теорема 2] *Пусть* A *— факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики* $\chi(A) = (m_p)$*. Тогда* $A \in \mathcal{QD}_{cd}(E^\star)$ *в том и только том случае, когда* $P_0(A) = \{p \in P \mid m_p = 0\} = \varnothing$ *или* $P_\infty(A) = \{p \in P \mid m_p = \infty\} = \varnothing$*.*

Пусть $A = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus \ldots \bigoplus A_n$ — фиксированное разложение группы $A \in \in \mathcal{QD}_{cd}$, $r(A) > 1$, $r(A_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Прямое слагаемое A_i назовем *изолированным*, если в дополнительном прямом слагаемом не найдется прямого слагаемого ранга 1, котип которого сравним с котипом группы A_i.

Предложение 2 [3, теорема 1] *Пусть* $A \in \mathcal{QD}_{cd}$ *и* A *не содержит изолированных прямых слагаемых. Тогда* $A \in \mathcal{QD}_{cd}(E^\star)$*.*

Ввиду предложений 1 и 2 предположим, что группа $A \in \mathcal{QD}_{cd}$ имеет изолированные прямые слагаемые A_i $(i \in J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\})$ с $P_0(A_i) \neq \emptyset$ и $P_\infty(A_i) \neq \emptyset$. Пусть $\chi(A_i) = (m_p)$ и $P^t_\infty(A_i) = P_\infty(A_i) \cap supp\, t(\overline{A_i})$, $P^t_t(A_i) = P_t(A_i) \cap supp\, t(\overline{A_i})$,

$P_\infty^t(\overline{A_i}) = \bigcup\limits_{j\neq i} P_\infty(A_j)\cap P_t(A_i)$, где $\overline{A_i}$ — дополнительное прямое слагаемое к A_i в группе A, $P_t(A_i)=\{p\in P \mid 0<m_p<\infty\}$. Доказано, что если $E^\star(A) \overset{\alpha}{\cong} E^\star(B)$ для $A,B\in\mathcal{QD}_{cd}$, и хотя бы одно из множеств $P_\infty^t(A_i)$, $P_t^t(A_i)$, $P_\infty^t(\overline{A_i})$ бесконечно, то $A_i\cong B_i$ для соответствующей подгруппы B_i группы B.

Пусть $\mathbb{X}$ — множество всех кохарактеристик, A^χ — факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики $\chi=(m_p^\chi)\in\mathbb{X}$, $n=p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $P_n(A^\chi)=supp\ t(A^\chi)\cup\{p_1,\dots,p_s\}$. Введем следующие множества простых чисел:

$P_{\chi,n}=\{p\in P\backslash P_n(A^\chi)\mid p\equiv q(mod\ n)$ и $m_p^\chi\neq m_q^\chi$ для некоторого $q\in$ $\in P\backslash P_n(A^\chi)\}$;

$P_{\chi,n}^0=\{p\in P_{\chi,n}\mid m_p^\chi=0\}$.

Пусть $p,q\in P_{\chi,n}$. Положим $p\sim q \Leftrightarrow p\equiv q(mod\ n)$. Класс эквивалентности элемента $p\in P_{\chi,n}$ обозначим через $P_{\chi,n}[p]$. Определим отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{X}$ для фиксированного $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$\chi\overset{n}{\sim}\chi' \ \Leftrightarrow P_{\chi,n}[p]=P_{\chi',n}[p] \text{ и } \mid P_{\chi,n}^0[p]\mid=\mid P_{\chi',n}^0[p]\mid, \text{ если } p\in P_{\chi,n}; \qquad m_p^\chi=m_p^{\chi'}, \text{ если } p\notin P_{\chi,n}.$$

Пусть $A\in\mathcal{QD}_{cd}$,

$$A=\bigoplus_{i=1}^{n}A_i=\bigoplus_{\chi\in\mathbb{X}(A)}A^{\tau(\chi)}, \tag{1}$$

где $A^{\tau(\chi)}=\bigoplus\limits_{i\in I(\chi)}A_i$, $I(\chi)=\{i\in\{1,2,\dots,n\}\mid$ кохарактеристики $\chi(A_i)$ принадлежат одному котипу $\tau(\chi)\}$, $\mathbb{X}(A)$ — множество кохарактеристик разложения (1), принадлежащих различным котипам. Скажем, что кохарактеристика χ изолирована в $\mathbb{X}'$, $\mathbb{X}'\subset\mathbb{X}$, если для $\chi'\in\mathbb{X}'$ либо $\chi=\chi'$, либо кохарактеристики χ и χ' принадлежат несравнимым котипам. Множество $\mathbb{X}''\subset\mathbb{X}$ назовем изолированым в $\mathbb{X}'\subset\mathbb{X}$, если любая кохарактеристика из $\mathbb{X}''$ изолирована в $\mathbb{X}'$. Положим

$$\mathbb{X}'(A)=\{\chi\in\mathbb{X}(A)\mid\chi \text{ изолирована в } \mathbb{X}(A),\ \mid I(\chi)\mid=1 \text{ и } P_{\chi,n}\neq\varnothing, \text{ где } n=exp(Hom(A^\chi,t(A)))\}.$$

Доказано, что если $\mathbb{X}'(A)=\varnothing$, то $A\in QD_{cd}(E^\star)$. Следуя терминологии [4], множество $\mathbb{X}'(A)$ назовем *сверхизолированным* в $\mathbb{X}(A)$, если для множества $\mathbb{X}'\subset$ $\subset\mathbb{X}$ кохарактеристик, принадлежащих различным котипам, из того, что

(a) $\mathbb{X}'$ изолировано в $\mathbb{X}'\cup(\mathbb{X}(A)\setminus\mathbb{X}'(A))$;

(b) $\mathbb{X}'\cap(\mathbb{X}(A)\setminus\mathbb{X}'(A))=\varnothing$;

(c) существует взаимно однозначное соответствие $\chi\leftrightarrow\chi'$ между кохарактеристиками множеств $\mathbb{X}'(A)$ и $\mathbb{X}'$, при котором $\chi\overset{n}{\sim}\chi'$ для $n=exp(Hom(A^\chi,t(A)))$;

следует $\mathbb{X}'=\mathbb{X}'(A)$.

Теорема. *Пусть $A\in\mathcal{QD}_{cd}$, $r(A)>1$, $\mathbb{X}'(A)\neq\varnothing$. Группа A определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{cd}$ тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{X}'(A)$ сверхизолировано в $\mathbb{X}(A)$.*

Пример 1. Пусть $A=A^{\chi_1}\bigoplus A^{\chi_2}$, где $\chi_1=(\infty,0,1,1,1,\dots)$, $\chi_2=$ $=(0,\infty,2,2,2,\dots)$. Тогда $A\in\mathcal{QD}_{cd}(E^\star)$, так как $\mid P_t^t(A^{\chi_1})\mid=\mid P_t^t(A^{\chi_2})\mid=\infty$.

Пример 2. Пусть $A=A^{\chi_1}\bigoplus A^{\chi_2}$, где $\chi_1=(1,\infty,\infty,0,\infty,\infty,\infty,\dots)$, $\chi_2=$ $=(\infty,0,1,0,0,0,0,\dots)$. Имеем: $P_{\chi_1,5}=\{7,17,\dots\}$, $P_{\chi_1,5}^0=\{7\}$, $P_{\chi_2,2}=\varnothing$. Таким образом, $\mathbb{X}'(A)=\{\chi_1\}$. Положим $\mathbb{X}'=\{\chi_1'\}$, где $\chi_1'=(1,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$. Тогда $P_{\chi_1',5}=P_{\chi_1,5}=\{7,17,\dots\}$, $P_{\chi_1',5}^0=\{17\}$. Нетрудно видеть, что множество $\mathbb{X}'$ удовлетворяет условиям (a) — (c), но $\mathbb{X}'\neq\mathbb{X}'(A)$. Следовательно, множество

$\mathbb{X}'(A)$ не сверхизолировано в $\mathbb{X}(A)$, и по теореме группа A не определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_{cd}$.

Пример 3. Рассмотрим группу $A = A^{\chi_1} \bigoplus A^{\chi_2} \bigoplus A^{\chi_3}$, $\chi_1 = (0, 1, \infty, \infty, \ldots)$, $\chi_2 = (0, \infty, 1, 1, \ldots)$, $\chi_3 = (\infty, 0, 1, 0, 0, \ldots)$. Так как $|P^t_\infty(A_1)| = |P^t_\infty(\overline{A_2})| = \infty$, то следует рассматривать только изолированное слагаемое A^{χ_3}. Имеем: $\mathbb{X}'(A) = \{\chi_3\}$, $P_{\chi_3,5} = \{2, 7, \ldots\}$. Предположим, что найдется множество $\mathbb{X}' = \{\chi'_3\}$, которое удовлетворяет условиям (a) — (c), однако $\mathbb{X}' \neq \mathbb{X}'(A)$. Поскольку $\chi_3 \neq \chi'_3$, то $m_2^{\chi'_3} = 0$, $m_q^{\chi'_3} = \infty$ для некоторого $q \equiv 2(mod\, 5)$. Кроме того, $m_p^{\chi'_3} = m_p^{\chi_3}$ для $p \neq 2, q$. Но тогда $\chi'_3 < \chi_1$, что противоречит условию (a). Следовательно, $\mathbb{X}' = \mathbb{X}'(A)$, $\mathbb{X}'(A)$ сверхизолировано в $\mathbb{X}(A)$ и $A \in \mathcal{QD}_{cd}(E^\star)$.

Литература

1. Fomin A. A., Wickless W. *Quotient divisible abelian groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126. – no. 1. – P. 45–52.

2. Вильданов В. К., Любимцев О. В., Чистяков Д. С. *Об определяемости смешанных абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов* // Математические заметки. – 2018. – Т. 103. – № 3. – С. 364–371.

3. Любимцев О. В. *Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов* // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 10. – С. 75–82.

4. Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули, Томск: Изд-во Томск. ун-та. 1991. С. 125–134.

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА И ПРОЦЕСС КЭЛИ-ДИКСОНА

В. Т. Марков, А. А. Туганбаев

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Национальный исследовательский университет МЭИ
vtmarkov@yandex.ru, tuganbaev@gmail.com

Все рассматриваемые в докладе кольца предполагаются унитальными, но не обязательно ассоциативными.

Ассоциативное кольцо R с центром C называется *центрально существенным*, если R_C – существенное расширение модуля C_C, т. е. для любого ненулевого элемента $a \in R$ существуют такие ненулевые элементы $x, y \in C$, что $ax = y$. Ассоциативные центрально существенные кольца изучались, например, в [1] и [2]. Изучение неассоциативных центрально существенных колец начато в [3]. В неассоциативном случае имеет смысл рассматривать несколько вариантов определения центрально существенного кольца.

Ассоциативным центром, коммутативным центром и центром кольца R называются, соответственно, подмножества

$$\begin{aligned}
&N(R) = \{x \in R : \forall a, b \in R,\ (x, a, b) = (a, x, b) = (a, b, x) = 0\},\\
&K(R) = \{x \in R : \forall a \in R,\ [x, a] = 0\},\\
&Z(R) = N(R) \cap K(R),
\end{aligned}$$

где $(a,b,c)=a(bc)-(ab)c$ – ассоциатор элементов $a,b,c\in R$ и $[a,b]=ab-ba$ – коммутатор элементов $a,b\in R$ (см. §7.1 из [4]).

Ясно, что $N(R)$ и $Z(R)$ — подкольца в кольце R, причем R является унитарным левым и унитарным правым $N(R)$-модулем и $Z(R)$-модулем.

Через $[A,A]$ мы обозначаем идеал кольца A, порождённый коммутаторами всех его элементов.

Кольцо R называется *центрально существенным*, если $Z(R)r\cap Z(R)\neq 0$ для любого ненулевого элемента $r\in R$, т. е. $Z=Z(R)$ — существенный подмодуль модуля ${}_ZR$.

Кольцо R называется *N-существенным слева*, если $N(R)r\cap N(R)\neq 0$ для любого ненулевого элемента $r\in R$, т. е. $N=N(R)$ — существенный подмодуль модуля ${}_NR$.

Следующее определение несколько обобщает определение процесса Кэли-Диксона, данное в [4].

Пусть A — кольцо с инволюцией $*$, α — обратимый симметричный элемент центра кольца A. На абелевой группе $A\oplus A$ определим операцию умножения следующим образом:

$$(a_1,a_2)(a_3,a_4)=(a_1a_3+\alpha a_4a_2^*\ ,\ a_1^*a_4+a_3a_2). \tag{1}$$

для любых $a_1,\ldots,a_4\in A$. Полученное кольцо обозначим (A,α).

Теорема 1. *Пусть A — кольцо с центром $C=Z(A)$, $I=\mathrm{Ann}_C([A,A])$, $R=$ $=(A,\alpha)$.*

1. *$N(R)=\{(x,y)\colon x\in C,\ y\in I\}$.*

2. *Кольцо R является N-существенным слева (справа) в точности тогда, когда A — центрально существенное кольцо и I — существенный идеал кольца C.*

Теорема 2. *Пусть A — кольцо с центром $C=Z(A)$, $I=\mathrm{Ann}_C([A,A])$, $B=$ $=\{a\in C\colon a=a^*\}$, $J=\mathrm{Ann}_B(\{a-a^*\ :\ a\in A\})$, $R=(A,\alpha)$.*

1. *$Z(R)=\{(x,y):\ x\in B\cap C,\ y\in I\cap J\}$.*

2. *Кольцо R является центрально существенным в точности тогда, когда B — существенный B-подмодуль кольца R и J — существенный идеал в B.*

Теорема 3.

1. *Существует конечное неассоциативное и некоммутативное альтернативное центрально существенное кольцо.*

2. *Существует конечное некоммутативное и неальтернативное центрально существенное кольцо.*

Открытые вопросы

1. Существуют ли N-существенные слева кольца, не являющиеся N-существенными справа?

2. Существуют ли коммутативные N-существенные (эквивалентно: центрально существенные) неассоциативные кольца?

3. Существуют ли правоальтернативные центрально существенные или N-существенные неальтернативные кольца?

4. Как можно обобщить полученные результаты на случай колец без единицы и на случай, когда элемент α в определении процесса Кэли-Диксона не предполагается обратимым?

В.Т. Марков поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 17-01-00895-А. Исследование А.А. Туганбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект 16-11-10013.

Литература

1. Марков В.Т., Туганбаев А.А. Центрально существенные кольца // Дискрет. матем. – 2018. – Т. 30, вып. 2. – С. 55–61.

2. Markov V. T., Tuganbaev A. A. Centrally essential group algebras // Journal of Algebra. – 2018. – Vol. 512, no. 15. – P. 109–118.
3. Марков В. Т., Туганбаев А. А. Центрально существенные кольца, которые не обязательно унитальны или ассоциативны // Дискретная математика. – 2018. – Т. 30, № 4. – С. 41–46.
4. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. М., “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, 1978, 431 с.

ОБ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СИСТЕМ И ЗАДАЧЕ ИХ УСТОЙЧИВОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

В. Ю. Михайлов
Казанский федеральный университет, Казань
mih@kpfu.ru

В распространенном подходе Model Checking [1] к задаче верификации функционирования сложных систем модель M конкретной системы представляется конструкциями типа конечных автоматов или моделей Крипке, а требования к правильному функционированию системы описываются в виде формулы ϕ некоторого языка спецификаций L. Часто в качестве языка L используются формулы темпоральных логик LTL или CTL [2]. Задача верификации сводится к проверке истинности формулы ϕ на модели M. Но при верификации функционирования конкретной системы S явное построение ее модели в виде адекватного конечного автомата или модели Крипке является очень трудоемким и громоздким. В данной работе предлагается язык описания моделей систем в виде иерархии так называемых блоков управления. Каждый БУ характеризуется: набором X входных и набором P внутренних параметров; набором дочерних блоков управления $B_1, ..., B_n$; функцией управления F(i,X(t),P(t-1)), которая по номеру дочернего блока, входным параметрам блока в момент времени t и внутренним параметрам в момент времени t-1 определяет значения входных параметров дочернего блока B_i в момент времени t; функцией пересчета $H(X(t), P(t-1), P_1(t), ..., P_n(t))$, которая по значениям внутренних параметров дочерних блоков в момент времени t определяет значения внутренних параметров блока P(t) в момент времени t. Важным преимуществом такого способа описания модели системы S является возможность для каждого блока управления A за линейное время построить в явном виде логическую формулу $W_A(X_A(t), P_A(t-1), P_A(t))$, истинную т. и т.т. когда $P_A(t)$ являются значениями внутренних параметров блока A в момент t, если $X_A(t)$ – значения входных параметров блока A в момент t, а $P_A(t-1)$ – значения внутренних параметров блока A в момент t-1. В случае, когда входные и внутренние параметры блока задаются булевскими значениями, формула $W_A(X_A(t), P_A(t-1), P_A(t))$ может быть построена в виде BDD [3], что значительно упрощает алгоритмы верификации функционирования системы S.

