Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

19–23 августа 2019 г.

Тезисы докладов

Новосибирский государственный университет

Новосибирск • 2019

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

August 19–23, 2019

Collection of Abstracts

Novosibirsk State University

Novosibirsk • 2019

Содержание

I. Пленарные доклады

Примитивно рекурсивные алгебраические структуры и копируемые классы

И. Ш. Калимуллин

В докладе будут обсуждаться вопросы примитивно рекурсивной представимости различных классов алгебраических структур. При анализе полученных докладчиком (совместно с А. Г. Мельниковым, Р. Милером, К. М. Нг и другими) результатов была обнаружена тесная связь между примитивно рекурсивной представимостью и введенного А. Монталбаном понятия копируемого класса алгебраических структур. Это понятие, определенное в терминах бесконечной игры двух игроков, было введено для систематизации имеющихся в теории вычислимых моделей построений, напрямую не связанных с примитивной рекурсией. Поэтому соответствия, обнаруженные между двумя различными подходами, являются достаточно неожиданными.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: ikalimul@gmail.com

Простые правоальтернативные супералгебры

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

В последние полвека значительный интерес алгебраистов был связан с изучением супералгебр. Так, изучением простых супералгебр в различных многообразиях занимались многие специалисты: Ч.Т.К. Уолл (ассоциативные), В.Г. Кац (лиевы, йордановы), И.Л. Кантор (йордановы), Е.И. Зельманов (альтернативные, йордановы), И.П. Шестаков (альтернативные, $(-1,1)$, йордановы, некоммутативные йордановы), М. Расин (йордановы), К. Мартинес (йордановы), В.Н. Желябин (йордановы), А.П. Пожидаев (некоммутативные йордановы).

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И. П. Шестаковым в [**1**].

Основным результатом исследования является описание простых конечномерных унитальных правоальтернативных супералгебр с полупростой четной частью. Доказано, что всякая такая супералгебра является либо простой ассоциативной матричной алгеброй Уолла, либо простой альтернативной супералгеброй Шестакова, либо асимметричным дублем, либо абелевой супералгеброй типа $\mathrm{B}_{n|n}$, $n \geq 2$, или $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$.

Кроме того, попутно получено описание правоальтернативных супералгебр с простой четной частью; всякая такая супералгебра либо проста, либо имеет нечетную часть с нулевым умножением.

Далее, классифицированы простые правоальтернативные супералгебры при дополнительных ограничениях на четную часть. Получены описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр абелевого типа [**2**]; с ассоциативно-коммутативной четной частью [**3**]; сингулярных супералгебр размерности 5 и 6 [**4, 5**]. Описаны центральные простые унитальные правоальтернативные супералгебры абелева типа произвольной размерности, у которых чётная часть является полем [**6**].

Получено описание строения произвольных конечномерных унитальных правоальтернативных супералгебр, являющихся альтернативным бимодулем над полупростой четной частью [**7**].

References

[1] Филипов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Днестровская тетрадь. Нерешенне проблемы теории колец и модулей. Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 4-е издание, 1993.

[2] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль. Изв. РАН. Сер. матем., 79(3):131–158, 2015.

[3] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры с ассоциативно-коммутативной чётной частью над полем характеристики нуль. Изв. РАН. Сер. матем., 82(3):136–153, 2018.

[4] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые 5-мерные правоальтернативные супералгебры с тривиальной четной частью. Сиб. матем. журнал, 58(6):1387–1400, 2017.

[5] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Сингулярные 6-мерные супералгебры. Сибирские электронные математические известия, 15:92–105, 2018.

[6] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые правоальтернативные супералгебры абелева типа, четная часть которых является полем. Изв. РАН. Сер. матем., 80(6):247–257, 2016.

[7] Murakami L. S. I., Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. Finite-dimensional right alternative superalgebras with a semisimple strongly alternative even part. Journal of Algebra, 528:150–176, 2019.

Финансовый университет при правительстве РФ, Москва
E-mail: o.v.shashkov@mail.ru

Теоретико-модельные свойства делимых жестких групп

Н. С. Романовский

Разрешимая группа G называется m-жёсткой, если в ней существует нормальный ряд подгрупп

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1,$$

факторы которого G_i/G_{i+1} абелевы и, рассматриваемые как (правые) модули над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G/G_i]$, не имеют кручения. Примерами таких групп служат свободные m-ступенно разрешимые группы и итерированные сплетения m нетривиальных абелевых групп без кручения. Если дополнительно элементы фактора G_i/G_{i+1} делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/G_i]$ то группа G называется делимой, в этом случае G_i/G_{i+1} является векторным пространством над телом частных кольца $\mathbb{Z}[G/G_i]$ (соответствующее тело частных существует). В докладе будут разбираться следующие аспекты теории моделей делимых m-жёстких групп: полнота теории, ω-стабильность, элементарные подмодели, элиминация кванторов, однородность, формульные подгруппы.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: rmnvski@math.nsc.ru

Theories of Tarskian truthpredicates and reflection principles

L. D. Beklemishev

We study extensions of Peano arithmetic by iterated truthpredicates satisfying Tarski biconditionals for truth. We consider reflection principles for such theories and study the associated reflection algebras from the point of view of modal logic. On the basis of these methods we obtain conservation results and the results characterizing proof-theoretic ordinals of such theories in various levels of the hyperarithmetical hierarchy. These theories can then be related to the standard second-order theories of "predicative" strength, which gives an alternative method of analysing these well-known systems.

Steklov Institute of Mathematics, Moscow
E-mail: lbekl@yandex.ru

Maltsev products in investigating lattices of quasivarieties

W. Dziobiak

Lattices of quasivarieties which in the literature are called Q-lattices have been investigated for five decades. The investigations have been proposed independently by Garrett Birkhoff and Anatoliĭ Ivanovich Maltsev in [**2**] and [**7**], respectively, in the form of the following question: *Which lattices are Q-lattices?*

Many significant results during that period have been achieved and were partially documented in the book [**3**] and summarized in the survey article [**1**]. The achieved results had an impact on developing Universal Algebra which was acknowledged in the Epilogue of the book [**4**] by including the effort of investigating Q-lattices into one out of the five stimulating factors of developing Universal Algebra. The paper [**5**] is excellent recent evidence of that impact.

Based on the results achieved Q-lattices are either truly complex or tractable. Not much is known about Q-lattices which are at the middle. That is, not much is known about which Q-lattices satisfy a non-trivial lattice identity but which are not distributive. The goal of the talk is to propose a method which suggests a way to fill out this gap. The method is based on the concept of Maltsev product introduced in [**6**].

Theorem. *For quasivarieties of lattices $\mathcal{K}$ and $\mathcal{L}$, if each of $\mathcal{K}$ and $\mathcal{L}$ satisfies a non-trivial lattice identity, not necessarily the same one, then so does the Maltsev product $\mathcal{K} \circ \mathcal{L}$.*

In the talk, we display applications of this theorem amongst which will be a positive solution of a long standing open problem which is: Is there a quasivariety that is relatively finite-to-finite universal but not Q-universal.

The results presented in the talk are jointly obtained with M.E. Adams or with M.E. Adams and H.P. Sankappanavar.

References

[1] Adams M. E., Adaricheva K. V., Dziobiak W., Kravchenko A. V., Some open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev, Studia Logica 78 (2004), 357–378.
[2] Birkhoff G., Universal algebra, Proc. First Canad. Math. Congr. (Montreal, 1945), 310- 326, The Univ. Toronto Press, 1946.
[3] Gorbunov V. A., Algebraic Theory of Quasivarieties, Siberian School of Algebra and Logic, Consultants Bureau, New York, 1998.
[4] Grätzer G., Universal Algebra, revised reprint of the 1979 second edition, Springer, New York, 2008.
[5] Kravchenko A. V., Nurakunov A. M., Schwidefsky M. V., On representation of finite lattices, Algebra Universalis, to appear.
[6] Maltsev A. I., Multiplication of classes of algebraic systems, Sibirsk. Mat. Ž. 8 (1967), 346–365.
[7] Maltsev A. I., Problems on the borderline of algebra and logic, Proc. Inter. Congress of Mathematicians, Moscow 1968, 217–231.

University of Puerto Rico, Mayaguez (USA)
E-mail: w.dziobiak@gmail.com

Constructive classifications of logics

L. Maksimova

Perceptibility and recognition

Classifications of logics are considered over the Johansson minimal logic J and modal logics.

Let L_0 be a J-logic, L be a finitely axiomatizable logic containing L_0. Say that L is perceptible over L_0 if there is an algorithm verifying for any formula A, if the inclusion $L_0 + A \geq L$ holds; L is strongly perceptible over L_0 if there is an algorithm verifying for any finite set Rul of axioms and rules of inference, if the inclusion $L_0 + Rul \geq L$ holds; L is recognizable over L_0 if there is an algorithm verifying for any formula A the equality $L_0 + A = L$; L is strongly recognizable over L_0 if there is an algorithm verifying for any finite set Rul of axioms and rules of inference the equality $L_0 + Rul = L$.

Proposition. (1) The logic Int is recognizable over J.

(2) The logic Neg $=$ J $+ \perp$ is strongly recognizable over J.

It is unknown if Int is strongly recognizable over J.

Tabularity and pretabularity

Theorem. Tabularity and pretabularity are decidable over J and S4. All these pretabular logics are recognizable.

Slices and levels

There are two extensions over J of T. HososTs slices over Int. Denote

$\pi_0 = p_0$, $\pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n)$, $\lambda_0 = \perp$, $\pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \lambda_n)$

A J-logic L is a logic of the n-th slice, if it contains π_n and does not contain π_{n-1}; it is the logic of the n-th level, if contains λ_n and does not contain λ_{n-1}.

1. The set of J-logics of the infinite level is strongly decidable.
2. The number of any level over J is strongly calculable.
3. The number of any slice over J is calculable.
4. The number of any finite slice over J is strongly calculable.

Problem. Is the set of finite-slice logics over J strongly decidable?

5. The number of any slice over Gl= J+ $p \vee \neg p$ is strongly calculable.

So the classification by slices is strongly calculable over Gl.

Interpolation properties

All variants of interpolation properties are decidable over Int and S4.

References

[1] Maksimova L. L., Yun V. F. Extensions of the minimal logic and interpolation problem. Siberian Math. J., 59, 4, (2018), 681–693.

[2] Maksimova L. L. Classification of extensions of the modal S4 logic. Siberian Math. J., 54, 6 (2013), 1337–1352.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru

Punctual computability

A. Melnikov

I will talk about the recent significant progress in the study of “online” (punctual) presentations of algebraic and combinatorial structures. Such studies lie at the boundary between constructive model theory and feasible algebra. Remarkably, the powerful degree-theoretic techniques can be used to derive unexpected corollaries on punctual presentations of common algebraic structures such as countable graphs, linear orders, and finitely generated groups. I will also discuss several counterintuitive pathological examples, including the recently announced joint result with Ng on structures with finite punctual dimension.

Massey University, Auckland (New Zealand)
E-mail: alexander.g.melnikov@gmail.com

Malcev's problems, weak second order logic, and bi-interpretability

A. Miasnikov

Malcev's problems on definable subgroups of a free non-abelain group F were solved a few years ago by Kharlampovich and Miasnikov and also by Perin, Pillay, Sklinos, and Tent.

It turned out that only cyclic subgroups are definable proper subgroups of F. Similar results hold for torsion-free hyperbolic groups. On the other hand, in finitely generated abelian groups only subgroups of finite index and the trivial subgroup are definable. One may consider the following question: what are finitely generated infinite groups where all finitely generated subgroups are definable? Furthermore, are there any interesting infinite groups G where finitely generated subgroups are uniformly definable, i.e., for each natural n there exists a first-order formula $D_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ such that for any elements $g_1, \ldots, g_n \in G$ the formula $D_n(x, g_1, \ldots, g_n)$ defines in G the subgroup generated by $g_1, \ldots, g_n$? Surprisingly, there is a wide variety of finitely generated infinite groups with uniformly definable subgroups. Such questions are part of a much bigger problem about the expressive power of the first-order logic in groups (or rings, or arbitrary structures). I will discuss this problem and its connections with the weak second order logic and bi-interpretability.

Stevens Institute, Hoboken, NJ (USA)
E-mail: amiasnikov@gmail.com

Algebras of Monster type and the double axis construction

S. Shpectorov

Axial algebras are commutative non-associative algebras generated by special semisimple idempotents called axes. Classes of axial algebras are distinguished by the fusion rules which restrict multiplication of eigenvectors with respect to the adjoint action of an axis. When fusion rules are graded, every axis leads to a group of automorphisms of the algebra, and in this way, axial algebras are inherently related to groups. The motivating examples of axial algebras are the Jordan algebras, corresponding to classical and some exceptional groups, as well as the 196, 884-dimensional real Griess algebra for the Monster sporadic simple group. The axioms of axial algebras descend from the Majorana algebras of Ivanov [**1**]. It is hoped that within the paradigm of axial algebras we can build a theory involving all or most of the finite simple groups.

The class of algebras of Jordan type η was introduced by Hall, Rehren and Shpectorov in [**2**], where it is proved (see also [**3**]) that, for $\eta = 12$, the only algebras arising are the Matsuo algebras corresponding to the 3-transposition groups. The case $\eta = 12$, where the Jordan algebras arise, remains open.

The class of algebras of Monster type generalizes both the algebras of Jordan type and the Griess algebra. Until recently, the Griess algebra, its known subalgebras and a few individually computed algebras for small groups were the only known additions. In the talk we will discuss the double axis construction which is a rich source of examples of algebras of Monster type. It originated from the GAP computations performed by Galt, Mamontov and Staroletov, the $3A$, and it was then developed by Joshi [**4**] and by Galt, Joshi, Mamontov, Shpectorov and Staroletov in [**5**], where, in particular, the algebras arising from the symmetric groups were determined. More recently, Hoffman, Rodrigues and Shpectorov [**6**] completed the case of the unitary groups over the field with four elements.

References

[1] Ivanov A. A., The Monster Group and Majorana Involutions, Cambridge Tracts in Mathematics 176, Cambridge University Press 2008, 252 pp.

[2] Hall J.I., Rehren F., Shpectorov S., Primitive axial algebras of Jordan type, J. Algebra 437 (2015), 79–115.

[3] Hall J.I., Segev Y., Shpectorov S., Miyamoto involutions in axial algebras of Jordan type half, Israel J. Math. 223 (2018), 261–308.

[4] Joshi V., Double axes, MRes thesis, University of Birmingham, 2018.

[5] Galt A., Joshi V., Mamontov A., Shpectorov S., Staroletov A., Double axes and related primitive subalgebras in Matsuo algebras, in preparation.

[6] Hoffman C.G., Rodrigues B., Shpectorov S., Axial algebras of Monster type from unitary groups, in preparation.

University of Birmingham, Birmingham (United Kingdom)
E-mail: s.shpectorov@bham.ac.uk

Asymptotic and multidimensional asymptotic classes of finite structures

Ch. Steinhorn

Asymptotic classes of finite structures and measurable structures were introduced by Macpherson and the speaker in an effort to develop a model theory for classes of finite structures that reflects contemporary infinite model theoretic themes. Current research that generalizes these concepts to what are called multidimensional asymptotic classes and generalized measurable structures will be emphasized. Much of this most recent work is joint with Macpherson, S. Anscombe, and D. Wolf.

Vassar Colledge, Poughkeepsie, NY (USA)
E-mail: steinhorn@vassar.edu

Reconstructing the topology on monoids and polymorphism clones

J. K. Truss

We are interested in formulating conditions on a first order structure which ensure that it can be 'reconstructed' from its automorphism group G. Classically this is often done by appealing to the 'small index property' (SIP) for G, in cases where this holds. If we attempt to carry out a similar project for monoids of structure-preserving maps (either embeddings, or general endomorphisms), where SIP makes no sense as Lagrange's Theorem is false, we are led to a topological formulation called 'automatic homeomorphicity' of what is required, proposed by Bodirsky and Pinsker. In joint work with Mike Behrisch and Edith Vargas-Garcia, we present results of this kind for the rationals as an ordered set, and also for corresponding polymorphism clones.

University of Leeds, Leeds (UK)
E-mail: J.K.Truss@leeds.ac.uk

Permutation groups and coherent configurations

A. V. Vasil′ev

Starting in the late 1960s, the theory of coherent configurations has now become one of the central parts of algebraic combinatorics. The main goal of this theory is to provide a common method to study symmetries of combinatorial objects. So it is not surprising that permutation groups provide a rich source of coherent configurations. In fact, there is a natural Galois correspondence between subgroups of symmetric group on a set Ω and coherent configurations defined on Ω. The closed objects with respect to that correspondence are 2-*closed* permutation groups and *schurian* coherent configurations. In our talk, we will discuss these notions from various points of view: algebraic, combinatorial, algorithmic. We will also address the question how one can effectively solve the following problems.

2-Closure Problem. *Given a permutation group on a finite set, find the* 2*-closure of it.*

Schurity Problem. *Given a coherent configuration on a finite set, determine whether or not it is schurian, and if so, find a permutation group associated with it.*

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: vasand@math.nsc.ru

Completely reachable automata: an interplay between transformation semigroups, finite automata, and binary trees

M. V. Volkov

We present recent results by the speaker et al. related to finite deterministic automata in which every non-empty subset of the state set is reachable. Motivations for studying automata of this sort come from Cerny's celebrated conjecture about synchronizing finite automata as well as from certain questions in the theory of transformation semigroups.

Ural Federal University, Ekaterinburg
E-mail: m.v.volkov@urfu.ru

Anabelian geometry in a model theory setting

B. Zilber

I will present a model-theoretic formalism for treating analytic and pro-etale covers of algebraic varieties. This allows a reformulation of Grothendieck's anabelian geometry. It also allows to consider questions of categoricity of respective theories (or rather abstract elementary classes).

A series of results obtained in 2002–2015 for semi-abelian varieties demonstrated that categoricity is equivalent to the classification of the action of Galois groups on the torsion subgroups together with relevant Kummer theory. In anabelian cases categoricity leads directly to conjectures about the action of Galois group on pro-finite fundamental group first raised in Grothendieck's "Esquisse d'un programme."

University of Oxford, Oxford (UK)
E-mail: Boris.Zilber@maths.ox.ac.uk

II. Секция «Алгебраическая комбинаторика»

Максимальное пересечение линейных и изотопных им кодов

С. В. Августинович, Е. В. Горкунов

Рассмотрим n-мерное линейное пространство $V = \mathbb{F}^n$ над конечным полем $\mathbb{F} = GF(q)$ и его координатное представление в стандартном базисе. Произвольное подмножество $C \subseteq V$ называется *кодом* длины n. Код, образующий подпространство в V, *линейный*. Элементы кода называются *кодовыми словами*.

Напомним, что расстояние Хэмминга $d(x, y)$ между векторами $x, y \in V$ определяется количеством координат, в которых различаются x и y. Число $w(x) = d(0, x)$ отражает *вес* вектора $x \in V$. Минимальное ненулевое расстояние между кодовыми словами кода $C \in V$ называется *кодовым расстоянием* C и обозначается через $d(C)$.

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — набор перестановок из симметрической группы S_q, действующей на элементах поля $\mathbb{F}$. Хорошо известно, что преобразование пространства $\sigma\colon V \to V$, заданное на произвольном векторе $x \in V$ по правилу

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), \ldots, \sigma_n(x_n)),$$

сохраняет попарные расстояния между векторами, т. е. является изометрией. Изометрию такого вида будем называть *изотопией*.

Два кода $C, C' \subseteq V$ *изотопны*, если $C' = \sigma(C)$ для некоторой изотопии σ пространства $\mathbb{F}$. Код, изотопный линейному коду, назовем *псевдолинейным*.

Рассмотрим линейный код $C \leqslant V$ с кодовым расстоянием не меньше 2 и подействуем, например, на первую координату кодовых слов транспозицией (01). Образ кода C при таком отображении обозначим через C'. Поскольку C линейный, для каждого элемента $a \in \mathbb{F}$ в коде содержится одинаковое количество кодовых слов со значением первой координаты, равным a. Поэтому $|C \cap C'| = \frac{q-2}{q}|C|$.

Оказывается, указанное число отражает максимальную мощность пересечения не только для линейного и изотопного ему псевдолинейного кодов, но и для двух произвольных псевдолинейных кодов. В настоящей работе доказана

Теорема. *Для различных псевдолинейных кодов $C_1, C_2 \subseteq V$ одинаковой мощности имеет место*

$$|C_1 \cap C_2| \leqslant \frac{q-2}{q}|C_1|.$$

Эта теорема устанавливает минимальное межкодовое расстояние в классе линейных и им изотопных кодов одной мощности M. Именно, если расстояние между кодами измерять мощностью их симметрической разности, получим, что минимальное расстояние в указанном классе равно $\frac{4}{q}M$.

Авторы благодарны Д. С. Кротову и В. Н. Потапову за полезные замечания по существу настоящей работы.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск; Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: avgust@math.nsc.ru, gorkunov@math.nsc.ru

Полностью регулярные коды в n-мерной квадратной решетке

А. Ю. Васильева

Для произвольного регулярного графа $G = (V, E)$ и подмножества $C \subseteq V$ его вершин определим C_i как множество вершин на расстоянии i от C $(i = 0, 1, \dots, diam(G))$. Множество C называется полностью регулярным кодом в графе G, если для произвольного $i = 1, \dots, diam(G)$ двудольный граф, порожденный долями C_{i-1} и C_i, является бирегулярным; упорядоченный набор степеней этих графов называется набором параметров кода.

Граф G_n n-мерной квадратной решетки – это граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^n$, в котором две вершины соединены ребром, если они различаются ровно в одном разряде ровно на единицу. Известно, что в этом графе любой полностью регулярный код имеет кодовое расстояние не более 4 и радиус покрытия не более $2n$ (причем эта оценка достижима), однако для произвольного $n > 3$ нет не только классификации всех полностью регулярных кодов, но даже их параметров.

Рассмотрим граф D_n, получаемый из G_{n-1} добавлением всех ребер вида

$$((a_1, \dots, a_{n-1}), (a_1 + 1, \dots, a_{n-1} + 1)), \quad (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Граф D_n можно получить из G_n гомоморфизмом h_n, при котором отождествляются все вершины, различающиеся на вектор $(a, \dots, a)$, $a \in \mathbb{Z}$:

$$h_n : G_n \to D_n, \quad f_n(a_1, \dots, a_n) = (a_1 - a_n, \dots, a_{n-1} - a_n).$$

Поэтому из любого полностью регулярного кода в D_n обратным гомоморфизмом можно получить полностью регулярный код в G_n.

При $n = 3$ граф D_3 – это граф бесконечной треугольной решетки, для него все полностью регулярные коды перечислены, причем оказалось, что их радиус покрытия не превосходит 2 (в графе же G_3 верхняя достижимая оценка - 6). В данной работе делается попытка обобщения полностью регулярных кодов в треугольной решетке с радиусом покрытия 2 на случай графа D_n для произвольного n.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vasilan@math.nsc.ru

Об автоморфизмах небольших дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$

М. П. Голубятников

В работе [1] изучены массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_t(l,t)$. В [2, теорема 2] найдены бесконечные серии допустимых массивов пересечений таких графов. В случае $c_2 = 1$ имеем двупараметрическую серию $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, $m < n$. В [2] найдены простые порядки автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$. С помощью этого результата в работе найдены автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$ (Теорема 1, $n = 13, m = 7$), $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$ (Теорема 2, $n = 17, m = 13$) и $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$ (Теорема 3, $n = 21, m = 13$). Наиболее интересные случай возник при исследовании графа с массивом $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, в частности справедлива следующая теорема

Теорема. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 11, 13\}$, 21 делит $\alpha_0(g)$ и $\alpha_3(g)$, и верно одно из утверждений:*

(1) Ω – пустой граф, $p \in \{3, 7, 13\}$, $\alpha_3(g) = 273pl$ и $\alpha_1(g) = 13pl + 34ps + 13^2 \cdot 21 \cdot 293$;

(2) Ω является 7-кликой, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 21(26l + 16)$ и $\alpha_1(g) = 26l + 34r + 24$;

(3) Ω является 273-кокликой, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3 и $p = 2$.

(4) Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c, если Δ — связная компонента графа Ω, содержащая вершину a, то либо $p = 2$, либо диаметр Δ равен 3 и $p = 3$.

Следствие. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда $|G|$ не делится на 17. В частности, Γ не является реберно симметричным графом.*

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 19-71-10067).

Список литературы

[1] Makhnev A. A., Golubyatnikov M. P., Guo Wenbin. Inverse Problems in graph theory: nets, Communications in Mathematics and Statistics 2019, v. 7, N 1, 69–83.

[2] Махнев А. А., Голубятников М. П. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, Международная конф. «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем». Тезисы докладов 2019, 86.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: mike_ru1@mail.ru

Об автоморфизмах графа Шилла с массивами пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$

К. С. Ефимов, А. А. Махнев

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\min\{a_3, (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1 = a_3$ по теореме 7 из [1] имеем $\theta_1 = (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2$. Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий собственное значение θ_1, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. В [1] классифицированы графы Шилла с $b = 2$ и $b = 3$.

Предложение 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 2$. Тогда Γ имеет массив пересечений* $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$, $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$, $\{6, 4, 2; 1, 2, 3\}$, $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$, $\{18, 10, 4; 1, 4, 9\}$.

Для каждого из указанных массивов существует единственный дистанционно регулярный граф — это нечетный граф степени 4, обобщенный шестиугольник порядка (2,2), граф Хэмминга $H(3, 3)$, граф Доро и граф Джонсона $J(9, 3)$ соответственно.

Предложение 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 3$. Тогда Γ имеет массив пересечений* $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$, $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$.

Известно существование графа с массивом пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ (это унитарный неизотропный граф с $q = 4$), но неизвестна единственность. Существует единственный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (это граф Доро). В [3–6] доказано, что графы Шилла с массивами персечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существуют. Зюляркина Н.Д. и Махнев А.А. нашли возможные автоморфизмы графа Шилла с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ [7].

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$. Тогда Γ имеет $v = 1+30+220+99 = 350$ вершин и спектр $30^1, 10^{63}, 0^{154}, -5^{132}$.

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 35t$, $\alpha_3(g) = 105t$, или $\alpha_3(g) = 350$, либо $p = 2$ и $\alpha_3(g) = 350$;

(2) Ω является m-кокликой, Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $m \le 30$, $p = 5$, m делится на 5, $\alpha_1(g) = 50t - 25s + 10$ и $\alpha_3(g) = 9m - 50t + 150s + 90$;

(3) Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, $p = 2$, вершины из разных максимальных клик графа Ω находятся на расстоянии 3 в Γ, порядок любой максимальной клики из Ω нечетен и число максимальных клик в Ω четно;

(4) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \le 7$.

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$. Тогда Γ не является реберно симметричным графом.*

Список литературы

[1] Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs, Europ. J. Comb. 2010, v. 31, 2064-2073.

[2] Махнев А.А., Голубятников М.П. Граф Шилла с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ не существует, Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем. Тез. докл. Нальчик 2019, 85.

[3] Brouwer A.E., Sumaloj S., Worawannotai C., The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$, Australasian J. Comb. 2016, v. 66, 330-332.

[4] Белоусов И.Н., Махнев А.А. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ не существуют, Сибирские электрон. матем. известия 2018, т. 15, 1506-1512.

[5] Белоусов И.Н., Махнев А.А. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует, Сибирские электрон. матем. известия 2019, т. 16, 206-216

[6] Зюляркина Н.Д., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, Доклады академии наук 2011, т. 439, N 4, 443-447.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

К вопросу о числе порождающих элементов примитивных 3/2-транзитивных групп

М. А. Звездина

Обозначим через $d(G)$ минимальное число порождающих элементов конечной группы G. Если G — примитивная группа подстановок степени n, то число $d(G)$ ограничено сверху функцией, зависящей от от n (см., например, [**1**]). С другой стороны, известно, что $d(G) = 2$, если G — конечная неабелева простая группа. В [**2**] было доказано, что $d(G) \leq 3$, если G — почти простая группа. Таким образом, для некоторых важных классов групп число $d(G)$ ограничено константой.

Мы исследуем вопрос о минимальном числе порождающих примитивной 3/2-транзитивной группы подстановок. Транзитивная группа подстановок на конечном множестве Ω называется 3/2-транзитивной, если все орбиты стабилизатора G_α точки α на множестве $\Omega \setminus \{\alpha\}$ имеют одинаковую нееденичную длину. Класс 3/2-транзитивных групп включает в себя группы Фробениуса, 2-транзитивные группы и их нерегулярные нормальные подгруппы.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект 0250-2019-0001).

Список литературы

[1] Lucchini A., Menegazzo F., Morigi M., Asymptotic Results for Primitive Permutation Groups and Irreducible Linear Groups. J. Algebra 223 (2000) 154–170.

[2] Volta F. D., Lucchini A., Generation of almost simple groups. J. Algebra 178 (1995) 194–223.

Институт математики им. С.Л. Соболева; Новосибирский государственный университет, Новосибирск

E-mail: zma@math.nsc.ru

О группе коллинеаций полуполевых плоскостей порядка p^4

О. В. Кравцова

Известная гипотеза о разрешимости полной группы коллинеаций (автоморфизмов) всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка ([**1**], см. также [**2**], вопрос 11.76, 1990 г.) не имеет опровергающих контрпримеров, но до сих пор не получила общего подхода к доказательству. Обсуждая эту гипотезу, предлагаем рассмотреть полуполевые плоскости, группа автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) которых имеет подгруппу либо фактор-группу, изоморфную знакопеременной группе A_5 как подгруппе значительного количества простых неабелевых групп.

Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие A_5, описаны в [**3**]. Доказано, в частности, что полуполевая плоскость порядка p^4 (p – простое) не допускает A_5 в группе автотопизмов. Изучая далее для плоскостей малого ранга фактор-группу $SL(2,5)$ по центру, изоморфную A_5, приходим к необходимости последовательного рассмотрения подгрупп, изоморфных Q_8 либо $SL(2,3)$. Отметим, что в силу теоремы Фейта–Томпсона о группах нечетного порядка достаточно ограничиться ситуацией, когда группа автотопизмов содержит бэровскую инволюцию, т.е. коллинеацию, поточечно фиксирующую подплоскость максимального порядка.

Теорема. *Пусть π – полуполевая проективная плоскость порядка p^4 ($p > 2$ – простое), Λ – ее группа автотопизмов.*

1. Λ не содержит подгруппы, изоморфной A_5.

2. Если $p-1$ делится на 4, то Λ не содержит подгруппы автотопизмов, изоморфной $SL(2,3)$.

3. Если $p-1$ не делится на 4 и σ – бэровская инволюция в Λ, то $C_\Lambda(\sigma)$ не содержит подгруппы, изоморфной $SL(2,3)$.

Построено матричное представление регулярного множества полуполевой плоскости порядка p^4, допускающей группу кватернионов Q_8. Приведены примеры таких плоскостей.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00566 А.

Список литературы

[1] Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes (Springer–Verlag New–York Inc., 1973).

[2] Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач (Новосибирск, 2006).

[3] Кравцова О. В., Дураков Б. К. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_5, Сиб. Мат. Журн., 59 (2), 396-411 (2018).

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: ol71@bk.ru

О совершенных раскрасках бесконечных цепей кратных паросочетанию

М. А. Лисицына

Раскраска вершин графа G называется *совершенной*, если все соцветные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения.

Пусть G и H – произвольные графы. Вставим копию G вместо каждой вершины H, добавим ребра, соединяющие любые две вершины из соседних копий. Определенный таким образом граф является лексикографическим произведением графов H на G и обозначается $H \cdot G$.

Бесконечной цепью C_∞ называется граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а ребрами соединены вершины, номера которых отличаются на 1. Лексикографическое произведение C_∞ на G назовем *G-кратной бесконечной цепью.* Далее всюду n — натуральное число. Напомним, что обозначение M_{2n} закреплено за графом совершенного паросочетания на $2n$ вершинах. Объектом исследования являются совершенные раскраски M_{2n}-кратной цепи в конечное число цветов.

Ранее изучались совершенные раскраски графов $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ и $C_\infty \cdot K_n$ [**1, 2**]. Все совершенные раскраски таких графов в конечное число цветов описаны в [**2**].

Построим раскраску лексикографического произведения произвольных графов H на G. Возьмем совершенную раскраску H и каждому цвету в ней назначим совершенную раскраску вершин G так, чтобы различным цветам исходной раскраски соответствовали раскраски G с непересекающимися цветовыми составами. Вставим окрашенные таким образом копии графа G в предназначенные для них места в графе H. Полученную конструкцию графа $H \cdot G$ назовем *дизъюнктной раскраской.* В [**2**] доказано, что дизъюнктная раскраска лексикографического произведения графов H на G является совершенной.

Заметим, что $C_\infty \cdot M_{2n} = (C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$, где E — граф, состоящий из одного ребра. Верна следующая теорема.

Теорема. *Для $n \geq 2$ совершенные раскраски M_{2n}-кратной цепи исчерпываются дизъюнктными раскрасками лексикографического произведения графов $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ на E.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-31-00009.

Список литературы

[1] Lisitsyna M., Parshina O. On perfect 2-colorings of infinite multipath graphs [Электронный ресурс] // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Representations and Relations. (August 06-19, 2018. Akademgorodok, Novosibirsk, Russia). — P. 64. — Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/g2/g2r2/files/pdf/Book%20of%20abstracts-G2R2-2018.pdf.