Рассмотрим задачу поиска траекторий устойчивого функционирования системы.

Пусть для системы S задан набор параметров $P =< p_1, ..., p_k >$, значения которых определяют состояние системы. Начальное состояние системы описывается набором $P(0) =< p_1(0), ..., p_k(0) >$. Траекторией функционирования системы назовем последовательность состояний системы $P(0), P(1),$

$..., P(j), P(j+1), ...$, такую, что: $P(0)$ – является начальным состоянием системы, и для каждого j состояние $P(j+1)$ определяется по состоянию $P(j)$ по правилам функционирования системы. Мы хотим определить, имеются ли у системы S траектории функционирования, такие что в результате их реализации система перейдет в состояние, удовлетворяющее некоторому целевому условию G. Кроме того, при переходе из начального состояния в целевое, система должна находиться только в состояниях, удовлетворяющих определенным требованиям допустимости C.

Для решения данной задачи построим иерархическую модель системы S, главному типу которой будет соответствовать набор внутренних параметров $P = =< p_1, ..., p_k >$. Теперь наша задача сводится к нахождению траекторий функционирования модели $P(0), P(1), ..., P(N)$, таких что $P(0)$ является начальным состоянием главного БУ модели, состояние $P(N)$ удовлетворяет условию G и для каждого $j, 0 < j < N$, состояние $P(j)$ удовлетворяет требованиям C. Заметим, что функции управления в различных БУ из модели системы S как правило являются недетерминированными. Задача заключается в нахождении вариантов их вычисления в каждый момент времени t так, чтобы входные и внутренние параметры определенных БУ модели удовлетворяли определенным требованиям.

Если условия G и C записываются в виде пропозициональных формул или формул логики CTL, то задача поиска траекторий устойчивого функционирования системы S сводится к поиску всех выполняющих наборов для некоторой пропозициональной формулы, заданной в виде BDD . Если параметры БУ модели системы S могут принимать произвольные числовые значения, то модель, построенная на предлагаемом языке, эффективно транслируется в программу на языке Promela, и алгоритмы верификации реализуются средствами программной системы Spin.

На предлагаемом языке нами построены модели различных систем управления сложными объектами разнообразной природы, для которых были эффективно решены задачи поиска траекторий устойчивого функционирования и устойчивого развития.

Литература

1. Карпов Ю.Г. Верификация параллельных и распределённых программных систем. – СПб.:БХВ–Петербург, 2010.–560 с.

2. Caferra R. Logic for Computer Science and Artificial Intelligence.– John Wiley Sons, 2013.–537 p.– ISBN 978-1-118-60426-7.

3. Wegener I. Branching Programs and Binary Decision Diagrams.–Springer.–2010.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ КЛАССА УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ В КЛАССЕ ПОЛУГРУПП

В. А. Молчанов
Саратовский государственный университет, Саратов, Россия
v.molchanov@inbox.ru

Одним из главных разделов современной алгебры является обобщенная теория Галуа, начало которой было положено в исследованиях Э.Галуа и которая посвящается изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебраических систем, специальным образом связанных с исходными объектами. В качестве исходных математических объектов рассматривались разнообразные алгебраические системы (от графов и гиперграфов до колец и векторных пространств), формальные языки и многие другие, а в качестве производных алгебраических систем рассматривались, соответственно, группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов и решетки подсистем алгебраических систем, синтаксические моноиды формальных языков и многие другие.

В обзорной статье Ю. М. Важенина и А. Г. Пинуса [1] отмечается, что одной из важнейших проблем обобщенной теории Галуа является проблема элементарной классификации исходных объектов с помощью теорий первого порядка производных алгебраических систем и проблема разрешимости теорий первого порядка производных алгебраических систем. Как известно [2], эффективным инструментом решения такого рода проблем является метод относительно элементарной определимости одного класса моделей $\mathbf{K}$ в другом классе моделей $\mathbf{K_1}$, суть которого заключается в построении изоморфной копии исходной модели $A \in$ $\in \mathbf{K}$ в ее производной модели $S(A) \in \mathbf{K_1}$ с помощью средств узкого исчисления предикатов (УИП) сигнатуры класса $\mathbf{K_1}$ и некоторых фиксированных элементов модели $S(A)$. Так, в работе [3] Ю. М. Важениным доказана относительно элементарная определимость класса $\mathbf{Gr_1}$ рефлексивных графов с дугой, не принадлежащей орциклам, в классе полугрупп $\mathbf{Sem}$: для исходного графа $G \in \mathbf{Gr_1}$ построена изоморфная копия в его полугруппе эндоморфизмов $\mathrm{End}G \in \mathbf{Sem}$ с помощью средств УИП сигнатуры класса полугрупп и некоторых фиксированных элементов полугруппы $\mathrm{End}G$. С точки зрения алгебраической теории автоматов [4] полугруппа эндоморфизмов $\mathrm{End}G$ графа G является универсальным графическим автоматом без выходных сигналов. Универсальным графическим автоматом с выходными сигналами над графами G_X, G_Y является алгебраическая система $\mathrm{Atm}(G_X, G_Y) = (G_X, S(G_X, G_Y), G_Y, \delta^\circ, \lambda^\circ)$, где $G_X = (X, \rho_X)$ и $G_Y = (Y, \rho_Y)$ – соответственно, графы состояний и выходных сигналов автомата, $S(G_X, G_Y) = \mathrm{End}G_X \times \mathrm{Hom}(G_X, G_Y)$ – полугруппа входных сигналов автомата, $\delta^\circ : X \times S(G_X, G_Y) \to X$ и $\lambda^\circ) : X \times S(G_X, G_Y) \to Y$ – соответственно, функция переходов и выходная функция автомата, которые для любых $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in$ $\in S(G_X, G_Y)$ определяются по формулам $\delta^\circ(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda^\circ(x, (\varphi, \psi)) =$ $= \psi(x)$.

В настоящей работе рассматриваются универсальные графические автоматы $\mathrm{Atm}(G_X, G_Y)$ над рефлексивными графами G_X, G_Y. Известно [5], что такие автоматы с графом состояний $G_X \in \mathbf{Gr_1}$ полностью (с точностью до изоморфизма и двойственности графов) определяются своими полугруппами входных сигналов. Основной результат работы доказывает относительно элементарную определимость класса $\mathbf{Atm}$ универсальных графических автоматов $\mathrm{Atm}(G_X, G_Y)$ со связным графом состояний $G_X \in \mathbf{Gr_1}$ и рефлексивным антисимметричным графом выходных сигналов G_Y в классе полугрупп $\mathbf{Sem}$. Полученный результат позволяет исследовать взаимосвязь между элементарными свойствами универсальных графических автоматов и их полугрупп входных сигналов, проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов графических автоматов и элементарных теорий классов полугрупп, таких как проблема элементарной определимости универсальных графических автоматов их полугруппами входных сигналов, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных графических автоматов и др.

Литература

1. Важенин Ю. М., Пинус А. Г. Элементарная классификация и разрешимость теорий произвольных структур // УМН. – 2005. – Т. 60, № 3 (363). – С. 3–40.
2. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука. – 1980.
3. Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. вузов. Матем. – 1972. – № 7. – С. 3–11.
4. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. – М.: Высшая школа. – 1994.
5. Молчанов В. А., Фарахутдинов Р. А. Об универсальных графических автоматах // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы международной научной конференции, Наука, Саратов. – 2018. – С. 276–278.

АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОЛУГРУПП ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина

СГУ им. Н.Г. Чернышевского, СГТУ имени Гагарина Ю.А., Саратов
molchanovva@mail.ru, khvorostukhina85@gmail.com

В настоящей работе продолжаются исследования автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа [1]. Это достаточно широкий и важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями.

В работе рассматриваются гиперграфы особого вида – p-гиперграфы. Под p-гиперграфом понимается алгебраическая система вида $H = (X, L)$, где X – непустое множество вершин и L – семейство его подмножеств, именуемых гиперребрами или просто ребрами, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) любые p вершин содержатся в одном и только одном ребре; (A_2) каждое ребро содержит по крайней мере $p+1$ вершину; (A_3) в множестве X есть $(p+1)$-элементное множество, не принадлежащее ни одному ребру. Например, аффинная и проективная плоскости являются 2-гиперграфами.

Главное внимание в наших исследованиях уделяется, так называемым, универсальным гиперграфическим автоматам [2], подавтоматы которых охватывают все гомоморфные образы рассматриваемых гиперграфических автоматов. Такой универсальный автомат определяется для произвольных гиперграфов H_X, H_Y как автомат $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y) = (H_X, H_Y, S, \delta, \lambda)$ с полугруппой входных сигналов $S = \mathrm{End}(H_X) \times \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$, функцией переходов $\delta(x, s) = \varphi(x)$ и выходной функцией $\lambda(x, s) = \psi(x)$ (где $x \in X_1$, $s = (\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$).

Ранее уже была исследована проблема конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов [3], задача абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов [4], проблема определяемости автоматов полугруппами входных сигналов, задача представления автомата автономными входными сигналами [5]. В настоящей работе решается задача абстрактной характеризации полугрупп входных сигналов универсальных гиперграфических автоматов. Эта проблема формулируется следующим образом: при каких условиях произвольная полугруппа S будет изоморфна полугруппе входных сигналов универсального гиперграфического автомата $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y)$ для некоторых гиперграфов H_X, H_Y.

Теорема. *Найдены такие формулы* $Z(x), E_i(x,y), Edge_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}), i = 1, 2$, *элементарной теории полугрупп, что любая полугруппа* S *в том и только том случае будет изоморфна полугруппе входных сигналов некоторого универсального гиперграфического автомата над некоторыми* p*-гиперграфами, если она удовлетворяет следующим условиям:*

$$(\tilde{\theta}_0) \quad (\forall x, y, z)((Z(x) \Rightarrow E_2(x,x)) \wedge (E_2(x,y) \wedge E_2(y,z) \Rightarrow E_2(y,x) \wedge E_2(x,z)) \wedge \wedge (E_1(x,y) \Rightarrow (\forall s)(\bigwedge_{i=1}^{2} E_i(xs, ys))));$$

$$(\tilde{\theta}_1) \quad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})(\bigwedge_{j=1}^{p+1} Z(x_j) \ \wedge \ E_i(x_p, x_{p+1}) \quad \Rightarrow \quad Edge_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}))$$

(здесь и далее $i = 1, 2$*);*

$$(\tilde{\theta}_2) \quad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})(Edge_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \Rightarrow \bigwedge_{t \in T} Edge_i(x_{t(1)}, x_{t(2)}, \ldots, x_{t(p+1)})),$$

где T *– множество всех преобразований множества* $\{1, 2, \ldots, p+1\}$*;*

$$(\tilde{\theta}_3) \quad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_p, x, y)(\bigwedge_{j,k=1, j \neq k}^{p} \neg E_i(x_j, x_k) \wedge Edge_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_p) \wedge \wedge Edge_i(x_p, \ldots, x_2, x_1, y) \Rightarrow Edge_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, y));$$

$$(\tilde{\theta}_4) \quad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_p)(\bigwedge_{j=1}^{p} Z(x_j) \Rightarrow (\exists x)(\bigwedge_{j=1}^{p} \neg E_i(x, x_j) \wedge Edge_i(x_1, x_2, \ldots, x_p, x)));$$

$$(\tilde{\theta}_5) \quad (\exists x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})(\bigwedge_{j=1}^{p=1} Z(x_j) \wedge \neg Edge_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}));$$

$(\tilde{\theta}_6)$ *для любых отображений* $f_1, f_2 : S \to S$ *выполняется*

$$(\forall x, x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})(E_1(x, x_1) \wedge Edge_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigwedge_{j=1}^{2}(E_j(f_j(x), f_j(x_1)) \wedge Edge_j(f_j(x_1), f_j(x_2), \ldots, f_j(x_{p+1})))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists! z)(\forall x)(Z(x) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^{2} E_j(xz, f_j(x))).$$

Полученный в работе результат позволяет доказать элементарную определимость [6] рассматриваемых автоматов в классе полугрупп, которая позволяет проанализировать взаимосвязь элементарных свойств этих автоматов и их полугрупп входных сигналов.

Литература

1. *Bretto A.* Hypergraph theory. An Introduction. Cham.: Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.
2. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994. 192 с.
3. *Khvorostukhina E.V., Molchanov V.A.* On problem of concrete characterization of universal automata // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38, no. 4. P. 664–669.
4. *Молчанов В.А., Хворостухина Е.В.* О задаче абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, № 2. С. 148–159.
5. *Khvorostukhina E. V., Molchanov V. A.* Universal hypergraphic automata representation by autonomous input symbols // Моделеривание и анализ информационных систем. 2018. Т. 25, № 5. С. 561–571.
6. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980. 416 с.

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

М. Ф. Насрутдинов, С. Н. Тронин
Казанский федеральный университет, Казань
sntrnn@gmail.com, marat.nasrutdinov@kpfu.ru

Кольца формальных матриц рассматриваются в работах многих авторов (см., например, [1, 2]). Мы рассматриваем новый класс колец формальных матриц, обладающий достаточно хорошими свойствами. В частности для них хорошо описываются центральные и обратимые элементы кольца.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, P — двусторонний идеал R, $n \geqslant 2$ — натуральное число. Обозначим через

$$B^{(n)}(R,P) = \{(x_{ij}) | x_{ij} \in B_{ij}\} = \begin{pmatrix} R/P & R/P & \dots & R/P \\ P/P^2 & R/P^2 & \dots & R/P^2 \\ P^2/P^3 & P/P^3 & \dots & R/P^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^{n-1}/P^n & P^{n-2}/P^n & \dots & R/P^n \end{pmatrix}$$

множество формальных матриц размера $n \times n$, где $B_{ij} = R/P^i$ при $i \leqslant j$, $B_{ij} = P^{i-j}/P^i$ при $i > j$, для любых $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Теорема 1. *На множестве $B^{(n)}(R,P)$ можно естественным образом определить операции сложения и умножения, превращающие его в ассоциативное кольцо с единицей.*

Пусть $X = (x_{ij})$ и $Y = (y_{ij})$ – элементы множества $B^{(n)}(R,P)$. Операция умножения вводится естественным образом по формуле умножения матриц

$$z_{ij} = \sum_k x_{ik} y_{kj}.$$

Распишем подробнее формулу. Рассмотрим i-тую строку X и j-тый столбец Y. Для наглядности воспользуемся матричной записью (верхний индекс k здесь обозначает принадлежность идеалу P^k, $P^0 = R$).

$$\begin{gathered}z_{ij} = (x_{i,1}^{i-1} + P^i, x_{i,2}^{i-2} + P^i, \ldots, x_{i,i-1}^{1} + P^i, x_{i,i}^{0} + P^i, x_{i,i+1}^{0} + P^i, \ldots, x_{i,n}^{0} + P^i)\cdot \\ \cdot(y_{1,j}^{0} + P^1, y_{2,j}^{0} + P^2, \ldots, y_{j-1,j}^{0} + P^{j-1}, y_{j,j}^{0} + P^j, y_{j+1,j}^{1} + P^{j+1}, \ldots, y_{n,j}^{n-l} + P^n)^t = \ . \\ = x_{i,1}^{i-1}y_{1,j}^{0} + x_{i,2}^{i-2}y_{2,j}^{0} + \ldots + x_{i,n}^{0}y_{n,j}^{n-j} + P^i\end{gathered}$$

Так как итоговая сумма берется по модулю P^i, то результат сложения элементов определен корректно. Осталось проверить принадлежность элемента z_{ij} к множеству B_{ij}. Необходимо показать, что $x_{i,1}^{i-1}y_{1,j}^{0} + x_{i,2}^{i-2}y_{2,j}^{0} + \ldots + x_{i,n}^{0}y_{n,j}^{n-l}$ принадлежит R при $i \leqslant j$ и P^{i-j} при $i > j$.

Первая часть утверждения тривиальна. Пусть $i > j$ и $i = j+k$. Тогда $j = i-k$ и необходимо проверить принадлежность идеалу P^k. Имеем

$$\begin{aligned}&x_{i,1}^{i-1}y_{1,j}^{0} + x_{i,2}^{i-2}y_{2,j}^{0} + \ldots + x_{i,n}^{0}y_{n,j}^{n-l} = \\ &\qquad x_{i,1}^{i-1}y_{1,j}^{0} + x_{i,2}^{i-2}y_{2,j}^{0} + \ldots + x_{i,i-k}^{k}y_{j,j}^{0} + x_{i,i-k+1}^{k-1}y_{j+1,j}^{1} + \ldots \\ &\qquad\qquad + x_{i,i-1}^{1}y_{i-1,j}^{i-1-j} + x_{i,i}^{0}y_{i,j}^{i-j} + \ldots + x_{i,n}^{0}y_{n,j}^{n-j}\end{aligned}$$

Учитывая, что $x_{i,k}^{\alpha}y_{k,j}^{\beta} \in P^{\alpha+\beta}$ и $P^{\alpha} \subset P^{\beta}$ при $\alpha > \beta$ получим принадлежность элемента идеалу P^k.

Пример. Рассмотрим кольцо целых чисел и простое число p. Кольцо $B^{(2)}(\mathbb{Z}, p\mathbb{Z})$ изоморфно кольцу $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$.

Это кольцо приведено в работе Бергмана [3] (см. также [4]) в качестве примера полулокального кольца, которое не вкладывается в кольцо матриц над коммутативным кольцом.

Теорема 2. *Соответствие* $P \mapsto B^{(n)}(R, P)$ *есть функтор из категории (решетки) идеалов* R *в категорию колец.*

В следующих теоремах описываются центральные и обратимые элементы кольца $B^{(n)}(R, P)$.

Теорема 3. *Центр кольца* $B^{(n)}(R, P)$ *состоит из “скалярных” матриц вида*

$$\begin{pmatrix} z+P & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z+P^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & z+P^n \end{pmatrix},$$

где элемент $z + P^n$ *лежит в центре кольца* R/P^n.

Теорема 5. *Группа обратимых элементов кольца* $B^{(n)}(R, P)$ *состоит из формальных матриц* (a_{ij}), *у которых по диагонали стоят обратимые элементы* $a_{ii} + P^i \in U(R/P^i)$.

Конструкция кольца естественным образом обобщается на модули. По любому левому R-модулю M строится множество $B^{(n)}(M, P)$ формальных $n\times n$-матриц, где на ij-м месте при $\leqslant j$ расположены элементы из M/P^iM, а при $i > j$ — элементы из $P^{i-j}M/P^iM$.

$$B^{(n)}(M,P) = \begin{pmatrix} M/PM & M/PM & \ldots & M/PM \\ PM/P^2M & M/P^2M & \ldots & M/P^2M \\ P^2M/P^3M & PM/P^3M & \ldots & M/P^3M \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P^{n-1}M/P^nM & P^{n-2}M/P^nM & \ldots & M/P^nM \end{pmatrix}$$

Теорема 6. *На множестве $B^{(n)}(M,P)$ можно естественным образом определить структуру левого $B^{(n)}(R,P)$-модуля. Соответствие $M \mapsto B^{(n)}(M,P)$ есть функтор из $R - Mod$ в категорию левых $B^{(n)}(R,P)$-модулей.*

Литература

1. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Кольца формальных матриц и модули над ними. – М.: МЦНМО. – 2017. – 192 с.

2. Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1199–1214.

3. Bergman G. M. Some examples in P.I. ring theory // Israel J. Math. – 1974. – V. 18. – P. 257–277.

4. Climent J.-J., Navarro P., Tortosa L. On the arithmetic of the endomorphisms ring End($Z_p \oplus Z_{p^2}$) // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. – 2011. – V. 22, Is. 2. – P. 91–108.

К ТЕОРИИ НЕ ПРОСТЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. В. Путилов
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского,
Брянск
algebra.bgu@yandex.ru

Пусть p — простое число. По О. Кегелю [1] подгруппу H группы G называют квазисубнормальной, если $H \cap G_p = H_p$ для любого $p \in \pi(G)$ и каждой силовской p-подгруппы G_p из G.

Теорема 1. *Если в конечной pd-группе каждая максимальная подгруппа квазисубнормальна или p-разложима, то группа не проста.*

Теорема 2. *Пусть S — 2-разложимая максимальная подгруппа конечной группы G и $S_2 \in Syl_2(G)$. Если неквазисубнормальные 2-неразложимые максимальные подгруппы в G имеют примарные индексы, то G разрешима.*

Теорема 2 усиливает теорему 1.1.2 из [2].

Литература

1. Kegel O. Sylow Gruppen und Subnormalteiler endlichen Gruppen // Math. Z. – 1962. – V. 78. – P. 205–221.

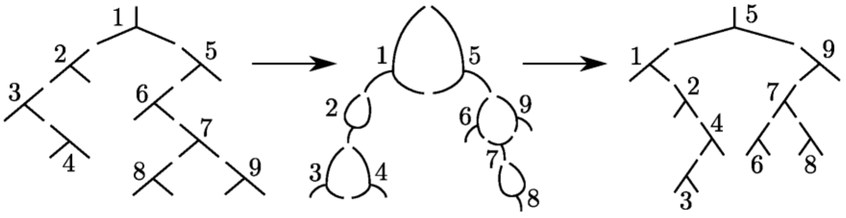
2. Путилов С.В. К теории конечных групп. – Брянск: Группа компаний «Десяточка». – 2009.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ДЛЯ ПЕРЕСЧЕТОВ ИНЦИДЕНТНОСТЕЙ ТРИАД ПЛОСКОГО КУБИЧЕСКОГО ДЕРЕВА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ДОНАХЬЮ

И. А. Пушкарев, В. А. Бызов
Вятский государственный университет, Киров
vbyzov@yandex.ru

Преобразование Донахью — преобразование специального вида, действующее на плоских деревьях (или, более общо, на комбинаторных интерпретациях чисел Каталана, см., например, [1]).

В данной работе плоские кубические деревья рассматриваются как структуры, подобные бинарным деревьям (см. [2]), состоящие из триад — структурных единиц, образованных из вершины, не являющейся листом, и трёх половинок рёбер (см. рис. 1).



Дерево T Дерево $\tau(T)$

Рис. 1. Преобразование Донахью для дерева, разбитого на триады

В работе предложена алгебраическая структура, позволяющая формально описать преобразование Донахью. Структура представляет собой симметрическую инверсную полугруппу, действующую на множестве триад, из которых состоит дерево, снабжённую одной дополнительной унарной операцией, называемой (итеративным) замыканием.

Напомним, что симметрическая инверсная полугруппа $(J(A), \circ, \cdot^{-1})$ (см., например, [3]) на множестве A есть множество $J(A)$ всех частично определённых инъективных отображений $A \to A$ с операцией обычной композиции $\circ$. При этом инверсный элемент α^{-1} к частично определённой инъекции $\alpha : A \to A$ строится, неформально говоря, обращением всех стрелок.

Определение 1. Пусть T — плоское кубическое дерево с множеством триад A. Инцидентностью $\sigma(T)$, соответствующей дереву T, называется пятёрка $(r, \nearrow, \nwarrow, \searrow, \swarrow)$, где $r \in A$ — корневая триада, $\nearrow$, $\nwarrow$, $\searrow$, $\swarrow$ $\in J(A)$ — частично определённые инъекции, реализующие отображения «правый отец», «левый отец», «правый сын», «левый сын» соответственно.

Удобно считать дерево $\widetilde{T}$, являющееся образом дерева T под действием преобразования Донахью, состоящим из тех же самых триад, что и дерево T, но связанных между собой другой инцидентностью, которую можно явно вычислить в рамках некоторой алгебраической структуры.

Однако стандартных операций $\circ$ и $\cdot^{-1}$ для этого оказывается недостаточно: приходится ввести в рассмотрение ещё одну (унарную) операцию, действующую на множестве частично определённых инъекций $J(A)$, названную (итеративным) *замыканием.*

Определение 2. Пусть $\alpha : A \to A$ — элемент множества $J(A)$ с областью определения $D(\alpha)$, областью значений $I(\alpha)$ и множеством неподвижных точек

$E(\alpha) \subseteq D(\alpha) \cap I(\alpha)$. Его итеративным замыканием называется частично определённое инъективное отображение $\alpha^* : A \to A$, определённое посредством правила

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in E(\alpha), \\ y, \text{ если } x \dashrightarrow y, \end{cases}$$

где запись $x \dashrightarrow y$ равносильна тому, что $x \to \alpha(x) \to \alpha^2(x) \to \ldots \to \alpha^n(x) = y$ и $y \notin D(\alpha)$. Дополнительно будем считать, что $x \dashrightarrow x$, тогда и только тогда, элемент x не входит в $D(\alpha) \cup I(\alpha)$.

Отображение θ^* не определено для элементов A, входящих в $I(\alpha) \backslash E(\alpha)$.

В терминах получившейся алгебраической структуры $(J(A), \circ, \cdot^{-1}, \cdot^*)$ удаётся описать инцидентность $\sigma(\widetilde{T})$ образа $\widetilde{T}$ дерева T под действием преобразования Донахью.

Именно, имеет место

Теорема. *Пусть T и $\widetilde{T}$ — два дерева с общим набором триад S, $\widetilde{T} = \tau(T)$ — образ дерева под действием преобразования Донахью. Тогда для любых $x, y \in S$ равносильны условия:*

A. $x = \searrow(y)$ *в дереве* $\widetilde{T} \Leftrightarrow x = (\searrow^* \circ \swarrow)(y)$ *в дереве* T;

B. $x = \nwarrow(y)$ *в дереве* $\widetilde{T} \Leftrightarrow x = (\nearrow \circ \nwarrow^*)(y)$ *в дереве* T;

C. $x = \swarrow(y)$ *в дереве* $\widetilde{T} \Leftrightarrow x = \nwarrow(y)$ *в дереве* T;

D. $x = \nearrow(y)$ *в дереве* $\widetilde{T} \Leftrightarrow x = \searrow(y)$ *в дереве* T.

Кроме того, если $s_0 \in S$ — корневая триада дерева $\widetilde{T}$, то корневая триада дерева T есть $\nwarrow^*(s_0)$.

Литература

1. Пушкарев И. А., Бызов В. А. Преобразование Донахью: элементарный подход // Записки научных семинаров ПОМИ. 2013. Т. 411. С. 148—177.
2. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005. 768 с.
3. Lipscomb S. Symmetric Inverse Semigroups. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996. 166 p.

ФОРМАЦИИ И ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЯ УНАРНЫХ АЛГЕБР

А. Л. Расстригин

Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград

rasal@fizmat.vspu.ru

Псевдомногообразием [1, 2] называется класс конечных алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и конечных прямых произведений. В роли алгебр могут выступать, например, полугруппы. Так псевдомногообразия полугрупп играют значительную роль в алгебраической теории автоматов благодаря их связи с регулярными языками [1, 3]. С другой стороны, псевдомногообразия возникают при описании структурных свойств унарных алгебр [4], т. е. алгебр, все основные операции которых унарные.

Понятие формации является более общим и находит применение как в теории формальных языков [3], так и, в большей степени, в теории групп [5]: *формацией* называется класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Первоначально формации были использованы именно для изучения конечных групп, а впоследствии [5] были рассмотрены формации алгебраических систем. Наряду с формациями групп разными авторами изучались формации произвольных алгебр, а также формации конкретных типов алгебраических систем. Формации как классы алгебраических систем обладают схожими с многообразиями свойствами (структурными и синтаксическими описаниями), но в отличие от многообразий могут состоять только из конечных алгебр.

Как видно из определения, всякая формация, которая состоит из конечных алгебр и замкнута относительно подалгебр, является псевдомногообразием. В общем случае, как известно [6], замкнутости относительно взятия гомоморфных образов и произвольных подпрямых произведений достаточно для наследственности класса, но если брать только конечные подпрямые произведения, то это не всегда так — не всякая формация является наследственной. К примеру, порожденная простой неабелевой группой G формация состоит из конечных прямых произведений копий группы G и не содержит ее подгрупп [7, глава II, 2.13].

В настоящем сообщении показывается, что если все основные операции рассматриваемых алгебр являются унарными, то понятия формации и псевдомногообразия совпадают:

Теорема 1. *Каждая формация конечных унарных алгебр является псевдомногообразием.*

Унарная алгебра называется *коммутативной*, если любые две её операции перестановочны, т. е. являются эндоморфизмами этой алгебры.

Теорема 2. *Каждая формация коммутативных унарных алгебр является наследственной формацией.*

Литература

1. Eilenberg S. Automata, languages, and machines. Vol. B. — Academic Press, New York, 1976.
2. Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // Journal of Algebra. 1985. Vol. 92, no. 1. P. 104–115.
3. Ballester-Bolinches A., Pin J.-É., Soler-Escrivà X. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's theorem revisited // Forum Mathematicum. 2012. Vol. 26, no. 6. P. 1731–1761.
4. Petković T., Ćirić M., Bogdanović S. Decompositions of automata and transition semigroups // Acta Cybernetica. 1998. Vol. 13. P. 385–403.
5. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989.
6. Когаловский С. Р. К теореме Биркгофа // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, № 5. С. 206–207.
7. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. De Gruyter Expositions in Mathematics no. 4. — Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

ОПИСАНИЕ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК СО СЛАБЫМ СВОЙСТВОМ КО-НАКРЫТИЙ

В. В. Римацкий
Сибирский Федеральный Университет, Красноярск
Gemmeny@rambler.ru

Известно, что допустимые правила вывода могут существенно усилить дедуктивную силу заданной логики. В этой работе мы показываем, что допустимые правила позволяют также описать некие тонкие семантические свойства логики. А именно, заданная логика над $S4$ имеет слабое свойство ко-накрытий если, и только если в ней допустимы определенные правила вывода.

Говорим, что логика λ, расширяющая логику $S4$, имеет **слабое свойство ко-накрытий над $S4$ (weak co-cover property)**, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathcal{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F}$, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup_{c\in\mathcal{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом. Логики, обладающие этим свойством, будем называть WCP-логиками над $S4$.

Правило вывода $\alpha_1(p_1,\dots,p_n),\dots,\alpha_k(p_1,\dots,p_n)/\beta(p_1,\dots,p_n)$ называется *допустимым* в логике L, если для любых формул $\delta_1,\dots,\delta_n$ из $(\forall j \ \ \alpha_j(\delta_1,\dots,\delta_n)\in \in L)$ следует $\beta(\delta_1,\dots,\delta_n)\in L$.

Для всех чисел $n>1,\ 1\leqslant i,j\leqslant n;\ n\in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} \Diamond\pi_i;$$

$$A_{n,1} := \Box\big[\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}(p_i\to\neg\Diamond q)\big]; \quad B := q\vee\neg\Diamond q.$$

Определим также для натуральных $n>1$ последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1}\wedge\neg(A_n\wedge B)\big)}{\Box\neg A_n};\ n=2,3,\dots.$$

Теорема 1. *Пусть финитно аппроксимируемая логика логика λ расширяет логику $S4$. Все правила $\mathcal{R}_n$, $n>1$, $n\in N$, допустимы в λ если и только если λ имеет слабое свойство ко-накрытий.*

Литература

1. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, New-York – Amsterdam:Elsevier Sci. Publ. – 1997. – V. 136.

О СТРУКТУРЕ ПЕРЕЧИСЛИМЫХ СТЕПЕНЕЙ ГЕНЕРИЧЕСКОЙ СВОДИМОСТИ

А. Н. Рыбалов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
alexander.rybalov@gmail.com

Генерический подход к алгоритмическим проблемам был предложен Каповичем, Мясниковым, Шпильрайном и Шуппом в [5]. В рамках этого подхода изучается поведение алгоритмов на множестве “почти всех” входов (это множество называется генерическим), игнорируя поведение алгоритма на остальных входах, на которых алгоритм может работать медленно или вообще не останавливаться. Джокуш и Шупп в [4] ввели аналог тьюринговой сводимости для генерической вычислимости. Чолак и Игуса в [1–3] изучили проблемы существования минимальных степеней (не обязательно перечислимых) и минимальных пар относительно генерической сводимости и дали условное решение этой проблемы по модулю некоторого утверждения о структуре степеней генерической сводимости. В данном докладе приводятся результаты о структуре перечислимых степеней эффективной версии генерической сводимости Джокуша-Шуппа.