[2] Lisitsyna M., Avgustinovich S.,Parshina O. Perfect colorings of infinite multipath graphs, to appear.

Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Санкт-Петербург
E-mail: lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

Дистанционно регулярные графы, новые серии

А. А. Махнев

Если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по лемме 3 из [1] граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar{\Gamma}_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(l,t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{l, tc_2, l-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$, где $l-\alpha+1 \le tc_2 < l$ и $1 \le c_2 < \alpha$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, для которого граф Γ_3 является псевдогеометрическим графом для двойственной 2-схемы, обобщенного четырехугольника или сети.

Теорема 1. (Белоусов И.Н., Махнев А.А.). *Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_{t+1}(l,t)$. Тогда $l = (t+1)m$ и возникают следующие бесконечные серии допустимых массивов пересечений:*

(1) *в случае $t+1 = m^2$ имеем массив $\{m(m^2-1), m^2(m-1), m^2; 1, 1, (m^2-1)(m-1)\}$;*

(2) *в случае $t = m+1$ имеем массив $\{m(m+1), (m+2)(m-1), m+2; 1, 1, m^2-1\}$;*

(3) *в случае $t+2 = 2m$, $m \equiv \pm 1 \pmod 3$ имеем массив $\{2m(m-1), (2m-1)(m-1), 2m-1; 1, 1, 2(m-1)^2\}$.*

Теорема 2. (Махнев А.А., Нирова М.С. [2]). *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3. Тогда*

(1) *граф $\bar{\Gamma}_3$ и граф Γ_2 не являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника;*

(2) *если Γ_3 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(l,t)$, то Γ имеет массив пересечений $\{lt, c_2(l-1), t+1; 1, c_2, (l-1)t\}$ (массив Юришича-Видали первого типа).*

Теорема 3. (Махнев А.А., Го Вэнь-Бинь, Голубятников М.П. [3]). *Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_t(l,t)$. Тогда*

(1) *в случае $c_2 = 1$ имеем двупараметрическую серию допустимых массивов пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, $m < n$;*

(2) *в случае $c_2 = 2$ найдена бесконечная серия допустимых массивов пересечений $\{2u^2-2m^2+4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$, и делит $(2m^2-4m+3)m(m-1)^2$.*

Список литературы

[1] Makhnev A., Nirova M. On distance-regular Shilla graphs, Matem. Zametki, 2018, v 103, N 5, 730–748.

[2] Махнев А.А., Нирова М.С. Обратные задачи в теории графов: обобщенные четырехугольники, СЭМИ 2018, т. 15, 927–934.

[3] Makhnev A.A., Golubyatnikov M.P., Guo Wenbin. Inverse Problems in graph theory: nets, Communications in Mathematics and Statistics 2018, v. 6, N 4, 69–83.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Комбинаторные базы когерентных конфигураций

И. Н. Пономаренко

Комбинаторная база когерентной конфигурации определяется как подмножество точек, расширяющее её до дискретной конфигурациии. В рамках соответствия Галуа между когерентными конфигурациями и группами перестановок, комбинаторные базы отвечают обычным базам последних; в частности, наименьший размер базы группы перестановок не превосходит наименьшего размера базы когерентной конфигурации, составленной из орбиталей этой группы. В докладе предполагается дать обзор известных результатов о комбинаторных базах, представить новые результаты, и сформулировать несколько открытых проблем.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург
E-mail: inp@pdmi.ras.ru

О группах автоморфизмов $\mathbf{AT4}(p, p+2, r)$-графов

Л. Ю. Циовкина

Антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами (p, q, r) (или, кратко, $\mathrm{AT4}(p, q, r)$*-графом*) называется недвудольный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений

$$\{q(pq+p+q), (q^2-1)(p+1), (r-1)q(p+q)/r, 1; 1, q(p+q)/r, (q^2-1)(p+1), q(pq+p+q)\}.$$

В $\mathrm{AT4}(p, q, r)$-графе антиподальные классы имеют размер r и локальные подграфы являются сильно регулярными графами с целыми неглавными собственными значениями p и $-q$ $(q > 0)$.

$\mathrm{AT4}(p, q, r)$-графы были введены и изучались в работах П. Тервиллигера, Дж. Кулена и А. Юришича (обзор результатов по проблеме описания $\mathrm{AT4}(p, q, r)$-графов см. в [**1**]). Интерес к исследованию класса $\mathrm{AT4}(p, q, r)$-графов обусловлен тем фактом, что в данном классе содержатся почти все известные недвудольные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 4 (см. [**2**]).

В случае, если параметры $\mathrm{AT4}(p, q, r)$-графа связаны соотношением $q = p+2$, то по теореме Юришича вторая окрестность произвольной вершины в нем — недвудольный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4. Таким образом, класс $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов является потенциально богатым источником новых примеров недвудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4.

Ввиду результата А. Броувера, граф Сойчера с массивом пересечений $\{56, 45, 16, 1; 1, 8, 45, 56\}$ является единственным $\mathrm{AT4}(2, 4, r)$-графом. Этот граф допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, изоморфную группе $3_2.U_4(3)$. Вопрос существования $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов с $p > 2$ открыт.

Настоящий доклад посвящен исследованию проблемы классификации $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов с транзитивными на дугах группами автоморфизмов. В докладе будут представлены недавние результаты автора о строении и простых спектрах групп автоморфизмов таких графов для некоторых, в том числе бесконечных, семейств параметров (p, r).

Список литературы

[1] Juri A.šić, Koolen J.H., Classification of the family $\mathrm{AT4}(qs, q, q)$ of antipodal tight graphs, J. Comb. Theory. A. 118:3 (2011), 842–852.

[2] Juri A.šić, Koolen J. H., Terwilliger P., Tight Distance-Regular Graphs, J. Algebr. Comb. 12 (2000), 163–197.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: tsiovkina@imm.uran.ru

On the Matchings-Jack conjecture

A. L. Kanunnikov

We study *the Matchings-Jack conjecture* related to algebraic combinatorics. Goulden and Jackson [**1**] introduced *Jack connection coefficients* $a^{\lambda}_{\mu\nu}(\alpha)$ depending on three partitions λ, μ, ν of an integer n and the Jack parameter α. These coefficients generalize the structure constants of the two classical commutative algebras. Namely, $a^{\lambda}_{\mu\nu}(1)$ and $2^n n! a^{\lambda}_{\mu\nu}(2)$ are the structure constants of the class algebra $Z(\mathbb{C}S_n)$ and the double coset algebra of the Gelfand pair $\big(S_{2n}, \mathrm{Cent}((1\widehat{1})\ldots(n\widehat{n}))\big)$ respectively. Moreover, the numbers $a^{\lambda}_{\mu\nu}(1)$ and $a^{\lambda}_{\mu\nu}(2)$ have a nice combinatorial interpretation in terms of matchings in graphs. Precisely, for given matchings δ_1 and δ_2 on $\{1, \widehat{1}, \ldots, n, \widehat{n}\}$, the union $\delta_1 \cup \delta_2$ consists of cycles of even length $2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_p$ for some partition $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash n$ and we write $\Lambda(\delta_1, \delta_2) = \lambda$. Now, for given partition $\lambda \vdash n$ we consider two canonical matchings $\mathbf{g}$ and $\mathbf{b}$ such that $\Lambda(\mathbf{g}, \mathbf{b}) = \lambda$ and we define the set of matchings

$$\mathcal{G}^{\lambda}_{\mu\nu} = \{\delta \mid \Lambda(\delta, \mathbf{g}) = \mu,\ \Lambda(\delta, \mathbf{b}) = \nu\}.$$

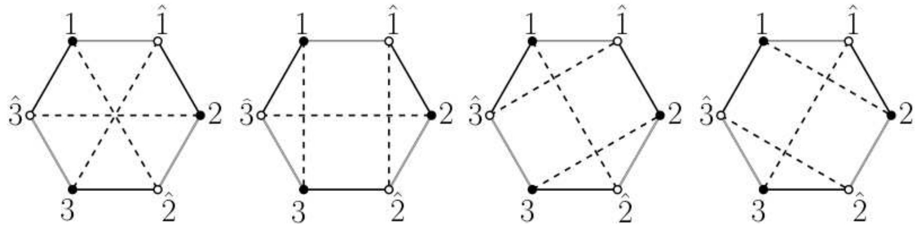
As shown in [**1**], $a^{\lambda}_{\mu\nu}(2) = |\mathcal{G}^{\lambda}_{\mu\nu}|$ and $a^{\lambda}_{\mu\nu}(1) = |\{\delta \in \mathcal{G}^{\lambda}_{\mu\nu} \mid \delta \text{ is bipartite}\}|$.

The Matchings-Jack conjecture [**1**]**.** *For all partitions λ, μ, ν of any integer n, there exists a weight function* $\mathrm{wt}\colon \mathcal{G}^{\lambda}_{\mu\nu} \to \mathbb{N}_0$ *such that*

$$a^{\lambda}_{\mu\nu}(\beta + 1) = \sum_{\delta \in \mathcal{G}^{\lambda}_{\mu\nu}} \beta^{\mathrm{wt}(\delta)},$$

$\mathrm{wt}(\delta) \leqslant n - \min\{\ell(\mu), \ell(\nu)\}$ and $\mathrm{wt}(\delta) = 0 \iff \delta$ is bipartite.

For example, $a^{3}_{33}(\beta+1) = 2\beta^2 + \beta + 1$ and all four matchings in $\mathcal{G}^{3}_{33}$ are depicted on the following figure (only the leftmost one is bipartite):



Theorem. *The polynomials $a^{\lambda}_{\mu\nu}(\beta+1)$ satisfy to the Matchings-Jack conjecture in the following cases: 1) $\lambda = [1^n], [1^{n-2}2]$ ([**1**]); 2) $\mu = \nu = [n]$ ([**2**]).*

We also present some new results on the Matchings-Jack conjecture.

References

[1] Goulden I. P., Jackson D. M. Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for jack symmetric functions, Transactions of the AMS, 348(3):873–892, 1996.

[2] Kanunnikov A. L., Vassilieva E. A. On the Matchings-Jack conjecture for Jack connection coefficients indexed by two single part partitions, Electronic Journal of Combinatorics, 2016.

MSU, Moscow
E-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

On existence of completely regular codes in hypercube and halved cube graphs

D. S. Krotov, I. Yu. Mogilnykh, A. Yu. Vasilieva

The vertex set of the *hypercube graph* $H(n)$ is the set of all tuples of length n over the binary alphabet. The vertex set of the *halved cube graph* $Q(n)$ is the set of all tuples of length n over the binary alphabet with even number of ones. Two vertices x and y are adjacent in $H(n)$ ($Q(n)$ respectively) if they differ in exactly one coordinate position (two coordinate positions respectively).

Given *a code* (a subset of vertices) C in a graph G consider the partition $C^0, C^1, \dots, C^\rho$ of the vertex set of G, where C^i is the set of vertices at distance i from C. Here ρ is the maximum i for which C^i is nonempty. The code C is called *completely regular* if for any $i \in \{0, \dots, \rho\}$ there are numbers a_i, b_i, c_i such that any vertex from C^i has exactly a_i neighbors in C^i, b_i in C^{i+1} and c_i in C^{i-1}. The collection $\{b_0, \dots, b_{\rho-1}; c_1, \dots, c_\rho\}$ is called *the intersection array* of C. Completely regular codes in the hypercube graph include Preparata, several BCH, perfect and other important codes. For a survey on completely regular codes in the hypercube and Johnson graphs we refer to [**2**].

In the current work we consider the existence problem for several completely regular codes in the hypercube and halved cube graphs. The existence of a completely regular code with the intersection array $\{23, 16, 6; 1, 8, 18\}$ in $H(23)$ is an open question [**3**].

Proposition. A completely regular code in $H(23)$ with the intersection array $\{23, 16, 6; 1, 8, 18\}$ is not a union of cyclic shifts of the Golay code.

The following result was established by means of the binary linear programming method. This approach was used earlier in [**1**] for showing the nonexistence of a certain completely regular code in the Grassman graph.

Theorem. 1. There are no completely regular codes with the intersection arrays $\{b; 32 - b\}, b \in \{17, \dots, 31\} \setminus 24$ in Q_{10}.

2. There are no completely regular codes with the intersection arrays $\{b; 64 - b\}, b \in \{37, 47, 51, 55, 59\}$ in Q_{12}.

3. There exist completely regular codes with the intersection arrays $\{b; 64 - b\}, b \in \{33, 35, 39, 41, 43, 45, 49, 53\}$ in Q_{12}.

This work was funded by the Russian Science Foundation under grant 18-11-00136.

References

[1] Bamberg J., There is no Cameron–Liebler line class of $PG(3, 4)$ with parameter 6, http://symomega.wordpress.com/2012/04/01/there-is-no-cameron-liebler-line-class-of-pg34-with-parameter-6.

[2] Borges J., Rifa J., Zinoviev V. A., On Completely Regular Codes, Problems of Information Transmission, 2019, V.55, pp.1-45.

[3] Krotov D., Koolen J., Martin W., sites.google.com/site/completelyregularcodes/h/r3

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: krotov@math.nsc.ru,ivmog@math.nsc.ru,vasilan@math.nsc.ru

On separable Schur rings over abelian groups

G. K. Ryabov

A Schur ring is called *separable* with respect to a class of groups $\mathcal{K}$ if every algebraic isomorphism from the Schur ring in question to a Schur ring over a group from $\mathcal{K}$ is induced by a combinatorial isomorphism. The importance of separable Schur rings comes from the following observation. If a Schur ring $\mathcal{A}$ is separable with respect to $\mathcal{K}$ then $\mathcal{A}$ is determined up to isomorphism in the class of Schur rings over groups from $\mathcal{K}$ only by the tensor of its structure constants.

A finite group G is said to be *separable* with respect to $\mathcal{K}$ if every Schur ring over G is separable with respect to $\mathcal{K}$. If G is separable with respect to some class then the isomorphism problem for Cayley graphs over G can be solved efficiently by using the Weisfeiler-Leman algorithm.

In our talk we will discuss which abelian groups are separable with respect to the class of abelian groups. We will also discuss in detail how to verify efficiently the isomorphism of two Cayley graphs over a separable group.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 18-31-00051).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: gric2ryabov@gmail.com

On 2-closures of rank 3 groups in polynomial time

S. V. Skresanov

Let G be a finite permutation group on Ω. A 2-*orbit* is an orbit of G in its induced action on $\Omega \times \Omega$. Let $G^{(2)}$ denote the 2-*closure*, that is, the maximal permutation group on Ω which has the same set of 2-orbits as G. Recall that the number of 2-orbits of a permutation group G is called a *rank* of G.

In this work we consider rank 3 permutation groups. The classification of such groups was finished in [**1**]. We study 2-closures of rank 3 groups and prove the following result.

Theorem. If G is a rank 3 permutation group on Ω given by its set of generators S, then $G^{(2)}$ can be found in time polynomial in $|S|$ and $|\Omega|$.

Note that if Γ is a rank 3 graph constructed from a rank 3 group G, then $G^{(2)}$ is precisely the full automrophism group of Γ.

The reported study was funded by RFBR according to the research project 18-31-20011.

References

[1] Liebeck M.W., The affine permutation groups of rank three, Proceedings of the London Mathematical Society, 1987, Vol. s3-54. N. 3. P. 477-516

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: s.skresanov@g.nsu.ru

Minimal intersection of Reed–Muller like codes

F. I. Solov'eva

The vector space of dimension n over the Galois field $GF(2)$ with respect to the Hamming metric is denoted as F^n. A subset of F^n is a *binary code* of length n. The classical *Reed–Muller code of order* r, $0 \leq r \leq m$, any $m \geq 1$ is defined as a set of all vectors of length 2^m corresponding to the boolean functions of m variables of degree not more than r. The code is linear, unique up to isomorphism, denoted as $RM(r,m)$ and has the following parameters: the length of the code is 2^m, the size $2^k, k = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$ and the *code distance* (the minimum value of the Hamming distance between two different vectors from the code) is 2^{m-r}. Denote a code with the parameters of the code $RM(r,m)$ by $LRM(r,m)$ and call it *Reed–Muller like code*. Such code is not necessarily linear. Note that the large class of extended perfect binary codes coincides with the class of $LRM(r,m)$ codes for $r = m-2$.

Here we investigate the following question: what is the minimum size of the intersection of two Reed–Muller like codes. In 1994 Etzion and Vardy [**1**] raised the question: what is the size of the intersection of any two perfect binary codes. A deep contribution was done to investigate the problem for perfect binary codes and Hadamard codes, see [**1**]. In [**1**] the intersection problem for all q-ary linear codes, $q \geq 2$ was solved. An answer of the question for the Hamming codes was also given in [**1**]. For $r \in \{0, m-1, m\}$ the code $LRM(r,m)$ coincides with the code $RM(r,m)$. According to [**1**] for some permutation π of order 2^m the Reed–Muller code $RM(r,m)$ satisfies $|RM(r,m) \cap \pi(RM(r,m))| \geq 2$, where 2 is exceeded for $r \leq [(m-1)/2]$. It was shown in [**1**] that for each $m \geq 3$ there exist two perfect nonlinear codes of length $2^m - 1$ with intersection of size 2. We generalize the last two results.

Theorem. *For any $m \geq 4$ and r, $1 \leq r \leq m-2$, there exists the nonlinear Reed–Muller like code C of length 2^m and the permutation π of order 2^m such that the size of the intersection of the codes C and $\pi(C)$ is minimal possible, i.e. equals* 2.

The work is supported by RFBR (grant 19-01-00682).

References

[1] Etzion T., Vardy A., Perfect binary codes: Constructions, properties and enumeration, IEEE Trans. Inform. Theory, (40)3 (1994) 754–763.

[2] Etzion T., Vardy A., On perfect codes and tilings: problems and solutions, SIAM J. Disc. Math., (11)2 (1998) 205–223.

[3] Bar-Yahalom S. E., Etzion T., Intersection of isomorphic linear codes, Journal of Combin. Theory, Series A, 80 (1997) 247–256.

[4] Solov'eva F. I., Survey on perfect codes, Mathematical Problems of Cybernetics, 18 (2013) 5–34 (in Russian).

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: sol@math.nsc.ru

III. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Решение проблемы эффективности параллельных вычислений на основе логического анализа численных алгоритмов

В. Н. Алеева, Р. Ж. Алеев, А. С. Склезнев

В работе рассматривается одно из решений проблемы эффективности параллельных вычислений, в ней получили развитие результаты, приведенные в [**1**].

В настоящее время разработана программная Q-система (Q-system) для исследования ресурса параллелизма численных алгоритмов. Она основана на логическом анализе численных алгоритмов с помощью концепции Q-детерминанта [1,2]. Ресурс параллелизма алгоритма характеризуется его высотой $D(\bar{N})$ и шириной $P(\bar{N})$, где $\bar{N}$ — параметры размерности алгоритмической проблемы [**2**]. Q-система дает возможность вычислять ресурс параллелизма любого численного алгоритма, а также сравнивать ресурсы параллелизма двух численных алгоритмов, решающих одну и ту же алгоритмическую проблему. В режиме просмотра информации Q-система доступна по адресу `https://qclient.herokuapp.com`.

Q-система может применяться для повышения эффективности параллельных вычислений. Предположим, что для решения алгоритмической проблемы могут использоваться численные методы $M_i (i = 1, \ldots, k)$, а для реализации метода M_i применяться численные алгоритмы A^i_j $(j = 1, \ldots, l)$. Тогда процесс разработки эффективной программы для решения алгоритмической проблемы состоит в том, что с помощью Q-системы для каждого метода $M_i (i = 1, \ldots, k)$ находится алгоритм $A^i_{j_i}$ с минимальным значением $D(\bar{N})$, затем из множества алгоритмов $A^i_{j_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ выбирается алгоритм $A^{i_0}_{j_{i_0}}$ также с минимальным значением $D(\bar{N})$ и для него разрабатывается Q-эффективная программа [2]. Описанный процесс называется Q-эффективным программированием в широком смысле.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта N 17-07-00865 а, при поддержке Правительства РФ в соответствии с Постановлением N 211 от 16.03.2013 г (соглашение N 02.A03.21.0011).

Список литературы

[1] Алеев Р. Ж., Алеева В. Н., Богатырева Е. С. Логический анализ численных алгоритмов на основе концепции Q-детерминанта и его применение для исследования ресурса параллелизма численных алгоритмов // Международная конференция Мальцевские чтения 2018, г. Новосибирск, 19–22 ноября 2018 г. Сборник тезисов. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2018. С. 28.

[2] Алеева В. Н., Алеев Р. Ж. Применение Q-детерминанта численных алгоритмов для параллельных вычислений // Параллельные вычислительные технологии — XIII международная конференция, ПаВТ'2019, г. Калининград, 2–4 апреля 2019 г. Короткие статьи и описания плакатов. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2019. С. 133–145.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинск
E-mail: aleevavn@susu.ru, aleevrz@susu.ru, skleznew@bk.ru

Алгебраический подход к получению нижних оценок сложности полиномиальных представлений функций над конечными полями

А. С. Балюк

Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка q, n — неотрицательное целое, и $N = q^n$. Всякая функция $v : \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q$ может быть взаимнооднозначным образом представлена в виде вектора $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$, где все $v_i \in \mathbb{F}_q$. Обозначим через $Z(\vec{v})$ число нулевых элементов в векторе $\vec{v}$.

Рассмотрим следующую задачу. Для заданного множества S невырожденных матриц размера $N \times N$ с элементами из F_q найти такие функции $v : \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q$, чтобы величина $L_S(v) = \max\{Z(M^{-1}\vec{v}) \mid M \in S\}$ была как можно меньше. К данной задаче сводятся все задачи нахождения функций наибольшей сложности в различных классах полиномиальных форм булевых и k-значных функций.

В работе предлагается следующий подход к нахождению величины $Z(M^{-1}\vec{v})$. Возьмем расширение E поля $\mathbb{F}_q$ и вектор $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ с элементами из E. Будем считать, что след $\mathrm{Tr}_{E/\mathbb{F}_q}$ действует на вектор $\vec{u}$ покомпонентно, то есть $\mathrm{Tr}_{E/\mathbb{F}_q}(\vec{u}) = \big(\mathrm{Tr}_{E/\mathbb{F}_q}(u_1), \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{F}_q}(u_2), \ldots, \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{F}_q}(u_N)\big)$ Подберем вектор $\vec{u}$ таким образом, чтобы ни он, ни один из векторов $\vec{u}^M = M^{-1}\vec{u}$ ни при каких $M \in S$ не содержал нулей. Такое всегда возможно, если в качестве E взять расширение $\mathbb{F}_q$ степени $s = N$, а в качестве элементов вектора $\vec{u}$ — элементы базиса E над $\mathbb{F}_q$. В зависимости от множества S, степень s расширения может быть и меньше. В качестве функции v возмем ту, вектор $\vec{v}$ которой равен $\mathrm{Tr}_{E/\mathbb{F}_q}(\vec{u})$. Справедлива

Лемма.

$$Z(M^{-1}\mathrm{Tr}_{E/\mathbb{F}_q}(\vec{u})) = \frac{q^{s-1}-1}{q^s-1}q^n + \frac{q-1}{q^{s+1}-q} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \chi^* = \chi_0}} \sum_{i=1}^{N} \chi(u_i^M) G_s(\chi),$$

где G_s — сумма Гаусса, а внешнее суммирование берется по всем нетривиальным мультипликативным характерам расширения E, ограничения которых на $\mathbb{F}_q$ тривиальны.

Данный подход позволил получить функции высокой сложности в классе поляризованных полиномов над произвольным конечным полем [**1**], в классе кронекеровых полиномиальных форм для некоторых конечных полей, и в классе расширенных форм булевых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 19-01-00200).

Список литературы

[1] Балюк А. С., Зинченко А. С. Нижние оценки сложности поляризованных полиномов над конечными полями // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, N 1. С. 3–13.

ООО «Информатика медицины», Иркутск
E-mail: sacha@hotmail.ru

Проверка достижимости состояния помеченного графа при заданных правилах изменения состояний

А. Ю. Бонюшкина, С. А. Афонин

Пусть есть ориентированный граф G. Зададим *разметку* ребер: каждому ребру (u,v) сопоставим булево значение $p(u,v)$. Для каждой вершины v зафиксируем некоторый порядок входящих ребер. Тогда разметке входящих ребер соответствует натуральное число, которое мы назовем *значением вершины.* Под изменением значения вершины мы понимаем изменение разметки входящих в нее ребер. *Правила изменений значений вершин* суть множества их допустимых значений.

Изменение вершины *допустимо*, если вершина *доступна*, то есть все исходящие из нее ребра помечены единицами, а значение вершины в результате изменения будет принадлежать множеству допустимых значений.

Задача состоит в том, чтобы для заданного графа, правил изменений, начальной разметки и выделенной вершины t найти такую последовательность допустимых изменений значений вершин, что t станет доступна для изменения. В этом случае вершина t является *достижимой.*

Практическая мотивация этой задачи связана с проверкой корректности политики безопасности информационной системы в модели CBAC. Правила изменений значений порождаются политикой безопасности, а достижимость вершины t можно рассматривать как один из вариантов некорректности политики.

Деревом порядков назовем небинарное упорядоченное дерево, удовлетворяющее следующим условиям: (1) узлам дерева сопоставлены упорядоченные наборы вершин G; (2) если узлу дерева сопоставлен набор длины n, то этот узел имеет $n-1$ дочерний узел; (3) последним элементом набора k-ого дочернего узла является k-й элемент набора родительского узла; (4) последним элементом набора корневой вершины дерева является t.

Упорядоченный набор $T = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ вершин G *реализуем*, если для любой вершины v_i существует допустимое значение, такое что $p(v_j, v_i) = 1$ для всех $j > i$. На множестве вершин G может быть введен частичный порядок $\preceq$, порожденный длиной самого длинного простого пути из вершины t по 0-реберам при начальной разметке. Набор T *возрастающий*, если для любого $i \le k$ верно $v_i \preceq v_k$. Дерево порядков назовем *корректным* для правил изменения значений, если (1) для каждого его узла набор вершин реализуем, и (2) для любого некорневого узла набор его вершин возрастающий.

Теорема. *Корректное дерево порядков существует тогда и только тогда, когда вершина t достижима.*

Доказательство носит конструктивный характер и определет алгоритм, выписывающий по дереву порядков последовательность изменений значений вершин.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-01055.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: abonush@yandex.ru, serg@msu.ru

Σ-спецификация FDDI-протокола коммуникации

В. Н. Глушкова

Стандартный FDDI-протокол осуществляет передачу синхронных и асинхронных сообщений по сети станций, связанных кольцом. Спецификация состоит из КС-грамматики $G = (V, P)$, которая иерархизирует пространство действий, состояний и параметров системы; V, P- множества символов и правил G. Например, $Fddi \to \{Act\}^*; Act \to Idle|G|R|Sh$, где $Idle$ - режим ожидания маркера, G, R - действия получения и возврата маркера станцией, Sh - посылка высокоприоритетных сообщений. Дерево вывода в G представляется КС- списком так, что отношение вывода $\to$ в грамматике соответствует отношению $\in$ для списков, сорт которых соответствует метке корня дерева. Σ- спецификация задается теорией Th многосортного языка ИП из квазитождеств, а именно Π - формул вида $\forall n\Phi$, где Φ это Δ_0 - формула [**1**] с ограниченными кванторами специального вида [**2**] над КС-списками, порожденными G. Здесь n- дискретное время (Dt, шаг вычисления), которое в спецификации поддерживает бесконечные вычисления протокола, состоящие из циклической последовательности действий, отличающихся на один шаг; $Dt \to N \in P$, N - множество натуральных чисел. Для каждого действия в G есть правило, например, $R \to St$, где $St \in V$ - состояние, характеризующее параметры объектов системы. Правила грамматики для символа St могут содержать как Dt, так и непрерывное время, выраженное сегментами Dt.

В логической спецификации действия представлены предикатами. Аксиомы (ax) теории Th интерпретируются по правилу вывода MP. Одновременно строится дерево вывода в грамматике G по правилам из P, приписанным к соответствующим ax. Причем конкретные значения терминальных символов грамматики, которые являются параметрами объектов системы (номер станции, шаг вычисления и др.), извлекаются из значений переменных соответствующих предикатов, входящих в ax. Например, посылка станцией с номером i высокоприоритетных сообщений станции с номером j выражается формулой:

$$(\forall n)(\forall i, j \in [1 - -k])(G(i, n), hm(i, n) \neq nil \to Sh(i, j, head(hm(i, n))), \delta, n + 1), \delta \leq 2.$$

Здесь k - количество станций; $hm(i, n)$ - кортеж высокоприоритетных сообщений станции с номером i на шаге вычисления n; δ - время посылки сообщений, ограниченное 2 сек. $\Sigma-$ спецификация позволяет провести более детальный и полный анализ количественных характеристик моделируемой системы по сравнению с темпоральными логиками, используемыми в идеологии model cheking.

Список литературы

[1] Goncharov S. S., Ershov Yu. L., Sviridenko D. I., Semantic programming. Information processing. 1986, V. 11, N 10, p. 1093–1100.

[2] Глушкова В. Н., Оценка сложности реализации логических спецификаций. Кибернетика и системный анализ. 1996, N 4, стр. 50–58.

ДГТУ, Ростов-на-Дону
E-mail: lar@aaanet.ru

Порождение знаний по текстам на естественном языке с помощью автоматических средств логического вывода

А. И. Капустина

В настоящее время объем документов постоянно растёт. Обычно каждый документ имеет большой объем. Для поиска ответа на какие-либо вопросы нужно прочитать несколько связанных документов. Учитывая объемы и количество таких документов, сделать это не всегда представляется возможным.

Для извлечения знаний из текстов на естественном языке, а также для порождения новых знаний по уже существующим предлагается использовать онтологический подход.

Для создания онтологической модели предметной области обычно необходимо проделать четыре этапа: создание онтологии, описание общих знаний предметной области, описание прецедентов, а также описание оценочных знаний [**1**].

Тексты на естественном языке проходят предобработку для получения двухместных предикатов [**2**]. По двухместным предикатам строится онтология, шаблоны правил выводов и шаблоны запросов. Шаблоны правил вывода стоятся по конкретной предместной области. Используются специальные отношения, полученные при преобразовании текста в двухместные предикаты. Онтологическая модель создается на языке OWL DL [**3**].

Для порождения новых знаний по онтологической модели используются правила вывода SWRL [**4**]. Правила вывода строятся в автоматическом режиме с помощью составленных шаблонов. Правила вывода добавляются в онтологическую модель. С помощью машины логического вывода Pellet полученная онтологическая модель проверяется на непротиворечивость, а также новые знания добавляются в онтологическую модель.

С помощью языка запросов SQWRL и правил вывода SWRL есть возможность задавать вопросы к полученной онтологической модели. Построенная онтологическая модель позволяет получать ответы на вопросы, знания по которым не содержались в тесте в явном виде.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э. Нечёткие логики и теория нечётких моделей. Алгебра и логика. 2015. Т. 54. N 1. С. 109–118.

[2] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, N 3. С. 49–63.

[3] Корсун И. А., Пальчунов Д. Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34–48.

[4] Капустина А. И., Пальчунов Д. Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 2. С. 34–46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.kapustina@g.nsu.ru

Разработка методов и подходов работы с структурированными текстовыми документами на основе онтологий

А. А. Карманова

Любой сложный процесс сопровождается корпусом текстовых документов, стандартизирующих определенные аспекты этого процесса или весь процесс в целом. Таким документы, как правило, имеют жестко заданную структуру и содержание, которое может меняться в связи с изменившимися знаниями предметной области. Поэтому задача автоматической генерации нормативных документов на основе модели предметной области является актуальной.

Нормативные документы можно рассматривать с точки зрения их формы и сточки зрения их содержания. Форма, как правило, задается единожды и редко подвергается изменениям. Содержание при этом может меняться достаточно регулярно. Изменение содержания может быть связано с изменившимися данными предметной области. Чем сложнее процесс, тем большим изменениям он потенциально подвержен, а значит, требует больших издержек на поддержание нормативной базы в актуальном состоянии [**1**]. Для снижения таких издержек был предложен онтологических подход к обработке структурированных документов [2–5].

Работа посвящена онтологическому подходу к работе с нормативными документами. Проведено исследование методов генерации структурированных документов в области образования. Построена онтологическая модель для разрабатываемой системы. Предложен алгоритм автоматической генерации нормативных документов.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Финк А. А. Разработка автоматизированных методов порождения служебных документов на естественном языке. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 3. С. 79–89.

[2] Пальчунов Д. Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка. Философия науки. 2009. N 4 (43). С. 70–90.

[3] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э., Ясинская О. В. Применение теоретико-модельных методов и онтологического моделирования для автоматизации диагностирования заболеваний. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2015. Т. 13. N 3. С. 42–51.

[4] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э. Нечёткие логики и теория нечётких моделей. Алгебра и логика. 2015. Т. 54. N 1. С. 109–118.