Для любого подмножества $S \subseteq \omega$ определим следующую последовательность

$$\rho_n(S) = \frac{|\{x : x \leqslant n,\ x \in S\}|}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Асимптотической плотностью S назовём предел (если он существует)

$$\rho(S) = \lim_{n \to \infty} \rho_n(S).$$

Множество S называется *пренебрежимым*, если $\rho(S) = 0$.

Алгоритм $\mathcal{A} : \omega \to \omega \cup \{?\}$ называется *генерическим*, если

A. $\mathcal{A}$ останавливается на всех входах из ω;

B. множество $\{x \in \omega : \mathcal{A}(x) = ?\}$ является пренебрежимым.

Множество $S \subseteq \omega$ называется *генерически разрешимым*, если существует генерический алгоритм, вычисляющий его характеристическую функцию. Иначе множество называется *генерически неразрешимым.*

Пусть A — произвольное множество натуральных чисел. *Генерическим оракулом* множества A называется функция $\varphi_A : \omega \to \{0, 1, ?\}$ такая, что

A. Множество $\{x : \varphi_A(x) =?\}$ пренебрежимо.

B. $\forall x \in \omega \ \ \varphi_A(x) = 1 \ \Rightarrow \ x \in A$.

C. $\forall x \in \omega \ \ \varphi_A(x) = 0 \ \Rightarrow \ x \notin A$.

Множество $A \subseteq \omega$ *генерически сводится по Тьюрингу* к множеству $B \subseteq \omega$, если существует машина M с командами обращения к оракулу такая, что для любого генерического оракула φ_B генерический алгоритм M^{φ_B} вычисляет характеристическую функцию A. Обозначается это $A \leqslant_{gT} B$.

Будем писать $A \equiv\, _{gT} B$, если $A \leqslant_{gT} B$ и $B \leqslant_{gT} A$. Определим также генерическую тьюрингову степень множества A как $d_{gT}(A) = \{B \subseteq \omega : B \equiv\, _{gT} A\}$. Генерическая тьюрингова $\mathbf{a}$ степень перечислима, если содержит хотя бы одно перечислимое множество. Будем писать, что $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$, если существуют $A \in \mathbf{a}$ и $B \in \mathbf{a}$ такие, что $A \leqslant_{gT} B$. Аналогично определяется отношение $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Все генерически разрешимые множества образуют одну генерическую тьюрингову степень, которая обозначается $\mathbf{0}$. Для любой генерической тьюринговой степени $\mathbf{a}$ имеет место $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{a}$.

Перечислимое множество A будем называть *gT-полным*, если для любого перечислимого B имеет место $B \leqslant_{gT} A$. Соответствующая степень называется *полной.* Будем называть генерическую тьюрингову перечислимую степень $\mathbf{a}$ *максимальной*, если не существует неполной генерической тьюринговой перечислимой степени $\mathbf{b}$ такой, что $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Ненулевая генерическая тьюрингова перечислимая степень $\mathbf{a}$ называется *минимальной*, если не существует такой генерической тьюринговой перечислимой степени $\mathbf{b}$ что $\mathbf{0} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$.

Теорема. *Для перечислимых степеней генерической тьюринговой сводимости имеет место следующее:*

A. Существуют полные генерические перечислимые степени.

B. Существуют несравнимые генерические тьюринговы перечислимые степени.

C. Не существует максимальной генерической перечислимой степени.

D. Не существует минимальной генерической тьюринговой перечислимой степени.

Доказан генерический аналог классической теоремы Сакса о разложении.

Теорема. *Пусть A — генерически неразрешимое перечислимое множество. Тогда $A = B_0 \cup B_1$, где B_0, B_1 — непересекающиеся перечислимые множества такие, что $A \nleqslant_{gT} B_0$ и $A \nleqslant_{gT} B_1$.*

Литература

1. Cholak P., Igusa G. Bounding a density-1 and quasiminimality in the generic degrees // The Journal of Symbolic Logic. – 2017. – V. 82, Is. 3. – P. 931–957.

2. Igusa G. Nonexistence of minimal pairs for generic computability // Journal Symbolic Logic. – 2013. – V. 78, Is. 2. – P. 511–522.

3. Igusa G. The generic degrees of density-1 sets and a characterization of the hyperarithmetic reals // Journal Symbolic Logic. – 2015. – V. 80. – P. 1290–1314.

4. Jockusch C., Schupp P. Generic computability, Turing degrees, and asymptotic density // Journal of the London Mathematical Society. – 2012. – V. 85, Is. 2. – P. 472–490.

5. Kapovich I., Myasnikov A., Schupp P., Shpilrain V. Generic-case complexity, decision problems in group theory and random walks // J. Algebra. – 2003. – V. 264, Is. 2. – P. 665–694.

ЛОГИКА ЧАСТИЧНОЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. С. Секорин
Тверской госуниверситет, Тверь
vssekorin@gmail.com

Мы будем рассматривать обогащения языка логики первого и второго порядков оператором частичной фиксированной точки. Как известно, логика первого порядка не позволяет выразить многие простые вещи, например, транзитивное замыкание. Логика второго порядка гораздо более выразительна, но с практической точки зрения она имеет недостаток: отсутствие явного способа нахождения предикатов, находящихся под кванторами. Существуют другие расширения логики первого порядка, не имеющие этого недостатка. В частности, к ним относятся различные операторы фиксированных точек, для них способ нахождения значения явно задан в определении. Мы рассматриваем самый универсальный из них — оператор частичной фиксированной точки (PFP). Преобразование формулы от логики второго порядка к PFP-логике упрощает вычисление значения формулы. Главный наш результат состоит в том, что по любой формуле логики первого и второго порядков можно непосредственно построить эквивалентную ей формулу первого порядка с всего лишь одним оператором частичной фиксированной точки.

Определение. *Формулой* PFP*-логики называется формула, построенная по правилам классической логики с использованием оператора частичной фиксированной точки* PFP*: если* $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ *— формула со свободными переменными* $\bar{x}$ *и* $\bar{y}$*, содержащая несигнатурный предикатный символ* Q*, то* $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)$ *— формула исходной сигнатуры, содержащая свободные переменные* $\bar{x}$ *и* $\bar{y}$*. При этом длина* $\bar{y}$ *совпадает с местностью* Q*. Пусть* $\mathfrak{A}$ *— это алгебраическая система. Зафиксируем* $\bar{d} \in |\mathfrak{A}|$ *— значения переменных* $\bar{x}$*. Пусть*

$$Q_0^{\bar{d}} = \varnothing; \quad Q_{i+1}^{\bar{d}} = \{\bar{y} \in |\mathfrak{A}| \mid (\mathfrak{A}, Q_i^{\bar{d}}) \models \varphi(\bar{d}, \bar{y})\},$$

для $i \in \omega$*.*

Если существует такой $n \in \omega$*, для которого* $Q_n^{\bar{d}} = Q_{n+1}^{\bar{d}}$*, то будем считать формулу* $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)(\bar{d}, \bar{y})$ *истинной при* $\bar{y} \in Q_n^{\bar{d}}$ *и ложной при* $\bar{y} \notin Q_n^{\bar{d}}$*. Если же указанного числа* n *не существует, то формулу считаем ложной.*

Сначала мы демонстрируем, что к нужному виду можно преобразовать любую формулу PFP-логики первого порядка.

Теорема 1. *Если алгебраическая система конечна и имеет отношение линейного порядка, то для любой формулы* PFP*-логики с кванторами первого порядка можно построить эквивалентную формулу вида*

$$(M\bar{y}_1)\,\mathrm{PFP}_{Q(\bar{y}_2)}(\psi), \tag{$*$}$$

где M *— кванторы первого порядка, а* ψ *— формула логики первого порядка.*

Доказательство проводится индукцией по построению формулы. Нам достаточно рассмотреть четыре случая построения формулы: отрицание, конъюнкция, вложенный PFP-оператор и кванторы. Из булевых связок мы используем только отрицание и конъюнкцию, так как через них можно выразить все остальные. Разобрав все эти случаи и показав, что в каждом из них формула может быть преобразована к виду $(*)$, мы получим, что все операторы частичной фиксированной точки можно заменить единственным.

Далее мы распространяем теорему 1 на кванторы второго порядка.

Теорема 2. *Если алгебраическая система конечна и имеет отношение линейного порядка, то для любой формулы* PFP*-логики с кванторами первого и второго порядков можно построить эквивалентную формулу вида*

$$(M\bar{y}_1)\,\mathrm{PFP}_{Q(\bar{y}_2)}(\psi),$$

где M — кванторы первого порядка, а ψ — формула логики первого порядка.

Для доказательства данной теоремы мы заменяем каждую подформулу видов $(\exists Q)\varphi$ и $(\forall Q)\varphi$ на оператор частичной фиксированной точки. Таким образом мы получим формулу с кванторами только первого порядка, но несколькими PFP-операторами. После этого можем воспользоваться теоремой 1, чтобы преобразовать формулу к указанному виду.

Литература

1. Дудаков С.М. О безопасности рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 4. С. 71–80.
2. Libkin L. Elements of Finite Model Theory. Springer, 2004.

ЗАМЕТКИ О ГЕНЕРИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ

А. В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва

slvstv@iitp.ru

Большое внимание уделяется изучению *генерических* алгоритмов (Рыбалов, 2017 и 2018). Они служат важным частным случаем эвристических алгоритмов, когда на почти любом входе результатом работы алгоритма служит правильный ответ, но на пренебрежимо малой доле входов (то есть доле, стремящейся к нулю при увеличении длины входа) алгоритм может отказаться от вычислений, выдавая явно сообщение об отказе. Напротив, отсутствие быстрого генерического алгоритма служит для обоснования надёжности криптографических методов (Рыбалов, 2016).

В этой работе языком называется непустое множество слов конечной длины над алфавитом $\{0, 1\}$. Язык распознаётся генерическим алгоритмом, если алгоритм правильно распознаёт те входы, на которых не происходит отказа от вычисления. Очевидная трудность связана с тем, что последовательное выполнение всюду определённого и генерического алгоритмов полиномиального времени может дать тривиальный генерический алгоритм, который либо отвергает вход, либо отказывается от вычислений. Например, посредством набивки (padding), каждая задача распознавания сводится за полиномиальное время (по Карпу) к задаче, которая разрешима (тривиальным) генерическим алгоритмом полиномиального времени.

Определение 1. Генерический алгоритм распознавания назовём нетривиальным, если существуют бесконечное множество входов, которые он принимает, и бесконечное множество входов, которые он отвергает, не отказываясь от вычисления на этих входах.

По аналогии с определением неуниформных классов языков $P/poly$ и $NP/poly$ определяются неуниформные генерические алгоритмы.

Определение 2. Язык распознаётся неуниформным генерическим алгоритмом полиномиального времени, если для каждой длины входа n существует такая пара булевых схем полиномиального от n размера, что если первая схема даёт ответ 1, то вход принимается, когда вторая схема даёт ответ 1, и отвергается, когда вторая схема даёт ответ 0. При этом доля входов длины n, на которых первая схема даёт ответ 0, стремится к нулю с ростом n. Ответ 0 первой схемы означает, что алгоритм отказывается от вычислений. Если обе булевы схемы вычислимы за полиномиальное время, это определение эквивалентно определению генерического алгоритма полиномиального времени.

Теорема 1. *Если язык принадлежит пересечению классов* $coNP \cap NP/poly$, *то он сводится за полиномиальное время к языку, распознаваемому нетривиальным неуниформным генерическим алгоритмом полиномиального времени.*

Доказательство теоремы 1 использует набивку (padding); она не даёт практически полезного алгоритма. Однако теорема 1 устанавливает связь вычислительной сложности (в худшем случае) с генерической сложностью (в типичном случае).

Перейдём к нетривиальным генерическим алгоритмам полиномиального времени для решения прикладных задач. Точка на вещественной поверхности называется эллиптической, если в её окрестности поверхность аппроксимируется эллиптическим параболоидом. Распознавание эллиптических точек на поверхности играет важную роль в системах автоматизированного проектирования. В частности, эллиптических точек нет на широко используемых линейчатых поверхностях (Vršek, 2018). Примерами линейчатых поверхностей служат цилиндры и зонтик Уитни.

Понятие эллиптической точки обобщается для вещественных гиперповерхностей произвольной размерности. На графике многочлена эллиптическая точка соответствует точке из области определения, в которой матрица вторых частных производных этого многочлена знакоопределена.

Многочлены отождествляются с последовательностью рациональных дробей, числитель и знаменатель которых записаны в двоичной системе.

Теорема 2. *Дано нечётное целое число* $d \geqslant 3$. *Множество многочленов степени* d *от двух переменных над полем рациональных чисел, графики которых содержат эллиптические точки, распознаётся нетривиальным генерическим алгоритмом полиномиального времени.*

Ограничение на степень существенно. Графиком линейной функции от двух переменных служит плоскость, не имеющая эллиптических точек. Если же степень равна двум, то существование эллиптической точки распознаётся детерминированным алгоритмом за полиномиальное время.

Теорема 3. *Дано нечётное целое число* $d \geqslant 3$. *Множество многочленов степени* d *от трёх переменных над полем рациональных чисел, графики которых содержат эллиптические точки, распознаётся нетривиальным генерическим алгоритмом полиномиального времени.*

Общая идея доказательства теорем 2 и 3 состоит в том, что для почти всех рассматриваемых многочленов график содержит эллиптическую точку. (Фраза “для почти всех” означает: “для всех, кроме некоторой части множества нулей некоторого многочлена, не равного тождественно нулю”.) Более того, для почти всех таких многочленов эллиптическая точка на графике может быть найдена за полиномиальное время; это наиболее трудная часть доказательства. С другой стороны, существуют легко распознаваемые многочлены, графики которых не содержат эллиптических точек. Например, таков любой многочлен, который линейной заменой переменных приводится к многочлену от одной переменной. Его графиком служит цилиндр. Также эллиптических точек нет на обезьяньем седле. Оценка доли входов, на которых алгоритм отказывается от вычисления, использует лемму Шварца–Зиппеля (Schwartz, 1980).

Генерический алгоритм сначала пытается найти эллиптическую точку. Если это удаётся, то вход принимается. Иначе проверяется принадлежность многочлена к известным семействам многочленов, чьи графики не содержат эллиптических точек. Если это удаётся, то вход отвергается. Иначе выдаётся уведомление об отказе от вычисления.

Литература

1. Рыбалов А.Н. О генерической амплификации рекурсивно перечислимых множеств // Алгебра и логика. 2018. Т. 57. № 4. С. 448–455. https://doi.org/10.17377/alglog.2018.57.403.

2. Рыбалов А.Н. О генерической сложности проблемы дискретного логарифма // Прикладная дискретная математика. 2016. № 3(33). С. 93–97. https://doi.org/10.17223/20710410/33/8.

3. Рыбалов А.Н. О генерической сложности проблемы разрешимости систем диофантовых уравнений в форме Сколема // Прикладная дискретная математика. 2017. № 37. С. 100–106. https://doi.org/10.17223/20710410/37/8.

4. Schwartz J.T. Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities // Journal of the ACM. 1980. V. 27. no. 4. P. 701–717. https://doi.org/10.1145/322217.322225.

5. Vršek J. Contour curves and isophotes on rational ruled surfaces // Computer Aided Geometric Design. 2018. V. 65. P. 1–12. https://doi.org/10.1016/j.cagd.2018.06.006.

ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С MAX-СЛОЖЕНИЕМ

В. В. Сидоров

Вятский государственный университет, г. Киров

sedoy_vadim@mail.ru

Полукольцом называется алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, где $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид с нейтральным элементом нуль 0, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид с нейтральным элементом единица 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ для всех $a \in S$. Множество $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел с операциями сложения и умножения является полукольцом.

Заменим в $\mathbb{R}_+$ обычное сложение на max-сложение $\vee$: $a \vee b = \max\{a, b\}$. Получим полукольцо ${\mathbb{R}_+}^{\vee}$. Множество $C^{\vee}(X)$ непрерывных ${\mathbb{R}_+}^{\vee}$-значных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечными операциями max-сложения и умножения функций является полукольцом.

Классическая теорема Гельфанда–Колмогорова [1] утверждает, что для любого тихоновского пространства X спектр кольца $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βX. В частности, топология произвольного компакта X определяется кольцом $C(X)$.

Этот результат был распространен Хьюиттом [2] на действительно-компактные пространства X, называемые теперь хьюиттовскими (топологическое пространство называется хьюиттовским, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени прямой $\mathbb{R}$). Важность хьюиттовских пространств в теории колец $C(X)$ и связанных с ними алгебраических систем непрерывных функций состоит в том, что для любого топологического пространства X найдутся тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$ такие, что кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $\nu\tau C(X)$ канонически изоморфны. Хьюитт доказал, что с точностью до гомеоморфизма хьюиттовских пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$ существуют лишь тождественные изоморфизмы колец $C(X)$ и $C(Y)$.

Кольцо $C(X)$ является $\mathbb{R}$-алгеброй. Непустое подмножество A кольца $C(X)$ будет его подалгеброй, если $f+g, fg, rf \in A$ для любых $f, g \in C(X)$ и $r \in \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathbb{A}(C(X))$ решетку $\mathbb{R}$-подалгебр кольца $C(X)$ относительно включения. По аналогии назовем подмножество $A \subseteq C^{\vee}(X)$ подалгеброй, если $f \vee g, fg, rf \in A$ для всех $f, g \in A$ и $r \in {\mathbb{R}_+}^{\vee}$. Таким образом, мы будем употреблять термин «подалгебра» в более широком смысле, нежели кольцо, одновременно являющееся векторным пространством. Подалгеброй в $C^{\vee}(X)$ будет, например, множество функций-констант ${\mathbb{R}_+}^{\vee}$ и множество функций $M_x = \{f \in \in C^{\vee}(X) \colon f(x) = 0\}$. Обозначим через $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ решетку подалгебр полукольца $C^{\vee}(X)$ относительно включения $\subseteq$, а через через $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$ — ее подрешетку подалгебр с единицей.

В 1997 г. Е. М. Вечтомов заметил [3], что в теореме Хьюитта кольцо $C(X)$ можно заменить на решетку $\mathbb{A}(C(X))$. Другими словами, для любых хьюиттовских пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y. Отсюда, в частности, следует, что для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ влечет изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$.

В работе [4] мы перенесли результат Е. М. Вечтомова на случай решеток подалгебр $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$. Напомним, что центральными результатами [4] являются две теоремы. Согласно первой топология любого хьюиттовского пространства X определяется как решеткой $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ подалгебр полукольца $C^{\vee}(X)$, так и ее подрешеткой $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$ подалгебр с единицей. Вторая теорема является следствием первой и говорит нам о том, что для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}(C^{\vee}(Y))$ или $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(Y))$ влечет изоморфизм полуколец $C^{\vee}(X)$ и $C^{\vee}(Y)$. Обратное утверждение, как показывает следующий пример, неверно.

Пример. Если $X = \{x, y\}$ — дискретное пространство, то $C^{\vee}(X) = {\mathbb{R}_+}^{\vee} \times \times {\mathbb{R}_+}^{\vee}$. Правило $\psi \colon (a, b) \mapsto (a, b^2)$ задает автоморфизм полукольца $C^{\vee}(X)$, который не индуцирует автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$, так как $\psi \colon (2,2) \mapsto (2,4) \notin {\mathbb{R}_+}^{\vee}$, т. е. $\psi({\mathbb{R}_+}^{\vee}) \neq {\mathbb{R}_+}^{\vee}$ (можно доказать, что автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$ оставляют подалгебру констант ${\mathbb{R}_+}^{\vee}$ на месте).

Возникают следующие естественные вопросы.

1. Как устроены изоморфизмы полуколец $C^{\vee}(X)$, которые индуцируют изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$?

2. Как устроены изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$? В частности, существуют ли изоморфизмы этих решеток, которые не индуцируются изоморфизмами полуколец $C^{\vee}(X)$?

Нами получен исчерпывающий ответ на поставленные вопросы.

Литература

1. Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Докл. АН СССР. – 1939. – Т. 22., №1. – С. 11–15.
2. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 64. – P. 45–99.
3. Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62., Вып. 5.– С. 687–693.
4. Sidorov V. V. Determinability of semirings of continuous nonnegative functions with max-plus by the lattices of their subalgebras // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40. – P. 90–100.

О ГРУППАХ С КОНЕЧНЫМ РЕГУЛЯРНЫМ АВТОМОРФИЗМОМ

А. И. Созутов

Сибирский федеральный университет, Красноярск

sozutov_ ai@mail.ru

Исследуются бесконечные периодические группы $G = F \leftthreetimes \langle a \rangle$, в которых $C_F(a) = 1$ и все подгруппы вида $L_t = \langle a, a^t \rangle$ $(t \in F^{\#})$ конечны; назовем F *ядром* группы G, а внешний автоморфизм $f \to f^a$ группы F — *конечным регулярным* автоморфизмом.

Как следует из указанных условий каждая из подгрупп L_t является полупрямым произведением $F_t \leftthreetimes \langle a \rangle$, элемент a действует (сопряжением) на ядре $F_t = F \cap L_t$ регулярно (без неподвижных точек [1][стр. 65], свободно), элемент t принадлежит F_t и элементы a, at сопряжены в L_t; в частности, a — расщепляемый автоморфизм группы F.

Когда порядок индуцированного на F_t автоморфизма $a_t : f \to f^a$ простое число p, ядро F_t нильпотентно класса $\leqslant h(p)$ (теоремы Томпсона [2] и Хигмена [3]), а в случае составного $|a_t|$, ядро F_t разрешимо [1][следствия классификации, теорема 1.48].

Рабочая гипотеза наших исследований: *Периодическая группа с конечным регулярным автоморфизмом четного порядка локально конечна (и локально разрешима).*

В голоморфе группы Новикова-Адяна $B(m, n)$ (n — нечетное число $\geqslant 665$) [4] есть бесконечные подгруппы вида $G = F \leftthreetimes \langle a \rangle$, в которых a индуцирует расщепляемый регулярный автоморфизм порядка n группы (ядра) F, и в которых a индуцирует регулярный автоморфизм порядка $2m$ группы F, здесь m — нееденичный делитель числа n, так-что условие конечности регулярного автоморфизма в гипотезе не лишнее. В частности, существуют не локально конечные периодические группы с регулярным автоморфизмом порядка 3 и порядка 6. Заметим, что любая бесконечная подгруппа группы $B(m, n)$ не допускает регулярных автоморфизмов порядка 2^k.

Итак, пусть далее $G = F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — периодическая группа, $C_F(a) = 1$, все подгруппы $L_t = \langle a, a^t \rangle$ $(t \in F^{\#})$ конечны и, как показано выше, $L_t = \langle a, t \rangle$, $aF = a^F$. Известно, что в случае $|a| = 2$ группа F абелева, а в случае $|a| = 3$ —

нильпотентна. В случае $|a| = 4$ гипотеза оказалась эквивалентной вопросу П. В. Шумяцкого 12.100 из [5]:

12.100. *Всякая ли периодическая группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 является локально конечной?*

В случае $|a| = p$, p – нечетное простое число, получаем вопрос В.П. Шункова 6.56 [5]:

6.56. *Пусть $G = F \cdot \langle a \rangle$ — группа Фробениуса, причем дополнение $\langle a \rangle$ имеет простой порядок. Если G бинарно конечна, то будет ли она локально конечной? Если группы $\langle a, a^g \rangle$ конечны для всех $g \in G$, то будет ли ядро F локально конечной группой? Комментарий 1995 г.: этот вопрос равносилен вопросу 10.74.*

В наших исследованиях $|a| = 2p$, где p — простое число. Исследования опираются на следующие известные результаты. Д. Горенстейн и И. Херстейн [6] доказали, что конечная группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 разрешима, а ее коммутант нильпотентен. Л.Г. Ковач [7] установил, что второй коммутант локально конечной группы, допускающей регулярный автоморфизм порядка 4, содержится в ее центре. Разрешимость конечных групп с регулярным автоморфизмом a порядка $2p$ и некоторыми ограничениями на $C(a^p)$ доказана Б. Фишером [8] (см. [1][стр. 123]). Е.И. Хухро доказал нильпотентность локально разрешимой группы с расщепляющим автоморфизмом порядка p и ограничил ее класс нильпотентности [9, 10].

Обозначим $a^p = i$, $C = C_F(i)$ и $N_i = \{f \in F \mid f^i = f^{-1}\}$.

Теорема 1. *Если $|a| = 4$ и для любого неединичного элемента $b \in N_i$ множество b^C конечно, то группа F локально конечна. В частности, группа F локально конечна, когда множество N_i не содержит бесконечных элементарных абелевых подгрупп.*

В теоремах 2-3 $|a^2| = p$ — простое нечетное число и группа G удовлетворяет следующему дополнительному условию из [11]:

(*) для любого элемента $t \in F \setminus C$ подгруппа $\langle i, a^{2t} \rangle$ является конечной группой Фробениуса с неинвариантным множителем четного порядка, содержащим элемент a^{2t}.

Теорема 2. *Фактор-группа группы $F \leftthreetimes \langle a^2 \rangle$ по подгруппе $Z = O_p(Z(F))$ является группой Фробениуса с ядром $\overline{F}$ и дополнением порядка p, и для нее выполняются условия вопроса 6.56 [5].*

Теорема 3. *Если подгруппа C локально конечна, то и группа F локально конечна. В частности, в случае $|a| = 6$ группа F локально конечна.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ
в рамках научного проекта №19-01-00566 А.

Литература

1. Горенстейн Д. Конечные простые группы. – М.: Мир, 1985.
2. Thompson J. G. Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1959. – V. 45. – P. 578–581.
3. Higman G. Groups and ring which have automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. – 1957. – V. 32. – P. 321–334.
4. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 18-е издание, Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2015.

6. Gorenstein D., Herstein I. N. Finite Groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4 // Am. J. Math. – 1961. – V. 83. P. 71-78.
7. Kovacs L. G. Groups with regular automorphisms of order four // Math. Zeitschr. – 1964. – V. 75. – P. 277–294.
8. Fischer B. Finite groups admitting a fixed-point-free automorphisms of order 2p // J. Algebra. – 1966. – V. 3, №. 1. – P. 99–114; II. – 1967. – V. 5, № 1. – P. 25–40.
9. Хухро Е. И. Нильпотентность разрешимых групп, допускающих расщепляемый автоморфизм простого порядка // Алгебра и логика. – 1980. – Т. 19, № 1. – С. 118-129.
10. Хухро Е. И. Нильпотентные группы и их автоморфизмы простого порядка. – Фрайбург, 1992.
11. Дураков Е. Б., Созутов А. И. О некоторых периодических группах с конечным регулярным автоморфизмом четного порядка // Алгебра и логика (в печати). – 12 с.

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова
Ивановский государственный университет, г. Иваново
ev-sokolov@yandex.ru, helenfog@bk.ru

Напомним (см. [1]), что класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod_{y\in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Напомним также, что группа X называется $\mathcal{K}$*-аппроксимируемой*, если для каждого элемента $x \in X \setminus \{1\}$ найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий x в неединичный элемент. Подробнее о корневых классах и аппроксимируемости ими см., например, в [1] — [6].

Далее будем считать, что $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия фактор-групп, $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение некоторых групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi\colon H \to K$, причем подгруппа H нормальна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B, $H \neq A$ и $K \neq B$.

Легко видеть, что если Y — нормальная подгруппа некоторой группы X, то множество $\mathrm{Aut}_X(Y)$ автоморфизмов подгруппы Y, служащих ограничениями на эту подгруппу всевозможных внутренних автоморфизмов группы X, является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Y$. Поскольку H и K — нормальные подгруппы групп A и B соответственно, обе они оказываются нормальными в группе G, что позволяет рассмотреть группу $\mathrm{Aut}_G(H)$. Напомним еще (см. [7]), что подгруппа Y группы X называется $\mathcal{K}$*-отделимой* в этой группе, если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Основным результатом работы служит

Теорема 1. *Пусть* $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *— семейство пар подгрупп, определенное следующим образом:* $(R, S) \in \{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *тогда и только тогда, когда* R *—*

нормальная подгруппа группы A, S — *нормальная подгруппа группы* B, $A/R \in \mathcal{K}$, $B/S \in \mathcal{K}$ *и* $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. *Если группа* $\mathrm{Aut}_G(H)$ *является абелевой или совпадает с одной из подгрупп* $\mathrm{Aut}_A(H)$, $\varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, *то группа* G $\mathcal{K}$-*аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda = 1 = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$,

2) *подгруппа* H $\mathcal{K}$-*отделима в группе* A, *подгруппа* K $\mathcal{K}$-*отделима в группе* B.

Наибольшую сложность в процессе применения теоремы 1 представляет проверка условия 1, так как его справедливость зависит не только от свойств групп A и B, но и от того, как объединяются подгруппы H и K. Приводимые далее следствия описывают ситуации, когда условие 1 заведомо выполняется. Чтобы сформулировать одно из них, введем ряд вспомогательных определений.

Через $\pi(\mathcal{K})$ обозначим множество всех простых делителей конечных порядков элементов всевозможных групп из класса $\mathcal{K}$. Так как этот класс содержит неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, то он включает некоторую неединичную циклическую группу и все ее фактор-группы, поэтому множество $\pi(\mathcal{K})$ заведомо не является пустым.

Следуя [8], абелеву группу будем называть $\pi(\mathcal{K})$-*ограниченной*, если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества $\pi(\mathcal{K})$, конечны. Нильпотентную группу назовем $\pi(\mathcal{K})$-*ограниченной*, если она обладает конечным центральным рядом с $\pi(\mathcal{K})$-ограниченными абелевыми факторами.

Следствие 1. *Пусть* A — $\mathcal{K}$-*аппроксимируемая группа и* $B/K \in \mathcal{K}$. *Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:* 1) *подгруппы* H *и* K *являются циклическими,* 2) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, *то группа* G $\mathcal{K}$-*аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа* H $\mathcal{K}$-*отделима в группе* A.

Следствие 2. *Пусть* A — $\mathcal{K}$-*аппроксимируемая группа,* B — $\mathcal{K}$-*аппроксимируемая* $\pi(\mathcal{K})$-*ограниченная нильпотентная группа. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:* 1) *подгруппы* H *и* K *являются циклическими,* 2) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, *то группа* G $\mathcal{K}$-*аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа* H $\mathcal{K}$-*отделима в группе* A, *подгруппа* K $\mathcal{K}$-*отделима в группе* B.

Если дополнительные ограничения из следствий 1, 2 применить не только к группе B, но и к группе A, то условия, накладываемые на объединенные подгруппы и, в частности, на группу $\mathrm{Aut}_G(H)$, можно значительно ослабить.

Теорема 2. *Пусть* H *и* K — $\mathcal{K}$-*аппроксимируемые группы,* $A/H \in \mathcal{K}$ *и* $B/K \in \mathcal{K}$. *Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:* 1) $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, 2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — *абелева группа,* 3) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, 4) $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, *то группа* G $\mathcal{K}$-*аппроксимируема.*

Теорема 3. *Пусть* A *и* B — $\mathcal{K}$-*аппроксимируемые* $\pi(\mathcal{K})$-*ограниченные нильпотентные группы. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:* 1) $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, 2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — *абелева группа,* 3) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, 4) $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, *то группа* G $\mathcal{K}$-*аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа* H $\mathcal{K}$-*отделима в группе* A, *подгруппа* K $\mathcal{K}$-*отделима в группе* B.

Отметим, что теорема 1 и следствия 1, 2 существенным образом обобщают теорему 4 и следствия 4, 5 из [2], а теорема 3 служит частичным обобщением теорем 1, 2 из [9] и теоремы 3 из [10]. В качестве комментария к формулировкам теоремы 3 и следствия 2 отметим также, что если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то известны достаточно легко проверяемые критерии

$\mathcal{K}$-аппроксимируемости $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной нильпотентной группы и $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы такой группы [4, предложения 5, 8]. Если же класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то он включает и все $\pi(\mathcal{K})$-ограниченные нильпотентные группы, поэтому теорема 3 и следствие 2 оказываются частными случаями теоремы 2 и следствия 1 соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

Литература

1. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. – 2015. – V. 43, № 2. – P. 856–860.
2. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 10. – С. 27–44.
3. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 5. – С. 767–780.
4. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 1. – С. 171–185.
5. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, №3. – С. 700–709.
6. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102, № 4. – С. 597–612.
7. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. – 1958. – Т. 18. – С. 49–60.
8. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1381–1390.
9. Azarov D. N. Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation // Comm. Algebra. – 2015. – V. 43. – P. 1464–1471.
10. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 219–229.