[5] Власов Д. Ю., Пальчунов Д. Е., Степанов П. А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. N 3. С. 23–33.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: anast.karmy.aa@gmail.com

О полных расширениях метода SLD-резолюции

А. А. Лялецкий

Метод SLD-резолюции [**1**] часто используется в качестве логического аппарата интеллектуальных систем с дедуктивными возможностями, в частности, систем логического программирования [**2**]. Он является полным методом для множеств хорновых дизъюнктов и неполным в общем случае. Даются *положительные ответы* на следующие естественные вопросы. Можно ли для метода поиска SLD-опровержения в древовидной форме сформулировать такие правила вывода, при добавлении которых в него получалось бы расширение, полное в общем случае для классической логики первого порядка без равенства? Какие правила парамодуляционного типа нужно ввести в полученное расширение для того, чтобы получить полный метод для классической логики первого порядка с равенством?

Первое расширение получается добавлением только одного правила, порождающего свое заключение по правилу резолюции в случае возможности его применения к двум литерам, лежащим в одной ветви SLD-дерева и рассматриваемым как однолитерные дизъюнкты. Второе, парамодуляционное расширение первого содержит два правила парамодуляционного типа, одним из которых является модификация входной парамодуляции на случай древовидного поиска SLD-опровержения, а вторым — парамодуляция, применяемая, в случае такой возможности, к литерам, лежащим в одной ветви SLD-дерева и рассматриваемым как однолитерные дизъюнкты.

Полученные результаты дают простой способ «достраивания» логического аппарата интеллектуальных систем, базирующегося на методе SLD-резолюции для древовидного поиска опровержения, до полного в общем случае его расширения для классической логики первого порядка как без равенства, так и с ним.

Список литературы

[1] Kowalski R., Kuehner D. Linear resolution with selection function. Artificial Intelligence, Vol. 2, Issues 3–4, 1971, P. 227–260.

[2] Gallier J. SLD-Resolution and Logic Programming. Chapter 9 of the book “Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving”, Wiley, 1986.

Киев, Украина
E-mail: foraal@mail.ru

Расширение алгоритма кластеризации категориальных данных CI-CLOPE

А. С. Михайлов

Область анализа данных имеет стремительный рост и применима в различных смежных науках, содержащих огромное количество данных. Машинное обучение предназначено для выявления зависимостей между данными, получения дальнейших прогнозов, исходя из набора характеристик и т.д. Особое место занимает задача кластеризации, суть которой состоит в процессе разбиения немаркированных данных так, чтобы элементы одной группы были максимально схожи между собой, нежели с объектами других групп [**1**].

В основе распознавания схожести объектов лежит вычисление метрики вычисления расстояния между ними, поэтому кластеризация категориальных данных, т.е. тех данных, в которых отсутствует численная характеристика, играет особую роль, так как подразумевает собой процесс попарного сравнивания объектов между собой на каждой итерации, что ведет к значительному падению производительности [**2**].

Для решения данной задачи существуют несколько известных решений, таких как LargeItem, CLOPE, F-Tree, ROCK и др. В сравнении с другими CLOPE имеет преимущества в плане производительности и точности разбиения данных на кластеры [**3**]. В связи с этим CLOPE был выбран за основу для его улучшения. Данный алгоритм не позволяет задавать точное количество кластеров, что может играть существенную роль для конкретного типа задач. В данной работе решается эта задача с помощью объединения или разбиения заранее полученного числа кластеров после выполнения CLOPE. Процесс объединения и разбиения строится таким образом, чтоб значение глобальной функции стоимости оставалась максимальной.

Список литературы

[1] Gibson D., Kleinberg J., Raghavan P. Clustering categorical data: An approach based on dynamical systems // Databases. 1998. Т. 1. С. 75.

[2] Яхъяева Г. Э., Абсайдульевой А. Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[3] Yang Y., Guan X., You J. CLOPE: a fast and effective clustering algorithm for transactional data // Proceedings of the eighth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. ACM, 2002. С. 682–687.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: kotnor@mail.ru

Теоретико-модельный подход к временному представлению событий предметной области

Ч. А. Найданов

Работы [1, 4] были посвящены теоретико-модельному подходу к формализации деятельности университетской кафедры на примере Кафедры общей информатики ФИТ НГУ. В частности, автоматизации делопроизводства, которым занят секретарь кафедры: оформление на работу преподавателей, сопровождение студентов к государственной итоговой аттестации, информирование преподавателей и студентов.

При формализации деятельности университетской кафедры важное значение имеет временное представление событий. Без временного представления событий невозможно точно описать процессы, происходящие в предметной области. О событии может быть известно его точное время, временной интервал, в котором произошло событие. О двух событиях может быть известен порядок их следования, точное время, на которое события отстоят друг от друга. Существуют различающиеся по времени события, которые представляют собой свершение одного и того же действия. Например, защита выпускных квалификационных работ бакалавров кафедры 26 июня 2018 года и защита выпускных квалификационных работ бакалавров кафедры 24 июня 2019 года. Целью данной работы является разработка теоретико-модельного подхода к временному представлению событий предметной области.

Теоретико-модельный подход позволяет проверять знания о предметной области на непротиворечивость, соответствие требованиям нормативных актов, отслеживать истинность знаний в процессе изменения документов, из которых они были извлечены.

Список литературы

[1] Найданов Ч. А. Разработка ядра онтологической модели, настраиваемой под предметную область // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, вып. 1, с. 72–81.

[2] Корсун И. А., Пальчунов Д. Е. Интеллектуальная система обработки и интеграции знаний на основе технологий семантической паутины // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2018. Т. 16, N 3. С. 113–125.

[3] Найданов Ч. А., Пальчунов Д. Е., Сазонова П. А. Разработка автоматизированных методов предупреждения рисков возникновения критических состояний, основанных на анализе знаний, извлечённых из историй болезней пациентов. Сибирский научный медицинский журнал. Том 36, Выпуск 1, 2016, с. 105–113.

[4] Найданов Ч. А. Теоретико-модельный подход к автоматизации деятельности университетской кафедры. Материалы Междунар. конф. Мальцевские чтения 19–22 ноября 2018 г. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. С. 40.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: naydanov.fit@ya.ru

Разработка методов представления знаний на языке двухместных предикатов

Е. О. Ненашева

С каждым днем количество текстов на естественном языке растет. Обрабатывать такие объемы данных вручную уже практически невозможно. Поэтому возникает потребность в программном обеспечении, позволяющем извлекать из текстов нужную информацию и обрабатывать полученные знания [**1**].

В своей работе я продолжаю исследования Пальчунова Д. Е. и Махасоевой О. Г. по проблеме формального представления знаний, извлеченных из текстов естественного языка [**2**]. Работа посвящена разработке автоматизированных методов представления и интеграции знаний, извлеченных из текстов естественного языка. В качестве основной конструкции построения моделей знаний, извлеченных из текстов, используются двухместные предикаты и константы-ситуации [**3**]. Двухместные предикаты подходят под структуру триплетов, а значит, могут транслироваться в RDF-утверждения. Благодаря этому, к набору двухместных предикатов, построенному по тексту естественного языка, можно применять автоматические средства логического вывода [**4**].

При работе с документами, представленными на естественном языке, важно учитывать семантику текста. Для корректного понимания контекста необходимо обрабатывать несколько предложений одновременно. Поэтому одной из главных задач исследования является возможность объединения нескольких предложений текста и построения для них общего фрагмента атомарной диаграммы.

В данной работе предложен формальный метод представления знаний, извлеченных из текстов естественного языка, при помощи обогащенной модели, которая содержит иерархию ситуаций. Разработанный формальный язык основан на введении констант-ситуаций и дополнительных сигнатурных предикатов, описывающих пространственно-временные отношения между ситуациями.

Список литературы

[1] Корсун И. А., Пальчунов Д. Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, N 3. С. 34–48.

[2] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, N 2. С. 64–73.

[3] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, N 3. С. 49–63.

[4] Капустина А. И., Пальчунов Д. Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, N 2. С. 34–46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: nenasheva.zhenya@gmail.com

Обогащения моделей для формализации отношений между ситуациями

Д. Е. Пальчунов

Работа посвящена проблеме извлечения знаний из текстов естественного языка [**1**]. В [**2, 3**] предложены методы представления извлеченных знаний при помощи введения дополнительных констант-ситуаций и констант-действий. В данной работе рассматриваются теоретико-модельные конструкции, необходимые для реализации методов и алгоритмов из [**2, 3**].

Определение 1. Пусть сигнатура $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ содержит только символы предикатов, причем $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma_1)$, $\mathfrak{B} \in K(\sigma_2)$, $\mathfrak{C} \in K(\sigma)$, $A = |\mathfrak{A}|$, $A \leq \mathfrak{C} \upharpoonright \sigma_1$ и $B = \mathfrak{C} \upharpoonright \sigma_2$. Будем говорить, что модель $\mathfrak{A}$ независимо формульно определима в модели $\mathfrak{B}$, если найдётся формула $\varphi_0(x) \in F(\sigma_2)$ и для любого $P^n \in \sigma_1$ найдётся формула $\varphi_P(x_1, \ldots, x_n) \in F(\varphi_2)$ такие, что

(1) $\forall a \in \mathfrak{B}$ выполнено: $a \in A \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_0(x)$;

(2) $\forall P^n \in \sigma_1, \forall a_1, \ldots, a_n \in A$ выполнено:

$$\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_P(a_1, \ldots, a_n).$$

Определение 2. Пусть сигнатура σ_1 содержит только символы предикатов и пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma_1)$, $A = |\mathfrak{A}|$. Будем считать, что сигнатура σ_1 не содержит предикатов с одинаковыми именами, т.е., если $P^n \in \sigma_1$, то $P^k \notin \sigma_1$ при $n \neq k$. Рассмотрим множество $D = \{d_{P^n, a_1, \ldots, a_n} | P^n \in \sigma_1$ и $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n)\}$, пусть $A \cap D = \emptyset$. Рассмотрим сигнатуру $\sigma_2 = \{D^1\} \cup (\bigcup_{P^n \in \sigma_1} \{P_1^2, \ldots, P_n^2\})$. Положим $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ и $C = A \cup D$. Определим модель $\mathfrak{C} \in K(\sigma)$ с $C = |\mathfrak{C}|$:

(1) Для $c \in \mathfrak{C}$ положим $\mathfrak{C} \models D(c)$ если $c \in D$ и $\mathfrak{C} \models \neg D(c)$ если $c \in A$.

(2) Для $P^n \in \sigma_1$ и $a_1, \ldots, a_n \in C$ положим $\mathfrak{C} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \in A$ и $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n)$.

(3) Для $a, d \in C, P^n \in \sigma_1$ и $k \leq n$ положим $\mathfrak{C} \models P_k(d, a) \Leftrightarrow a \in A, d \in D$ и найдутся $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n \in A$ такие, что

$$\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \ldots, a_n) \text{ и } d = d_{P^n, a_1, \ldots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \ldots, a_n}.$$

Назовем модель $\mathfrak{C}$ обогащением модели $\mathfrak{A}$ ситуационными двухместными предикатами.

Определение 2 задает следующую конструкцию над моделью $\mathfrak{A} \in K(\sigma_1)$: для каждого предиката $P^n \in \sigma_1$ и каждого кортежа $a_1, \ldots, a_n \in A$

если $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{C} \models P_1^2(d_{P^n, a_1, \ldots, a_n}, a_1), \ldots, \mathfrak{C} \models P_n^2(d_{P^n, a_1, \ldots, a_n}, a_n)$. Это позволяет нам свести многоместные предикаты к двухместным.

Предложение. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma_1)$, $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$ и модель $\mathfrak{C} \in K(\sigma)$ является обогащением модели $\mathfrak{A}$ ситуационными двухместными предикатами. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \upharpoonright \sigma_2$. Тогда модель $\mathfrak{A}$ независимо формульно определима в модели $\mathfrak{B}$.

Определение 3. Пусть сигнатура σ_1 содержит только символы предикатов, пусть множество $K \subseteq K(\sigma_1)$. Будем считать, что сигнатура σ_1 не содержит предикатов с одинаковыми именами, т.е., если $P^n \in \sigma_1$, то $P^k \notin \sigma_1$ при $n \neq k$. Рассмотрим множество $S = \{s_{\mathfrak{A}} | \mathfrak{A} \in K\}$, пусть $|\mathfrak{A}| \cap S = \emptyset$ для любой модели $\mathfrak{A} \in K$. Рассмотрим сигнатуру $\sigma_2 = \{P^{n+1} | P^n \in \sigma_1\} \cap \{U^2, S^1\}$. Положим $C = (\bigcup_{\mathfrak{A} \in K} |\mathfrak{A}|) \cup S$ и $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Определим модель $\mathfrak{C} \in K(\sigma)$ с $C = |\mathfrak{C}|$:

(1) Для $c \in \mathfrak{C}$ положим $\mathfrak{C} \models S(c) \Leftrightarrow c \in S$.

(2) Для $P^n \in \sigma_1$ и $a_1, \ldots, a_n \in C$ положим $\mathfrak{C} \models P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ найдется модель $\mathfrak{A} \in K$ такая, что $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n)$.

(3) Для $P^{n+1} \in \sigma_2$ и $a_1, \ldots, a_n, s \in C$ положим $\mathfrak{C} \models P(s, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow s \in S$ и найдется $\mathfrak{A} \in K$ такая, что $s = s_{\mathfrak{A}}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n)$.

(4) Для $a, s \in C$ положим $\mathfrak{C} \models U(s, a) \Leftrightarrow$ найдется $\mathfrak{A} \in K$ такая, что $s = s_{\mathfrak{A}}$ и $a \in \mathfrak{A}$.

Теорема. Пусть сигнатуры σ, σ_1 и σ_2, множество $K \subseteq K(\sigma_1)$, множество $S = \{s_{\mathfrak{A}} | \mathfrak{A} \in K\}$ и модель $\mathfrak{C} \in K(\sigma)$ удовлетворяют условиям Определения 3. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \upharpoonright \sigma_2$. Тогда:

(1) Любая модель $\mathfrak{A} \in K$ независимо формульно определима в модели $\mathfrak{B}$.

(2) Если сигнатура σ_1 конечна, то найдётся формула $\psi(x, y) \in F(\sigma_2)$ такая, что для любых $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in K$ выполнено: $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{N} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(s_{\mathfrak{M}}, s_{\mathfrak{N}})$.

(3) Если сигнатура σ_1 конечна, то частично упорядоченное множество $\langle K; \leq \rangle$ формульно определимо в модели $\mathfrak{B}$.

Заметим, что в условиях Определения 3 для $\mathfrak{A} \in K$ выполнено не $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{C} \upharpoonright \sigma_1$, а более слабое условие: тождественное вложение $|\mathfrak{A}|$ в $|\mathfrak{C}|$ является разнозначным гомоморфным вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{C} \upharpoonright \sigma_1$.

В работе мы обобщаем данную конструкцию, определенную для одного класса $K \subseteq K(\sigma_1)$, на случай произвольной иерархии классов моделей из $K(\sigma_1)$, упорядоченной по отношению включения.

Мы используем данную конструкцию для формального представления последовательностей событий и различных временных отношений между событиями [**3**].

Список литературы

[1] Корсун И. А., Пальчунов Д. Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, N 3. С. 34–48.

[2] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, N 3. С. 49–63.

[3] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. Разработка автоматизированных методов представления знаний о действиях и ситуациях // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, N 3.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Решение задачи формализации прецедентов по компьютерной безопасности при помощи свёрточных нейронных сетей

Н. П. Савин

В настоящее время невозможно представить себе работу какой-либо компании без компьютера. Поэтому задача компьютерной безопасности на сегодняшний день остаётся актуальной. Для решения данной проблемы в Новосибирском государственном университете ведётся разработка системы анализа рисков «RiskPanel» [**1, 2, 3**]. Это вопросно-ответная система в основе которой лежит база знаний [**4**]. База знаний была составлена при помощи прецедентного подхода и данных из открытых источников [**4**].

Для функционирования вопросно-ответной системы знания в базе необходимо формализовать. Нужно выделить из каждого прецедента компьютерных заражений его симптомы, последствия, уязвимости и контрмеры. Но прежде, чем применять алгоритмы машинного обучения необходимо для каждого документа найти его векторное представление. Для этого применяется одна из распространённых технологий для решения этой задачи GloVe. После применение этого подхода каждому найденному прецеденту был сопоставлен n-мерный вектор. Формализация знаний была произведена при помощи свёрточных нейронных сетей.

Свёрточная нейронная сеть состоит из трёх основных видов слоёв: свёрточный, субдискретизирующий и выходной. В выходном слое каждый нейрон является персентроном с нелинейной функцией активации. Обычно в качестве функции активации используют либо логистическую функцию, либо гиперболический тангенс.

Карта признаков n свёрточного слоя l вычисляется:

$$y_n^l = f_l\Big(\sum_{m \in v_n^l} y_m^{l-1} \otimes w_{m,n}^l + b_n^l\Big),$$

где оператор $\otimes$ — операция двумерной свёртки, $w_{m,n}^l$ — свёртка, применяемая к карте признаков m слоя $(l-1)$, b_n^l — пороговое значение, присоединяемых к карте признаков.

А карта признаков n субдискретизирующего слоя l вычисляется как:

$$y_n^l = f_l(z_n^{l-1} \times w_{m,n}^l + b_n^l),$$

где $w_{m,n}^l$ — фильтр, применяемый к n на слое l, а b_n^l — добавочное пороговое значение. Таким образом, удалось формализовать более 18000 прецедентов выделить из них симптомы, последствия, уязвимости и контрмеры.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э., Хамутская А. А. Программная система управления информационными рисками RiskPanel // Программная инженерия. N 7. 2011. С. 35–50.

[2] Яхъяева Г. Э., Ясинская О. В. Применение методологии прецедентных моделей в системе риск-менеджмента, направленного на раннюю диагностику компьютерного нападения // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2012. Т. 10, вып. 2. С. 106–115.

[3] Yakhyaeva G. E., Ershov A. A. Knowledge Base System for Risk Analysis of the Multi-Step Computer Attacks // Proceedings of the 18th International Conference on Enterprise Information Systems. V. 2. 2016. P. 143–150.

[4] Яхъяева Г. Э., Карманова А. А., Ершов А. А., Савин Н. П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей // Информационные технологии, Том 23, N 2, 2017, с. 97–106.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: npsavin@rambler.ru

Разработка методов автоматической генерации требований к программному продукту на основе онтологий

К. А. Табаков

Процесс сбора требований к программному продукту зависит от множества факторов: характера программного продукта, модели бизнеса, порядка общения с заказчиком, стандартов и норм, задаваемых отраслью и государством. Поэтому процесс сбора и формализации требований во многом носит творческий и случайный характер. Еще одним следствием из этого является тот факт, что в области инженерии требований отсутствует единая и согласованная теоретическая база. Все это создает сложности в работе инженера по требованиям, что может привести к серьезным финансовым потерям в случае срыва сроков и превышения бюджета.

Данную проблему было предложено решать созданием единой онтологии [**1–4**]. Был составлен терминологический словарь, описывающий эти сущности [**5**]. Разработанный словарь лег в основу онтологии предметной области. На основе этой онтологии были разработаны подходы к работе с требованиями и к поддержанию корпуса требований в актуальном состоянии. Кроме того, в рамках данной работы был разработан алгоритм автоматической генерации требований на естественном языке.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е. Решение задачи поиска информации на основе онтологии. Бизнес-информатика. 2008. N 1 (3). С. 3–13.

[2] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э., Хамутская А. А. Программная система управления информационными рисками RISKPANEL. Программная инженерия. 2011. N 7. С. 29–36.

[3] Пальчунов Д. Е., Степанов П. А. Применение теоретико-модельных методов извлечения онтологических знаний в предметной области информационной безопасности. Программная инженерия. 2013. N 11. С. 8–16.

[4] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. Conceptual methods for identifying needs of mobile network subscribers. В сборнике: CEUR Workshop Proceedings 13. Сер. "CLA 2016 - Proceedings of the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications" 2016. С. 147-160.

[5] Власов Д. Ю., Пальчунов Д. Е., Степанов П. А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. N 3. С. 23–33.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: konkov90@gmail.com

Разработка программной системы для моделирования реакции пользователей социальных сетей на новостные сообщения

М. А. Турчинович

В интернете часто не проверяется достоверность информации, которую мы там можем найти, все это дает возможность большому количеству фейковых новостей охватывать огромную, многомиллионную аудиторию. Так как на сегодняшний день модерировать все новости в социальных сетях невозможно, то предлагается написать программное обеспечение, которое могло бы моделировать реакции людей на ту или иную новость.

ПО состоит из двух модулей:

(1) CommentsAnalyzer — отвечает за сбор комментариев с определенного поста, их классификацию и выдачу статистики;
(2) ReactionPredictor — на основании новости и группы людей, выдает их итоговую гипотетическую реакцию на эту новость.

В ходе работы были получены следующие результаты:

- Проведен обзор предметной области;
- Разработана программная система для сбора данных;
- Был сделан сбор данных из социальной сети ВКонтакте, на основании, которых моделируется реакция;
- Проанализированы и подготовлены данные для последующего использования;
- Разработана программная система для моделирования реакции пользователей, на основе данных, собранных ранее;
- Разработан графический интерфейс приложения для моделирования реакции пользователей.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Разработка автоматизированных методов порождения служебных документов на основе параметрических шаблонов

А. А. Финк

Каждый из нас хоть раз в жизни сталкивался с заполнением (составлением) каких-либо служебных документов. С каждым днем количество таких документов растет и на их заполнение приходится тратить всё больше и больше времени. А постоянное изменение нормативных документов лишь ухудшает ситуацию. Особенно остро эта проблема ощущается в государственных учреждениях, где нормативные документы часто меняются.

В наше время такие проблемы частично решаются разнообразными бланками и формами, на заполнение которых уходит значительно меньше времени, чем составление документов с нуля. Однако, такие формы не решают проблемы полностью, ведь их тоже приходится переделывать.

Для решения этой проблемы был разработан автоматизированный метод извлечения знаний из нормативных документов и автоматизированный метод порождения служебных документов. Разработанный подход позволяет уменьшить затраты время на работу с нормативными и служебными документами. Также он уменьшает количество ошибок при составлении служебных документов.

Разработанный автоматизированного метод порождения документов использует в своей работе параметрические шаблоны [**1**]. В качестве параметров выступают данные, извлекаемые из нормативных документов. Данные, которые нельзя заполнить без человеского участия, становятся переменными. Подставляя извлечённые данные в параметрические шаблоны, мы получаем всем знакомые формы (бланки).

В рамках метода извлечения знаний из нормативных документов используются древовидные шаблоны. Их использование обусловлено тем, что разные версии одного документа зачастую отличаются содержанием, но редко отличаются своей структурой. Таким образом, полагаясь на неизменяемость структуры нормативных документов, можно определить ряд шаблонов, по которым автоматически будет извлекаться нужная информация и помещаться в онтологическую модель.

Список литературы

[1] Деревянко Д. В., Пальчунов Д. Е. Формальные методы разработки вопросно-ответной системы на естественном языке // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. Т. 12, вып. 3. С. 34–47, 2014.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.fink@g.nsu.ru

О сужениях булевозначных и нечетких моделей

Г. Э. Яхъяева

Определение [**1**]. Пусть $\mathbb{B}$ – атомная булева алгебра и $\tau : S(\sigma_A) \to \mathbb{B}$. Тройку $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma_A, \tau\rangle$ назовем *булевозначной моделью*, если выполняются следующие условия: $\tau(\neg\varphi) = \overline{\tau(\varphi)}; \tau(\varphi \vee \psi) = \tau(\varphi) \cup \tau(\psi); \tau(\varphi \& \psi) = \tau(\varphi) \cap \tau(\psi); \tau(\varphi \to \psi) = \overline{\tau(\varphi)} \cup \tau(\psi); \tau(\forall x \varphi(x)) = \bigcap_{a\in A} \tau(\varphi(c_a)); \tau(\exists x \varphi(x)) = \bigcup_{a\in A} \tau(\varphi(c_a))$.

Определение. Рассмотрим булевозначные модели

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_1} = \langle A, \sigma_A, \tau_1\rangle, \quad \mathfrak{A}_{\mathbb{B}_2} = \langle A, \sigma_A, \tau_2\rangle.$$

Булевозначную модель $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_1}$ будем называть **сужением** булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_2}$ (и обозначать $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}_1} \preceq \mathfrak{A}_{\mathbb{B}_2}$), если существует изоморфное вложение $h : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ такое, что для любого элемента $b \in \mathbb{B}_1$ выполняется условие:

$$\tau_1^{-1}(b) = \tau_2^{-1}(h(b)).$$

Обозначим через $\rho(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}})$ множество всех сужений булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}$.

Определение [**2**]. Пусть $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}} = \langle A, \sigma_A, \tau\rangle$ – булевозначная модель с конечной булевой алгеброй $\mathbb{B}$. Тройку $Fuz(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}) = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$ назовем *нечеткой моделью*, порожденной моделью $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}$, если $\mu(\varphi) = \frac{\|At(\tau(\varphi)\|}{\|At(\mathbb{B}))\|}$ для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$.

Введем обозначение:

$$M(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}, \varphi \geq \alpha) = \{\mathfrak{A}_{\mathbb{B}'} \in \rho(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}) | Fuz(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}'}) = \langle A, \sigma_A, \mu'\rangle, \mu'(\varphi) \geq \alpha\}.$$

Теорема. Рассмотрим нечеткую модель $Fuz(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}) = \langle A, \sigma_A, \mu\rangle$, предложение $\varphi \in S(\sigma_A)$ и число $\alpha \in [0, 1]$. Пусть $\mu(\varphi) = \beta$. Тогда

(1) Если $\alpha \leq \beta$, то $M(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}, \varphi \geq \alpha) = \rho(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}})$;

(2) Если $\alpha > \beta$, то для любой булевозначной модели $\mathfrak{A}_{\mathbb{B}'} \in M(\mathfrak{A}_{\mathbb{B}}, \varphi \geq \alpha)$ имеем $\|At(\mathbb{B}')\| \leq [\frac{\beta}{\alpha}\|At(\mathbb{B})\|]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э. Нечеткие логики и теория нечетких моделей. Алгебра и логика, 54, N 1, 2015, с. 109–118.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечеткие алгебраические системы. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 75–92.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: gul_nara@mail.ru

Extracting key gene V-Structures involved in the process of diabetes using line graph and dynamic gene interaction network

X. Fan, X.-Q. Tang

Motivation: Tracking the pathogenesis of disease, especially chronic, and identifying genetic biomarkers of different stage is of great significant in bioinformatical researches and medical applications. Many existing methods focus on reflecting the disease process using annotated pathways. However, since that there are too many genes and interactions consisted in the most of pathways, making them limited in use, such as searching small motif as biomarkers. By considering the effect range of genes, we adopted V-structures which contains three genes and two interactions between them, as unit pattern, to investigate the process of disease and identify status biomarkers.

Results: We proposed a novel computational framework based on V-structures and dynamic gene-gene interaction networks to investigate the process of diseases. Our method is able to identify perturbed pathways of each time point, and find driver V-structures after determining pathway evolution paths. In this work, the framework was applied into a series of time course gene expression datasets related to mouse obesity and type-II diabetes (T2D). We found that pathways with promotion functions are mainly concentrated in six biological process, namely, Signal transduction, Immune system, Endocrine system, Nervous system, Cancers: Specific types, and Infectious diseases: Viral. In addition, the entire process was divided into pre-stage, post-stage and status transform stage. In the pre-stage, driver V-structures are related to insulin-resistance and fat, while in the post-stage, driver V-structures are related to diabetes complications. 3 driver V-structures included in the status transform stage are selected, namely, Erk1-Hras-Pik3r3, Cldn18-Cldn23-Cldn4 and Itpa-Cd39-Entpd8, which can be used as biomarkers to predict whether pre-diabetes of mouse will switch into post-diabetes

School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, Jiangsu, China
Wuxi Engineering Research Center for Biocomputing, Wuxi 214122, Jiangsu, China

Combinatorics of gene networks models

V. P. Golubyatnikov, V. S. Gradov

We consider block-linear dynamical systems symmetric with respect to cyclic permutations of the variables $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to x_1$:

$$\dot{x_1} = L(x_n) - x_1, \quad \dot{x_2} = L(x_1) - x_2, \quad \ldots \quad \dot{x_n} = L(x_{n-1}) - x_n. \tag{1}$$

Here, $n = 2k+1$, $k \geqslant 2$, $x_i > 0$, and $L(x)$ is a step-function such that $L(x) = A$ for $w < 1$; $L(x) = 0$ for $w > 1$. Symilar dynamical systems describe functioning of circular gene networks, see [**1, 2, 3**] and references therein.

The cube $Q = [0, A]^n$ is a positively invariant domain of the system (1). The hyperplanes $x_i = 1$, $i = \overline{1, n}$ subdivide Q to 2^n blocks which we enumerate by binary multi-indices $\{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n\}$, where $\varepsilon_i = 0$ if $x_i < 1$, and $\varepsilon_i = 1$ for $x_i > 1$, just like vertices in the boolean cube.

We call *valency* $V(\epsilon)$ of the block ϵ the number of its $(n-1)$-dimensional faces such that trajectories of the system (1) leave ϵ through these faces. Some other trajectories of this system enter the block ϵ through its remaining $n - V(\epsilon)$ faces. For each face $F = \epsilon_1 \cap \epsilon_2$, direction of transitions of trajectories of its points through F is uniquely determined. Let B be an oriented graph constructed on the vertices of the boolean cube. Its edges are oriented according directions of transitions of trajectories of (1) from block to block desribed in [**1**].

Theorem. *If $2A > n + \sqrt{n^2 - 4n}$ or $2 < 2A < n - \sqrt{n^2 - 4n}$, then the system (1) has at least two cycles. One of them is contained in the union W_1 of the blocks of valency 1, the other cycle is contained in the union W_{n-2} of the blocks of valency $n-2$. Both cycles travel from block to block according to arrows of the graph B.*

In terms of the graph B, we describe combinatorial structures of the domains W_1 and W_{n-2}. In the case $n = 3$ and $A > 1$, the system (1) has a unique stable cycle, even for asymmetric systems of the type (1), see [**3**].

Supported by RFBR, grant 18-01-00057.

References

[1] Akinshin A. A., Golubyatnikov V. P., Golubyatnikov I. V. On some multidimensional models of gene network functioning. J. of appl. and industrial mathematics. 2013. V. 7, N 3, P. 296–301.

[2] Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems. Journal of mathematical biology. 1978. V. 6. P. 207–223.

[3] Golubyatnikov V. P., Ivanov V. V. Cycles in odd-dimensional models of circular gene networks. Journal of applied and industrial mathematics. 2018. V. 12, N 4, P. 648–657.

Novosibirsk state university, Novosibirsk
E-mail: Vladimir.Golubyatnikov1@fulbrightmail.org

The weighted prediction algorithm of DNase I hypersensitive sites

D. Qian, P. Zhu

DNase I hypersensitive sites (DHSs) associate with varieties of regulatory DNA elements. Prediction of DHSs is helpful for investigation into the function of noncoding genomic regions. In this study, numerical vectors are constructed from DHSs and non-DHSs sequences using pseudo trinucleotide composition. Furthermore, first group last classify (FGLC) algorithm is proposed to predict the DHSs. As for the drawback of overall accuracy (ACC) on imbalanced dataset, the ACC is modified to balanced accuracy (BACC). And 5-fold cross-validation method is applied to demonstrate that FGLC algorithm has advantage over existed methods.

School of Science, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu, P. R. China

IV. Секция «История математики»

Об истории четвертой фигуры силлогизмов

А. А. Бабаев, Р. Г. Бабаева

В традиционной логике рассматривается четыре фигуры силлогизмов:

$$\text{I. } \frac{\begin{array}{c} C \to B \\ B \to A \end{array}}{C \to A} \qquad \text{II. } \frac{\begin{array}{c} C \to B \\ A \to B \end{array}}{C \to A} \qquad \text{III. } \frac{\begin{array}{c} B \to C \\ B \to A \end{array}}{C \to A} \qquad \text{IV. } \frac{\begin{array}{c} B \to C \\ A \to B \end{array}}{C \to A}$$

Известно, что Аристотель и другие древние логики как Филипон, Порфирий, Боэций рассматривали только три фигуры силлогизмов. Кто автор четвертой фигуры не известно. Многие логики считали, что автором IV фигуры был древнеримский философ греческого происхождения Гален. Лукасевич опроверг это основываясь на тот факт, что Гален рассмотрел IV фигуры для силлогизмов составленных из трех посылок, а не для Аристотельских силлогизмов которые составлены из двух посылок.

Мы исследовали силлогистику известных восточных Средневековых философов ал-Фараби, ибн Сины, Бахманяра и сравнивали их с логистикой Н. Туси.

Ал-Фараби в своем труде по логике «Ат-тахсил» («Познание») пишет: «Тот силлогизм, в котором средний термин является в одной посылке предикатом, в другой — субъектом, образует первую фигуру; тот, в котором средний термин является предикатом обеих посылок, составляет вторую фигуру; тот , в котором средний термин является субъектом их обеих, представляет третью фигуру.». Видно что, при определении первой фигуру Фараби не уточняет, в какой посылке средний термин является предикатом, в большей или — меньшей. Поэтому у него о четвертой фигуре ничего не говорится.

Ибн Сина и Бахманяр хотя отличают вхождения среднего термина в качестве предиката или субъекта в большую и меньшую посылку но IV фигуру не рассматривают из-за «не естественности».