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ РАЗРЕШИМЫМИ ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова
Ивановский государственный университет, г. Иваново
ev-sokolov@yandex.ru, helenfog@bk.ru

Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$ (более коротко — $\mathcal{C}$*-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \neq 1$. Если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то необходимым условием $\mathcal{C}$-аппроксимируемости той или иной свободной конструкции оказывается $\mathcal{C}$-аппроксимируемость всех групп, из которых она построена. Поэтому при изучении аппроксимируемости таким классом основным является вопрос о том, в каких случаях указанное необходимое условие становится достаточным. В наибольшей степени данный вопрос изучен для обычного свободного произведения групп [1, 2]. В частности, известен критерий аппроксимируемости такого произведения классом $\mathcal{S}$ всех разрешимых групп [1, теорема 4.1]. Для более сложно устроенных конструкций (свободных произведений с объединенной подгруппой, HNN-расширений, древесных произведений, фундаментальных групп произвольных графов групп) ответ на указанный вопрос удается найти лишь при определенных ограничениях, накладываемых как на саму конструкцию, так и на группы, из которых она построена. Бо́льшая часть результатов, полученных в данном направлении, касается аппроксимируемости классом всех конечных групп (называемой также *финитной*), а также классом конечных p-групп. В отличие от этих свойств, аппроксимируемость перечисленных конструкций разрешимыми группами до недавнего времени почти не исследовалась. Были известны лишь одно утверждение об $\mathcal{S}$-аппроксимируемости HNN-расширений [3, теорема 1.1] и несколько результатов об аппроксимируемости классом $\mathcal{S}$ и некоторыми его подклассами свободных произведений с объединенной подгруппой [4–7].

Значительного продвижения в изучении аппроксимируемости свободных конструкций разрешимыми группами удалось добиться благодаря систематическим исследованиям их аппроксимируемости корневыми классами, которые были начаты в [8] и затем продолжены в [9] — [18] и других работах. Напомним (см. [12]), что класс групп называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.

Легко видеть, что наряду с классом $\mathcal{S}$ всех разрешимых групп корневыми являются класс $\mathcal{S}_0$ разрешимых групп без кручения, а также классы $\mathcal{FS}_\pi$ конечных разрешимых π-групп и $\mathcal{PS}_\pi$ периодических разрешимых π-групп конечного периода для каждого непустого множества простых чисел π. Поэтому изучение аппроксимируемости произвольным корневым классом групп (удовлетворяющим, возможно, некоторым дополнительным ограничениям), как правило, позволяет получить сразу несколько утверждений об аппроксимируемости классами $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{FS}_\pi$ и $\mathcal{PS}_\pi$.

В [19] авторами предложен подход к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп корневыми классами, основанный на использовании конструкции обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп. С его помощью удается получить ряд результатов об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений и HNN-расширений, следствиями которых являются две приводимые далее теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — древесное произведение разрешимых групп G_i $(i \in \in \mathcal{I})$, ступени разрешимости которых ограничены в совокупности, и пусть каждая реберная подгруппа группы G лежит в центре содержащей ее вершинной группы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа G аппроксимируется разрешимыми группами.*

2. *Если все группы G_i не имеют кручения и каждая реберная подгруппа изолирована в содержащей ее вершинной группе, то группа G аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

3. *Если все группы G_i принадлежат классу $\mathcal{PS}_\pi$ для некоторого множества простых чисел π, то группа G аппроксимируется классом $\mathcal{PS}_\pi$.*

Теорема 2. *Пусть G — HNN-расширение разрешимой группы B с центральными связанными подгруппами H и K. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа G аппроксимируется разрешимыми группами.*

2. *Если группа B не имеет кручения и подгруппы H и K изолированы в ней, то группа G аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Отметим, что теорема 1 обобщает теорему 3 из [5] и теорему 3 из [6] в части, касающейся аппроксимируемости разрешимыми группами, а теорема 2 — теорему 1.1 из [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

Литература

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. – 1957. – V. 7, № 1. – P. 29–62.

2. Lichtman A. I. Necessary and sufficient conditions for the residual nilpotence of free products of groups // J. Pure Appl. Algebra. – 1978. – V. 12, № 1. – P. 49–64.

3. Raptis E., Varsos D. Residual properties of HNN-extensions with base group an Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. – 1989. – V. 59, № 3. – P. 285–290.

4. Азаров Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. – 1998 . – Т. 64, № 1. – С. 3–8.

5. Kahrobaei D. On the residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups // Comm. Algebra. – 2011. – V. 39, № 2. – C. 647–656.

6. Kahrobaei D., Majewicz S. On the residual solvability of generalized free products of solvable groups // DMTCS. – 2012. – V. 13, № 4. – C. 45–50.

7. Azarov D. N. Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation // Comm. Algebra. – 2015. – V. 43. – P. 1464–1471.

8. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – 2002. – № 5. – С. 6–10.

9. Tieudjo D. On root-class residuality of some free constructions // JPANTA. – 2010. – V. 18, № 2. – P. 125–143.

10. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Модел. и анализ информ. систем. – V. 20, № 1. – P. 133–137.
11. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. – 2014. – Т. 21, № 4. – P. 148–180.
12. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. – 2015. – V. 43, № 2. – P. 856–860.
13. Гольцов Д. В. Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 5. – С. 665–669.
14. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 5. – С. 767–780.
15. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 10. – С. 27–44.
16. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 1. – С. 171–185.
17. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, №3. – С. 700–709.
18. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102, № 4. – С. 597–612.
19. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Направлена в журн. "Алгебра и логика".

О НАПРАВЛЕНИЯХ РАССЛОЕННЫХ И ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ И КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М. М. Сорокина, С. П. Максаков
Брянский государственный университет имени И. Г. Петровского, г. Брянск
mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Известно, что класс $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ всех p-нильпотентных групп, определяющий функцию-направление локальной формации, также является локальной формацией [1]. Аналогичный факт справедлив для таких классов, как ω-локальные и Ω-композиционные формации, ω-локальные и Ω-композиционные классы Фиттинга. В теоремах 1 и 2 устанавливаются свойства классов, являющихся значениями функций-направлений ω-веерных и Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга.

Формацией называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условиям: 1) из $G \in \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$; 2) из $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ следует $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$;

наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G и обозначается $G^{\mathfrak{F}}$. Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условиям: 1) из $G \in \mathfrak{H}$ и $N \lhd G$ следует $N \in \mathfrak{H}$; 2) из $N_1 \lhd G$, $N_2 \lhd G$, $N_1, N_2 \in \mathfrak{H}$ следует $N_1N_2 \in \mathfrak{H}$; наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая $\mathfrak{H}$, называется $\mathfrak{H}$-радикалом группы G и обозначается $G_{\mathfrak{H}}$ [1]. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых групп, ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{E}_\omega$ – класс всех ω-групп, т.е. таких групп G, что $\pi(G) \subseteq \omega$, где $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G; $\mathfrak{E}_\Omega$ — класс всех Ω-групп, т.е. таких групп G, что $K(G) \subseteq \Omega$, где $K(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Отметим, что классы $\mathfrak{E}_\omega$ и $\mathfrak{E}_\Omega$ являются и формациями, и классами Фиттинга (иначе, формациями Фиттинга). Пусть G — группа. Тогда $O_\omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\omega}$, $O^\omega(G) = G^{\mathfrak{E}_\omega}$, $O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\Omega}$, $O^\Omega(G) = G^{\mathfrak{E}_\Omega}$ — соответственно $\mathfrak{E}_\omega$-радикал, $\mathfrak{E}_\omega$-корадикал, $\mathfrak{E}_\Omega$-радикал и $\mathfrak{E}_\Omega$-корадикал группы G. Функции $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$, $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации$\}$, $h : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называются соответственно $\mathbb{P}FR$-функцией, ωF-функцией и ωR-функцией. Формация $\mathfrak{F} = \{G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(q)} \in f(q)$ для любого $q \in \pi(G) \cap \omega\}$ называется ω-веерной формацией с направлением δ и ωF-спутником f; класс Фиттинга $\mathfrak{H} = \{H \mid O^\omega(H) \in h(\omega')$ и $H^{\delta(q)} \in h(q)$ для любого $q \in \pi(H) \cap \omega\}$ называется ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ и ωR-спутником h [2]. Отметим, что упомянутые выше ω-локальная формация и ω-локальный класс Фиттинга являются соответственно представителями ω-веерных формаций и ω-веерных классов Фиттинга. Формация $\mathfrak{F} = \{G \mid G/G_{\delta(q)} \in f(q)$ для любого $q \in \pi(G)\}$ называется веерной с направлением δ и F-спутником f, где $f : \mathbb{P} \to \{$формации$\}$ — $\mathbb{P}F$-функция; класс Фиттинга $\mathfrak{H} = \{H \mid H^{\delta(q)} \in h(q)$ для любого $q \in \pi(H)\}$ называется веерным с направлением δ и R-спутником h, где $h : \mathbb{P} \to \{$классы Фиттинга$\}$ — $\mathbb{P}R$-функция [2]. Направление δ ω-веерной (веерной) формации называется p-направлением, если $\delta(q) = \mathfrak{E}_{q'}\delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; направление δ ω-веерного (веерного) класса Фиттинга называется p-направлением, если $\delta(q) = \delta(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

Теорема 1. *Пусть $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ — произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Если δ — p-направление ω-веерной формации, то формация $\delta(q)$ является ω-веерной с направлением δ, для любого $q \in \omega$.*

2) *Если δ — p-направление ω-веерного класса Фиттинга, то класс Фиттинга $\delta(q)$ является ω-веерным с направлением δ, для любого $q \in \omega$.*

3) *Формация $\mathfrak{E}_\omega\delta(q)$ является ω-веерной с направлением δ, для любого $q \in \omega$.*

4) *Класс Фиттинга $\delta(q)\mathfrak{E}_\omega$ является ω-веерным с направлением δ, для любого $q \in \omega$.*

Следствие 1. 1) *Если δ — p-направление веерной формации, то для любого простого числа q формация $\delta(q)$ является веерной с направлением δ.*

2) *Если δ — p-направление веерного класса Фиттинга, то для любого простого числа q класс Фиттинга $\delta(q)$ является веерным с направлением δ.*

Функции $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$, $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \to \{$формации$\}$, $h : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называются соответственно FR-функцией, ΩF-функцией и ΩR-функцией. Формация $\mathfrak{F} = = \{G \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in K(G) \cap \Omega\}$ называется Ω-расслоенной формацией с направлением φ и ΩF-спутником f; класс Фиттинга $\mathfrak{H} = \{H \mid O^\Omega(H) \in h(\Omega')$ и $H^{\varphi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in \in K(H) \cap \Omega\}$ называется Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением

φ и ΩR-спутником h [3]. Упомянутые выше Ω-композиционная формация и Ω-композиционный класс Фиттинга являются соответственно представителями Ω-расслоенных формаций и Ω-расслоенных классов Фиттинга. Формация $\mathfrak{F} = \{G \mid G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in K(G)\}$ называется расслоенной с направлением φ и F-спутником f, где $f : \mathfrak{I} \to \{$формации$\}$ — F-функция; класс Фиттинга $\mathfrak{H} = \{H \mid H^{\varphi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in K(H)\}$ называется расслоенным с направлением φ и R-спутником h, где $h : \mathfrak{I} \to \{$классы Фиттинга$\}$ — R-функция [3]. Направление φ Ω-расслоенной (расслоенной) формации называется r-направлением, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{(A)'}\varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{I}$; направление φ Ω-расслоенного (расслоенного) класса Фиттинга называется r-направлением, если $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{E}_{(A)'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ — произвольная FR-функция, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *Если φ — r-направление Ω-расслоенной формации, то формация $\varphi(A)$ является Ω-расслоенной с направлением φ, для любого $A \in \Omega$.*

2) *Если φ — r-направление Ω-расслоенного класса Фиттинга, то класс Фиттинга $\varphi(A)$ является Ω-расслоенным с направлением φ, для любого $A \in \Omega$.*

3) *Формация $\mathfrak{E}_\Omega\varphi(A)$ является Ω-расслоенной с направлением φ, для любого $A \in \Omega$.*

4) *Класс Фиттинга $\varphi(A)\mathfrak{E}_\Omega$ является Ω-расслоенным с направлением φ, для любого $A \in \Omega$.*

Следствие 2. 1) *Если φ — r-направление расслоенной формации, то для любой простой группы A формация $\varphi(A)$ является расслоенной с направлением φ.*

2) *Если φ — r-направление расслоенного класса Фиттинга, то для любой простой группы A класс Фиттинга $\varphi(A)$ является расслоенным с направлением φ.*

Замечание. Из теоремы 1, в частности, следует, что для любого $q \in \omega$ класс $\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q$ является ω-локальной формацией, а класс $\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'}$ — ω-локальным классом Фиттинга; из теоремы 2 следует, что класс $\mathfrak{S}_{cA}$ всех групп, у которых каждый главный A-фактор централен, является Ω-композиционной формацией и Ω-композиционным классом Фиттинга, для любого $A \in \Omega$.

Литература

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978.

2. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, Вып. 1. – С. 43–60.

3. Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, Вып. 3. – С. 125–144.

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРУПП С ПОЛУНОРМАЛЬНЫМИ ИЛИ АБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

И. Л. Сохор

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)

irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]– [2].

Подгруппа A называется полунормальной в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Группы с полунормальными подгруппами исследовались в работах многих авторов, например, в работах [3]– [6].

Подгруппа H группы G называется абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. В симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа одновременно полунормальна и абнормальна.

В [3] установлено, что группа, в которой каждая нециклическая силовская подгруппа полунормальна, разрешима. Группа, в которой каждая нециклическая силовская подгруппа абнормальна, может быть неразрешимой. Примером служат группы $\mathrm{PSL}(2, 17)$, $\mathrm{PSL}(2, 31)$. В этих группах силовские подгруппы нечетных порядков циклические, а силовские 2-подгруппы максимальны, а значит, абнормальны.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что каждая силовская подгруппа из M полунормальна или абнормальна в G. Если $P' \leqslant Z(P)$ в случае, когда P абнормальна, то группа G разрешима.*

Следствие. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Если порядок M нечетен и каждая силовская подгруппа из M полунормальна в G или абнормальна в G, то группа G разрешима.*

Литература

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. – Минск: Вышэйшая школа. – 2006.
2. Huppert B. Endliche Gruppen I. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl.. – 1967.
3. Монахов В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Матем. зам. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
4. Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
5. Guo Wen Bin. Finite groups with seminormal Sylow subgroups // Acta Mathematica Sinica. – 2008. – V. 24, № 10. – P. 1751–1758.
6. Княгина В. Н., Монахов В. С., Зубей, Е. В. О разрешимости конечной группы с S-полунормальными подгруппами Шмидта // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 11. – С. 1511–1518.

КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ НАИВЫСШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ АЛГЕБРЫ ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Г. С. Сулейманова
Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета, г. Абакан
suleymanova@list.ru

В 1945 году А.И. Мальцев [1] исследовал задачу описания абелевых подгрупп наивысшей размерности в комплексных простых группах Ли. Задача инспирирована доказанной ранее И. Шуром [2] теоремой:

Наивысшая размерность абелевых подгрупп группы $SL(n,\mathbb{C})$ равна $[n^2/4]$ и абелевы подгруппы этой размерности при $n > 3$ переводятся автоморфизмами друг в друга.

Свою задачу А.И. Мальцев решил переходом к комплексным алгебрам Ли. Алгебру Шевалле $L = L_\Phi(K)$ ассоциируют с любым полем K и системой корней Φ, характеризуя базой Шевалле $\{e_r \ (r \in \Phi), \quad h_s \ (s \in \Pi)\}$ с целочисленными структурными константами, где Π – система простых корней (или база) в Φ [3]. Элементы e_r $(r \in \Phi^+)$ образуют базу нильтреугольной подалгебры $N = N\Phi(K)$.

Методы [1] позднее получили развитие в решении проблемы о больших абелевых подгруппах конечных групп Шевалле [4].

В [5] записаны следующие задачи:

(A) *Описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

(B) *Описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

В докладе рассматривается решение этих задач для алгебры Шевалле классического типа. В частности, доказана

Теорема. *Пусть L – алгебра Шевалле типа A_n над полем характеристики p. При $n > 2$ ее коммутативные подалгебры наивысшей размерности исчерпываются, с точностью до автоморфизмов алгебры L, подалгебрами вида $M + Z$, где M – коммутативная подалгебра наивысшей размерности нильтреугольной подалгебры N, Z – центр алгебры L. Кроме того, при $n \leqslant 2$ и $p \nmid n+1$ подалгебра Картана также будет являться коммутативной подалгеброй наивысшей размерности алгебры L.*

Литература

1. Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1945. – Т. 9, № 4. – С. 291–300.
2. Schur I. Zur theorie der vertauschbaren matrizen // J. reine und angew. Math. – 1905. – V. 130. – P. 66–76.
3. Carter R. Simple groups of Lie type. – Wiley and Sons, New York, 1972.
4. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи математических наук. – 1986. – Т. 41, № 1. – С. 57-96.
5. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – V. 86, № 4. – P. 384–388.

О ПОЛУГРУППАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРОГО КЛАССА СВЯЗНЫХ УНАРОВ С ПЕТЛЕЙ

С. В. Сыроватская
Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
Волгоград
svs_kagi@mail.ru

Унаром называется алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, f\rangle$ с одной унарной операцией f. Под $\mathbb{N}$ подразумевается множество целых положительных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Унар $\mathfrak{A}$ *связный*, если для любых $a, b \in A$, $af^m = bf^k$ для некоторых $m, k \in \mathbb{N}_0$. *Петля* есть элемент a унара $\mathfrak{A}$ такой, что $af = a$. Элемент a унара $\mathfrak{A}$ называется *минимальным* [*узловым*], если a не имеет прообраза при отображении f [если существуют $x, y \in A$ такие, что $x \neq y$ и $xf = a = yf$]. В [1] можно найти другие необходимые термины теории унаров.

Используем запись $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B}$ является подунаром $\mathfrak{A}$. Под $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ будем подразумевать полугруппу эндоморфизмов унара $\mathfrak{A}$. Подполугруппу $\{f^m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ полугруппы $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ будем обозначать через $\chi_{\mathfrak{A}}$. Через C_1^{∞} обозначим унар $\langle \mathbb{N}_0, g\rangle$, где для произвольного $m \in \mathbb{N}_0$,

$$mg = \begin{cases} m-1, & \text{если } m > 0, \\ 0, & \text{если } m = 0. \end{cases}$$

В данной работе рассматриваем класс $\mathfrak{K}$ всех связных унаров с петлей, в которых петля является единственным узловым элементом. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$. Обозначим через a_0 петлю унара $\mathfrak{A}$; $W = \{\mathfrak{W} \leqslant \mathfrak{A} \mid \mathfrak{W} \cong C_1^{\infty}$ либо $\mathfrak{W}$ порождается минимальным элементом унара $\mathfrak{A}\}$. Проиндексируем W:
$W = \{\mathfrak{W}_i \mid i \in I\}$. Под J подразумеваем множество

$$J = \{i \in I \mid \mathfrak{W}_i \text{ однопорожденный}\}.$$

Пусть для любого $j \in J$, a_j — порождающий элемент унара $\mathfrak{W}_j$; $M = \{d(a_j) \mid j \in J\}$ (здесь $d(a_j)$ — глубина элемента a_j).

Через $\langle 0, n-1\rangle_{\mathrm{O}}$ $(n \in \mathbb{N})$ обозначим полугруппу $\langle \{0, 1, \ldots, n-1\} \bigcup \{\mathbf{O}\}, \oplus\rangle$, где для любых $x, y \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \bigcup \{\mathbf{O}\}$

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y, & \text{если } x, y \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ и } x + y \leqslant n-1, \\ \mathbf{O}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим подполугруппу $\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\}$ полугруппы $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$, где $\varphi_0 \colon A \to A$ — отображение, определенное правилом: $a\varphi_0 = a_0$ для любого $a \in A$.

Теорема 1. *Если $I \setminus J \neq \varnothing$ или M не имеет наибольшего элемента, то $\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\} \cong \langle \mathbb{N}_0 \bigcup \{\mathbf{O}\}, +\rangle$ (здесь $\mathbf{O}$ — нуль полугруппы $\langle \mathbb{N}_0 \bigcup \{\mathbf{O}\}, +\rangle$). Если $I \setminus J = \varnothing$ и m — наибольший элемент множества M, то $\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\} \cong \langle 0, m-1\rangle_{\mathrm{O}}$.*

Пусть $\mathfrak{R} = \langle R, *\rangle$, $\mathfrak{S} = \langle S, *\rangle$ — полугруппы. Через R^Y обозначают множество всех отображений множества Y во множество R. *Сплетением* $\mathfrak{R}\,\mathrm{wr}^Y\mathfrak{S}$ *полугрупп* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{S}$ *посредством правого* $\mathfrak{S}$*-полигона* Y (см. [2]) называется полугруппа $\left\langle R^Y \times S, *\right\rangle$, операция которой задана по правилу: для произвольных $\tau_1, \tau_2 \in R^Y$, $s_1, s_2 \in S$

$$(\tau_1, s_1) * (\tau_2, s_2) = (\tau_3, s_1 * s_2),$$

где $y\tau_3 = (y\tau_1) * ((ys_1)\tau_2)$ для любого $y \in Y$.

В сплетении $(\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\})\ \mathrm{wr}^X \mathfrak{T}(X)$: $|X| = |I|$, $\mathfrak{T}(X) = \langle T(X), \cdot\rangle$ — правая симметрическая полугруппа множества X, X — естественный полигон над $\mathfrak{T}(X)$.

Устроим отображение $\sigma\colon W \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ по правилу: для произвольного $i \in I$

$$\sigma(\mathfrak{W}_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & \text{если } \; i \in I \setminus J, \\ d(a_i), & \text{если } \; i \in J. \end{array} \right.$$

Будем полагать, что ∞ — наибольший элемент вполне упорядоченного множества
$\langle \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \leqslant \rangle$, порядок которого индуцирован естественным отношением „$\leqslant$“ на $\mathbb{N}_0$.

Определим два семейства идеалов полугруппы $\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\}$.

Для любого $i \in I$
если $i \in I \setminus J$, то $J_i = \{\varphi_0\}$,
если $i \in J$, тогда $J_i = \left\{ f^k \mid \mathbb{N}_0 \ni k \geqslant d(a_i) \right\} \cup \{\varphi_0\}$.

Для любых $i, j \in I$
если $\sigma(\mathfrak{W}_i) \leqslant \sigma(\mathfrak{W}_j)$, то $K_{i,j} = \chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\}$,
если $\sigma(\mathfrak{W}_i) > \sigma(\mathfrak{W}_j)$ и $\sigma(\mathfrak{W}_i) = \infty$, тогда $K_{i,j} = \{\varphi_0\}$,
если $\sigma(\mathfrak{W}_i) > \sigma(\mathfrak{W}_j)$ и $\sigma(\mathfrak{W}_i) \neq \infty$, то $K_{i,j} = \left\{ f^k \mid \mathbb{N}_0 \ni k \geqslant d(a_i) - d(a_j) \right\} \cup \{\varphi_0\}$.

Проиндексируем множество X: $X = \{x_i \mid i \in I\}$.

Теорема 2. $\operatorname{End} \mathfrak{A} \cong K/\theta$, *где* K *— подполугруппа полугруппы* $(\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\}) \operatorname{wr}^X \mathfrak{T}(X)$ *с носителем*

$$\left\{ (\tau, t) \in (\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\})^X \times T(X) \mid (\forall i \in I)(x_i t = x_j \Rightarrow x_i \tau \in K_{i,j}) \right\},$$

θ *— конгруэнция полугруппы* K, *определенная следующим образом: для любых* $(\tau_1, t_1), (\tau_2, t_2) \in K$

$$(\tau_1, t_1)\theta(\tau_2, t_2) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall i \in I) \left[(x_i \tau_1 \theta_{J_i} x_i \tau_2) \& ((x_i \tau_1 \notin J_i \Rightarrow x_i t_1 = x_i t_2) \right],$$

где θ_{J_i} *— конгруэнция Риса полугруппы* $\chi_{\mathfrak{A}} \cup \{\varphi_0\}$ *по идеалу* J_i.

Литература

1. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. – 1980. – Т. 27, №1. – С. 7–20.

2. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А. и др. Общая алгебра. – Т. 2. – М.: Наука, 1991.

ГРУППА ВНЕШНИХ АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБРЫ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Д. Т. Тапкин

Казанский федеральный университет, Казань
danil.tapkin@yandex.ru

Пусть R и S — кольца, M — R-S-бимодуль, а N — S-R-бимодуль. Пусть также даны бимодульные гомоморфизмы $\varphi : M \otimes N \to R$ и $\psi : N \otimes M \to S$. Положим $m \cdot n = \varphi(m \otimes n)$, $n \cdot m = \psi(n \otimes m)$, $m \in M$, $n \in N$. Тогда если для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполняются тождества $(m \cdot n) \cdot m' = m \cdot (n \cdot m')$ и $n \cdot (m \cdot n') = (n \cdot m) \cdot n'$, то множество матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ образует кольцо относительно естественных операций матричного сложения и умножения. Данное кольцо называют кольцом формальных матриц.

В статье [1] был рассмотрен частный случай колец формальных матриц, когда $S = R$ и $M = N = {}_RR_R$. Было показано, что в этом случае существует элемент $s \in C(R)$, такой что $m \cdot n = s(mn)$ и $n \cdot m = s(nm)$, где $m \in {}_RR_R$, $n \in {}_RR_R$, а под умножением понимается обычное умножение в кольце. Полученные кольца формальных матриц обозначают $K_s(R)$ и называют кольцами Крылова. В статье [2] конструкция Крылов была обобщена и было определено кольцо формальных матриц $\mathbb{M}_n(R;s)$ порядка n. При этом $\mathbb{M}_2(R;s) = K_{s^2}(R)$.

Как хорошо известно, все автоморфизмы алгебры матриц $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ являются внутренними, хотя для алгебры матриц над произвольным коммутативным кольцом это уже не выполняется (см. [3]). Нетрудно видеть, что при $s \in \mathbb{Z}$ отличном от 0 и ± 1 у алгебры формальных матриц Крылова $K_s(\mathbb{Z})$ уже имеется невнутренний автоморфизм: к примеру, автоморфизм сдвига $E_{ij} \mapsto E_{\pi(i)\pi(j)}$, где $\pi = (1,2) \in S_2$.

Для ответа на вопрос, насколько группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_n(R;s)$ больше группы внутренних автоморфизмов этой алгебры, была изучена группа внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) = \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s))/\mathrm{Inn}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$.

Теорема. *Пусть кольцо R факториально, $s \in R \backslash U(R)$, $s \neq 0$ и $A = \mathbb{M}_n(R;s)$. Пусть также $s = up_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_n}$ — разложение s в произведение обратимого элемента u и попарно не ассоциированных неприводимых элементов p_i. Тогда имеют место следующие утверждения:*

A. *группа* $\mathrm{Out}_R(A)$ *изоморфна подгруппе* $\underbrace{S_n \times ... \times S_n}_{k}$;

B. *если кольцо R является областью главных идеалов, то* $\mathrm{Out}_R(A) \cong \underbrace{S_n \times ... \times S_n}_{k}$.

Литература

1. Крылов П. А., Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика.– 2008.– Т.47, № 4.– С. 456–463.

2. Tang G., Zhou Y., A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl.– 2013.– V. 438, № 12.– P.4672–4688.

3. Isaacs I. M. Automorphisms of Matrix Algebras Over Commutative Rings // Linear Algebra and its Appl.– 1980.– V. 31.– P. 215–231.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГРАФОВЫХ ДВУСТУПННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А. В. Трейер

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Омск

alexander.treyer@gmail.com

Пусть Γ — конечный простой граф. Графовая группа G_Γ (также известна как частично коммутативная или Right Angeled Artin Group, кратко - RAAG) — это группа в которой порождающим множеством служат вершины графа Γ, а определяющие соотношения выглядят так: два образующих группы x и y коммутируют, то есть $[x, y] = 1$, тогда и только тогда, когда вершины x и y соединены ребром в графе Γ. Графовые группы можно определить в различных многообразиях групп, например, в многообразии нильпотентных групп, разрешимых групп и т.д. Две группы называются универсально эквивалентными, если множества всех универсальных предложений, истинных на этих группах, совпадают. Пятью годами ранее докладчик совместно с А.А. Мищенко доказал критерий об универсальной эквивалентности двуступенно нильпотентных графовых групп. Полученный критерий оказался громоздкий и вычислительно сложный. В докладе будет предложен новый удобный подход к описанию универсально эквивалентных двуступенно нильпотентных графовых групп, основанный на понятиях замкнутых подмножеств вершин графа Γ, сжатии графа Γ и решетки замкнутых подмножеств графа Γ.

Исследования выполнены при поддержке гранта РНФ № 19-11-00209.

ЦИФРОВАЯ ПОДПИСЬ НА ОПЕРАДНОЙ ОСНОВЕ

С. Н. Тронин
Казанский федеральный университет, Казань
sntrnn@gmail.com

Традиционный математический аппарат алгебраической криптографии [1], [2] — теория групп, реже — теория колец. В работах [3], [4] впервые была продемонстрирована возможность строить криптографические протоколы на языке (или на платформе) теории операд. В этих работах были построены протоколы формирования общего секретного ключа, аутентификации, и шифрования. В данной заметке показано, как можно сконструировать на этом языке цифровую подпись. Эту подпись можно считать неким формальным аналогом подписи из работы [5].

Итак, приведем протокол подписи. Определения всех встречающихся терминов и понятий можно найти в [3], [4], [6].

Пусть R — коммутативная операда [6], A — алгебра над R. Эти данные открыты. Подписывается сообщение m (битовая строка). Дана также открытая хэш-функция H на битовых строках, значения которой можно считать натуральными числами. Далее, даны открытые элементы $\lambda \in R(t)$, $a \in A$, секретный ключ $\xi \in R(d)$, и соответствующие ему открытые ключи $\rho = \lambda\xi \dots \xi \in R$, $y = \xi a \dots a \in A$. Соответственно требуется, чтобы нахождение ξ по известным y, ρ, a и λ было сложной задачей.

1-й шаг протокола: Подписывающий вычисляет натуральное число $e = H(m)$.

2-й шаг: случайно выбирается $\omega \in R(e)$.

3-й шаг: вычисляется $r = \omega a \dots a \in A$.

4-й шаг: вычисляется $w = \lambda\omega \dots \omega \in R$.

5-й шаг: вычисляется $s = \rho r \dots r$.

Подпись m — это пара (w, s). Количество аргументов в суперпозициях определяется из контекста. Отметим, что значение хэш-функции от подписываемого сообщения становится количеством аргументов в суперпозиции для r. Это аналог степени элемента кольца из [5].

Проверка подписи состоит в проверке равенства:

$$\lambda s \dots s = wy \dots y.$$

Здесь существенную роль играет коммутативность операды.

Таким образом, практические перспективы данной подписи зависят от того, удастся ли найти достаточно хорошие примеры коммутативных операд, в которых являются вычислительно сложными сформулированные выше задачи о нахождении секретного ключа по открытым данным. Целью же данного краткого сообщения была демонстрация самой принципиальной возможности использования операд для построения подписей.

Литература

1. Романьков В. А. Алгебраическая криптография: монография. – Омск: Изд-во Омск. Гос ун-та, 2013. – 136 с.
2. Myasnikov A., Shpilrain V., Ushakov A. Non-commutative Cryptography and Complexity of Group-theoretic Problems. – AMS, Mathematical Surveys and Monographs 177, 2011. – 385 p.
3. Gaynullina A. R., Tronin S. N. Towards an Operad-Based Cryptography: Applications of Commutative Operads // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – V. 37, №. 3. – P. 234–239.
4. Gaynullina A. R., Tronin S. N. Some new platforms for Algebraic Cryptography, and one method of increasing the security // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – V. 37, № 6. – P. 768–776.
5. Wang B., Hu Y. Signature scheme using the root extraction problem on quaternions // J. Applied Mathematics. – 2014. – V. 2014. – P. 819182:1–819182:7.
6. Тронин С. Н. Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. мат. журн. – 2006. - Т. 47, № 3. – С. 670–694.