В «Асас ал-иктибас» («Основы приобретения знаний») Н. Туси определяет все четыре фигуры силлогизмов: «Форма появления среднего термина с остальными терминами в посылках называется фигурой. Их четыре : а) в меньшей посылке — предикат, в большей — субъект, эта первая фигура; б) в обоих посылках — предикат, эта вторая фигура; в) в обоих посылках — субъект, эта третья фигура, г) в меньшей посылке — субъект, в большей — предикат, эта четвертая фигура.»

То что, Туси явно определяет IV фигуру, может привести к выводу, что он является автором IV фигуры, но в трактате «Шарх ал-ишарат» Туси говорит: «“Предыдущие” ученые выявили три фигуры .... “Последующие” ученые, когда обратили внимание на то что, из-за не естественности, IV фигуру не рассматривают, с этим они не согласились». Значит, какие-то «последующие» могли быть авторами IV фигуры еще до Н. Туси. Этим «кем-то» может быть средневековый ученый, астроном, философ Зайн ад-дин Абу-л-Баракат ал-Багдади (1095–1175), известный под имени Ахад аз-заман («единственный своего времени»).

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку (Азербайждан)
E-mail: ali_babaev@inbox.ru

Алгебраическая символика исламского средневековья

А. А. Бабаев, В. Ф. Меджлумбекова

Символы как один из способ абстракции играли большую роль в развитии математики. В этом еще неоцененная заслуга средневековых исламских ученых.

В III веке н.э. Диофант Александрийский в своих 13 книгах развил новые методы решения 260 задач, которые приводили к решению линейных и квадратных уравнений. Диофант ввел специальную символику для обозначения неизвестной, квадрата, куба и других степеней. Четыре из этих книг дошли до нас в арабском переводе. Символика Диофанта (по понятным для арабистов причинам) в них не сохранена, как считается, переведены сами термины. Но при внимательном исследовании видно, что соответствующие арабские термины являются скорее своеобразными символами, имеющими свойства абстракции, наглядности и играющие коммуникационную роль.

Так Диофантов символ ζ неизвестного числа [arifmitos] заменен на арабское [шей] — вещь (нечто), символ Δ от [dinamis] (сила) на [mal] имущество, приумножение. Почти знаковая краткость арабской записи, кроме обозначения степеней (впрочем уравнения высоких степеней арабоязычные ученые не рассматривали), ее закрепленность в трудах математиков еще раз свидетельствовали о символическом характере терминов.

Вполне справедливо приписывать Ал-Хорезми основателем современной алгебры так как он в своем алгебраическом трактате впервые ввел две алгебраические операции, символически обозначаемые «алджабр», и «мугабала».

Развитие естествознания в XV-XVII веках требовало решения уравнения высших степеней. Абстрагирования свойств этих уравнениой упиралось в громоздкое название степеней.

Считается, что возрождение алгебраической символики началось с XV века (Лука Пачиоли, коссисты). Кстати, у Луки Пачиоли обозначение неизвестного «co» — происходило от слова «вещь» — т.е. соответствовало арабскому [шей], от этого же термина и название неизвестного «coss» — (вещь) и у коссистов [XVI] века. Но у тех и других не было систематического обозначения степеней. В труде Дж. Уоллес, «Исторический и практический трактат по алгебре» приведена таблица обозначения степеней у коссистов, Виета, Оутреда, Декарта.

Нами был исследован трактат Н. Туси «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли». В 8 разделе трактата приведена таблица буквенных обозначений степеней. Степени обозначены последовательностями арабских букв, являющихся последними буквами слов «квадрат» (мал), «куб» (киаб), «корень» (джузур), доля (для отрицательных степеней). Следует отметить совпадение обозначени Н. Туси и Оутреда и их аддитивных принципов. Дж. Уоллеса отмечает, что основой чертой трудов, Пачиоли, Штифиля и Бомбели являлась символика, имеющая арабскую природу, основанную на принципах образования степеней.

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку (Азербайждан)
E-mail: ali_babaev@inbox.ru

Некоторые проблемы А. И. Мальцева и А. И. Ширшова

Л. А. Бокуть

В своем выступлении я расскажу о проблемах, в решении которых я (и не только я) участвовал.

1) Проблема Мальцева о существовании кольца, вложимого в группу, но не вложимого в тело.

Во вводной статье к книге [**1**], вышедшей под редакцией М. А. Лаврентьева (зам. редактора А. И. Ширшов), «Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности А. И. Мальцева», стр. 6, приводится (единственная) проблема, приведенная выше.

В книге [**2**], в статье «Anatoly Ivanovich Malcev», стр. 559, написано: «In 1937, answering a question posed to him by Kolmogorov, Malcev published a paper on the embeddability of a ring in the field. The original problem was posed by Van Der Warden whether there existed rings without zero-dividers which could not be embedded in the field. Malcev answered the question by constraction a ring whose multiplicative semigroup was not embedded in a group. Step-by-step, he was led into invistigating the existence of rings whose multiplicative semigroup was embeddable in group yet the ring still was not embeddable in a field.». Опять, это единственная проблема в статье.

2) Проблема Мальцева о тьюринговых степенях неразрешимости проблемы сопряженности в группах.

Эта проблематика связана с направлением в алгебре и математической логике, которое носит название «Алгоритмические проблемы (Decision problems) алгебры» и связанно с такими именами как Ден, Туэ, Магнус, Тьюринг, Пост, Марков, Новиков и др.

3) Проблема Ширшова о разрешимости проблемы равенства в теории алгебр Ли.

Эта проблема была поставлена в работе [**3**]. Работа посвящена, по современной терминологии, теории базисов Гребнера — Ширшова. Она опередила работы Х. Хиронака, 1964 и Б. Бухбергера 1970 (диссертация в 1965) по теории базисов Гребнера.

References

[1] Мальцев А. И., Избранные труды, Т. 1, Классическая алгебра, Наука, 1976.
[2] Sinai Y., Russian mathematicions in the 20th century, World Scientific, 2003.
[3] Ширшов А. И., Некоторые алгоритмические вопросы для алгебр Ли, Сиб. Мат. Журнал, т.3, N 2 (1962), 292–296.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bokut@math.nsc.ru

К 100-летию со дня рождения Д. М. Смирнова. Курс истории математики

О. Д. Максимова

В докладе рассказывается о курсе «История математики», разработанным Дмитрием Матвеевичем Смирновым[1] по поручению Ученого совета для магистрантов механико-математического факультета НГУ, и который читался с 1996 по 2004 г.

Следует отметить, что этот курс требовал от лектора энциклопедических знаний математики и глубокой эрудиции. Исторический процесс возникновения и развития математических понятий и теорий демонстрировался на фоне растущей внутренней связи между отдельными разделами математики. Знакомство с многовековой историей развития математики сопровождалось рассказами о выдающихся математиках прошлых столетий, об их открытиях, повлиявших на развитие не только математики, но и других наук. В отдельных кратких очерках исследовалось возникновение и совершенствование некоторых важнейших понятий и разделов математики. Курс содержал значительное число задач, связанных с теми или иными периодами в истории математики. В курсе также отмечены особенности математики в системе наук, необходимость изучения истории математики и неразрывная связь преподавания математики с её развитием.

К сожалению, материалы по курсу [**1, 2**] не были опубликованы при жизни Дмитрия Матвеевича.

Список литературы

[1] Максимова О. Д., Смирнов Д. М. История математики : учеб. пособие / О. Д. Максимова, Д. М. Смирнов ; Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2016. - 320 с. Книга доступна в электронной библиотечной системе https://e-lib.nsu.ru/.

[2] Максимова О. Д., Смирнов Д. М. История математики : учеб. пособие для вузов (Серия: Университеты России) / О. Д. Максимова, Д. М. Смирнов, 2-е издание, стереотипное; Москва, Юрайт, 2018. - 319 с. Книга доступна в электронной библиотечной системе https://biblio-online.ru/.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: kafedrapm.nsu@mail.ru

[1]Д.М. Смирнов (27.10.1919–13.04.2005) был учеником А.И. Мальцева. Более подробную информацию о Дмитрие Матвеевиче можно почерпнуть в http://www.mathnet.ru/rus/person19697

Элементы интегрального исчисления в трудах ученых исламского средневековья

Э. Мамедов

Книга Бену Муса (IX век) «Книга познания измерения плоских и шаровых фигур» («Китаб марифа масаха ал-ашкал ал-басита ва-л-курийййа») сохранивщаяся в виде обработки ат-Туси, состоит из 18 предложений. В планиметрических задачах вычисляются, среди прочего, площадь круга и длина окружности. В частности, выступая из аналогии с правильными многогугольниками утверждается, что площадь круга равна произведению его полудиаметра на половины длины его окружности. В пятой задаче оцениванием периметров вписанных и описанных правильных многоугольников число оценивается сверху и снизу: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. При этом отмечается, что таким способом можно получить более точное приближенное значение числа π. Многие исламские ученые средневенковья занимались этой задачей. Видимо, в трактате «Трактат об окружности» («Риала ал-мухитийййа») Джамшидом ал-Каши (ум. около 1430) получена наибольшая точная оценка для числа π с помошью этого метода. Каши оценивая периметры вписанного и описанного правильных $3 \cdot 2^{28}$-угольников получил результат, имеющий 17 верных десятичных знаков.

Ал-Хайсам в трактатах «Речь об измерении шара» («Каул фи масаха ал-кура») и «Книга об измерении параболического тела» («Макала фи мисаха ал-муджассам ал-мукафи») оценивает частичные суммы некоторых рядов, и полученные результаты применяет для вычисления площадей и обемов. В частности, им получены следующие результаты:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n+1}{3}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right); \frac{n^3+n^2}{3} < \sum_{k=1}^{n} k^2 < \frac{n^3+2n^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}; \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}; \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$$

$$\frac{8}{15}\,(-1)^4 < \sum_{k=1}^{m-1}\left(m^2-k^2\right) < \frac{8}{15}m^5; \sum_{k=0}^{m-1}\left(m^2-k^2\right) > \frac{8}{15}m^5$$

Оценивания объемы вписанных и описанных ступенчатых тел вращения около шара и параболических фигур, состоящих из цилиндрических фигур он получает соответствующие формулы. Проводимые вычисления практически равносильны вычислению интегралов $\int\limits_0^r \left(r^2-x^2\right)dx$, $\int\limits_0^a x\,dx$ и $\int\limits_0^a x^4\,dx$.

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку (Азербайждан)
E-mail: eminm62@gmail.com

V. Секция «Неклассические логики»

Структурные вопросы дерева унификаторов

С. И. Башмаков

Теория унификации (преобразования формулы в теорему некоторыми заменами) активно развивается в последние десятилетия [**6**] и уже включает в себя немало различных, но связанных задач. В их число входят исследование типа унификации логик, построение определенных наборов унификаторов формул, описание «лучших» и простейших подстановок [**2, 5, 1**].

Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ *унифицируема* в $\mathcal{L} \Leftrightarrow \exists\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ (*унификатор*) для каждой p_i такая, что $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$.

Унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ назовем *более общим* чем σ^1 в $\mathcal{L}$ ($\sigma^1 \preceq \sigma$), если существует подстановка γ такая, что $\forall p_i \in Var(\varphi)$: $\sigma^1(p_i) \equiv \gamma(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$.

Известно, что множество всех унификаторов любой формулы упорядочено относительно предпорядка, согласно отношению «более общий» [**3**]. Однако, ранее практически не проводились исследования свойств и взаимодействия унификаторов внутри такого отношения (за исключением, возможно, [**4**]).

Пусть AU_φ — множество всех унификаторов произвольной формулы φ в логике $\mathcal{L}$. В данном исследовании предлагается построение дерева унификаторов $\langle AU_\varphi, \preceq\rangle$ формулы φ, где AU_φ выступает в качестве множества вершин дерева, построенного на отношении предпорядка $\preceq$. Корневыми элементами дерева являются *корневые* (или *ground*-) унификаторы, т.е. полученные путем подстановки констант вместо переменных формулы. Элементами первого слоя, если таковой существует, являются максимальные или наиболее общий унификаторы формулы. В докладе анонсируются начала данного исследования.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта N 18-41-240005, а также Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

Список литературы

[1] Balbiani P. Remarks about the unification type of several non-symmetric non-transitive modal logics // Logic J. IGPL. 2018. Published online. DOI: 10.1093/jigpal/jzy078.

[2] Dzik W., Wojtylak P.. Unification in first-order transitive modal logic // Logic J. IGPL. 2019. Published online. DOI: 10.1093/jigpal/jzy077.

[3] Ghilardi S. Best solving modal equations // Annals of Pure and Applied Logic. 2000. Vol. 102(3). P. 183–198.

[4] Jerábek E. Blending margins: the modal logic K has nullary unification type // J. Logic Comput. 2015. Vol. 25. P. 1231–1240.

[5] Kost S. Projective unification in transitive modal logics // Logic J. IGPL. 2018. Vol. 26(5). P. 548–566.

[6] Rybakov V. V. Best unifiers in transitive modal logics // Studia Logica. 2011. Vol. 99. P. 321–336.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: krauder@mail.ru

Алгоритмы оптимизация формальных доказательств в дедуктивных системах

Д. Ю. Власов

Большие базы формализованных доказательств, написанных человеком, могут содержать неоптимальные доказательства. Автором разработаны и реализованы алгоритмы, позволяющие автоматически находить и устранять неоптимальности в формальных доказательствах в дедуктивных системах произвольного вида. Алгоритмы тестировались на базе теорем системы формальной математики Metamath [**1**].

Список алгоритмов оптимизации формальных доказательств:

- удаление неиспользуемых шагов,
- удаление неиспользуемых предпосылок,
- удаление дублированных шагов доказательства,
- замена фрагмента дерева доказательств на более короткий (один шаг),
- выделение общих поддеревьв доказательств и генерация лемм,
- генерация наболее общего вида теоремы по её доказательству.

В реальной базе теорем (первые 100 000 строк базы Metamath) все описанные выше оптимизации срабатывают. Эффективность оптимизаций:

- удаление неиспользуемых предпосылок: удалено 16 неиспользуемых гипотез,
- удаление дублированных шагов доказательства: удален 2421 дублированный шаг,
- замена фрагмента дерева доказательств на более короткий: удалено 511 избыточных шагов.

Следует отметить, что самая эффективная оптимизация (удаление дублированных шагов) на самом деле довольно техническая по сути. Больший интерес представляет замена фрагментов доказательств на более корокие - это уже нетривиальная трасформация дерева доказательства.

Список литературы

[1] Megill N. Metamath: A Computer Language for Pure Mathematics. Lulu Press, Morrisville, North Carolina, 2007.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vlasov@math.nsc.ru

Унификация в нетранзитивной временной логике знания с универсальной модальностью

Т. Ю. Зверева

Подход к моделированию времени как нетранзитивного процесса восходит к идее возможной некорректной передачи информации: когда часть данных, доступных вовлечённым в вычислительный процесс субъектам-агентам в прошлом, может быть утеряна к настоящему моменту, и нельзя с уверенностью сказать будет ли и кому именно из агентов доступна эта информация в будущем, [**1**].

Изначально проблема унификации ставилась как задача приведения заданных термов в синтаксическое равенство путём замены их переменных на другие термы. В области нестандартных логик эта задача чаще рассматривается как вопрос превращения формулы в теорему после некоторой замены переменных [**2**].

Формула $\alpha(p_1, \dots, p_s)$ называется *унифицируемой* в логике $\mathcal{L}$, если существует подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ для каждой $p_i \in Var(\alpha)$, такая, что $\alpha(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$. В этом случае, подстановка σ называется *унификатором* формулы α.

С.И. Башмаков доказал проективность унификации в линейной логике нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$ [**3**], позднее анонсировал обобщение результата на случай логики знания [**4**]. В текущем исследовании нами подтверждено данное обобщение.

Язык $L^{\mathcal{ULITK}}$ включает такие унарные модальные операторы, как: N – нерефлексивная нетранзитивная модальность «Next», $\Box_1, \dots, \Box_n$ – модальности знаний агентов, $\Box_e$ – модальность общего знания, $\Box_U$ – универсальная модальность.

Логику $\mathcal{ULITK}$ определяем как множество всех формул языка $L^{\mathcal{ULITK}}$ выполнимых на соответствующем ей классе фреймов F.

Формула $\alpha(p_1, \dots, p_s)$ называется *проективной* в $\mathcal{ULITK}$, если $\exists \tau(\alpha)$ (проективный унификатор) для α, т.ч. $\forall p_i \in Var(\alpha) : \Box_U \alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{ULITK}$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Любая унифицируемая в $\mathcal{ULITK}$ формула проективна.*

Как следствие установлен унитарный тип унификации исследуемой логики, получено описание проективного унификатора.

Список литературы

[1] Rybakov V. V. Intransitive temporal multiagent logics, information and knowledge, decidability // Siberian Math. Journal. 2017. Vol. 58(5). P. 1128–1143.

[2] Dzik W., Wojtylak P. Unification in first-order transitive modal logic // Logic J. IGPL. 2019. Published online. DOI: 10.1093/jigpal/jzy077.

[3] Bashmakov S. I. Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality // J. SibFU. Mathematics and Physics. 2018. Vol. 11(1). P. 3–9.

[4] Bashmakov, S.I. Unification in linear multi-modal logic of knowledge and non-transitive time // Handbook 6th World Congr. & School Unilog (Vichy, France, June 16–26, 2018). 2018. P. 229–231.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: 3336259@gmail.com

Об аддитивных операциях в интуиционистской линейной логике

М. И. Канович, С. Л. Кузнецов, А. О. Щедров

Рассмотрим минимальный фрагмент интуиционистского варианта линейной логики [**2**] (ILL), с одной лишь импликацией ($\multimap$). Секвенции двустороннего генценовского исчисления для ILL имеют вид $\Gamma \vdash A$, где A — формула, а Γ — конечное мультимножество формул. правила вывода следующие:

$$A \vdash A \qquad \frac{\Pi \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Pi, A \multimap B \vdash C} \qquad \frac{A, \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \multimap B}$$

Добавим аддитивные операции — конъюнкцию & и дизъюнкцию $\oplus$:

$$\frac{\Gamma, A_i \vdash C}{\Gamma, A_1 \,\&\, A_2 \vdash C} \quad \frac{\Gamma \vdash A_1 \qquad \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash A_1 \,\&\, A_2} \quad \frac{\Gamma, A_1 \vdash C \qquad \Gamma, A_2 \vdash C}{\Gamma, A_1 \oplus A_2 \vdash C} \quad \frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_1 \oplus A_2}$$

ILL корректна и полна относительно алгебраических моделей на коммутативных решётках с делениями (CRL) [**1**]. Закон дистрибутивности, $A \,\&\, (B \oplus C) \vdash (A \,\&\, B) \oplus (A \,\&\, C)$, в ILL невыводим. Однако, как и для некоммутативной ILL [**5**], фрагменты без $\oplus$ и без & различаются с точки зрения дистрибутивности:

Теорема. *Фрагмент ILL с операциями $\multimap$ и & полон относительно класса дистрибутивных CRL.*

Теорема. *Следующая секвенция, использующая только операции $\multimap$ и $\oplus$, общезначима на всех дистрибутивных CRL, но не выводима в ILL:*

$((y \multimap x) \oplus (z \multimap x) \oplus x) \multimap ((y \multimap x) \oplus x), (y \multimap x) \oplus x, ((y \multimap x) \oplus x) \multimap ((z \multimap x) \oplus x) \vdash ((y \oplus z) \multimap x) \oplus x$.

Следующие результаты об алгоритмической сложности уточняют [**6**] и являются коммутативной версией результатов для некоммутативной ILL [**4**]:

Теорема. *Задачи проверки выводимости для фрагментов ILL с операциями $\multimap$ и & и с операциями $\multimap$ и $\oplus$ PSPACE-полны.*

При этом задача выводимости во фрагменте только с $\multimap$ NP-полна [**3**].

Работа М. И. Кановича и А. О. Щедрова поддержана грантом РНФ N 17-11-01294, работа С. Л. Кузнецова — грантом РНФ N 16-11-10252.

Список литературы

[1] Galatos N., Jipsen P., Kowalski T., Ono H. Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics. Elsevier, 2007.

[2] Girard J.-Y. Linear logic // Theor. Comput. Sci. 1991. Vol. 50(3). P. 1–101.

[3] Kanovich M. I. The complexity of neutrals in linear logic // LICS 1995. IEEE, 1995. P. 486–495.

[4] Kanovich M., Kuznetsov S., Scedrov A. The complexity of multiplicative-additive Lambek calculus: 25 years later // WoLLIC 2019. LNCS vol. 11541. Springer, 2019. P. 356–372.

[5] Kanovich M., Kuznetsov S., Scedrov A. L-models and R-models for Lambek calculus enriched with additives and the multiplicative unit // ibid., P. 373–391.

[6] Lincoln P., Mitchell J., Scedrov A., Shankar N. Decision problems for propositional linear logic // Ann. Pure Appl. Log. 1992. Vol. 56(1–3). P. 239–311.

UCL, Лондон; МИАН, Москва; UPenn, Филадельфия; НИУ ВШЭ, Москва
E-mail: m.kanovich@ucl.ac.uk, sk@mi-ras.ru, scedrov@math.upenn.edu

Семантика общерекурсивной реализуемости

А. Ю. Коновалов

Понятие рекурсивной реализуемости восходит к работе американского математика С. К. Клини [**1**], в которой была предложена интерпретация ряда специфических интуиционистских понятий на основе концепции теории алгоритмов. С недавних пор были введены в рассмотрение варианты реализуемости, основанные на различных видах субрекурсивной реализуемости: примитивно-рекурсивная реализуемость [**2, 3**], минимальная реализуемость [**4**]. Представляют интерес и другие виды субрекурсивной реализуемости.

В настоящей работе разрабатывается понятие общерекурсивной реализуемости, основанное на использовании индексов общерекурсивных функций в качестве конструктивного способа получения одних реализаций из других.

В статье [**5**] было доказано, что интуиционистская логика некорректна относительно семантики примитивно-рекурсивной реализуемости, в то время как базисная логика корректна относительно этого вида семантики. Автором установлено, что аналогичные результаты справедливы и для семантики общерекурсивной реализуемости.

Список литературы

[1] Kleene S. K. On the interpretation of intuitionistic number theory // Journal of Symbolic Logic. 1945. Vol. 10. P. 109–124.

[2] Damnjanovic Z. Strictly primitive recursive realizability // Journal of Symbolic Logic. 1994. Vol. 59(4). P. 1210–1227.

[3] Salehi S. A generalized realizability for constructive arithmetic // Bulletin of Symbolic Logic. 2001. Vol. 7. P. 147–148.

[4] Damnjanovic Z. Minimal realizability of intuitionistic arithmetic and elementary analysis // Journal of Symbolic Logic. 1995. Vol. 60(4). P. 1208–1241.

[5] Plisko V. Primitive recursive realizability and basic propositional logic // Utrecht University, Logic Group Preprint Series, 2007, 261, 27 pp.

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва

О целеуправляемом секвенциальном исчислении для интуиционистской логики

А. В. Лялецкий

В работе [**1**] предложен подход к построению корректных и полных компьютерно-ориентированных бескванторных секвенциальных исчислений для поиска вывода в классических и неклассических вариантах логики первого порядка, в частности, в интуиционистской логике. В ней основное внимание уделяется вопросам оптимизации работы с кванторами, которая достигается за счет использования оригинального понятия допустимой подстановки, учитывающего кванторное строение рассматриваемых секвенций, что и дает возможность строить бескванторные исчисления. Но в [**1**] отсутствует техника оптимизации применения пропозициональных правил. Здесь предлагается закрыть этот пробел для интуиционистской логики в ее секвенциальном варианте.

Согласно рассматриваемому подходу, пропозициональные правила формулируются таким образом, что на выбор для применения того или иного пропозиционального влияет «цель» рассматриваемой секвенции, т. е. формула, находящаяся в ее сукцеденте. (При этом считается, что формулы в антецедентах секвенций образуют мультимножества, а не последовательности формул.) Поиск вывода в предлагаемом исчислении, содержащим только пропозициональные правила и вариант правила сокращения, представляет собой, после фиксации кванторного строения формул исходной секвенции и опускания самих кванторов, процесс поиска секвенциального дерева с «квазиаксиомами» во всех листьях с последующей проверкой такого дерева на выполнение следующих условий: (i) существование подстановки, превращающей все «квазиаксиомы» в обычные аксиомы, (ii) выполнение условия допустимости этой подстановки относительно построенного дерева и (iii) выполнение условия так называемой совместимости подстановки с построенным деревом [**2**]. Исчисление является *корректным* и *полным*. При этом следует отметить, что требование совместимости является необходимым условием для корректности в общем случае для интуиционистской логики, и оно становится излишним для классической логики.

Список литературы

[1] Lyaletski A. Mathematical text processing in EA-style: a sequent approach // Journal of Formalized Reasoning. 2016. Vol. 9(1), Special Issue: Twenty Years of the QED Manifesto. P. 235–264.

[2] Lyaletski A. Admissibility, compatibility, and deducibility in first-order sequent logics // Computer Science Journal of Moldova. 2015. Vol. 23, No. 3(69). P. 289–303.

НУБиП, Киев (Украина)
E-mail: a.lyaletski@nubip.edu.ua

Проблема сильной узнаваемости в расширениях логик Od и JX

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Исследуются проблемы различимости и сильной различимости, узнаваемости и сильной узнаваемости в расширениях минимальной логики J. Эти понятия были введены в [**1**]–[**3**].

Пусть L_0 — J-логика и L — конечно аксиоматизируемая логика, содержащая L_0; Rul – множество аксиом и правил вывода. Пишем $L_0 + Rul \geq L$, если все формулы из L выводимы в $L_0 + Rul$; пишем $L_0 + Rul = L$, если L совпадает с множеством формул, выводимых в $L_0 + Rul$.

Говорим, что L *различима над* L_0, если существует алгоритм, проверяющий по любой формуле A верно ли включение $L_0 + A \geq L$. L — *сильно различима* над L_0, если существует алгоритм, проверяющий по любому конечному множеству Rul аксиом и правил вывода, выполняется ли включение $L_0 + Rul \geq L$.

Логика L — *узнаваема над* L_0, если существует алгоритм, проверяющий по любой формуле A равенство $L_0 + A = L$. Логика L — *сильно узнаваема над* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода решает, совпадает ли логика $L_0 + Rul$ с L.

Ранее было доказано, что интуиционистская логика Int узнаваема над минимальной логикой J [**1**]. Однако проблема ее сильной узнаваемости над J еще не решена.

В этой работе мы доказываем, что логика Int сильно узнаваема и сильно различима над минимальной предгейтинговой логикой $\mathrm{Od} = \neg\neg(\bot \longrightarrow \mathrm{p})$ и минимальной стройной логикой $\mathrm{JX} = (\bot \longrightarrow p) \vee (p \longrightarrow \bot)$.

Кроме того, рассмотрим формулу $F = (\bot \longrightarrow p \vee q) \longrightarrow (\bot \longrightarrow p) \vee (\bot \longrightarrow q)$. Логика $JF = \mathrm{J} + F$ исследовалась в ряде работ [**4, 5**], она разрешима и обладает дизъюнктивным и интерполяционным свойствами. Неизвестно, является ли логика $\mathrm{J} + F$ узнаваемой над J. Мы доказываем, что формула F является различимой над минимальной стройной логикой JX.

Список литературы

[1] Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Узнаваемые логики // Алгебра и логика. 2015. Т. 54 (2). С. 252–274.

[2] Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Сильная разрешимость и сильная узнаваемость // Алгебра и логика. 2017. Т. 56(5). С. 559–581.

[3] Максимова Л. Л. Узнаваемые и различимые логики и многообразия // Алгебра и логика. 2017. Т. 56(3). С. 367–374.

[4] Odintsov S. Constructive negations and paraconsistency. Series: Trends in Logic, Volume 26. Springer, Dordrecht, 2008. 242 p.

[5] Стукачева М. В. О дизъюнктивном свойстве в классе паранепротиворечивых расширений минимальной логики // Алгебра и логика. 2004. Т. 43(2). С. 235–252.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru

Объединенная логика задач и высказываний

А. А. Оноприенко

С. А. Мелихов в [**3**] ввёл в рассмотрение объединённую логику задач и высказываний QHC. В этой логике имеются переменные двух типов – типа высказывание и типа задача. Формулы строятся из переменных с помощью стандартных классических и интуиционистских связок $\vee, \wedge, \neg, \to$ (не меняющих тип формул), а также модальностей ! и ?. Формулы типа высказывание подчиняются аксиомам и правилам вывода классической логики, а формулы типа задача – аксиомам и правилам вывода интуиционистской логики. Модальности меняют тип формул: если p – формула типа высказывание, то $!p$ – задача ««найди доказательство p»». Если α – формула типа задача, то $?\alpha$ – высказывание ««задача α имеет решение»». Эти модальности связаны между собой аксиомами и правилами вывода [**3**].

С.А. Мелихов рассмотрел несколько типов моделей логики QHC (топологические модели, модели на основе понятия пучка), но даже для пропозиционального фрагмента HC этой логики не было известно полной семантики [**4**]. Автором в [**1**] рассмотрены следующие типы моделей логики HC: алгебраическая семантика и модели Крипке с двумя независимыми множествами миров. Доказано, что логика HC полна относительно конечных моделей каждого из этих типов.

В [**2**] были введены шкалы Крипке с ««проверяющими мирами»» и рассмотрены в качестве моделей эпистемической логики IEL^+. Автором получено обобщение этих моделей до моделей логики HC и доказана следующая теорема.

Теорема *Логика HC полна относительно моделей Крипке с проверяющими мирами. Кроме того, выполнено свойство конечных моделей.*

Поскольку модели Крипке с проверяющими мирами также являются моделями логики IEL^+, эта теорема имеет следующие следствия:

Следствие *Логика IEL^+ полна относительно конечных моделей Крипке с проверяющими мирами.*

Следствие *Логики HC и IEL^+ разрешимы.*

С.А.Мелиховым было доказано, что логика HC является консервативным расширением классической логики, интуиционистской логики, а также модальной классической логики S4 (если обозначить $\Box =?!$) [**3**]. Оставался открытым вопрос, является ли HC консервативным расширением модальной интуиционистской логики H4 (если обозначить $\nabla =!?$), которая совпадает с рассмотренной С. Артёмовым и Т. Протопопеску эпистемической логикой IEL^+ [**2**]. Автором была доказана следующая теорема.

Теорема *Логика HC – консервативное расширение логики H4.*

Однако остаётся открытым вопрос о том, является ли предикатная логика QHC консервативным расширением логики QH4.

Список литературы

[1] Оноприенко А. А. Семантика типа Крипке для пропозициональной логики задач и высказываний. Дипломная работа, защищена 25.05.18. МГУ, механико-математический факультет, кафедра математической логики.

[2] Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic Epistemic Logic // The Review of Symbolic Logic. 2019. Published online, DOI: 10.1017/S1755020315000374

[3] Melikhov S. A. A Galois connection between classical and intuitionistic logics I: Syntax // Preprint available at https://arxiv.org/abs/1312.2575

[4] Melikhov S. A. A Galois connection between classical and intuitionistic logics II: Semantics // Preprint available at https://arxiv.org/abs/1504.03379

МГУ, Москва
E-mail: ansidiana@yandex.ru

Допустимые правила вывода модальных WCP-логик над GL

В. В. Римацкий

Говорим, что логика λ, расширяющая логику GL, имеет *слабое свойство ко-накрытий над GL (weak co-cover property)*, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathcal{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F}$, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного иррефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup_{c\in\mathcal{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом. Логики, обладающие этим свойством, будем называть WCP-логиками над GL.

Обозначим $\Box_0\alpha := \alpha\wedge\Box\alpha$; $\Diamond_0 := \alpha\vee\Diamond\alpha$. Для всех чисел $n>1,\ 1\le i,j\le n;\ n\in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i}\neg p_j;\quad A_n := \bigwedge_{1\le i\le n}\Diamond\pi_i;$$

$$A^{ir}_{n,1} := \Box_0\big[\bigwedge_{1\le i\le n}(p_i\to\neg\Diamond_0 q)\big];\quad B^{ir} := \neg\Diamond q.$$

Определим также для чисел $n>1, n\in N$, последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}^{ir}_n := \frac{\Box_0\big(A^{ir}_{n,1}\wedge\neg(A_n\wedge B^{ir})\big)}{\Box_0\neg A_n};$$

Пусть задана логика λ, расширяющая логику GL, удовлетворяющая условиям:
(1) *λ финитно аппроксимируема;*
(2) *имеет слабое свойство ко-накрытий над GL;*
(3) *редуцированная форма $rf(r)$ правила r не допустима в λ $\Longleftrightarrow$ существует λ-модель $\mathcal{M}=\langle F,V\rangle$ такая, что i) $\forall\ x\in F\ x\models_V\bigvee\phi_j$; ii) $\exists\ y\in\mathcal{F}\ y\not\models_V\Box x_0$; iii)$\forall\mathcal{D}\subseteq F\ \exists\ e\in F\ e\models_V\phi_e,\ \phi_e\in Pr(r),\ \&\ \theta_2(\phi_e)=\bigcup_{z\in\mathcal{D}}(\theta_1(\phi_z)\cup\theta_2(\phi_z))$.*

Теорема. *Правила $\mathcal{R}^{ir}_n$, $n>1$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей GL, имеющей слабое свойство ко-накрытий над GL.*

Теорема. *Пусть модальная логика $\lambda(\supseteq GL)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Тогда любое допустимое правило r (в редуцированной форме) логики λ выводится из правил $\{\mathcal{R}^{ir}_n, n>1, n\in N\}$.*

Теорема. *Пусть модальная логика $\lambda(\supseteq GL)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Тогда множество правил $\{\mathcal{R}^{ir}_n,\ n>1, n\in N\}$ образует независимый базис допустимых правил вывода логики λ.*

Теорема. *Пусть финитно аппроксимируемая логика логика λ расширяет логику GL. Правила $\mathcal{R}^{ir}_n$, $n>1$, $n\in N$, допустимы в λ если и только если λ имеет слабое свойство ко-накрытий над GL.*

Сибирский Федеральный Университет, Институт математики, Красноярск
E-mail: Gemmeny@rambler.ru

A Hilbert-style calculus with explicit rejection

S. A. Drobyshevich

We investigate the system of 2-intuitionistic logic, 2Int, introduced by Heinrich Wansing [**3**]. 2-Intuitionistic logic was introduced in an attempt to make sense of problems which arise when trying to formulate a natural deduction system for bi-intuitionistic logic of Cecilya Rauszer [**2**]. Wansing outlined some of these problems and presented his 2-intuitionistic logic as a natural deduction system for the language of bi-intuitionistic logic which features explicit rejection. This system contains, for every connective f, introduction and elimination rules governing the assertion of f as well as introduction and elimination rules governing rejection of f. What is especially interesting is that there are some rules combining both modes of reasoning.

One interesting feature of 2-intuitionistic logic is that while it has explicit rejection, there is no single negation connective which serves as a toggle between assertion and rejection (in fact there is no negation in the language at all). In this work we develop a Hilbert-style calculus for 2-intuitionistic logic which has explicit rejection. To do so we employ a bilateral convention of using the so-called signed formulas of the form φ^+ and φ^-, which can be intuitively understood as "φ is asserted" and "φ is rejected". We then formulate our Hiblert-style calculus over signed formulas and prove its soundness and completeness with respect to Kripke-style semantics for 2-intuitionistic logic developed by Wansing. We also show, how to usual Hilbert-style presentation of 2-intuitionistic logic can be obtained by characterizing separately assertion and rejection fragments of the system.

Further, we discuss some of the advantages of our approach. One benefit is that thinking of 2-intuitionistic logic in terms of signed formulas allows one to formulate a natural replacement theorem for the system. We also show that by introducing a notion of weak definitional equivalence for systems with explicit rejection, one can show that 2-intuitionistic logic and David Nelson's logic N4 [**1**] are weakly definitionally equivalent — a fact obscured by the usual presentation of N4 in which rejection is reduced to strong (or constructive) negation of the system.

This work was supported by the Alexander von Humboldt Foundation.

References

[1] Almukdad A., Nelson D. Constructible falsity and inexact predicates // The Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49(1). P. 231–233.
[2] Rauszer C. A formalization of the propositional calculus of H-B logic // Studia Logica. 1974. Vol. 33(1) P. 23–34.
[3] Wansing H. Falsification, natural deduction and bi-intuitionistic logic // Journal of Logic and Computation. 2013. Vol. 26(1). P. 425–450.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: drobs@math.nsc.ru

Modelling non-monotonic reasoning via temporal multi-agent logics

V. V. Rybakov

A popular area in computer science is applications of non-standard logics for analyses of computational processes in multi-thread environment. A particulary important case is verification and modelling processes of reasoning and derivation information from collected reliable facts. That processes are non-monotonic by nature and collected and proven facts may be refuted and updated. In particular, for that reason, non-standard logics are often used for that kind of analyses. These logics often are modal-like or temporal ones or others close to epistemic logics. They, in general, are devised to capture and represent defeasible reasoning when reasoners draw tentative conclusions, enabling reasoners to retract their conclusion based on further evidence (for origin the research in non-monotonic logic).

Reasoning about knowledge is another good issue for applications non-monotonic logic. That logics include formulae that may mean that something is known or not known, therefore these logics should not be monotonic. These non-monotonic logics may be various multi-modal, temporal or agent's logics (when agent's knowledge logical operations are meant as special modal-like operations). These research are well represented in publications of many authors. We absorb (in a sense) developed previously technique and embedded new technique obtained recently by us.

The semantics we suggest is based at relational (Kripke-Hinttika like) models for modelling computational processes and analysis of databases with incomplete information, for instance, with information forgotten in the past. Besides, the agent's accessibility relations may have lacunas; agents may have no access to some potentially known and stored information. Satisfiability and decidability issues are in focus of our research. We find algorithms solving satisfiability problem. Illustrating examples are provided.

The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research, Government of Krasnoyarsk Territory, Krasnoyarsk Regional Fund of Science, the research project No. 18-41-240005.

Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk;
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk
E-mail: Vladimir_Rybakov@mail.ru

Modal bilattice logic as the fusion of K with itself

S. O. Speranski

This talk is concerned with modal logics based on the *Belnap–Dunn useful four-valued logic* — also known as FDE. One such logic, called *modal bilattice logic*, was introduced in [**1**]; we denote it by MBL. It should be remarked that all the four truth values are explicitly expressible as terms in the language of MBL. Furthermore, the Kripke semantics of MBL uses four-valued accessibility relations, and the logic itself turns out to be non-normal.

For a modal logic L, by $\mathcal{E}L$ we mean the lattice of L-extensions (defined appropriately). Denote by K^2 the fusion of the least normal modal logic K with itself. Then using the technique of [**2**], it can be proved that:

Theorem. *There exists a lattice isomorphism between $\mathcal{E}\mathsf{MBL}$ and $\mathcal{E}\mathsf{K}^2$.*

The proof of this theorem provides an explicit isomorphism Ω (which is induced by a suitably chosen computable formula translation). It turns out that Ω preserves various nice properties. For instance, for every MBL-extension L:

- L is decidable (complete in $\mathsf{co\text{-}NP}$, PSPACE, etc.) iff so is $\Omega(L)$;
- L has Craig's interpolation property iff $\Omega(L)$ has it.

In this way Ω not only preserves lattice structure, but also much of what may be called 'metamathematical structure'.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 18-501-12019).

References

[1] Jung A. and Rivieccio U. Kripke semantics for modal bilattice logic // Proceedings of the 28th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, IEEE Computer Society Press. 2013. P. 438–447.

[2] Odintsov S. P. and Speranski S. O. Belnap–Dunn modal logics: Truth constants vs. truth values // Review of Symbolic Logic. 2019. Published online. 21 pp.

[3] Odintsov S. P. and Wansing H. Modal logics with Belnapian truth values // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2010. Vol. 20(3). P 279–301.

St. Petersburg State University, Saint Petersburg
E-mail: katze.tail@gmail.com

VI. Секция «Теория вычислимости»

Ограниченная сводимость вычислимых нумераций

Н. А. Баженов, М. Мустафа, С. С. Оспичев

Классическим инструментом исследования алгоритмической сложности нумераций [**1**] является сводимость $\leq$. Нумерация ν сводится к нумерации μ ($\nu \leq \mu$), если существует вычислимая функция f, такая что для любого $x \in \omega$, $\nu(x) = \mu(f(x))$. Эта сводимость порождает верхнюю полурешетку степеней (полурешетка Роджерса). Отметим два ключевых для представленной работы результата о строении полурешеток Роджерса семейств вычислимо-перечислимых множеств :

A. Хуторецкий [**2**] доказал, что полурешетка Роджерса или одноэлементна, или бесконечна.

B. Селиванов [**3**] доказал, что бесконечная полурешетка Роджерса не может быть решеткой.

В данной работе рассматривается *ограниченная сводимость* нумераций $\leq_{bm}$. Нумерация ν bm-сводится к нумерации μ ($\nu \leq_{bm} \mu$), если существует вычислимая функция f, такая что для любого x, $\nu(x) = \mu(f(x))$ и для любого y, прообраз $f^{-1}(y)$ – это конечное множество.

Неожиданно, теоремы Хуторецкого и Селиванова не переносятся на случай bm-сводимости. Получены следующие результаты:

Теорема.

A$'$. *Для любого натурального $n \geq 2$, существует конечное семейство вычислимо-перечислимых множеств, такое что его bm-полурешетка Роджерса имеет мощность $2^n - 1$.*

B$'$. *Существует вычислимое семейство вычислимо-перечислимых множеств, что его bm-полурешетка Роджерса является бесконечной решеткой.*

Исследования Н. А. Баженова и С. С. Оспичева выполнены при поддержке Гранта Президента Российской Федерации для молодых российских учёных — кандидатов наук (МК-1214.2019.1).

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л., Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

[2] Хуторецкий А. Б. О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций. Алгебра и Логика. 1971, т. 10, N 5, с. 561–569.

[3] Селиванов В. Л. Две теоремы о вычислимых нумерациях. Алгебра и Логика. 1976, т. 15, N 4, с. 470–484.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Nazarbayev University, Нур-Султан
E-mail: manat.mustafa@nu.edu.kz
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: ospichev@math.nsc.ru

О типах изоморфизма полурешеток Роджерса в аналитической иерархии

Н. А. Баженов, С. С. Оспичев, М. М. Ямалеев

Нумерация ν *сводится* к нумерации μ, если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что $\nu(n) = \mu(f(n))$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Понятие сводимости между нумерациями приводит к исследованиям естественного класса верхних полурешёток [**1**], часто называемых *полурешетками Роджерса*. С. С. Гончаров и А. Сорби [**2**] начали систематическое изучение полурешёток Роджерса для семейств множеств, принадлежащих уровням различных теоретико-рекурсивных иерархий.

В данной работе исследуются полурешётки Роджерса в аналитической иерархии. В частности, получен следующий результат:

Теорема. *Пусть $m \neq n$ — ненулевые натуральные числа. Если полурешётка Роджерса R для Π^1_m-вычислимого семейства $S \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ не одноэлементна, то R не изоморфна никакой полурешётке Роджерса для Π^1_n-вычислимого семейства.*

Исследования Н. А. Баженова и С. С. Оспичева выполнены при поддержке Гранта Президента Российской Федерации для молодых российских учёных – кандидатов наук (МК-1214.2019.1).

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л., Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

[2] Гончаров С. С., Сорби А., Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика, 36, 6 (1997), 621–641.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: ospichev@math.nsc.ru
Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

Примитивно рекурсивная категоричность в структурах с эквивалентностью и унарах

К. В. Блинов

Пусть $\mathfrak{A}$ — примитивно рекурсивная структура. Скажем, что $\exists$-диаграмма $\mathfrak{A}$ разрешима с примитивно рекурсивными свидетелями, если существует такая примитивно рекурсивная функция $g(n, m)$, что если n — номер набора $\bar{x}$ из $\mathfrak{A}$, и m — геделевский номер формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, то она находит номер набора $\bar{z}$ такого, что если в $\mathfrak{A}$ истинна $\exists \bar{y}\ \Phi(\bar{x}, \bar{y})$, то в $\mathfrak{A}$ истинна и $\Phi(\bar{x}, \bar{z})$.

Определим класс структур K_Σ как класс примитивно рекурсивных структур, $\exists$-диаграмма которых разрешима с примитивно рекурсивными свидетелями.

Скажем, что две структуры примитивно рекурсивно изоморфны, если между ними существует изоморфизм f, такой что и он, и f^{-1} являются примитивно рекурсивными функциями.

Будем говорить, что алгебраическая структура $\mathfrak{A}$ примитивно рекурсивно категорична над классом K, если существует изоморфная $\mathfrak{A}$ структура $\mathfrak{A}_1$ из класса K, и любая другая структура $\mathfrak{A}_2$ из класса K, изоморфная $\mathfrak{A}$, примитивно рекурсивно изоморфна $\mathfrak{A}_1$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — не более чем счетная структура с эквивалентностью. Тогда она примитивно рекурсивно категорична над K_Σ тогда и только тогда, когда она вычислимо категорична.*

Также в работе рассматриваются унары — структуры с сигнатурой из одного функционального символа. Два элемента унара $x, y \in \mathfrak{A}$ называются связанными, если выполняется $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geq 0$. Максимальное связанное множество называется блоком. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетный унар, в котором есть конечный блок D, такой что в $\mathfrak{A}$ найдется бесконечно много блоков, изоморфных D, и найдется бесконечно много блоков из $\mathfrak{A}$, неизоморфных D, в которые он изоморфно вкладывается. Назовем такой блок *нераспознаваемым.*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетный унар, в котором есть нераспознаваемый блок. Тогда $\mathfrak{A}$ — не примитивно рекурсивно категоричен над K_Σ.*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — не более чем счетный унар, содержащий такой элемент d_0, что $(d_0, f(d_0), \ldots)$ или $(d_0, f^{-1}(d_0), \ldots)$ — ω-цепь, у каждого элемента которой существует только один прообраз в $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A}$ — не примитивно рекурсивно категоричен над K_Σ.*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — не более чем счетный унар, и N — такое натуральное число, что каждый блок в $\mathfrak{A}$ содержит меньше N элементов. Тогда он примитивно рекурсивно категоричен над K_Σ тогда и только тогда, когда в нем нет нераспознаваемых блоков.*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — не более чем счетный инъективный унар. Тогда он примитивно рекурсивно категоричен над K_Σ тогда и только тогда, когда существует n такой, что унар состоит только из циклов длиной $< n$.*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: kvblinov@gmail.com

Пунктуальные степени и вложение решеток

М. В. Зубков, И. Ш. Калимуллин, А. Г. Мельников

Структура конечной сигнатуры называется пунктуально вычислимой, если ее основное множество есть ω и все операции и предикаты примитивно рекурсивны. Пусть $\mathcal{A}$ пунктуальная структура, тогда для изоморфных копий $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ структуры $\mathcal{A}$ можно определить следующее понятие сводимости: $\mathcal{B} \leq_{pr} \mathcal{C}$ если существует примитивно рекурсивный изоморфизм $f : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Возникает структура пунктуальных степеней. Были получены различные свойства этой структуры.

В частности, были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A} = (\omega, +, \times, <, 0, 1)$, Тогда структура пунктуальных степеней не является ни верхней полурешеткой, ни нижней полурешеткой.

Теорема 2. *Конечная решетка R вкладывается в структуру пунктуальных степеней жесткой конечно порожденной пунктуально вычислимой структуры тогда и только тогда, когда R дистрибутивна.*

Работа первого автора частично поддержана грантом РФФИ N 18-31-00174.

КФУ, Казань; КФУ, Казань; Университет Месси, Окленд
E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru, ikalimul@gmail.com, alexander.g.melnikov@gmail.com

О позитивных предпорядках

Б. С. Калмурзаев

Позитивным предпорядком мы называем рефлексивное и транзитивное в.п. бинарное отношение. Нас интересует следующее отношение сводимости: предпорядок P вычислимо сводится к предпорядку Q (символически $P \leq_c Q$) если существует вычислимая функция f такая, что для любых $x, y \in \omega$ xPy тогда и только тогда, когда $f(x)Qf(y)$. В докладе будет дан обзор недавно полученных результатов о позитивных предпорядках относительно вычислимой сводимости. Также будет показано различие структур позитивных предпорядков и позитивных эквивалентностей.

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Алматы (Казахстан)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com

Язык проблемы допускания в отведенное время

И. В. Латкин

Рассмотрим язык $AK^{(m)}(F) \rightleftharpoons \{\langle CP, X\rangle |$ *машина Тьюринга* P, *имеющая* m *лент, допускает вход* X *в пределах* $F(|X|)$ *шагов*$\}$, где CE — фиксированная кодировка объекта E, а функция F такова, что для любого многочлена p найдётся n, что для всех $m > n$ верно $F(m) > p(m)$. Он интересен тем, что многие результаты о сложности распознавания разрешимых теорий были получены применением следующего утверждения, доказываемого диагональным методом [**1, 2**].

Предложение. *Пусть разрешимая теория* T *сигнатуры* σ *такова, что для всякой программы* P *машины Тьюринга и любой входной цепочки* X *на ленте машины можно эффективно построить формулу* $S(P,X)$ *сигнатуры* σ *со следующими свойствами: (i) код для* $S(P,X)$ *может быть построен за время* $g(|X|+|CP|)$, *где* g *— многочлен фиксированный для всех* X *и* P; *(ii)* $S(P,X)\in T \Leftrightarrow$ *машина* P *допускает вход* X *в пределах* $F(|X|)$ *шагов; (iii) существуют константы* $D, b, s > 0$ *такие, что верно либо неравенство (a)* $|X| \leqslant |CS(P,X)| \leqslant D\cdot|CP|^b\cdot|X|^s$, *либо неравенство (b)* $|X| \leqslant |CS(P,X)| \leqslant D\cdot(|CP|+|X|)$ *для всех достаточно длинных* X, *эти константы не зависят от* P, *но зависят от применяемой кодировки.*

Тогда (1) для всякой константы $\delta > 0$ *и любой программы* P, *найдется* t_0, *что верно неравенство* $|CS(P,X)| \leqslant D_1\cdot|X|^{s_1}$ *для всех цепочек* X, *более длинных чем* t_0, *где* $D_1 = D$ *и* $s_1 = s+\delta$ *в случае (a) или* $D_1 = (D+\delta)$ *и* $s_1 = 1$ *в случае (b); (2) для каждого* $a > 1$ *и всякой детерминированной машины Тьюринга* M, *которая распознает теорию* T, *существует бесконечно много формул* Y, *на которых* M *работает более чем* $F(D_2\cdot|CY|^\rho)$ *шагов при* $D_2 = (aD_1)^{-\rho}$ *и* $\rho = (s_1)^{-1}$, *т.е. сложность распознавания теории* T *не меньше* $F(D_2\cdot|CY|^\rho)$.

Понятно, что доказательство предложения не изменится, если теорию T заменить языком L над произвольным алфавитом σ, а формулы $S(P,X)$ и Y считать словами (цепочками) в σ^*. Таким образом, если нам удалось язык $AK^{(m)}(F)$ полиномиально свести к исследуемому языку L, то мы имеем возможность найти нижнюю границу для сложности распознавания L.

А какова сложность распознавания самого языка $AK^{(m)}(F)$? Применяя предложение к нему самому, получаем нижнюю границу сложности — $F(|X|)$ при всяких F и m (a можно взять как угодно близким к 1). Эта оценка близка к верхней для $m \geq 6$ [**3**], но чем меньше m, тем больше эти оценки расходятся.

Список литературы

[1] Рабин М. О., Разрешимые теории /В Справочная книга по математической логике, Наука, Москва, 1982 Ч. III, 77–111.

[2] Vorobyov S., The most nonelementary theory // Information and Computation, 190 (2004), 196–219.

[3] Arora S., Barak B., Computational Complexity: A Modern Approach, Published by Cambridge University Press, 2009.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск (Казахстан)
E-mail: lativan@yandex.ru

О генерической неразрешимости десятой проблемы Гильберта для полиномиальных деревьев

А. Н. Рыбалов

Генерический подход к алгоритмическим проблемам был предложен Каповичем, Мясниковым, Шпильрайном и Шуппом в 2003 г. В рамках этого подхода изучается поведение алгоритмов на множестве «почти всех» входов (это множество называется генерическим), игнорируя поведение алгоритма на остальных входах, на которых алгоритм может работать медленно или вообще не останавливаться.

Пусть I — множество всех входов, а I_n — множество входов размера n. Для любого подмножества $S \subseteq I$ определим следующую последовательность

$$\rho_n(S) = \frac{|S_n|}{|I_n|},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $S_n = S \cap I_n$ – множество входов из S размера n. *Асимптотической плотностью* S назовём предел (если он существует)

$$\rho(S) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(S).$$

Множество S называется *генерическим*, если $\rho(S) = 1$, и *пренебрежимым*, если $\rho(S) = 0$.

Алгоритм $\mathcal{A}$ с множеством входов I и множеством выходов $J \cup \{?\}$ $(? \notin J)$ называется *генерическим*, если

(1) $\mathcal{A}$ останавливается на всех входах из I;

(2) множество $\{x \in I : \mathcal{A}(x) = ?\}$ является пренебрежимым.

Множество $S \subseteq I$ называется *генерически разрешимым*, если существует генерический алгоритм, вычисляющий его характеристическую функцию.

Доклад посвящен изучению генерической разрешимости десятой проблемы Гильберта для диофантовых уравнений, представляемых в виде так называемых полиномиальных деревьев. Полиномиальное дерево – это бинарное дерево, листья которого помечены переменными или константой 1, а внутренние вершины содержат операции сложения, вычитания или умножения. Любой полином от многих переменных с целыми коэффициентами можно представить в виде такого полиномиального дерева. Размер полиномиального дерева – это число листьев.

Теорема. *Проблема разрешимости диофантовых уравнений, представляемых в виде полиномиальных деревьев, не является генерически разрешимой.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: alexander.rybalov@gmail.com

Алгоритмические свойства отношений соседства и блока вычислимых линейных порядков

А. Н. Фролов

В первой части доклада будет подробно изложена проблема замкнутости наверх в в.п. степенях спектра отношения соседства вычислимого линейного порядка. Этот спектр может быть тривиальным, это случай возможен только тогда, когда линейный порядок содержит лишь конечное число пар соседних элементов. Гипотеза заключается в том, что в остальных случаях этот спектр всегда замкнут наверх в в.п. степенях. В 2010 г. автором [**1**] опубликовано положительное решение для линейных порядков, не являющихся η-схожими (линейный порядок называется η-схожим, если он не содержит бесконечных блоков). В том же году Р. Доуни, Ш. Лемпп и Г. Ву [**2**] опубликовали положительное решение для оставшегося случая — η-схожих линейных порядков. Однако, автором (совместно с М.В. Зубковым) в последней работе была обнаружена неустранимая ошибка. В 2017 году Р. Доуни, Ш. Лемпп и Г. Ву [**3**] опубликовали дополнение, которое, как им казалось, устраняло ошибку. К сожалению, во-первых, есть основание полагать, что описанная конструкция также не верна, а, во-вторых, ими был упущен еще один случай. В данном докладе будут представлено описание всех оставшихся неразобранных случаев, а также будет приведен ряд частных случаев, для которых гипотеза верна (результаты получены совместно с М.В. Зубковым).

Во второй части доклада будет приведен ряд алгоритмических свойств отношения блока вычислимой структуры, являющейся линейным порядком, сигнатура которого обогащена отношением соседства. Результаты данного блока получены совместно с Р.И. Бикмухаметовым и М.С. Еряшкиным.

В последней части доклада рассматривается совместный спектр отношений соседства и блока вычислимых линейных порядков, т.е. класс степеней $\mathbf{x}$ таких, что существует вычислимое представление данного порядка, в котором и отношение соседства, и отношение блока оба имеют степень $\mathbf{x}$. В докладе будет представлен результат о том, что такой совместный спектр отношений соседства и блока вычислимых η-схожих линейных порядков либо тривиален, либо замкнут наверх в в.п. степенях. Результат получен совместно с М.В. Зубковым.

Список литературы

[1] Frolov A. N. Presentations of the successor relation of computable linear orderings // Russian Mathematics. 2010. N 7. P. 64–74.

[2] Downey R., Lempp S., Wu G. On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings, Journal of Mathematical Logic. 2010. V. 83, No. 10. P. 83–99.

[3] Downey R., Lempp S., Wu G. Corrigendum: "On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings" // J. Math. Log. 2017. V. 17, No. 2. P. 1792002-1–1792002-4.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: a.frolov.kpfu@gmail.com

О вычислимых вполне разложимых группах

Н. Г. Хисамиев, С. Д. Тыныбекова

Пусть группа $G = \oplus\{G_i \mid i \in \omega\}$, где G_i — подгруппа аддитивной группы рациональных чисел. Пусть существует такая вычислимая нумерация ν группы G, что в (G,ν) найдется вычислимо перечислимая максимально линейно независимая система элементов b_i, $i \in \omega$, каждый элемент которой лежит в прямом слагаемом G_i группы G. Тогда пару (G,ν) назовем вычислимо вполне разложенной группой, а саму группу G — эффективно вполне разложимой.

Рассмотрим следующий класс вполне разложимых групп. Пусть $p_0, p_1, \ldots$ — некоторая последовательность простых чисел, Q_{p_i} — аддитивная группа рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями p_i и

$$G = \oplus\{Q_{p_i} \mid i \in \omega\}.$$

Тогда группу G назовем вполне разложенной. Характеристикой $\chi(G)$ группы G назовем такое множество пар чисел вида $\langle p,k\rangle$, что существуют индексы $i_1,\ldots,i_k$, для которых выполнены равенства $p_{i_1} = \ldots = p_{i_k} = p$.

В [**1**] доказана следующая

Теорема 1. *Абелева группа $G = \oplus\{Q_{p_i} \mid i \in \omega\}$ эффективно вполне разложима тогда и только тогда, когда ее характеристика принадлежит классу Σ_2^0 арифметической иерархии.*

Пусть S — некоторое множество простых чисел такое, что существует вычислимый предикат $R(p,n,x)$ для которого справедлива эквивалентность

$$p \in S \Longleftrightarrow \forall n \exists x R(p,n,x).$$

Тогда справедлива

Теорема 2. *Абелева группа*

$$A = \oplus\{Q_p \mid p \in S\}$$

вычислима.

Отсюда и из теоремы 1 имеем

Следствие. *Существует вычислимая вполне разложимая группа, которая не является эффективно вполне разложимой.*

Список литературы

[1] Хисамиев Н. Г., Крыкпаева А. А., Эффективно вполне разложимые абелевы группы // Сибирский математический журнал, 1997, т. 38, с. 1410–1412.

Евразийский Национальный Университет им. Л.Гумилева, АО Международная финансовая академия

E-mail: hisamiev@mail.ru

Spectrum of minimal numberings of the families in the Ershov hierarchy

S. Badaev

We consider only the pairs $< \mathbb{K}, \mathfrak{F} >$ of objects so that $\mathbb{K}$ is a class of subsets of ω closed under cartesian products and $\mathfrak{F}$ is a computable family of sets from the class $\mathbb{K}$. We mean that a numbering ν of such a family $\mathfrak{F}$ is computable if $\{< x, n >: x \in \nu(n)\} \in \mathbb{K}$. Set $\min(\mathfrak{F})$ be the number of minimal elements in the Rogers semilattice of a family $\mathfrak{F}$. A number $\min(\mathfrak{F})$ is one of the most important invariants of the Rogers semilattice of $\mathfrak{F}$. It is not hard to see that $\min(\mathfrak{F}) = 1$ for every finite family $\mathfrak{F}$ and any class $\mathbb{K}$. Define

$$\mathrm{SpecMin}(\mathbb{K}) = \{\min(\mathfrak{F}) : \mathfrak{F} \text{ is an infinite computable family of sets from } \mathbb{K}\}.$$

There is a well-known still open problem of Yu. L. Ershov to describe the spectrum $\mathrm{SpecMin}(\Sigma^0_1)$. Up to now it is known that $\{0, 1, \{\omega\}\} \subseteq \mathrm{SpecMin}(\Sigma^0_1)$ (see [**1**] for the details). Note that $\mathrm{SpecMin}(\mathbb{K}) = \{1, \{\omega\}\}$ for the class $\mathbb{K}$ of the unary computable functions by S.Marchenkov, [**2**]. We mention also the result of S.Goncharov and A.Sorbi, [**3**], for the classes of arithmetical sets: $\mathrm{SpecMin}(\Sigma^0_{n+2}) = \{\{\omega\}\}$ for every n.

As to classes of the Ershov hierarchy, the inclusion $\{0, 1, \{\omega\}\} \subseteq \mathrm{SpecMin}(\Sigma^{-1}_{n+2})$ for every n easily follows from the paper [**4**]. In [**5**], S.Badaev and S.Lempp showed that $2 \in \mathrm{SpecMin}(\Sigma^{-1}_2)$. Modifying the construction of [**5**] and using the previously known results, we can conclude the following result on the spectrum of minimal numberings of the families in the Ershov hierarchy.

Theorem. *For every n,* $\mathrm{SpecMin}(\Sigma^{-1}_{n+2}) = \omega \cup \{\omega\}$.

References

[1] Badaev S. A., Goncharov S. S. The Theory of Numberings. Open Problems. In: Cholak P. A., Lempp S., Lerman M., Shore R. A. (eds.), Computability Theory and its Applications. Current Trends and Open Problems. Amer. Math. Soc., Providence, (2000), 23–38

[2] Marchenkov S. S. On computable enumerations of families of general recursive functions. Algebra and Logic, v. 11, 1972, no. 5, 326–336.

[3] Goncharov S. S., Sorbi A. Generalized computable numerations and nontrivial Rogers semilattices. Algebra and Logic, 1997, vol. 36, no. 6, 359–369.

[4] Herbert I., Jain S., Lempp S., Mustafa M., and Stephan F. Reductions between Types of Numberings, Annals of Pure and Applied Logic, to appear.

[5] Badaev S. A., Lempp S. A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets. Journal of Symbolic Logic, 2009, vol. 74, n. 2, 618–640.

Kazakh-British Technical University, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: s.badaev@kbtu.kz

Embeddings of partial orderings into reducibility of real metrics

R. A. Kornev

We study two notions of reducibility of metrics on a separable space. Let (X, τ, W) be a Polish space with a distinguished countable dense subset W, let ρ and ρ' be complete metrics on X inducing topology τ. Say that ρ is computably reducible to ρ' ($\rho \leq_c \rho'$) if Cauchy representation of a metric space (X, ρ, W) is computably reducible to Cauchy representation of the space (X, ρ', W) (see [**1, 2**] for the definition of computable reducibility of representations). Furthermore, ρ is weakly reducible to ρ' ($\rho \leq_{ch} \rho'$) if there is a (ρ, ρ')-computable autohomeomorphism of X. It is straightforward to check that $\leq_c$ and $\leq_{ch}$ are preorderings. One can then define notions of a c- and a ch-degree in the usual way.

In [**3**] it was proved that there exists an infinite sequence of pairwise incomparable ch-degrees of computable metrics below the degree of the standard real metric $\rho_{\mathbb{R}}$. In the present talk we will discuss a construction of metrics above $\rho_{\mathbb{R}}$. More precisely, we prove that the ordering of subsets of ω by inclusion is embeddable into ch-degrees of metrics above $\rho_{\mathbb{R}}$ and that any countable partial ordering is embeddable into ch-degrees of computable metrics above $\rho_{\mathbb{R}}$.

We will also discuss the embeddings of lattices into c-degrees. It is proved that the Boolean algebra of computable subsets of ω is embeddable as a lattice into c-degrees of computable metrics and, as a consequence, the countable atomless Boolean algebra is embeddable into c-degrees of computable metrics.

The work was supported by RFBR, project 19-31-50006 mol_nr.

References

[1] Weihrauch K., Computable analysis. An introduction (Texts Theoret. Comput. Sci. EATCS Ser.), Springer, Berlin, 2000.

[2] Kreitz Ch., Weihrauch K., Theory of representations, Theor. Comput. Sci., 38 (1985), 35–53.

[3] Kornev R., Reducibility of computable metrics on the real line, (Russian) Algebra Logika, 56 (2017), 4, 453–476; translation in Algebra Logic, 56 (2017), 4, 302–317.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: kornevrus@gmail.com

Relatively intrinsically computable relations on Boolean algebras in extended language

M. N. Leontyeva

This paper is a sequel of works [**1**] and [**2**] where intrinsically computable relations on Boolean algebras in extended language are studied. In this paper relatively intrinsically computable relations on Boolean algebras in a language extended by set of Atoms *At* are considered. Let $\mathfrak{A}^*$ be a Boolean algebra, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*, \mathrm{At})$. We say that a relation $\mathrm{R} \subseteq \mathfrak{A}^l$ is *relatively intrinsically computable* if for every $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}^*, \mathrm{At})$ which universe is a subset of ω, and for every isomorphism $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ the image $g(\mathrm{R})$ is computable with respect to oracle $D(\mathfrak{B})$, where $D(\mathfrak{B})$ is a diagram of $\mathfrak{B}$.

It is known that instead of an arbitrary relation R_0 in class of Boolean algebras we can consider a relation $\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_l)$ such that $x_1, \ldots, x_l | 1$. We call relations of this type *disjoint*.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{A}^*$ be a Boolean algebra, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*, At)$, $R \subseteq \mathfrak{A}^l$ — l-ary disjoint relation on $\mathfrak{A}$. Then the following conditions are equivalent:*

(a) the relation R is relatively intrinsically computable;

(b) there exists a tuple of parameters $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)|1$ such that R is Δ_1^*-definable with respect to $\bar{c}$.

Now let's define a Δ_1^*-definable relation. We denote $\mathrm{Fin}_r(\mathfrak{B}) = \{x \in \mathfrak{B} : |\hat{x}| = 2^r\}$, $\text{Co-Fin}_r(\mathfrak{B}) = \{x \in \mathfrak{B} : |\widehat{-x}| = 2^r\}$, $\mathrm{G}_r(\mathfrak{B}) = \{x \in \mathfrak{B} : |\hat{x}| \geq 2^r\}$.

If R_1, $\mathrm{R}_2 \subseteq \mathfrak{A}^l$ then we define a relation $\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 \subseteq \mathfrak{A}^l$ such that $\bar{x} \in \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 \Leftrightarrow \exists \bar{x}_1 \in \mathrm{R}_1 \exists \bar{x}_2 \in \mathrm{R}_2 : \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ (componentwise sum of the tuples).