ОБ АТОМАХ РЕШЕТОК КОНГРУЭНЦИЙ АЛГЕБР С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ПОЧТИ ЕДИНОГЛАСИЯ

В. Л. Усольцев
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
usl2004@mail.ru

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Операцией почти единогласия (см., например, [1]) называется n-арная операция φ, удовлетворяющая тождествам $\varphi(x,\dots \dots,x,y) = \varphi(x,\dots,x,y,x) = \dots = \varphi(y,x,\dots,x) = x$, где $n \geqslant 3$. При $n = 3$ φ называют операцией большинства.

В [2]показано, что на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ при $n \geqslant 3$ можно так определить семейство n-арных операций почти единогласия $g^{(n)}$, что алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. Эти операции задаются с помощью операции большинства $m(x, y, z)$ [3] на $\langle A, f\rangle$:
$g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3)$ и $g^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, x_2,\dots \dots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ при $n > 3$.

Через $\bigtriangledown_A$ и $\bigtriangleup_A$ обозначаются единичная и нулевая конгруэнции алгебры A соответственно. Определения и обозначения, связанные с унарами, см. в [3]. Пусть B — подунар унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция $B^2 \cup \bigtriangleup_A$ унара $\langle A, f\rangle$. Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_v обозначается конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, определенная по правилу [4]: $x\theta_v y$ для любых $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$. Решетка с нулем называется точечной (atomistic), если любой ее ненулевой элемент представляется как решеточное объединение некоторого множества атомов.

Теорема 1. *Атомами решетки конгруэнций алгебры* $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ *являются те и только те конгруэнции, которые определены одним из следующих способов:*
1) $\bigtriangledown_A$, *если операция* f *инъективна на* A, *либо унар* $\langle A, f\rangle$ *является корнем глубины 1;*
2) θ_v, *если унар* $\langle A, f\rangle$ *неизоморфен корню глубины 1 и содержит узловой элемент* v*;*
3) θ_B, *если унар* $\langle A, f\rangle$ *неизоморфен корню глубины 1, имеет собственный подунар* $B \cong C_1^1$ *и для всех* $x \in A \setminus B$ *элемент* $f(x)$ *не совпадает с неподвижным элементом подунара* B.

Теорема 2. *Решетка конгруэнций алгебры* $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ *является точечной тогда и только тогда, когда либо операция* f *инъективна на* A, *либо унар* $\langle A, f\rangle$ *содержит такой элемент* a, *что* $f(x) = a$ *для любого* $x \in A$.

Литература

1. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. – 1975. – V. 143. – P. 165–174.

2. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. – 2016. – Вып. 2. – С. 28–30.

3. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. – 2013. – Т. 14. – Вып. 4. – С. 196–204.

4. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. Ест. и физ.-мат. науки. – 2005. – № 4(13). – С. 17–24.

О ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ УНИТАРНЫХ ГРУПП СТЕПЕНИ 3 И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ 2-ГРУПП

К. А. Филиппов, А. С. Федосенко, А. К. Шлёпкин
Красноярский государственный аграрный университет, Сибирский федеральный университет, Красноярск
filippov_kostya@mail.ru, ak_kgau@mail.ru

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [2].

Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу [1]. Данный класс групп был введен В.П. Шунковым в 70-е годы, и первоначально, сам В.П. Шунков называл такие группы сопряженно бипримитивно конечными.

Группы Шункова отличны от периодических групп. Кроме того, построены примеры групп Шункова содержащих элементы бесконечного порядка и не обладающих периодической частью. Напомним, что под периодической частью группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы, при условии, что они образуют подгруппу.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех конечных элементарных абелевых 2-групп, $\mathfrak{B} = \{U_3(q) \mid q = p^k, k = 1, 2, \cdots\}$ — множество всех унитарных групп степени 3 над конечным полем фиксированной нечётной характеристики p.

Теорема. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества*

$$\mathfrak{R} = \{B \times A | A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\},$$

обладает периодической частью, которая локально конечна и изоморфна $U_3(Q) \times I$, где I — элементарная абелева $|2|$-группа, Q — локально конечное поле характеристики p.

Литература

1. Сенашов В. И., Шунков В. П., Группы с условиями конечности. *Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН,* (2001) 326 с.

2. Шлёпкин А. К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. *III межд. конф. по алгебре, тезиы докладов, Красноярск* (1993).

ЭФФЕКТИВНО P, N-РАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Н.Г. Хисамиев, Д.А. Тусупов, С.Д. Тыныбекова

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан (Казахстан)

hisamiev@mail.ru, tussupov@mail.ru

В работах [1],[2] введены понятия эффективно вполне разложимых и сильно разложимых абелевых групп и даны критерии для абелевой группы быть таковыми.

Пусть P и ω обозначают соответственно множество всех простых чисел и множество всех натуральных чисел. Введем следующее

Определение 1. *Пусть вычислимый предикат $R(i, m, p, n, x), p \in P$, $i, m, n, x \in \omega$, удовлетворяет следующим условиям:*

1. $R(i, m, p, n, x) \to \forall k < n \; R(i, m, p, k, x)$;

2. Для любых i, m множество $S_{i,m} = \{p | \exists n \; \exists x \; R(i, m, p, n, x)\}$ конечно;

3. Для любой пары $< i, m >$ существует единственное простое число $q_{i,m} \in S_{i,m}$ такое что истина формула

$$\forall n \; \exists x \; R(i, m, q_{i,m}, n, x).$$

Число $q_{i,m}$ назовем главным числом множества $S_{i,m}$.

Пусть

$$Q = \{q_{i,m} | q_{i,m} \text{ - главное число, } i, m \in \omega\}.$$

Для любого простого числа p и предиката R определим абелевы группы:

$$A(p) = \langle \{\frac{m}{p^n} | m \in Z, n \in \omega\}, +, 0 \rangle, \tag{2}$$

$$A(R) = \oplus \{A(q_{i,m}) | \exists i \; \exists m (q_{i,m} \in Q)\}. \tag{3}$$

Абелеву группу A без кручения назовем эффективно $\sum_{3,n}^{(0)}$ - разложимой, если существует вычислимый предикат $R(i, m, p, n, x)$, удовлетворяющий условиям 1-3 определения 1, и группы $A(R)$ и A изоморфны.

Пусть дано множество $S \subseteq P \times \omega$ такое, что справедливо условие: если пара $< p, m > \in S$, то для любого числа $k < m$ пара $< p, k > \in S$. Определим абелеву группу

$$A(S) = \oplus \{A(p, m) | < p, m > \in S)\},$$

где $A(p, m)$ изоморфна группе $A(p)$, определенной равенством (1).

Определение 2. *Если существует вычислимая нумерация ν группы $A(S)$ такая, что в $(A(S), \nu)$ имеется вычислимо перечислимая последовательность элементов*

$$\langle a_{p,m} | < p, m > \in S \rangle$$

такая, что

$$A(S) \text{ изоморфна группе } \oplus \{A(p, m) | < p, m > \in S)\},$$

то пару $(A(S), \nu)$ назовем эффективно p, n - разложенной группой, а саму группу $A(S)$ - эффективно p, n - разложимой.

Теорема. *Абелева группа $A(S)$ эффективно p, n - разложима тогда и только тогда, когда она эффективно $\sum_{3,n}^{(0)}$ - разложима.*

Доказано, что любая эффективно вполне разложимая группа эффективно p, n - разложима, но обратное неверно.

Литература

1. Хисамиев Н. Г., Крыкпаева А. А., Эффективно вполне разложимые абелевы группы. Сибирский математический журнал, 1997, т.38, С.1410-1412.

2. Хисамиев Н. Г., Об одном классе сильно разложимых абелевых групп. Алгебра и логика, т.41, С.493-509.

Работа поддержана научным грантом МОН РК ном. AP05132349

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ДВУМЯ ПОДГРУППАМИ ПРИМАРНЫХ ИНДЕКСОВ

Д. А. Ходанович

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

hodanovich@gsu.by

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1].

Ранее [2] установлена разрешимость группы G с двумя несопряженными максимальными подгруппами A и B, которые удовлетворяют следующим требованиям: (1) подгруппы A и B имеют примарные индексы в G; (2) все собственные подгруппы в A и в B сверхразрешимы. При доказательстве не использовалась классификация конечных простых групп. Требование (2) может быть ослаблено до следующего ограничения: все собственные подгруппы в A и в B 2-нильпотентны. Тем самым, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть A и B — несопряженные максимальные подгруппы в группе G. Предположим, что выполняются следующие требования:*

(1) *A и B имеют примарные индексы в G;*

(2) *все собственные подгруппы в A и в B 2-нильпотетны.*

Тогда группа G разрешима.

Следствие. *Пусть A и B — несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы группы G. Если индексы подгрупп A и B в группе G примарны, то группа G разрешима и индекс по крайней мере одной из подгрупп A или B есть простое число.*

Замечание. Классу всех групп с 2-нильпотентными собственными подгруппами принадлежат следующие группы: группы нечетного порядка; сверхразрешимые группы; минимальные несверхразрешимые группы; 2-замкнутые группы Шмидта. Если в доказанной теореме подгруппа A и подгруппа B изоморфны любой из перечисленных групп, то получим новые признаки разрешимости группы. Результат [3, теорема 4.1] также охватывается теоремой.

Литература

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов — Минск: Вышэйшая школа, 2006. — 207 с.
2. Монахов В. С., Ходанович Д. А. О разрешимости конечной группы с парой несопряженных подгрупп примарных индексов // Проблемы физики, математики и техники. — 2018. — № 2 (35). — С. 57–59.
3. Corradi K., Hermann P. Z., Hethelyi L. Nortvath E. Miscellaneous rezults on supersolvable groups // London Mathematical Society. Lecture Note Series 387. Groups St Andrews 2009 in Bath: Vol. 1. — P. 198–212.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ ЛИЕВА ТИПА РАНГА 1 И ГРУППАМИ $L_3(2^K)$, $L_4(2^L)$

А. А. Шлепкин
Сибирский федеральньй университет, Красноярск
shlyopkin@mail.ru

Группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой групе из $\mathfrak{R}$ [1]. В Коуровской тетради [2] поставлен вопрос 14.101:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничины в совокупности, сама является простой группой лиева типа ?

Получен частичный ответ на этот вопрос для групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1 и групами $L_3(2^n)$. Положим

$$\mathfrak{D} = \{L_2(f), U_3(h), Sz(2^{2m+1}), Re(3^{2n+1}) | f > 3, h > 2, m \geqslant 1, n \geqslant 1\} -$$

множество всех конечных простых групп лиева типа ранга 1,

$$\mathfrak{C} = \{L_3(2^k) \mid k - \text{ науральное, не фиксированное}\},$$

$$\mathfrak{A} = \{L_4(2^l) \mid l - \text{ науральное, фиксированное}\},$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{D} \cup \mathfrak{C}.$$

ТЕОРЕМА. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$ Тогда G изоморфна одной из групп следующего множества*

$$\{L_2(F), U_3(H), Sz(P), Re(Q), L_3(R), L_4(2^l)\},$$

где F, H, P, Q, R — локально конечные поля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

Литература

1. *А.К. Шлепкин*, О некоторых периодических группах, насыщенных конеными простыми группами // Математические труды. – 1998. – Т.1, № 1. – С. 129–138.

2. Нерешенные вопросы теории групп. – Коуровская тетрадь, 18-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2014.

ГОМОМОРФИЗМЫ ИЗ N-ГРУППЫ В ПОЛУАБЕЛЕВУ N-ГРУППУ

Н. А. Щучкин
Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград
nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $x \in G$, образует полуабелеву n-группу [1]. У изоморфных n-групп и изоморфных полуабелевых n-групп n-группы гомоморфизмов также изоморфны, более того, доказана

Теорема 1. *Изоморфизмы ψ_1 из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в n-группу $\langle G', f_1'\rangle$ и ψ_2 из полуабелевой n-группы $\langle C, f_2\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C', f_2'\rangle$ индуцируют изоморфизм τ n-групп гомоморфизмов $\langle Hom(G, C), g\rangle$ и $\langle Hom(G', C'), g'\rangle$, который действует по правилу $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.*

Одной из основных проблем, касающихся n-групп гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, является отыскание полуабелевой n-группы, которая была бы изоморфна n-группе гомоморфизмов из некоторой известной n-группы в полуабелеву n-группу. Если такая n-группа найдена, то можно сказать, что удалось описать n-группу гомоморфизмов из этой известной n-группы в полуабелеву n-группу. В тезисах конференции этого года в г. Тула [2] имеется описание двух n-групп гомоморфизмов из бесконечных абелевой и не абелевой полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу. Ниже приведено описание n-группы гомоморфизмов из конечной полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу.

Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z_k, C), g\rangle$ из конечной полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle$, где $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_1 + mx_2 + \ldots + m^{n-2}x_{n-1} + x_n + l$, $0 \leqslant m < k$, m взаимно прост с k, $lm \equiv l \pmod{k}$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(n-1, k)$ для $m = 1$, $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$ для $m \neq 1$, в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$. На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим группу C по сложению $a + b = f_2(a, c_1, \ldots, c_{n-2}, b)$. Выбираем элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, c_1, \ldots, c_{n-2})$ группы C ($c_1, \ldots, c_{n-2}$ — обратная последовательность для элемента c). Пусть $C[k]$ — подгруппа элементов x из C, для которых $kx = 0$, и P_2 — все пары (a, u) элементов из C, для которых $la = u + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u) + d_2$, $a \in C[k]$ и $\varphi_2(a) = ma$. Получим полуабелеву n-группу $\langle P_2, h_2\rangle$, где $h_2((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n))$.

Теорема 2. *Полуабелева n-группа $\langle P_2, h_2\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из полуциклической n-группы $\langle Z_k, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Любая полуциклическая n-группа $\langle G, f\rangle$ порядка k изоморфна n-группе $\langle Z_k, f_1\rangle$ [3]. Будем говорить в этом случае, что $\langle G, f\rangle$ имеет тип (k, m, l).

Следствие 1. *Полуабелева n-группа $\langle P_2, h_2\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа (k, m, l) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Среди конечных полуциклических n-групп имеется циклическая n-группа, это n-группа типа $(k, 1, 1)$ [3]. Для конечных циклических n-групп верно

Следствие 2. *Полуабелева n-группа $\langle P_2, h_2\rangle$ при $m = l = 1$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ порядка k в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Литература

1. Glazek K., Gleichgewicht B. Abelian n-groups // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru). 1977. vol. 29. P. 321-329.

2. Щучкин Н. А. Полиадическая группа гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу // Сборник материалов XVI международной конференции “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”, посвященная 80-летию со дня рождения Мишеля Деза. Тула, 13-17 мая 2019 г. С. 125-127.

3. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. 3 (54). С. 186-194.

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ П-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

А.А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Гомель (Беларусь)
yadchenko_56@mail.ru

Пусть π — множество простых нечетных чисел, G — конечная π-разрешимая группа, которая имеет точный комплексный характер χ степени n и содержит π-холлову TI-подгруппу H. Если характер χ неприводим, то в [1] утверждается. что либо $H \triangleleft G$, либо n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ или $1(\mathrm{mod}|H|)$.

Определение. *Скажем, что натуральное число* n *удовлетворяет условию* $D(h)$, *если* $n = kh - 1$ *для таких натуральных чисел* k *и* h, *что* $k < h$ *или* $n = kh + 1$ *для таких натуральных чисел* k *и* h, *что* $k < h - 2$.

Для не π-замкнутых неприводимых комплексных линейных групп степени n, удовлетворяющих условию $D(|H|)$, утверждение теоремы из [1] можно уточнить.

Теорема. *Пусть* G *– конечная* π *-разрешимая и не* π*-замкнутая группа с* π*-холловой* TI*-подгруппой* H *нечетного порядка. Если группа* G *имеет точный неприводимый комплексный характер* χ *степени* n, *удовлетворяющей условию* $D(|H|)$, *то она разрешима и выполняются следующие заключения:*

(1) $n = q^e$ *для некоторого простого числа* q *и некоторого натурального числа* e*;*

(2) $q^\alpha \not\equiv -1$ *и* $1(mod|H|)$ *для всех натуральных чисел* $1 \leqslant \alpha < e$.

(3) силовская q*-подгруппа группы* G *не является абелевой в случае, когда* $n = k|H| - 1$ *для такого натурального числа* k, *что* $k < |H|$.

Литература

1. Ядченко А. А. *К проблеме Айзекса* // Матем. сборник. 2013. Т. 204. № 12. С. 147-156.