Let $\bar{c} = c_1, \ldots, c_n | 1$ be a tuple of parameters. We say that an l-ary relation Q is *basic* with respect to $\bar{c}$, if

$$Q(x_1, \ldots, x_l) = (A_1^1(\widehat{x_1 \cdot c_1}), \ldots, A_l^1(\widehat{x_l \cdot c_1})) + \cdots + (A_1^n(\widehat{x_1 \cdot c_n}), \ldots, A_l^n(\widehat{x_l \cdot c_n})) \& x_1, \ldots, x_l | 1,$$

where every $A_j^i(\mathfrak{B})$ is a relation of one of the types $\mathrm{Fin}_r(\mathfrak{B})$, $\text{Co-Fin}_r(\mathfrak{B})$ or $\mathrm{G}_r(\mathfrak{B})$.

Definition 1. *Let $\mathfrak{A}^\star$ be a Boolean algebra, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*, At)$, $c_1, \ldots, c_n | 1$ be a tuple of parameters in $\mathfrak{A}$, and there is no parameter such that $\hat{c}_i \cong \mathfrak{B}(\omega)$ among $c_1, \ldots, c_n$. Then we call an l-ary disjoint relation R Δ_1^*-definable with respect to $\bar{c}$ if R is a finite union of basic with respect to $\bar{c}$ relations.*

For fixed l, n and $k \leq n$ we denote $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_l)$, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $\bar{c}' = (c_1, \ldots, c_k)$. Let's define a set $I = \{\bar{s} = (s_{11}, s_{12}, \ldots s_{1k}, s_{21}, \ldots, s_{lk}) \in (\omega \cup \{\infty\})^{lk} | \forall i \leq k\ \exists! j \leq l\ s_{ji} = \infty\}$. If $\bar{s} \in I$, then a notation $|\bar{x}, \bar{c}'| = \bar{s}$ means that $|\widehat{x_j \cdot c_i}| = 2^{s_{ji}}$ as long as $s_{ji} \neq \infty$, $i \leq k$, $j \leq l$, and $|\widehat{x_j \cdot c_i}| = \infty$ as long as $s_{ji} = \infty$.

Definition 2. *Let $\mathfrak{A}^\star$ be a Boolean algebra, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*, At)$, $c_1, \ldots, c_n | 1$ be a tuple of parameters in $\mathfrak{A}$, where $\hat{c}_i \cong \mathfrak{B}(\omega)$ as long as $i \leq k$, and $\hat{c}_i \ncong \mathfrak{B}(\omega)$ as long as $i > k$. Then we call an l-ary disjoint relation R Δ_1^*-definable with respect to $\bar{c}$ if there exists a computable function $f(\bar{s}) : I \to \omega$ such that $R = \bigcup_{\bar{s} \in I} R_{\bar{s}}$, where $R_{\bar{s}} = \{\bar{x} \in \mathfrak{A}^l : |\bar{x}, \bar{c}'| = \bar{s} \& \Phi_{\bar{s}}(\bar{x}, \bar{c})\}$, and $\Phi_{\bar{s}}(\bar{x}, \bar{c})$ — is a finite union of basic with respect to $\bar{c}$ relations with code $f(\bar{s})$.*

References

[1] Goncharov S. S., Downey R. G., Hirschfeldt D. R., Degree Spectra of Relations on Boolean Algebras, Algebra and Logic, 42, N 2 (2003), 105–111.

[2] Alaev P. E., Computable ideals in I-algebras, Algebra and Logic, 49, N 2 (2010), 103–114.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: margarita.leontyeva@gmail.com

Delta: a new logic programming language Delta-methodology for p-computable programs in Turing complete languages

A. Nechesov

We describe a new logic programming language Delta that is based on the theory of semantic programming [**1**]–[**4**] and dynamic logic [**5**]. All Delta-programs are p-computable, verifiable, and can be translated into other high level languages. We also describe a Delta-methodology for constructing new data types and p-computable programs in high level languages such as PHP, Java, JavaScript, C++, Pascal, Delphi, Python, Solidity, and others. We would like to pay a special attention to the use of the Delta-methodology for creating Smart Contracts. We define dynamic models and consider Delta-programs as list-formulas built from other formulas on dynamic models (see [**1**]). The main rule for execution of Delta-programs on dynamic models is

$$D(\mathfrak{M})_E \models \langle \Phi_1, ..., \Phi_n \rangle \Leftrightarrow D(\mathfrak{M})_{\Gamma_{\Phi_1}(E)} \models \langle \Phi_2, ..., \Phi_n \rangle \, .$$

Theorem. *Any Delta-program is p-computable.*

References

[1] Nechesov A. V., Delta — new logic programming language and Delta-methodology for p-computable programs on Turing Complete Languages. Url: https://arxiv.org/abs/1907.07767 Date: July 19, 2019.

[2] Nechesov A. V., Semantic programming: method Δ_0^p-enrichments and polynomial computable fixed points. Url: https://arxiv.org/abs/1903.08109 Date: March 19, 2019.

[3] Goncharov S. S., The computability via definability in semantic modeling. Url: http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2018/LP/lp_2018-abstracts.pdf Joint work with D. Sviridenko and A. Nechesov. Date: May 14, 2018.

[4] Goncharov S. S., Conditional Terms in Semantic Programming. Siberian Mathematical Journal, 2017, V. 58, No. 5, pp. 794–800.

[5] Ershov Yu. L., Definability and computability. Springer. 1996.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: nechesoff@gmail.com

Some structural properties of c.e. sQ_1-degrees

R. Sh. Omanadze

We say that a set A is sQ_1-reducible to a set B, if there exist computable functions f and g such that, the following three conditions are satisfied: (i) $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B)$, (ii) $(\forall x)(\forall y)(y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \leq g(x))$, and (iii) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset)$. This relation generates the sQ_1-degrees. Condition (i) characterizes Q-reducibility, which yields the Q-degrees; (i) and (ii) together define sQ-reducibility, generating the sQ-degrees.

Our notation and terminology are standard, and can be found e.g., in [**1, 2**].

In this talk we will present the following results.

Theorem 1. *There exist two c.e. sets having no c.e. least upper bound on the sQ_1-reducibility ordering.*

Theorem 2. *The sQ-degree of a hypersimple set includes an infinite collection of sQ_1-degrees linearly ordered under $\leq_{sQ_1}$ with order type of the integers and consisting entirely of hypersimple sets.*

Theorem 3. *The c.e. sQ_1-degrees are not dense.*

Corollary. *The structure D_{sQ_1} of the c.e. sQ_1-degrees is not elementary equivalent neither to the structure D_{sQ} of the c.e. sQ-degrees nor to the structure D_Q of the c.e. Q-degrees.*

References

[1] Rogers H. J. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. MIT Press, 1967.

[2] Soare R. I. Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets. Springer Science & Business Media, 1999.

I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi (Georgia)
E-mail: roland.omanadze@tsu.ge

On smoothness recognition over reals

A. V. Seliverstov

Let us consider generalized register machines over the field $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \times, <)$ or over another real closed field [**1**]. They are closely related to the machines defined by L. Blum, M. Shub, and S. Smale (1989). Each register contains an element of $\mathbb{R}$. There exist index registers containing nonnegative integers. The running time is said polynomial, when the total number of operations performed before the machine halts is bounded by a polynomial in the number of registers occupied by the input. Initially, this number is placed in the zeroth index register. One can also define a nondeterministic generalized register machine that receives a few hints over $\mathbb{R}$.

Let polynomials over $\mathbb{R}$ be identified with sequences of their coefficients using some monomial order. For a positive integer k, the term "almost all k-tuples" means "all k-tuples but a set covered by a vanishing locus of a nonzero polynomial in k variables with integer coefficients". The generic computational complexity had been defined by I. Kapovich, A. G. Myasnikov, P. Schupp, and V. Shpilrain (2003) and extensively studied by A. N. Rybalov [**2**]. The machine never makes mistakes, but it can warn there is no way to accept or reject some input. These rare inputs are called vague. This concept is applicable over $\mathbb{R}$.

Definition. Let us consider a generalized register machine over $\mathbb{R}$ with three halting states: ACCEPT, REJECT, and VAGUE. The machine is said to be generic, when both conditions hold: (1) the machine halts on every input and (2) for every positive integer k and for almost all inputs that occupy exactly k registers, the machine does not halt at the VAGUE state.

Theorem. *There exists a generic generalized register machine that recognizes whether a given projective cubic hypersurface defined by a form over* $\mathbb{R}$ *of the type* $x_0^3 + \cdots + x_n^3 + (\alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_n x_n)^3$ *is smooth at every real point of the intersection with a given projective hyperplane defined by a linear form of the type* $x_0 + \beta x_n$*, where* $\beta \in \mathbb{R}$*. The running time of the machine is polynomial in* n*.*

Remark. The same method can be applied to the smoothness recognition of some other cubic hypersurfaces. Moreover, it is easy to check whether there exists a real singular point by a nondeterministic generalized register machine over $\mathbb{R}$. But in the hardest case, it seems impossible to check smoothness in deterministic polynomial time. Thus, some hard problems can be solved in generic polynomial time.

References

[1] Neumann E., Pauly A. A topological view on algebraic computation models. Journal of Complexity 44, 1–22 (2018). https://doi.org/10.1016/j.jco.2017.08.003

[2] Rybalov A. N. Generic amplification of recursively enumerable sets. Algebra and Logic 57:4, 289–294 (2018). https://doi.org/10.1007/s10469-018-9500-y

Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow

E-mail: slvstv@iitp.ru

An analogue of the Normal Form Theorem for generalized hyperarithmetical computability

A. I. Stukachev

We consider the class of approximation spaces [**1, 4**] generated by admissible sets and, in particular, by hereditarily finite superstructures over abstract structures [**2, 5**]. Also, approximation spaces generated by hereditarily listable superstructures are considered. Generalized computability on approximation spaces is formalized in terms of effective definability in dynamic logic [**3, 6**]. For approximation spaces with the property of effective atomization, an analogue of the normal form theorem is obtained. It is shown that approximation spaces over listable superstructures possess the property of effective atomization.

References

[1] Ershov Yu. L., Theory of domains and nearby, Lecture Notes in Computer Science, v. 735 (1993), 1–7.
[2] Ershov Yu. L., Definability and Computability, Plenum, New York, 1996.
[3] Harel D., First-Order Dynamic Logic, Lecture Notes in Computer Science, v. 68 (1979), 1–135.
[4] Scott D., Outline of a Mathematical Theory of Computation, Proceedings of the Fourth Annual Princeton Conf. Inform. Sci. and Systems, 1970, 165–176.
[5] Stukachev A. I., Effective Model Theory: an Approach via Σ-Definability, Lecture Notes in Logic, v. 41 (2013), 164–197.
[6] Stukachev A. I., Generalized hyperarithmetical computability on structures, Algebra and Logic, v. 55 (2016), 769–799.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: aistu@math.nsc.ru

On the structural properties of 2-c.e. *wtt*-degrees

M. M. Yamaleev

In our talk we consider structural properties of 2-c.e. *wtt*-degrees and compare them with the corresponding properties for the Turing degrees.

Given 2-c.e. degrees $\mathbf{c} < \mathbf{d}$, we say that $\mathbf{d}$ *is splittable above* $\mathbf{c}$ if there exist 2-c.e. degrees $\mathbf{d}_0$ and $\mathbf{d}_1$ such that $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cup \mathbf{d}_1$ and $\mathbf{c} < \mathbf{d}_i < \mathbf{d}$, for $i = 0, 1$. Given a 2-c.e. degree $\mathbf{d}$, we say that $\mathbf{d}$ is *isolated from side* if there exists a c.e. degree $\mathbf{a}$ such that $\mathbf{d} \not\leq \mathbf{a}$ and for any c.e. degree $\mathbf{w} \leq \mathbf{d}$ it holds $\mathbf{w} \leq \mathbf{a}$. This notion generalizes the well-studied notion of isolation introduced by Cooper and Yi [**2**], where they required $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ instead of $\mathbf{d} \not\leq \mathbf{a}$. Isolation from side was used implicitly in works [**1, 4**], where the authors obtained series of model-theoretic properties of n-c.e. Turing degrees, later it was introduced in [**3**]. Investigating these structural properties we obtained the following results.

Theorem 1 (jointly with Wu Guohua). *Any 2-c.e. wtt-degree* $\mathbf{d}$ *is splittable above any 2-c.e. wtt-degree* $\mathbf{c} < \mathbf{d}$.

Colollary. *The partial ordering of 2-c.e. wtt-degrees is dense. Thus it is not elementarily equivalent to the partial ordering of 2-c.e. Turing degrees.*

Theorem 2. *Any properly 2-c.e. wtt-degree* $\mathbf{d}$ *is isolated from side.*

The author is supported by RFBR, project No. 18-31-00420.

References

[1] Cai M., Shore R. A. and Slaman T. A., The n-r.e. degrees: undecidability and Σ_1 substructures, Journal of Mathematical Logic, 12 (2012), 1–30.

[2] Cooper S. B. and Yi X., Isolated d.r.e. degrees, Preprint series 17, University of Leeds, Dept. of Pure Math., 1995.

[3] Wu G. and Yamaleev M. M., Isolation: motivations and applications, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki (2), 154 (2012), 204–217.

[4] Yang Y., Yu L., On Σ_1-structural differences among Ershov hierarchies, J. Symb. Logic, 71 (2006), 1223–1236.

Kazan Federal University, Kazan
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

VII. Секция «Теория групп»

О финитной отделимости подгрупп в HNN-расширениях групп со связанными подгруппами конечных индексов

Д. Н. Азаров, А. А. Кряжева

Изучение аппроксимационных свойств HNN-расширений было начато в 1978 году Б. Баумслагом и М. Треткоффом. Ими была доказана финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы. Этот же результат был независимо установлен Д. Коэном. Дальнейшее изучение аппроксимационных свойств HNN-расширений связано с наложением дополнительных ограничений как на базовую группу, так и на связанные подгруппы. Так, Д. Н. Азаровым был доказан следующий критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения с собственными связанными подгруппами конечных индексов в базовой группе.

Теорема 1. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа с нетривиальным тождеством, и для любого натурального числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G. Группа G^* финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.*

Эта теорема является обобщением результата Андреадакиса, Раптиса и Варсоса, которые доказали критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы с собственными связанными подгруппами конечных индексов в базовой группе.

Напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если для каждого элемента g группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы H. На основе результата Д. Н. Азарова получен критерий финитной отделимости циклических и конечно порожденных подгрупп в HNN-расширении из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть группа G удовлетворяет нетривиальному тождеству, и для любого натурального числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группе G.*

1) В группе G^* все циклические подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа G^* финитно аппроксимируема, и в группе G все циклические подгруппы финитно отделимы.

2) В группе G^* все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа G^* финитно аппроксимируема, и в группе G финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в группе G конечно порожденными подгруппами группы G^*.

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: azarovdn@mail.ru, stasia.07.10@mail.ru

Группы единиц колец вычетов колец целых квадратичных полей

Р. Ж. Алеев, В. А. Поздеева, А. С. Чернышёва (Кривова)

В работах [**2**] и [**3**] показано влияние строения группы единиц колец вычетов колец целых полей характеров на нахождение и свойства центральных единиц целочисленных групповых колец конечных групп. Важнейшим классом полей характеров являются квадратичные поля. Изучение групп единиц колец вычетов колец целых квадратичных полей позволяет уточнить некоторые результаты в [**3**] и имеет самостоятельный интерес.

Ранее в работах [**4**], [**5**] и [**6**] исследовался случай квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ для простого числа p. Здесь изучаются случай квадратичные поля $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ для произвольного целого числа m.

Пусть I — кольцо целых квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ и n — натуральное число. Тогда фактор–кольцо I/nI назовём *кольцом вычетов* по модулю n кольца I. Стандартное применение китайской теоремы об остатках сводит изучение кольца вычетов к случаю $I/q^{\alpha}I$, где q — простое и α — натуральное числа. Согласно [**1**, Гл. 13] для идеала qI возможны только случаи: полного разложения, полной инертности и полного разветвления.

Теорема. *Пусть I — кольцо целых квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, q — простое и α — натуральное числа. Порядок группы единиц кольца вычетов $I/q^{\alpha}I$ равен*

$$\begin{aligned}(q-1)^2q^{2(\alpha-1)} &\text{ — для полного разложения,}\\ (q^2-1)q^{2(\alpha-1)} &\text{ — для полной инертности,}\\ (q-1)2q^{2\alpha-1} &\text{ — для полного разветвления.}\end{aligned}$$

Исследование выполнено при поддержке Правительства РФ в соответствии с Постановлением 211 от 16.03.2013 г. (соглашение N 02.A03.21.0011).

Список литературы

[1] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.

[2] Алеев Р. Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. Матем. тр., 2000. Т. 3, N 1. с. 3–37.

[3] Алеев Р. Ж. Числа Хигмана конечных групп. Матем. тр. 2000. Т. 3, N 2. С. 3–28.

[4] Кривова А. С. Обратимые элементы в кольцах вычетов квадратичных полей. Межд. конф. Мальцевские чтения 2011. Сборник тезисов. С. 117.

[5] Кривова А. С. Обратимые элементы в кольцах вычетов квадратичных полей. Совр. пробл. математики: тезисы Межд. молодёжн. школы-конференции. Екатеринбург, 2011. С. 215.

[6] Поздеева В. А. Сравнение степеней фундаментальных единиц квадратичных полей по примарным модулям. Совр. пробл. математики и её прил.: труды Межд. молодёжн. школы-конференции. Екатеринбург, 2015. С. 24–27.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинский госуниверситет, Челябинск
E-mail: aleevrz@susu.ru, v_pozdeeva@list.ru, leska.nastya@mail.ru

Степенные MR-группы, точные R-пополнения

М. Г. Амаглобели

Понятие степенной R-группы (R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей) введено Р. Линдоном в [**1**]. В [**2**] А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников ввели новую категорию $\mathfrak{M}_R$, введя дополнительную аксиому. Это уточнение представляет естественное обобщение понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В честь авторов этой статьи группы с этой аксиомой в [**3**] названы MR-группами (R-кольцо).

Хорошо известна роль тензорного произведения в категории R-модулей, в частности тензорного расширения кольца скаляров. В [**2**] определен точный аналог последней конструкции для произвольной MR-группы G – ткензорное пополнение $G^{S,\mu}$, где $\mu : R \to S$ – гомоморфизм колец. В приложениях μ чаще всего вложение колец, но и в таком случае R-гомоморфизм $\lambda : G \to G^S$ не всегда является вложением. В [**2**] указано одно достаточное условие такого вложения.

В [**3**] вводится категория $\mathcal{P}_R^0$ частичных MR-групп и устанвливается ряд интересных свойств этой категории.

В [**4**] исследуется понятие точности тензорного пополнения и доказана точность для достаточно широкого класса групп и широкого класса колец. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений на языке групповых конструкций.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{Z}$ – подкольцо кольца R и группа $G \in \mathcal{P}_R^0$, причём в G и R^+ (аддитивная группа кольца) нет элементов порядка 2. Тогда группа G точна, т.е. каноническое отображение $\lambda : G \to G^R$ является вложением..*

Теорема 2. Для любых X и R, где R содержит кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. свободная MR-группа $F_R(X)$ существует и единствена с точностью до R-изоморфизма, $F_R(X) = F(X)^R$, где $F(X)$ – абсолютно свободная группа с базой X.

Теорема 3. Пусть R – кольцо, содержащее кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, G_i – некоторое множество MR-групп, $i \in I$. Тогда

(1) $\underset{R}{*} G_i \cong (*G_i)^R$;

(2) каноническое отображение $\lambda : G_i \to (*G_i)^R$ является вложением.

Список литературы

[1] Lyndon R. C., Groups with parametric exponents. Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960), 518–533.

[2] Мясников А. Г., Ремесленников В. Н., Степенные группы. I. Основы теории и тензорные пополнения. Сиб. мат. журн. 35 (1994), N 5, 1106–1118.

[3] Amaglobeli M. G., Remeslennikov V. N., Free nilpotent R-groups of class 2. (Russian) Dokl. Akad. Nauk 443 (2012), no. 4, 410–413; translation in Dokl. Math. 85 (2012), no. 2, 236–239.

[4] Amaglobeli M. G., The tensor completion functor in categories of exponential MR-groups. (Russian) Algebra Logika 57 (2018), no. 2, 137–148; translation in Algebra Logic 57 (2018), no. 2, 89–97.

[5] Amaglobeli M., Exponential MR-groups: faithful R-completion. Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk 486 (2019), no. 2, 11–14.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси (Грузия)
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

О нильпотентной аппроксимируемости групп Баумслага — Солитера

В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим

Следующие определения были введены в работе А. И. Мальцева. Пусть $\mathfrak{C}$ – некоторый класс групп. Говорят, что группа G *аппроксимируется группами из* $\mathfrak{C}$ или $\mathfrak{C}$–*аппроксимируема*, если для всякого неединичного элемента $g \in G$ найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из $\mathfrak{C}$ такой, что $\varphi(g) \neq 1$. Если $\mathfrak{C}$ – класс конечных групп, то G называется *финитно аппроксимируемой* (сокращенно ФАР). Если $\mathfrak{C}$ – класс конечных p-групп, то G называется p-*финитно аппроксимируемой* (сокращенно ФАР$_p$). Если $\mathfrak{C}$ – класс нильпотентных групп, то G называется *нильпотентно аппроксимируемой* (сокращенно НАР).

Группой Баумслага — Солитера называется группа

$$BS(m,n) = \langle\, a, t \mid t^{-1}a^m t = a^n \,\rangle,\ m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Так как группы $BS(m,n)$, $BS(n,m)$ $BS(-m,-n)$ попарно изоморфны, то не уменьшая общности, будем считать, что параметры удовлетворяют неравенствам $0 < m \leq |n|$.

основным результатом работы является

Теорема 1. *Группа Баумслага — Солитера $BS(m,n)$, $0 < m \leq |n|$, аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда либо $m = 1$, $n \neq 2$ либо $n = \varepsilon m$, $m > 1$, $\varepsilon = \pm 1$.*

Как следствие получен такой результат.

Следствие 1. *Группа Баумслага — Солитера $BS(m,n)$, $0 < m \leq |n|$, аппроксимируется нильпотентными группами без кручения тогда и только тогда, когда $n = 1$, т. е. $BS(m,n)$ изоморфна $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Строение нижнего центрального ряда разрешимых групп Баумслага — Солитера описывает

Теорема 2. *Пусть $G = BS(1,n)$, $n \neq 1$. Тогда*

1) $\gamma_i G$, $i > 1$, *состоит из элементов*

$$t^l a^{\alpha(n-1)^{i-1}} t^{-l}, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,\ \alpha \in \mathbb{Z};$$

2) *группа $\gamma_i G$, $i > 1$ изоморфна аддитивной группе $(n-1)^{i-2}\mathbb{Z}[1/n]$. В частности, группа G метабелева;*

3) *$G = G' \leftthreetimes \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ порождается элементом t; фактор-группа $\gamma_i G/\gamma_{i+1} G$ изоморфна $\mathbb{Z}_{n-1}$ при всех $i > 1$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00569).

Институт математики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
Томский государственный университет, Томск
E-mail: bardakov@math.nsc.ru; neshch@math.nsc.ru

О пересечении Θ-подгрупп с ограничениями на индексы в группах с операторами

Р. В. Бородич, М. В. Селькин

В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяют раскрыть многие свойства самих групп (см. монографию [1]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ — группа автоморфизмов группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [2] будем говорить, что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

Функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

Пусть θ — подгрупповой функтор. Обозначим $\Phi_\theta(G, A) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G. Если в G таких подгрупп нет, то положим $\Phi_\theta(G, A) = G$.

Пусть θ — подгрупповой функтор. Обозначим $\Phi_{\theta_p}(G, A) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G, индексы которых не делятся на простое число p. Если в G таких подгрупп нет, то положим $\Phi_{\theta_p}(G, A) = G$.

Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ — абнормально полный функтор. Тогда $\Phi_{\theta_p}(G, A) \cap \Phi_{\theta_q}(G, A) = \Phi_\theta(G, A)$.*

Следствие. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и θ — абнормально полный функтор. Тогда факторгруппа $\Phi_{\theta_p}(G, A) \cap \Phi_{\theta_q}(G, A)$ нильпотентна.*

Список литературы

[1] Селькин М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.:Беларуская навука, 1997. 144 с.

[2] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997. 240 с.

[3] Бородич Р. В., Бородич Е. Н., Селькин М. В. Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами. Проблемы физики, математики и техники. 2015. N 2(23). С. 33-39.

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», Гомель (Белоруссия)
E-mail: Borodich@gsu.by

Об ω-независимой аксиоматизируемости квазимногообразий групп

А. И. Будкин

Для любого класса $\mathcal{N}$ и любого множества квазитождеств Σ через $Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma)$ обозначим класс всех групп из $\mathcal{N}$, в каждой из которых истинны все формулы из Σ. Будем говорить, что класс $\mathcal{M}$ определяется в классе $\mathcal{N}$ системой квазитождеств Σ, если $\mathcal{M} = Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma)$. В этом случае Σ называется базисом квазитождеств класса $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$.

Множество Σ квазитождеств называется независимым в $\mathcal{N}$, если для любого собственного подмножества $\Sigma' \subset \Sigma$ имеет место строгое включение $Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma) \subset Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma')$.

Базис квазитождеств Σ класса $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ называется ω-независимым относительно $\mathcal{N}$ (или в $\mathcal{N}$), если $\Sigma = \cup_{n<\omega}\Sigma_n$, где $\Sigma_n \cap \Sigma_m = \emptyset$ для любых различных m, n и $\mathcal{M} \neq Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma \setminus \Sigma_n)$ для каждого n.

В частности, всякий бесконечный независимый базис квазитождеств является ω-независимым.

Пусть $\mathcal{R}_p$ (p — простое число, $p \neq 2$) — многообразие нильпотентных групп ступени ≤ 2 и экспоненты p, т.е. $\mathcal{R}_p$ задается следующей системой тождеств:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y, z] = 1),$$
$$(\forall x)(x^p = 1),$$

F_2 — свободная ранга 2 группа в $\mathcal{R}_p$.

Известно [1], что квазимногообразие, порождённое группой F_2, не имеет независимого базиса квазитождеств в $\mathcal{R}_p$.

Теорема. *Пусть $\mathcal{R}_p$ — многообразие 2-ступенно нильпотентных групп экспоненты p ($p > 2$, p — простое число). Тогда квазимногообразие, порождённое свободной неабелевой $\mathcal{R}_p$-группой, не имеет ω-независимого базиса квазитождеств в $\mathcal{R}_p$.*

Список литературы

[1] Федоров А. Н., О подквазимногообразиях нильпотентных минимальных неабелевых многообразий групп, Сиб. матем. журн., 21, N 6 (1980), 117–131.

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

Нормализаторы силовских подгрупп в линейных и унитарных группах

А. С. Васильев

Пусть r — нечетное простое число. В докладе будет представлено строение нормализаторов силовских r-подгрупп в линейных и унитарных простых группах над конечными полями характеристики, отличной от r.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00039).

НГУ, Новосибирск
E-mail: a.vasilev1@g.nsu.ru

О тройных факторизациях конечных групп

А. Ф. Васильев, И. Н. Халимончик

Рассматриваются только конечные группы. Группа $G = AB = BC = CA$, где A, B и C — ее подгруппы, называется трижды факторизуемой. Кегель [1] показал, что $G = AB = BC = CA$ нильпотентна, если A, B и C нильпотентны. Л.С. Казарин [2] доказал, что аналогичный результат верен, если вместо нильпотентности взять разрешимость. Случай $G \in \mathfrak{F}$, где A, B и C принадлежат разрешимой локальной формации $\mathfrak{F}$, был рассмотрен в [3-4].

Отметим, что тройная факторизация возникает, если G имеет три подгруппы A, B и C, индексы которых попарно взаимно просты в G. В работе [5] Флауэрс и Вэйкфилд доказали, что если в группе G существуют три сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами в ней и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима. В работе [6] для разрешимой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ было установлено строение группы G, имеющей три $\mathfrak{F}$-подгруппы A, B и C с попарно взаимно простыми индексами в G.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) для любой наследственной насыщенной подформации $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{X}$ выполняется: $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB = BC = CA$, где подгруппы A, B и C принадлежат $\mathfrak{F}$;

2) любая $\mathfrak{X}$-группа имеет нильпотентный коммутант.

Следствие. *Пусть группа $G = AB = BC = CA$, где A, B и C — сверхразрешимые подгруппы. Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Список литературы

[1] Kegel O.H. Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87, N 1. P. 42–48.

[2] Казарин Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, N 7–8. С. 947–950.

[3] Васильев А.Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством // Вопросы алгебры. 1987. N 3. С. 3–11.

[4] Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M.C., Martínez-Pastor A. Finite trifactorized groups and formations // J. Algebra. 2000. V. 226. P. 990–1000.

[5] Flowers N., Wakefield T.P. On a group with three supersolvable subgroups of pairwise relatively prime indices // Arch. Math. 2010. V. 95, N 4. P. 309–315.

[6] Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Парфенков К.Л. Конечные группы с тремя заданными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59, N 1. С. 65–77.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Белоруссия)
E-mail: formation56@mail.ru, vifh@rambler.ru

О конечных группах с заданной системой подгрупп, чьи индексы попарно взаимно просты

Т. И. Васильева

Все группы предполагаются конечными. Одним из направлений исследований в теории групп является выяснение принадлежности группы классу $\mathfrak{X}$ в случае, когда выделенная часть ее подгрупп принадлежит $\mathfrak{X}$. Например, Виландт [**1**] установил разрешимость группы G, если она имеет три разрешимые подгруппы, чьи индексы в G попарно взаимно просты. Для класса нильпотентных групп аналогичный результат доказал Кегель [**2**]. Сверхразрешимость группы, у которой имеются четыре сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами, установил Дерк [**3**].

Пусть t — натуральное число и $t > 1$. Согласно Крамеру [**4**] класс групп $\mathfrak{X}$ называется Σ_t-замкнутым, если $\mathfrak{X}$ содержит всякую группу G, имеющую t $\mathfrak{X}$-подгрупп, индексы которых в G попарно взаимно просты.

В классе разрешимых групп Крамер [**4, 5**] исследовал Σ_t-замкнутость локальной формации $\mathfrak{F}$ и установил зависимость между выполнимостью данного свойства для самой формации и значений ее локального экрана. Функторное обобщение этих результатов было получено в работе [**6**]. Также теория Крамера нашла развитие в рамках разработанного А.Н. Скибой метода σ-свойств групп (см., например, [**7**]). Л. А. Шеметков поставил проблему [**8**, гл. I, проблема 7]: распространить результаты Крамера на произвольные группы. В данном направлении получена

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и f — ее максимальный внутренний локальный экран такой, что $f(p)$ Σ_t-замкнута ($t \geq 2$) для любого простого p. Тогда $\mathfrak{F}$ Σ_{t+2}-замкнута.*

Список литературы

[1] Wielandt H. Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierbaren Gruppen // J. Austral. Math. Soc. 1960. N 1. S. 143–146.

[2] Kegel O. H. Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87, N 1. P. 42–48.

[3] Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. V. 91. P. 198–205.

[4] Kramer O.-U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes // Math. Z. 1974. V. 139, N 1. P. 63–68.

[5] Kramer O.-U. Zur Struktur endlicher auflösbarer Gruppen mit mindestens drei Untergruppen von paarweise teilfremden Indizes // Arch. Math. 1975. V. 26, N 4. P. 361–366.

[6] Васильев А. Ф., Васильева Т. И. Рекурсивно распознаваемые локальные формации конечных групп // ПФМТ. 2009. N 1 (1). С. 44–50.

[7] Chi Z., Skiba A. N. A generalization of Kramer's theory // Acta Math. Hungar. 2019. V. 158, N 1. P. 87–99.

[8] Шеметков Л.А. Формации конечных групп М.: Наука, 1978.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Белорусский государственный университет транспорта, Гомель
E-mail: tivasilyeva@mail.ru

О конфинальности сечений одного вещественно замкнутого поля

Н. Ю. Галанова

При классификации вещественно замкнутых полей изучают различные виды их сечений [1-5]. *Сечением* (A, B) упорядоченного поля F называется пара непустых подмножеств этого поля таких, что $A \cup B = F$, $\forall\, x \in A\ \forall\, y \in B (x < y)$.

Пусть $L = \{t_\gamma\}_{\gamma\in\omega_1}$ — линейно упорядоченное множество, подобное ординалу ω_1, $G = \{t_{i_1}^{r_{i_1}} t_{i_2}^{r_{i_2}} \cdots t_{i_n}^{r_{i_n}} \mid t_{i_j} \in L, t_{i_1} > t_{i_2} > \cdots > t_{i_n}, r_{i_j} \in \mathbb{Q}, j = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}$, $t_1^r = 1\ \forall r \in \mathbb{Q}\}$ — линейно упорядоченная делимая Абелева группа конечных слов с образующими из L и рациональными показателями. Здесь $(t_{i_1}^{r_{i_1}}) \cdot (t_{i_1}^{q_{i_1}}) = (t_{i_1}^{r_{i_1}+q_{i_1}})$ и $(t_{i_1}^{r_{i_1}}) \cdot (t_{i_2}^{r_{i_2}}) = (t_{i_1}^{r_{i_1}} t_{i_2}^{r_{i_2}})$. Для $g_1, g_2 \in G, g_1 = t_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots t_{i_k}^{r_{i_k}}$ полагаем $g_1 < g_2 \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} < 1$ и $g_1 < 1 \Leftrightarrow r_{i_1} < 0$ [1].

$\mathbb{R}[[G, \aleph_1]]$ — поле ограниченных формальных степенных рядов $x = \sum\limits_{g\in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbb{R}$, $supp(x) = \{g \in G | r_g \neq 0\}$ — вполне антиупорядоченное подмножество группы G, $|supp(x)| < \aleph_1$, т.е. поле состоит из рядов со счетными носителями [2].

Сечение (A, B) вещественно замкнутого поля $F \subset \mathbb{R}[[G]]$ с группой архимедовых классов G является симметричным (по Пестову) iff $\exists x \in \mathbb{R}[[G]] \setminus F\quad A < x < B$ (см. [3]).

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *фундаментальным* или *сечением Скотта* [2-5], если $\forall\varepsilon \in F^+\ \exists x \in A, y \in B$ такие, что $|y - x| < \varepsilon$.

Пусть K наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbb{R}[[G, \aleph_1]]$, содержащее G.

Теорема. (1) $K \subsetneq \mathbb{R}[[G, \aleph_1]]$.

(2) *Все симметричные сечения поля K имеют конфинальность $(\aleph_0, \aleph_0)$ и нефундаментальны.*

(3) *Все несимметричные сечения поля K, порождённые сечениями группы G, имеют конфинальность $(\aleph_0, \aleph_0)$ и нефундаментальны.*

Список литературы

[1] Galanova N. Yu. An investigation of the fields of bounded formal power series by means theory of cuts. Acta Appl. Math. 2005. 85. 121–126.
[2] Dales H. J., Woodin H. Super real fields. Oxford: Clarenden Press, 1996
[3] Галанова Н. Ю. О симметричных сечениях одного вещественно замкнутого поля// Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. N 53. С. 5–15
[4] Shelah S. Quite Complete Real Closed fields. Israel Journal of Mathematics. 142 (2004). P. 261–272
[5] Пестов Г. Г. Исследования по упорядоченным группам и полям в Томском государственном университете // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. N 3(15). С. 41–58.

ТГУ, Томск
E-mail: galanova@math.tsu.ru

Неравенства для числа классов сопряженных элементов конечной группы и ее силовских подгрупп

В. С. Ганжа

Пусть G — конечная группа порядка $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые числа. По теореме Силова [**1**] в G существуют подгруппы $P_1, P_2, \ldots, P_s$ такие, что $|P_i| = p^{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Обозначим через $k(G)$ число классов сопряженных элементов в группе G и пусть $kp(G) = k(P_1) \cdot \ldots \cdot k(P_s)$. В 1999 году Ласло Пыбер поставил в Коуровской тетради следующий вопрос ([**2**], вопрос 14.74).

Вопрос. *Верно ли, что $k(G) \le kp(G)$?*

В работе доказана справедливость неравенства для симметрических, спорадических групп и групп, порядки которых не превосходят 2000.

Теорема 1. *Пусть G — симметрическая группа. Тогда верно следующее неравенство:*

$$k(G) \le kp(G).$$

Теорема 2. *Пусть G — спорадическая группа. Тогда в G найдутся две силовские подгруппы P_i и P_j такие, что*

$$k(G) < k(P_i) \cdot k(P_j).$$

Справедливость неравенства для групп, порядки которых не превосходят 2000, была установлена с помощью системы компьютерной алгебры GAP, для спорадических групп — с использованием [**3**].

Список литературы

[1] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры: учебник для вузов. / Кострикин А. И. Москва: Физматлит, 2004. 272 с.

[2] Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 18-е изд. / Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Новосибирск: НГУ, 2014. 253с.

[3] Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups. / Conway J. H., Curtis R. T., Wilson R. T., Norton S. P., Parker R. A. Oxford University Press, 1985. 294p.

Магистр ИМиФИ СФУ, Красноярск
E-mail: nox2263@ya.ru

Группы с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами

Ю. В. Горбатова, М. Н. Коновалова

Все группы в данной работе являются конечными. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее. n-Максимальная подгруппа группы G называется строго n-максимальной, если она не является n-максимальной подгруппой ни в одной собственной подгруппе группы G.

Ранее Ю.В. Луценко (Горбатовой) и А.Н. Скибой было получено описание групп с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами (см.[1]). Развивая данное направление, нами получены результаты, описывающие строение групп с субнормальными строго вторыми или строго третьими максимальными подгруппами. Приведем некоторые из них.

Теорема 1. *В том и только в том случае каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда либо G нильпотентна, либо G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Следствие 1. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(2) *каждая 2-максимальная подгруппа субнормальна в G;*

(3) *каждая строго 2-максимальная подгруппа субнормальна в G.*

Теорема 2. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *каждая 3-максимальная подгруппа субнормальна в G;*

(2) *каждая строго 3-максимальная подгруппа субнормальна в G.*

Список литературы

[1] Луценко (Горбатова) Ю. В., Скиба А. Н. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами // Математические заметки. 2012. Том 91. Выпуск 5. С. 730–740.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Брянский филиал), Брянск

E-mail: g.julia32@yandex.ru, msafe83@mail.ru

О структуре неабелевых локально разрешимых групп конечного метабелева ранга

О. Ю. Дашкова

Д. И. Зайцевым было введено понятие F-ранга группы [**1**]. Пусть G — группа, F — некоторая непустая система ее конечно порожденных подгрупп. F-рангом группы G называется такое наименьшее число r, что любая подгруппа системы F может быть порождена не более чем r элементами. В случае, когда такого числа r нет, F-ранг группы G считается бесконечным. Если F — система всех метабелевых неабелевых конечно порожденных подгрупп неабелевой группы G, то F-ранг группы G называется метабелевым. Установлено, что локально разрешимые неабелевы группы конечного метабелева ранга могут иметь бесконечный специальный ранг [**2**]. Основным результатом работы является теорема.

Теорема. *Если G — неабелева локально разрешимая группа конечного метабелева ранга, имеющая бесконечный специальный ранг, то G содержит нормальную нильпотентную подгруппу N конечного специального ранга, такую, что G/N — почти абелева группа.*

Список литературы

[1] Дашкова О. Ю. Локально почти разрешимые группы конечного неабелева ранга. Укр. мат. журн. 1990, т. 42, N 4, с. 477–482.

[2] Дашкова О. Ю. Группы конечного метабелева ранга. Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 90.1. 1990, 35 с.

Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Севастополе, Севастополь
E-mail: odashkova@yandex.ru

О максимальных торах линейных и унитарных групп

А. В. Заварницин

Максимальные торы конечных групп лиева типа широко изучаются. Для групп $(\mathrm{P})\mathrm{SL}_n(q)$ и $(\mathrm{P})\mathrm{SU}_n(q)$ строение максимальных торов, зависящее от разбиения $n = n_1 + \ldots + n_s$, проясняется в работе [**1**]. Приведённые там формулы порядков циклических факторов торов как функции от параметров $n_1, \ldots, n_s$ являются каноническими, однако имеют комбинаторную вычислительную сложность. Мы предлагаем другое явное циклическое разложение торов (неканоническое, вообще говоря), которое может быть более практическим с вычислительной точки зрения.

Чтобы сформулировать основной результат, введём следующие обозначения. Для ненулевого целого n через $\mathbb{Z}_n$ обозначим циклическую группу порядка $|n|$. Если q — степень простого числа, то положим $(\mathrm{P})\mathrm{SL}_n(-q) = (\mathrm{P})\mathrm{SU}_n(q)$. Пусть $\varepsilon = \pm 1$. НОД и НОК ненулевых целых чисел $n_1, \ldots, n_s$ считаются положительными и обозначаются через $(n_1, \ldots, n_s)$ и $[n_1, \ldots, n_s]$, соответственно.

Теорема. *Пусть T — максимальный тор группы $\mathrm{SL}_n(\varepsilon q)$, параметризованный разбиением $n = n_1 + \ldots + n_s$. Обозначим $a_1 = (\varepsilon q)^{(n_1,\ldots,n_s)} - 1$, $a_2 = [(\varepsilon q)^{n_1} - 1, (\varepsilon q)^{(n_2,\ldots,n_s)} - 1]$, ..., $a_{s-1} = [(\varepsilon q)^{n_{s-2}} - 1, (\varepsilon q)^{(n_{s-1},n_s)} - 1]$, $a_s = [(\varepsilon q)^{n_{s-1}} - 1, (\varepsilon q)^{n_s} - 1]$. Тогда*

$$T \cong \mathbb{Z}_{a_1'} \times \mathbb{Z}_{a_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_s},$$

где $a_1' = a_1/(\varepsilon q - 1)$.

Пусть $\overline{T}$ — образ T в группе $\mathrm{PSL}_n(\varepsilon q)$. Положим $d = (n, \varepsilon q - 1)$, $d' = (n/(n_1, \ldots, n_s), \varepsilon q - 1)$. Для любого переобозначения параметров $a_2, \ldots, a_s$ имеем

$$\overline{T} \cong \mathbb{Z}_{b_1'} \times \mathbb{Z}_{b_2'} \times \mathbb{Z}_{b_3} \ldots \times \mathbb{Z}_{b_s},$$

где $b_1' = d'a_1/d(\varepsilon q - 1)$, $b_2' = b_2/d'$ и $b_2 = (a_2, \ldots, a_s)$, $b_3 = [a_2, (a_3, \ldots, a_s)]$, ..., $b_{s-1} = [a_{s-2}, (a_{s-1}, a_s)]$, $b_s = [a_{s-1}, a_s]$.

Эта теорема позволяет дать упрощённое циклическое разложение максимальных торов групп $\mathrm{SL}_n(\varepsilon q)$ для многих частных случаев разбиений числа n. Доказательство основано на циклическом разложении общего вида конечной абелевой группы, которое может представлять независимый интерес.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН I.1.1., проект 0314-2016-0001.

Список литературы

[1] Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А., Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах, Алгебра и логика, 46:2 (2007), 129–156.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: zav@math.nsc.ru

О накрытиях в решетке o-аппроксимируемых многообразий ℓ-групп

А. В. Зенков

Напомним, что решеточно упорядоченная группа (l-группа) – это алгебраическая система G сигнатуры $l =< \cdot,^{-1}, e, \vee, \wedge >$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями $x(u \vee v)y = xuy \vee xvy$, $x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy$. Класс $\mathcal{L}$ всех ℓ-групп образует многообразие сигнатуры ℓ. Множество всех многообразий ℓ-групп L является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, L есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий ℓ-групп.

Всякое многообразие ℓ-групп, состоящее из тех ℓ-групп в которых выполнено тождество

$$(y^{-1}x^{-1}y \wedge x) \vee e = e$$

будем назавать o-аппроксимируемым. Множество L_0 всех o-аппроксимируемых многообразий ℓ-групп есть полная подрешетка решетки L.

Будем говорить, что многообразие ℓ-групп $\mathcal{X}$ является накрытием многообразия ℓ-групп $\mathcal{Y}$ в решетке $L(L_0)$ ($\mathcal{X}$ накрывает $\mathcal{Y}$), если $\mathcal{Y} \subsetneqq \mathcal{X}$ и для любого многообразия (o-аппроксимируемого многообразия) m-групп $\mathcal{Z}$ такого, что $\mathcal{Y} \subseteqq \mathcal{Z} \subseteqq \mathcal{X}$ выполнено $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}$, либо $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$. Если всякий элемент соответствующей решетки имеет в ней накрытие, то будем говорить, что данная решетка обладает свойством накрытия.

В работе [1] был построен первый пример o-аппроксимируемого многообразия, не имеющего накрытий в решетке L_0. Позднее в [2] были построены еще четыре o-аппроксимируемых многообразия с аналогичным свойством. Верна

Теорема. *Существуют четыре o-аппроксимируемых многообразия ℓ-групп, отличные от известных ранее, которые не имеют накрытий в решетке L_0.*

Замечание. Все эти многообразия не имеют независимого базиса тождеств, что следует из работы [3].

В заключение отметим, что решетка L обладает свойством накрытия [4].

Список литературы

[1] Медведев Н. Я. О решетке o-аппроксимируемых ℓ-многообразий, Cechoslovak Math., J., 34 (1984), 6–17.

[2] Medvedev N. Ya., Morozova S. V. On covers in the lattice of representable ℓ-varieties, Cechoslovak Math., J., 48 (1998), 821–831.

[3] Горбунов В. А.: Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиматизируемость, Алгебра и логика, 16 (1977), 507–548.

[4] Kopytov V. M., Medvedev N. Ya. The theory of lattice-ordered groups, Dordrecht a.o., Kluwer Academic Publishers, 1994.

Алтайский Государственный Аграрный Университет, Барнаул
E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_2(q_1) \times L_2(q_2)$

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы в G. Определим множество $M_G(A,B) = \{A \cap B^g \,|\, g \in G$ и $A \cap B^g$ минимально по включению среди всех пересечений такого вида$\}$, а $m_G(A,B) \subseteq M_G(A,B)$ как подмножество в $M_G(A,B)$, состоящее из элементов минимального порядка, а $\mathrm{Min}_G(A,B) = \langle M_G(A,B) \rangle$ и $\min_G(A,B) = \langle m_G(A,B) \rangle$.

Ранее [**1**] в терминах подгруппы $\min_G(S,S)$ было дано описание всех пар нильпотентных подгрупп A и B в конечной группе G с цоколем $L_2(q)$ и силовской 2-подгруппой S, а в [**2**] это было сделано для группы G с цоколем $L_2(2^m) \times L_2(2^n)$ и в обоих случаях при условии $\min_G(A,B) \neq 1$.

В данной работе анонсируется следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа с цоколем $L_2(q_1) \times L_2(q_2)$, A и B — нильпотентные подгруппы в G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $\mathrm{Aut}\,(L_2(q)) \times K_1$, *где q — либо простое число Мерсенна, либо $q = 9$, а* $\mathrm{Inn}\,(K_2) \leq K_1 \leq \mathrm{Aut}\,(K_2)$, $K_2 = L_2(q_2)$, $q_2 > 3$ *любое;*

(2) $(L_2(q_1) \times L_2(q_2))\langle t \rangle$, q_1 *и* q_2 *— простые числа Мерсенна, t — инволюция;*

(3) $(L_2(q_1) \times PGL_2(q))\langle t \rangle$, q_1 *— простое число Мерсенна, t — инволюция;*

(4) $(L_2(q_1) \times Sp_4(2))\langle t \rangle$, q_1 *— простое число Мерсенна, t — инволюция;*

(5) $(PGL_2(9) \times PGL_2(9))\langle t \rangle$, t *— инволюция;*

(6) $(PGL_2(9) \times Sp_4(2))\langle t \rangle$, t *— инволюция;*

(7) $(Sp_4(2) \times Sp_4(2))\langle t \rangle$, t *— инволюция;*

(8) $\mathrm{Aut}\,(L_2(q)) \wr C_2$, q *— простое число Ферма.*

Список литературы

[1] Зенков В. И. О пересечениях двух нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_2(q)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, N 6. С. 1280–1290.

[2] Зенков В. И. О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_2(2^m) \times L_2(2^n)$ // Тр. института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, N 4. С. 126–134.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: v1i9z52@mail.ru

Спорадические композиционные факторы конечных групп, граф простых чисел которых совпадает с графом простых чисел исключительной простой группы лиева типа

М. Р. Зиновьева

Пусть G – конечная группа, $\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G, $\omega(G)$ – множество порядков элементов (спектр) группы G. Графом простых чисел (графом Грюнберга–Кегеля) $GK(G)$ группы G называется неориентированный граф, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$, причем две вершины $p, q \in \pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

Группа G называется распознаваемой по графу простых чисел (графу Грюнберга–Кегеля), если для любой конечной группы H из равенства $GK(G) = GK(H)$ следует $G \cong H$.

В связи с задачей распознавания конечных групп по графу простых чисел возник вопрос о композиционном строении групп, граф простых чисел которых совпадает с графом простых чисел известной простой группы.

Автор рассматривает композиционные факторы таких групп и доказывает следующую теорему.

Теорема. *Пусть* H *– конечная простая группа исключительного лиева типа,* G *– конечная группа с* $GK(G) = GK(H)$*. Предположим, что* S *– спорадический композиционный фактор группы* G*. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*

1) $G = G_2(q)$, $S \in \{J_1, J_4, O'N, LyS, F_2, F_3\}$;

2) $G = {}^3D_4(q)$, $S \in \{J_1, J_4, Ru, HN, Suz, Co_1, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, O'N, LyS, F_1, F_2, F_3\}$.

Заметим, что А.М. Старолетов [**1**] получил описание композиционных факторов конечных групп, имеющих тот же спектр, что и известная простая группа.

Список литературы

[1] Staroletov A. M., Sporadic composition factors of finite groups isospectral to simple groups, Сиб. электрон. матем. изв., 8 (2011), 268–272.

ИММ им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

О σ-субнормальных подгруппах конечной факторизуемой группы

С. Ф. Каморников

Предложенная А. Н. Скибой концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею Виландта о субнормальной подгруппе, базируется на следующих трех определениях:

1) Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно непересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$.

2) Группа G называется σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

3) Подгруппа H группы G называется σ-субнормальной, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для минимального разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$.

В данном докладе обсуждается полученное в [Ballester-Bolinches A., Kamornikov S.F., Pedraza-Aguilera M.C., Yi X. // On σ-subnormal subgroups of factorised finite groups (в печати)] решение σ-субнормального аналога следующего известного критерия Виландта о субнормальности подгруппы в конечной факторизуемой группе.

Теорема. *Пусть G — конечная разрешимая группа, представимая в виде произведения своих подгрупп A и B. Если подгруппа X группы G σ-субнормальна в $< X, X^g >$ для любого $g \in A \cup B$, то X σ-субнормальна в G.*

При $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$ теорема включает соответствующие результаты Майера, Сидки, Виландта и Касоло. Отметим, что для произвольной конечной группы вопрос о σ-субнормальности (в том числе и для минимального разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$) подгруппы X в группе $G = AB$ в настоящее время остается открытым.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Белоруссия)
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Конечные группы с некоторыми формационно субнормальными подгруппами

М. Н. Коновалова, И. Л. Сохор

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — конечная группа, H — подгруппа группы G. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы G, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп $H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \ldots \lessdot H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq (H_{i-1})_{H_i}$ для всех i. Здесь запись $H_{i-1} \lessdot H_i$ означает, что H_{i-1} — максимальная подгруппа группы H_i, $Y_X = \bigcap_{x \in X} Y^x$ — ядро подгруппы Y в группе X, а $X^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы X, т. е. наименьшая нормальная в X подгруппа, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Подгруппа Фраттини группы X обозначается через $\Phi(X)$.

Для наследственной формации $\mathfrak{F}$ известно [**1**, лемма 7], что если в конечной группе G каждая максимальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Если же в конечной группе G каждая 2-максимальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна, то все собственные подгруппы в G имеют нильпотентные $\mathfrak{F}$-корадикалы [**1**, теорема 1]. Конечные группы, у которых все 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны, $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп, исследованы в [**2**].

Формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если в любой конечной группе множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. Решеточные формации описаны в работе [**3**]. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы. Предположим, что в конечной группе G существует максимальная подгруппа M, которая обладает следующими свойствами:*

(1) *M не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

(2) *каждая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Тогда G — бипримарная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, $G^{\mathfrak{F}}$ — силовская подгруппа группы G и $\Phi(G^{\mathfrak{F}}) = 1$.

Список литературы

[1] Монахов В. С. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами // Матем. заметки. 2019. Т. 105. С. 269–277.

[2] Монахов В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, N 2. С. 447–462.

[3] Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры : сб. науч. ст. Киев : Ин-т матем. АН Украины, 1993. С. 27–54.

Брянский филиал РАНХиГС, Брянск
E-mail: msafe83@mail.ru
Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: irina.sokhor@gmail.com

Простые конечные группы с деревьями Брауэра в форме звезды

А. В. Кухарев

Пусть G — конечная группа, p — простое число, делящее порядок этой группы. Предположим, что силовская p-подгруппа группы G циклическая. Тогда для главного p-блока группы G однозначно определен граф Брауэра, являющийся при этом деревом.

Обозначим через $\mathcal{X}_p$ класс конечных групп с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой, для которых дерево Брауэра главного p-блока является *звездой*, то есть деревом диаметра не более чем 2. В терминах теории характеров это означает следующее. Граф Брауэра p-блока является звездой, если и только если каждый p-модулярный неприводимый характер этого блока поднимается до обыкновенного неприводимого характера [**1**].

Возникает задача определения принадлежности группы классу $\mathcal{X}_p$ (см. [**2**]). Известно, что $\mathcal{X}_p$ включает все p-разрешимые группы с циклической силовской p-подгруппой, однако не ограничивается ими. Например, $A_5 \in \mathcal{X}_3$.

В настоящей работе интересующий нас вопрос решен для случая простых групп. А именно доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — простая конечная группа, и пусть p — простое число, делящее порядок группы G. Тогда $G \in \mathcal{X}_p$, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

1) $G = C_p$;
2) $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, $p \neq 2$ *и* p *делит* $q \pm 1$;
3) $G = \mathrm{PSL}_3(q)$, $p \neq 2$ *и* p *делит* $q + 1$;
4) $G = \mathrm{PSU}_3(q)$, $p \neq 2$ *и* p *делит* $q - 1$;
5) $G = A_5$, $p \in \{3, 5\}$;
6) $G = A_6$ *и* $p = 5$;
4) $G = \mathrm{Sz}(q)$, $q = 2^{2n+1}$ $(n \geq 1)$, *где* $p \neq 2$ *и* p *делит* $q - 1$ *или* $q + r + 1$;
5) $G = {}^2G_2(q^2)$, $q^2 = 3^{2n+1}$ $(n \geq 1)$, *где* $p \neq 2$ *и* p *делит* $q^2 - 1$ *или* $q^2 + \sqrt{3}q + 1$;
6) $G \in \{M_{11}, M_{23}, J_3\}$ *и* $p = 5$;
7) $G = J_1$ *и* $p \in \{3, 5\}$.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект 18-71-10007).

Список литературы

[1] Willems W., Zalesski A. E., Quasi-projective and quasi-liftable characters // J. Algebra. 442 (2015), 548–559.

[2] Blau H.I., On Brauer stars // J. Algebra. 90 (1984), 169–188.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: kukharev.av@mail.ru

О группах, насыщенных конечными ортогональными группами

В. Д. Мазуров

Пусть M — некоторое множество групп. Группа G *насыщена* группами из M, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторому элементу множества M.

Теорема. *Пусть* $M = \{O_7(q) | q \equiv \pm 3 (mod 8)\}$. *Если* G *— периодическая группа, насыщенная группами из* M*, то* G *изоморфна* $O_7(Q)$ *для некоторого локально конечного поля* Q *нечётной характеристики.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00039).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: mazurov@math.nsc.ru

Конечные группы с обобщенно субнормальными надсиловскими подгруппами

А. Г. Мельченко, А. Ф. Васильев

Все рассматриваемые в работе группы считаются конечными. Отправной точкой многих исследований является факт о том, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа субнормальна в ней. Естественным обобщением субнормальности в классе разрешимых групп является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной, а в произвольном случае понятие K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы [1]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

$\mathfrak{F}$-субнормальной в G,

если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$; K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В работах [2-5] исследовались группы, у которых силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны или K-$\mathfrak{F}$-субнормальны, в случае наследственной (насыщенной) формации $\mathfrak{F}$. В [6-7] были рассмотрены группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными нормализаторами силовских подгрупп.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда и только тогда группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi'} \times \mathfrak{F}$, когда для каждой силовской подгруппы P группы G любая подгруппа H, содержащая P, является* K-*$\mathfrak{F}$-субнормальной в G.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда для каждой силовской подгруппы P группы G любая подгруппа H, содержащая нормализатор $N_G(P)$, является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G.*

Список литературы

[1] Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

[2] Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2011. N 4 (9). С. 86–91.

[3] Семенчук В. Н., Шевчук С. Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп // Матем. заметки. 2011. Т. 89, N 1. С. 104–108.

[4] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, N 2, С. 259–275.

[5] Монахов В. С., Сохор И. Л. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, N 4, С. 851–863.

[6] Васильев А. Ф. Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2018. N 4 (37). С. 66–71.

[7] Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Melchenko A. G. Finite groups with $\mathfrak{F}$-subnormal normalizers of Sylow subgroups. arXiv:1904.06986v1 [math.GR] 15 Apr 2019. p. 11.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель (Белоруссия)
E-mail: melchenkonastya@mail.ru, formation56@mail.ru

О решетке функторно замкнутых кратно композиционных формаций

А. П. Мехович

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология [**1**]–[**3**].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В произвольной группе G выберем систему подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой функтор* (в терминологии А.Н. Скибы) [**1**], если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Рассматриваются лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G из $\mathfrak{F}$.

Всякая формация считается 0-*кратно композиционной*, а при $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно композиционной* [2], если $\mathfrak{F} = CF(f)$, где все непустые значения композиционного спутника f являются $(n-1)$-кратно композиционными формациями.

Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно композиционная формация. Тогда символом $L_{c_n^{\tau}}(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех τ-замкнутых n-кратно композиционных подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно композиционная формация. Тогда если формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_{c_n^{\tau}}(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \pi(Com(\mathfrak{F}))$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Список литературы

[1] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск : Беларуская навука, 1997. 240 с.

[2] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. 891 p. (De Gruyter Expo. Math.; vol. 4).

[3] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / Украинский матем. журн. 2000. Т. 52, N 6. С. 783–797.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск (Белоруссия)
E-mail: amekhovich@yandex.ru

Группы с ограничениями на максимальные подгруппы силовских подгрупп

В. С. Монахов, А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Терминология и обозначения соответствуют [**1**].

Признаки сверхразрешимости группы с ограничениями на максимальные подгруппы из силовских подгрупп группы получали многие авторы, см., например, литературу в [**2**]. Группы, в которых некоторые подгруппы содержатся в подгруппах простых индексов, изучались в [**3**]–[**4**].

В настоящей работе получена характеризация конечной группы, у которой для любого простого p каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы содержится в подгруппе индекса p, в частности, такие группы сверхразрешимы.

Определение. *Пусть G — сверхразрешимая группа. Тогда она обладает силовской башней* $1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G$, *сверхразрешимого типа* [**1**, теорема VI.9.1 (c)]. *Если для каждого i все максимальные подгруппы из G_i/G_{i-1} нормальны в G/G_{i-1}, то группу G назовем m-сверхразрешимой.*

Не все сверхразрешимые группы m-сверхразрешимы. Например, группа $Z_3 \times S_3$ сверхразрешима, но не m-сверхразрешима.

Теорема. *Группа G m-сверхразрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда для любого $p \in \pi(G)$ каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы группы G содержится в некоторой подгруппе (нормальной подгруппе) группы G индекса p.*

Следующий результат используется в доказательстве теоремы и представляет самостоятельный интерес.

Предложение. *Пусть G — p-разрешимая группа и P — её силовская p-подгруппа. Если каждая максимальная подгруппа из P содержится в некоторой подгруппе группы G индекса p, то G p-сверхразрешима.*

Замечание. *Условие p-разрешимости группы в предложении не является лишним. В простой группе A_5 силовская 5-подгруппа P имеет простой порядок. Все максимальные подгруппы из P (они единичны) содержатся в подгруппе $H \simeq A_4$ и $|A_5 : H| = 5$.*

Список литературы

[1] Huppert B. Endliche Gruppen. I. — Berlin: Springer-Verl., 1967.
[2] Monakhov V. S., Trofimuk A. A. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups // J. Group Theory. Vol. 17, N 5. 2014. P. 889–895.
[3] Berkovich Y., Kazarin L. Indices of elements and normal structure of finite groups // J. Algebra. Vol. 283, N 3. 2005. P. 564–583.
[4] Монахов В. С., Тютянов В. Н. О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов // Сиб. матем. журн. Т. 48, N 4. 2007. С. 833–836.

Гомельский университет им. Ф. Скорины, Гомель (Белоруссия)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com, alexander.trofimuk@gmail.com

О некоторых свойствах конечных полу-π-специальных групп

В. Н. Мыцик

Рассмотрим только конечные группы. Кроме того, P — множество всех простых чисел, таких что $p \in \pi \subseteq P$ и $\pi' = P \setminus \pi$.

Конечная группа G называется *π-специальной* [**1, 2, 3**], если $G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G)$, где $\pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Конечную группу G назовем полу-π-специальной, если нормализатор любой ненормальной π-специальной подгруппы группы G является π-специальной.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть группа G не является π-специальной группой и для каждой подгруппы A в G, являющейся либо π'-группой, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$, $N_G(A)$ – π-специальная.*

Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) *$G/F(G)$ является π-специальной группой. Поэтому, G имеет холлову π'-подгруппу H и разрешимую холлову π-подгруппу E.*

(2) *Если G не является p-замкнутой для каждого $p \in \pi$, то:*

(2.1) *H нормальна в G и E нильпотентна.*

(2.2) *$O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_n}(G) \times H$ является максимальной π-специальной подгруппой в G и каждая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$.*

Список литературы

[1] Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.

[2] Skiba A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups // Comm. Math. Stat. 2016. Vol 4, 3. P. 281–309.

[3] Skiba A. N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2018. Vol. 495. P. 114–129.

ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель (Белоруссия)
E-mail: basil.mytsik@gmail.com

О локальных точно транзитивных группах

М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Используем стандартное определение локальных топологических групп и локального изоморфизма (см. [**1**, §23]), а для псевдополей степени n (см. [**2**]) определим локальное n–псевдополе:

Определение. *Будем говорить, что группа преобразований (G, S_n) задаёт локальное n–псевдополе, если выполнены следующие условия:*
1) если определены произведения $a\varphi_i(b^{-1})$, $\varphi_i(a\varphi_i(b^{-1}))b$, $a\cdot_i b$, то имеет место равенство

$$a \cdot_i b = \varphi_i(\varphi_i(a)\varphi_i(b)) = \varphi_i(a\varphi_i(b^{-1}))b;$$

2) если определено произведение $a \cdot_i b$, то для всякой окрестности W элемента $a \cdot_i b$ существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что при $x \in U, y \in V$ произведения $x \cdot_i y$, $x\varphi_i(y^{-1})$, $\varphi_i(x\varphi_i(y^{-1}))y$ определены и $x \cdot_i y = \varphi_i(x\varphi_i(y^{-1}))y \in W$;
3) локальный гомеоморфизм $\sigma_{ij} = \varphi_j\varphi_i\varphi_j$ при $i \neq j$ является локальным автоморфизмом группы G;
4) если для некоторого $a \in G$ определено $\varphi_i E\varphi_i(a)$ и $E\varphi_i E(a)$, то справедливо равенство $\varphi_i E\varphi_i(a) = E\varphi_i E(a)$,
5) элементы $e_i = \varphi_i(e) \in G$ являются в группе G левыми нулями, то есть $e_i \cdot x = e_i$, для $x \in U$ из некоторой окрестности единицы e.

Имеет место

Теорема. *Категории локальных точно n–транзитивных групп и локальных n–псевдополей эквивалентны.*

Список литературы

[1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3-е изд., испр. М.: Наука, 1973, 519 с.
[2] Симонов А. А., Обобщение точно транзитивных групп. Изв. РАН. Сер. матем., 78:6 (2014), 153–178.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: neshch@math.nsc.ru, a.simonov@g.nsu.ru

Мультипликативная группа поля нулевой характеристики с конечным ветвлением

К. Н. Пономарев

Рассмотрим поле K нулевой характеристики, пусть Q – его простое подполе, поле рациональных чисел.

Вначале предположим, что поле K образовано алгебраическими элементами. Будем называть его *конечно разветвленным,* если продолжение любого дискретного нормирования v поля Q до нормирования w поля K имеет конечный индекс ветвления, $e(w/v) < \infty$.

Теорема 1. *Если поле алгебраических элементов K конечно разветвлено, то фактор – группа мультипликативной группы по подгруппе корней из единицы $K^*/\sqrt{1}$ является свободной группой.*

В частности, периодическая часть мультипликативной группы $\sqrt{1}$ прямо выделяется в группе K^*.

Теперь рассмотрим поле K с трансцендентными элементами. Обозначим через k алгебраическое замыкание простого поля Q в поле K. Тогда поле K представляется алгебраическим расширением K/F подходящего чисто трансцендентного расширения $F = k(T)$ поля k.

Поле F – поле частных области Крулля $k[T]$, оно обладает семейством *существенных* дискретных нормирований. Исходное поле K называем *конечно разветвленным,* если любое продолжение w каждого существенного нормирования v поля F на поле K имеет над полем F конечный индекс ветвления, $e(w/v) < \infty$.

Теорема 2. *Если поле K содержит трансцендентные элементы и конечно разветвлено, то фактор – группа K^*/k^* является свободной группой.*

В частности, подгруппа k^* прямо выделяется в группе K^*.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ponomaryov@ngs.ru

Контрпример Хертвика к гипотезе Цассенхауза об автоморфизмах

А. М. Попова, Е. В. Грачев, О. В. Брюханов

Напомним формулировку гипотезы Цассенхауза об автоморфизмах.

Для любого нормализованного автоморфизма (см. [2]) $\theta : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ существует единица рациональной групповой алгебры $\alpha \in \mathbb{Q}G$ и групповой автоморфизм $\sigma \in AutG$ такие, что $\theta(g) = \alpha^{-1}\sigma(g)\alpha$ для любого $g \in G$. В этом случае говорят, что автоморфизм имеет факторизацию Цассенхауза.

Существует несколько построенных контрпримеров к этой гипотезе. В этих примерах доказывается существование нормализованных автоморфизмов, не имеющих факторизации Цассенхауза. Мы рассматриваем группу Хертвика H_{144}, порядка 144, для которой явно указываем автоморфизмы, не имеющие факторизации Цассенхауза (см. [1]). Смысл работы состоит в том, чтобы понять построение таких автоморфизмов с точки зрения теории представлений групп.

Пусть G – конечная группа, $T_1(G), \ldots, T_s(G)$ - все неприводимые, неэквивалентные представления G, $D(G) = \{diag(T_1(g), \ldots, T_s(g)), g \in G\}$. Так как $ZG \cong \mathbb{Z}[D(G)]$, все рассмотрения проводятся для $\mathbb{Z}[D(G)]$.

$H_{144} = (L \times N) \leftthreetimes < a >$, $L \cong C_2 \times C_2$, $N \cong C_3 \times C_3$, $< a > \cong C_4$.

$|Out(H_{144})| = 16$, все элементы, за исключением тождественного, являются переставляющими автоморфизмами (см. [2]).

Используя идею Хертвика, получили следующее.

В кольце $\mathbb{Z}[D(H_{144})]$ нашли идеал I такой, что $\varphi \in Out(H_{144})$ из работы [1] на факторе $\mathbb{Z}[D(H_{144})]/I$ действует как сопряжение некоторой матрицей s (построили эту матрицу). Разложили идеал I в прямую сумму идеалов $I = I_1 \oplus I_2$ таких, что $\varphi(I_1) = I_1$, $\varphi(I_2) = I_2$, φ переставляет клетки и в I_1, и в I_2.

Заметим, что для любого элемента $g_i \in G$, $2g_i \in I$. Определили отображение α кольца $\mathbb{Z}[D(H_{144})]$ по следующей формуле:

$\alpha(g_i) = \frac{1}{2}\alpha(2g_i) = \frac{1}{2}(((2g_i)_{I_2})^s + \varphi((2g_i)_{I_1}))$

Вычисления показали, что так определенное отображение является нормализованным автоморфизмом, причем группы $D(H_{144})$ и $\alpha(D(H_{144}))$ не имеют сопрягающей матрицы. Последнее и доказывает, что α не имеет факторизации Цассенхауза.

Аналогичный результат получился для 14 автоморфизмов группы $Out(H_{144})$.

Список литературы

[1] Hertweck M. A. Integral group ring automorphisms without Zassenhaus factorization // Illinois Journal of Mathematics. 2002. Vol 46. N 1. P. 233–245.

[2] Ивлева А. М., Брюханов О. В., Грачев Е. В. Единицы целочисленных групповых колец // Новосибирск, 2018. 185 с.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ampopova@ngs.ru

Вербально замкнутые подгруппы свободных разрешимых групп

В. А. Романьков, Е. И. Тимошенко

Следующее определение дано в [**1**]. Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой,* если любое расщеплёное уравнение $w(x_1, \ldots, x_n) = h\,(h \in H)$, разрешимое в G, имеет решение в H. Определение допускает естественное обобщение, а именно, для любого натурального числа m подгруппа $H \leq G$ называется $m-$*вербально замкнутой*, если любая система из m расщепленных уравнений: $w_i(x_1, \ldots x_n) = h_i, h_i \in H, i = 1, \ldots, m$, имеющая решение в G, разрешима в H. Через $r_{ab}(H)$ обозначается ранг образа H в абелизации $G/[G, G]$. В [**1**] доказано, что вербально замкнутые подгруппы свободной группы являются её ретрактами. Аналогичное утверждение верно для свободных нильпотентных групп [**2**]. Основные результаты доклада следующие:

Теорема 1. *Пусть $S_{r,d}$ – свободная разрешимая группа ранга r ступени разрешимости d, H – е конечно порожденная подгруппа и $r_{ab}(H) = 1$. Если H вербально замкнута в G, то H – ретракт.*

Теорема 2. *Пусть H – вербально замкнутая подгруппа свободной разрешимой группы S_{rd} ступени $d \geq 1$ ранга r. Если $r_{ab}(H) = r$, то $H = S_{rd}$.*

Теорема 3. *Пусть H – 2-порожденная подгруппа свободной разрешимой группы $S_{r,d}$. Если H вербально замкнута в G, то H – ретракт.*

Теорема 4. *Любая конечно порождная $m-$вербально замкнутая подгруппа H свободной метабелевой группы M_r, для которой $r_{ab}(H) = m+1$, является ретрактом.*

Исследования первого автора поддержано программой фундаментальных научных исследований СО РАН I. 1.1.4, проект 0314-2019-0004. Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-01-00100.

Список литературы

[1] Myasnikov A., Roman'kov V. Verbally closed subgroups of free groups. J. Group Theory. 2014, vol. 17 (1), 29–40.

[2] Романьков В. А., Хисамиев Н. Г. Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп. Алгебра и логика. 2013, Т. 52 (4), 502–525.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Омск
E-mail: romankov48@mail.ru
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: eitim@gmail.com

Генетические коды некоторых групп с 3-транспозициями

В. М. Синицин

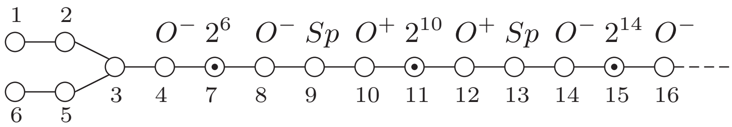
Среди групп, заданных порождающими элементами и соотношениями, особое место занимают группы, порожденные отражениями, а среди них конечные группы порожденные отражениями — группы Вейля $W(A_n)$, $W(D_n)$ и $W(E_n)$ $(n = 6, 7, 8)$ [**1, 2**].

В [**3, 4**] были найдены системы порождающих 3-транспозиций групп $Sp_{2m}(2)$, $O^{\pm}_{2m}(2)$ близкие к системам фундаментальных отражений групп Вейля $W(E_n)$.

Множество порождающих и определяющих соотношений Кокстера, задаваемых графом Γ_n, обозначим через $S(\Gamma_n)$ и $R(\Gamma_n)$ соответственно, а группу Кокстера через $G(\Gamma_n)$, в частности, $G(\Gamma_n) = \langle S(\Gamma_n)|R(\Gamma_n)\rangle$.

Рассмотрим граф I_n с разметкой [**4**].

$I_n,\ n \geq 7:$



Подгруппа $\langle s_1, \ldots, s_6\rangle$ в группе $G(I_7)$ изоморфны группам Вейля $W(E_6)$. Пусть $r = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6$ в корневой системе типа E_6. Обозначим

$$X(I_n) = \left\langle S(I_n)|R(I_n), (w_r s_7)^2 = 1 \right\rangle.$$

В системе GAP были проведены вычисления и установлено, что порядки групп $X(I_{2k})$ совпадают с порядками групп $O^{\pm}_{2k}(2)$ при $3 \leq k \leq 9$:

$|X(I_6)| = 51840 = |W(E_6)| = |O^-_6(2)|$; $|X(I_{14})| = 8256 \cdot |X(I_{13})| = |O^-_{14}(2)|$;
$|X(I_8)| = 119 \cdot |X(I_7)| = |O^-_8(2)|$; $|X(I_{16})| = 32639 \cdot |X(I_{15})| = |O^-_{16}(2)|$;
$|X(I_{10})| = 496 \cdot |X(I_9)| = |O^+_{10}(2)|$; $|X(I_{18})| = 130816 \cdot |X(I_{17})| = |O^+_{18}(2)|$.
$|X(I_{12})| = 2079 \cdot |X(I_{11})| = |O^+_{12}(2)|$;

и тем самым установлен изоморфизм этих групп.

Аналогичные расчеты проведены для графов E_n и J_n из [**4**].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00566 А.

Список литературы

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы, порождённые отражениями // Т. VI.– М.: Мир, 1972.

[2] Fischer B. Finite groups generated by 3-transpositions // Inventiones math. Volume 13, Issue 3 (1971), pp. 232–246.

[3] Синицин В.М., Созутов А.И., Кузнецов А.А. О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. матем. электр. изв., 2013, Т. 10. С. 285–301.

[4] Синицин В.М., Созутов А.И. О графах Кокстера групп с симплектическими 3-транспозициями // Труды института математики и механики УрО РАН. 2016. Том 22, N 3 С. 251–258.

СФУ, Красноярск
E-mail: sinkoro@yandex.ru

О локально конечных нормальных подгруппах группы $\mathbf{Lim}(\mathbb{N})$

А. И. Созутов, Н. М. Сучков

Пусть $S(\mathbb{N})$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Подстановка $g \in S(\mathbb{N})$ называется ограниченной, если

$$w(g) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Множество $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ всех ограниченных подстановок образует смешанную группу, факторизуемую двумя локально конечными подгруппами. Изучается нормальное строение этой группы.

Теорема 1. *Группа G не удовлетворяет условию минимальности для локально конечных нормальных подгрупп.*

Теорема 2. *Группа G не удовлетворяет условию максимальности для локально конечных нормальных подгрупп.*

Дано описание нормального замыкания подстановки из локально конечного радикала группы G.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00566 А.

СФУ, Красноярск
E-mail: sozutov_ai@mail.ru, ns7654321@mail.ru

Об аппроксимируемости разрешимыми группами древесных произведений нильпотентно аппроксимируемых групп

Е. В. Соколов

Пусть $T = (V, E)$ — некоторое дерево с множеством вершин V и множеством ребер E, каждой вершине $v \in V$ сопоставлена группа G_v, каждому ребру $e = \{v, w\} \in E$ — группа H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{e,v}\colon H_e \to G_v$, $\varphi_{e,w}\colon H_e \to G_w$. Тогда древесным произведением групп G_v $(v \in V)$ с объединенными подгруппами $H_e\varphi_{e,v}$ $(e \in E,\ v \in e)$ называется группа G, образующими которой являются образующие групп G_v, а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v и всевозможные соотношения вида $h_e\varphi_{e,v} = h_e\varphi_{e,w}$, где $e = \{v, w\} \in E$, $h_e \in H_e$. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть дерево T конечно, все группы G_v $(v \in V)$ аппроксимируются нильпотентными группами без кручения и все подгруппы $H_e\varphi_{e,v}$ $(e \in E,\ v \in e)$ являются циклическими. Тогда древесное произведение G аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Приведенное утверждение служит частичным обобщением теоремы 2 из [**1**] и теоремы 1 из [**2**], в которых установлена аппроксимируемость разрешимыми группами свободного произведения двух групп с циклическими объединенными подгруппами при условии, что свободные множители являются конечно порожденными нильпотентными [**1**] или аппроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения [**2**]. Так как каждая свободная группа аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Древесное произведение конечного числа свободных групп с циклическими объединенными подгруппами аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Отметим, что требование конечности дерева в условиях теоремы 1 и следствия существенно: можно привести пример древесного произведения счетного числа свободных групп с циклическими объединенными подгруппами, которое уже не является аппроксимируемым разрешимыми группами. С помощью данного примера доказывается также

Теорема 2. *HNN-расширение свободной группы с циклическими связанными подгруппами не обязано аппроксимироваться разрешимыми группами.*

Список литературы

[1] Kahrobaei D. On the residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups // Comm. Algebra. 2011. Vol. 39. P. 647–656.

[2] Azarov D. N. Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43. P. 1464–1471.

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

О группах с абнормальными или $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами

И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [**1**].

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и В. Н. Тютянов [**2**] ввели следующее понятие. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G,$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P} \cup \{1\}$ для любого i. Класс групп с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими подгруппами согласно [**2**] обозначается через $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. Здесь $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ подробно изучен, см. [**2**]–[**4**].

В [**5**] предложена следующая задача:

Описать группы, у которых любая подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна.

В [**6**] установлена разрешимость групп, у которых любая силовская подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна. Группы, у которых любая примарная подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна, изучены в [**4**].

Мы решаем данную задачу для групп, не принадлежащих классу $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. В частности, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть группа $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Каждая подгруппа группы G абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна тогда и только тогда, когда $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes P$, где P — силовская p-подгруппа группы G для некоторого $p \in \pi(G)$, являющаяся подгруппой Картера группы G, и $G^{\mathfrak{N}} \rtimes A$ сверхразрешима для всех $A < P$.*

Здесь $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, $G^{\mathfrak{N}}$ — наименьшая нормальная в G подгруппа с нильпотентной фактор-группой $G/G^{\mathfrak{N}}$, а запись $G^{\mathfrak{N}} \rtimes P$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой $G^{\mathfrak{N}}$.

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, N 6. С. 1270–1281.

[3] Monakhov V. S., Kniagina V. V. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ric. Mat. 2013. Vol. 62. P. 307–322.

[4] Монахов В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, N 2. С. 447–462.

[5] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам // ПФМТ. 2010. N 2(3). С. 21–27.

[6] Тютянов В. Н., Тихоненко Т. В. О конечных группах с заданной системой силовских подгрупп // Проблемы физики, математики и техники. 2014. N 3(20). С. 85–87.

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: irina.sokhor@gmail.com

О конечных разрешимых группах с ограничениями на кофакторы фиттинговых подгрупп

А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Терминология и обозначения соответствуют [**1**]. С каждой подгруппой H группы G тесно связаны две нормальные в G подгруппы — нормальное замыкание H^G и ядро H_G. Напомним, что H^G — наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая H, а H_G — наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H.

В работах [**2**] и [**3**] были получены оценки инвариантов разрешимой группы G в зависимости от канонического разложения индексов $|H^G : H|$ и $|H : H_G|$ субнормальных подгрупп H.

Подгруппу H группы G будем называть *фиттинговой*, если H содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ группы G. Очевидно, что каждая фиттингова подгруппа субнормальна в группе. В работе [**4**] проведено исследование разрешимых групп с ограничениями на индексы фиттинговых подгрупп в своих нормальных замыканиях.

Напомним, что *кофактором* подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G. В настоящей работе получены оценки ранга и нильпотентной длины группы, у которой порядки кофакторов фиттинговых подгрупп имеют заданное каноническое разложение.

Рассмотрим функцию

$$u_p^F(G) = \max\{n \mid p^n \top |H : H_G|,\ H \le F(G)\},\quad u^F(G) = \max_{p\in\pi(G)} u_p^F(G).$$

Здесь запись $p^n\top|H : H_G|$ обозначает, что p^n делит $|H : H_G|$, а p^{n+1} не делит $|H : H_G|$, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда ранг фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $1 + u^F(G)$, а нильпотентная длина группы G не превышает $4 + u^F(G)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант Ф19РМ-071).

Список литературы

[1] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.

[2] Guo W., Hu B., Monakhov V. S. On indices of subnormal subgroups of finite soluble groups // Commun. Algebra. Vol. 33, N 3. 2004. P. 855–863.

[3] Monakhov V. S., Sokhor I. L. On cofactors of subnormal subgroups // Journal of Algebra and Its Applications. Vol. 15, N 9. 2016. P. 1650169-1–1650169-9.

[4] Трофимук А. А. О Фиттинговых подгруппах конечной разрешимой группы // Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 18, N 3. 2012. С. 242–246.

Гомельский университет им. Ф. Скорины, Гомель (Белоруссия)
E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Об аппроксимируемости корневыми классами обобщенных прямых произведений групп

Е. А. Туманова

Содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ будем называть корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod_{y\in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Бо́льшая часть результатов об аппроксимируемости свободных конструкций групп получена с использованием так называемой «фильтрационной» методики, впервые предложенной Г. Баумслагом для изучения финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп. Позднее эта методика применялась для исследования других конструкций и аппроксимационных свойств и в итоге была распространена на случай изучения аппроксимируемости произвольным корневым классом групп [**1, 2**]. Целью настоящей работы является адаптация ««фильтрационной»» методики к исследованию аппроксимируемости обобщенного прямого (или центрального) произведения двух групп.

Если A и B — некоторые группы, $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$ — их центральные подгруппы и $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм, то обобщенным прямым произведением групп A и B с объединенными подгруппами H и K называется фактор-группа G прямого произведения $A \times B$ по его центральной подгруппе, составленной из элементов вида $h^{-1}(h\varphi)$, где $h \in H$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство пар подгрупп, определенное следующим образом: $(R, S) \in \{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ тогда и только тогда, когда R — нормальная подгруппа группы A, S — нормальная подгруппа группы B, $A/R \in \mathcal{K}$, $B/S \in \mathcal{K}$ и $(R\cap H)\varphi = S\cap K$. Если выполняются следующие соотношения*

$$\bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda = 1 = \bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda, \tag{1}$$

$$\bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} HR_\lambda = H, \quad \bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} KS_\lambda = K, \tag{2}$$

то группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$.

Установлено также, что, как и в случае обобщенного свободного произведения двух групп, условие (1) необходимо для $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G, в то время как условие (2) таковым не является.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00187).

Список литературы

[1] Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, N 4. С. 148–180.

[2] Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. N 10. С. 27–44.

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: helenfog@bk.ru

Цепи в конечных группах

В. Н. Тютянов

Будем рассматривать только конечные группы. В работе [**1**] было введено следующее понятие.

Определение. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается H $\mathbb{P}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для всех $i = 1, \ldots, n$.

Имеется достаточно много работ, где изучались конечные группы, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является $\mathbb{P}$-субнормальной в группе. Отметим работу Л. С. Казарина [**2**, теорема 6], в которой он перечислил простые неабелевы композиционные факторы конечных групп G для которых 1 $\mathbb{P}$-sn G. Данный результат был уточнен в [**3**, теорема 3.2]. В этой работе также были указаны некоторые цепи подгрупп простых индексов для простых неабелевых групп.

В дальнейшем понятие $\mathbb{P}$-субнормальности неоднократно обобщалось в различных направлениях. В работе [**4**] было введено следующее понятие. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ — множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Для фиксированного $t \in \mathbb{N}$ положим $\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \leq t\}$, обозначим $\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Подгруппа H называется $\mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$-субнормальной подгруппой группы G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$ для всех $i = 1, \ldots, n$. При этом используется обозначение H $\mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$-$sn$ G.

Отметим, что всякая $\mathbb{P}^t$-субнормальная подгруппа будет $\mathbb{P}^\infty$-субнормальной. При $t = 1$ получим понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы.

В настоящей работе перечислены простые неабелевы группы G, в которых 1 $\mathbb{P}^\infty$-sn G.

Теорема. *Пусть G — простая неабелева группа и 1 $\mathbb{P}^\infty$-sn G. Тогда*

$$\begin{aligned} G \in \{&SL_3(3),\ SL_3(5),\ PSL_2(7),\ PSL_2(11),\\ &SL_2(2^n),\ \text{где } 2^n + 1 = p \text{ — простое число Ферма},\\ &SL_2(8),\ PSL_2(r),\ \text{где } r = 2^m - 1 \text{ — простое число Мерсенна},\\ &PSU_4(2),\ PSL_3(8)\}. \end{aligned}$$

Список литературы

[1] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. Т. 51, N 6. 2010. С. 1270–1281.

[2] Казарин Л. С. О группах с факторизацией // Докл. АН СССР. Т. 256, N 1. 1981. С. 26–29.

[3] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам // Проблемы физики, математики и техники. Т. 3, N 2. 2010. С. 21–27.

[4] Тютянов В. Н., Княгина В. Н. Факторизации конечных групп r-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями // Укр. матем. журн. Т. 66, N 10. 2014. С. 1431–1435.

Международный университет «МИТСО», Гомель (Белоруссия)
E-mail: vtutanov@gmail.com

О периодической группе, насыщенной прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп и группы $U_3(q)$

К. А. Филиппов, А. С. Федосенко, А. К. Шлепкин

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [**1**].

Теорема. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R} = \{U_3(q) \times I_n \mid n = 1, 2, ...\}$, где q — фиксированное нечетное число, изоморфна $U_3(q) \times I$,* где I — группа периода 2.

Список литературы

[1] Шлёпкин А. К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. III межд. конф. по алгебре, тезиы докладов, Красноярск, (1993).

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск
E-mail: ak_kgau@mail.ru

Об устойчивых вещественных матрицах малых порядков

В. А. Чуркин

Вещественную квадратную матрицу A порядка n назовем устойчивой, если ее спектр расположен в левой полуплоскости, то есть вещественные части всех корней характеристического многочлена матрицы отрицательны. Как хорошо известно, в этом и только этом случае решения системы дифференциальных уравнений $dx/dt = Ax$ устойчивы при $t \to \infty$. Проблеме распознавания устойчивости конкретной матрицы, точнее, устойчивости вещественного многочлена степени n, посвящено много работ. Интересно взглянуть на множество устойчивых матриц в целом. Очевидно, что они образуют конус, т. е. выдерживают умножение на положительные вещественные числа. Обозначим через P_n долю объема этого конуса в объеме евклидова шара с центром в нуле в пространстве вещественных матриц порядка n. Можно трактовать P_n как вероятность случайного выбора устойчивой матрицы порядка n в алгебре матриц $M_n(\mathbb{R})$ при равномерном распределении.

Теорема 1. *Для вещественных матриц порядка 2 вероятность P_2 случайного выбора устойчивой матрицы в алгебре матриц $M_2(\mathbb{R})$ при равномерном распределении равна* $1/4$.

В случае матриц порядка 3, опираясь на параметризацию конуса устойчивых матриц, основанную на действии ортогональной группы сопряжением из [1], получена лишь интегральная формула для P_3.

Теорема 2. *Для вещественных матриц порядка 3 вероятность P_3 случайного выбора устойчивой матрицы в алгебре матриц $M_3(\mathbb{R})$ при равномерном распределении равна*

$$(9!!/2\pi^2) \cdot \int_\Omega (3x^2 + y^2 - z^2)\, z\, dx\, dy\, dz\, dt\, du\, dv,$$

где область Ω задается системой неравенств $x^2 + y^2 + \ldots + v^2 \leqslant 1$, $z > 0$, $t > 0$, $3x^2 + y^2 > z^2$, $-t\sqrt{2} < x < t\sqrt{2}$.

Список литературы

[1] Edelman A., The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions, and circular law, J. Multivariate Anal., 60, No. 2, 203–232 (1997).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: churkin@math.nsc.ru

О периодической части группы Шункова, насыщенной полными линейными группами степени два над конечными полями четной характеристики

А. А. Шлепкин

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ будем называть *насыщающим множеством* для G [**5**]. Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается $T(G)$ [**1**, с. 90]. Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [**3**]. Отметим, что группа Шункова не обязана обладать периодической частью [**4**].

В [**2**] доказывается, что периодическая группа Шункова G, насыщенная группами $GL_2(p^n)$ (ни харктеристика поля p, ни натуральное n не фиксируются), локально конечна и изоморфна $GL_2(P)$, где P — подходящее локально конечное поле. Перенести этот результат на весь класс групп Шункова долгое время не удавалось в связи с отсутствием описания групп Шункова с абелевыми централизаторами инволюций. Для случая $p = 2$, это удалось сделать.

Теорема. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\mathfrak{M} = \{GL_2(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна $GL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

Исследование выполнено при поддержке РНФ проект 19-71-10017.

Список литературы

[1] Каргаполов М. И. Основы теории групп / Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. // М. Наука. 1982. 288 с.

[2] Шлепкин А. А. О группах Шункова, насыщенных полными линейными группами / Шлепкин А.А. // Сиб. матем. журн. 2016. N 1, Т. 57. С. 222–235.

[3] Сенашов В. И. Группы с условиями конечности / Сенашов В.И., Шунков В.П. // Новосибирск, 2001, изд. СО РАН.

[4] Череп А. А. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе / Череп А.А. // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, N 4. С. 518–521.

[5] Shlepkin A. K. On Certain Torsion Groups Saturated with Finite Simple Groups, Siberian Adv. Math., 9:2 (1999), 100–108.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru

О функции плотности группы

А. А. Шлепкин, С. С. Карчевский, И. М. Зубаренко

В теории групп «арифметическими» принято называть свойства группы, которые определяются ее числовыми параметрами: порядок группы и набор его простых делителей, порядки элементов, порядки подгрупп, степени неприводимых представлений, порядки классов сопряженности и т.д. В качестве арифметических свойств, позволяющих с точностью до изоморфизма определить конечную группу, предлагается использовать понятия минимальной системы образующих и функции плотности группы, введенные ниже.

Определение 1. Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ – группа с множеством образующих $\mathfrak{N} = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Через $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$, где l – целое неотрицательное число, будем обозначать фукцию роста группы G в множестве образующих $\mathfrak{N}$. Если $l > 0$, то $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ дает число элементов группы G, представимых в виде несократимого произведения не более, чем l элементов множества $\mathfrak{N}$. Если $l = 0$, то $F_{(G,\mathfrak{N})}(0) = 1$ (считается, что единица группы представима в виде несократимого произведения длины 0) [**1**, с. 102].

Определение 2. Функцию $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = F_{(G,\mathfrak{N})}(l) - F_{(G,\mathfrak{N})}(l-1)$ для $l > 0$, и $P_{(G,\mathfrak{N})}(0) = 1$ для $l = 0$, будем называть *фукцией плотности группы* G в множестве образующих $\mathfrak{N}$. Функция $P_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ для каждого целого неотрицательного l дает число элементов группы G, представимых в виде несократимого произведения l элементов множества $\mathfrak{N}$.

Вопрос А. Пусть G — группа с конечным множеством образующих $\mathfrak{N}$, H — группа с конечным множеством образующих $\mathfrak{M}$. В каких случаях из равенства $P_{(G,\mathfrak{N})} = P_{(H,\mathfrak{M})}$ вытекает изоорфизм $G \simeq H$?

Определение 3. Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ — группа с множеством образующих $\mathfrak{N} = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Множество $\mathfrak{N}$ будем называть *минимальным*, если для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ – $\langle \mathfrak{N} \setminus \{g_i\} \rangle \neq G$

Теорема 1. Пусть $A_8 = \langle \mathfrak{N} \rangle$, где $\mathfrak{N}$ — минимальное множество образующих, состоящее из двух элементов, G – конечная простая неабелева группа с множеством образующих $\mathfrak{M}$, и $P_{(A_8,\mathfrak{N})}(l) = P_{(G,\mathfrak{M})}(l)$. Тогда $G \simeq A_8$.

Теорема 2. Пусть $L_3(4) = \langle \mathfrak{N} \rangle$, где $\mathfrak{N}$ — минимальное множество образующих, состоящее из двух элементов, G – конечная простая неабелева группа с множеством образующих $\mathfrak{M}$, и $P_{(L_3(4),\mathfrak{N})}(l) = P_{(G,\mathfrak{M})}(l)$. Тогда $G \simeq L_3(4)$.

Исследование выполнено при поддержке РНФ проект 19-71-10017.

Список литературы

[1] Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А., Скорняков Л. А., Шестаков И. П., Общая алгебра, Наука, Москва, (1990), 592 с.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru

Классификация «автоморфно-нильпотентных» групп

В. О. Янковский

Известно, что последовательность классов нильпотентных групп ступени n можно задать с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\mathfrak{N}_n = \begin{cases} \{E\} & n = 0 \\ \{G \in \mathfrak{O} \setminus \{E\} | \frac{G}{Z(G)} \in \mathfrak{N}_{n-1}\} & n > 0 \end{cases}$$

где $\mathfrak{O}$ — класс всех групп, а $Z(G) = \{g \in G | \forall \phi \in Inn(G) \phi(g) = g\}$ — центр группы. Рассмотрим теперь классы «автоморфно-нильпотентных» групп ступени n, определение которых аналогично предыдущему с той лишь разницей, что автоморфизмы могут быть любыми, а не только внутренними:

$$\mathfrak{N}^n_{Aut} = \begin{cases} \{E\} & n = 0 \\ \{G \in \mathfrak{O} \setminus \{E\} | \frac{G}{Z_{Aut}(G)} \in \mathfrak{N}^{n-1}_{Aut}\} & n > 0 \end{cases}$$

где $\mathfrak{O}$ — класс всех групп, а $Z_{Aut}(G) = \{g \in G | \forall \phi \in Aut(G) \phi(g) = g\}$. Такая модификация определения сильно сужает наши классы, а именно имеет место утверждение:

$$G \in \mathfrak{N}^n_{Aut} \leftrightarrow G \cong C_{2^n}$$

МГУ им. Ломоносова, Москва
E-mail: vladimir_yankovskiy@mail.ru

Finite almost simple groups with exactly four conjugate classes of maximal subgroups

V. A. Belonogov

A finite group is called nM-group if it have exactly n conjugacy classes of maximal subgroups (n is a positive integer).

The study of these groups were started by G. Pazderski [**1**] for $n = 2$. In particular, he proved that $2M$-groups are biprimary. Finite $3M$-groups, solvable and nonsolvable, were described by the author in [**2**].

The investigation of the finite $4M$-groups was beginned in the paper [**3**]. Here we described the finite simple $4M$-groups and the finite nonsimple $4M$-groups having no normal maximal subgroups.

Thereupon in the paper [**4**] were considered the finite nonsolvable $4M$-groups G which have a normal subgroup of prime index p. Here the investigation of G reduces to the case, when

(*) G has the unique minimal normal subgroup $S = L_1 \times \cdots \times L_t$, where $L_1, \ldots, L_t$ are isomorphic simple nonabelian groups, p and t divide $|G/S|$ and G/S is a (solvable) 1M- or 2M-group.

Now we investigate $4M$-groups of type (*) for $t = 1$, i.e., nonsimple almost simple $4M$-groups.

Proposition. *Let G be a finite nonsimple almost simple $4M$-group with the socle S. Then S is isomorphic to $L_2(q)$ for some q.*

Note that G may be indicated precisely using [**5**].

References

[1] Pazderski G., Über maximal Untergruppen endlicher gruppen. Math. Nachr. 26 (1964) 307–319.

[2] Belonogov V. A., Finite groups with three classes of maximal subgroups. Mat. Sbornik 131 (1986) 225–239. (Angl. transl. in: Math. USSR-Sb., 59 (1988) 223–236.)

[3] Belonogov V. A., Finite groups with four classes of maximal subgroups. I. Tr. Inst. mat. mech. UrO RAN, 2017, V. 23, no. 4, 52–62.

[4] Belonogov V. A., Finite groups with four classes of maximal subgroups. II. Siberian Electr. Math. Rep. 15 (2018), 86–91.

[5] Belonogov V. A., Finite groups with four classes of maximal subgroups. Group theory and its applications: materials of XII school-conf. on group theory, dedicated to 65 anniversary of A. A. Makchnev. Krasnodar: Kubansky State University, 2018.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

Spectra of some almost simple groups

A. A. Buturlakin, M. A. Grechkoseeva

The set of orders of elements of a group G is called the spectrum of G. This work is a part of an ongoing study of the spectra of finite almost simple groups.

We use the standard plus/minus notation for linear and unitary groups, for example, we write $GL_n^+(q)$ and $GL_n^-(q)$ for $GL_n(q)$ and $GU_n(q)$ respectively. Extensions of the simple group $PSL_n^\varepsilon(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$, by diagonal automorphisms are exactly the subgroups of $PGL_n^\varepsilon(q)$ containing $PSL_n^\varepsilon(q)$. We consider a sligtly wider class of groups. Let H be the subgroup of $GL_n^\varepsilon(q)$ of index d_1 containing $SL_n^\varepsilon(q)$ and let Z be the subgroup of the center of H of order d_2. We describe the spectrum of the group $G(d_1,d_2)=H/Z$. When d_1 runs over the divisors of $(n, q-\varepsilon)$ and $d_2=q-\varepsilon$, the groups $G(d_1,d_2)$ are the desired almost simple groups.

Theorem. *The spectrum of $G(d_1,d_2)$ consists of the divisors of the following numbers.*

(1) $\frac{q^n-\varepsilon^n}{d_1d_2}$;

(2) $\frac{[q^{n_1}-\varepsilon^{n_1},q^{n_2}-\varepsilon^{n_2}]}{\left(d_1,d_2,\frac{n}{(n_1,n_2)}\right)}$ *for* $n_1,n_2>0$ *such that* $n_1+n_2=n$;

(3) $[q^{n_1}-\varepsilon^{n_1},q^{n_2}-\varepsilon^{n_2},\dots,q^{n_s}-\varepsilon^{n_s}]$ *for* $s\geqslant 3$ *and* $n_1,n_2,\dots,n_s>0$ *such that* $n_1+n_2+\dots+n_s=n$;

(4) $p^k\frac{q^{n_1}-\varepsilon^{n_1}}{(d_1,d_2n_1,n)}$ *for* $k,n_1>0$ *such that* $p^{k-1}+1+n_1=n$;

(5) $p^k[q^{n_1}-\varepsilon^{n_1},q^{n_2}-\varepsilon^{n_2},\dots,q^{n_s}-\varepsilon^{n_s}]$ *for* $s\geqslant 2$ *and* $k,n_1,n_2\dots,n_s>0$ *such that* $p^{k-1}+1+n_1+n_2+\dots+n_s=n$;

(6) $p^k\frac{(d_1,n)(q-\varepsilon)}{d_1d_2}$ *if* $p^{k-1}+1=n$ *for* $k>0$;

(7) $p\frac{(2,d_1)(q^2-1)}{d_1d_2}$ *if* $n=4$.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru, gma@math.nsc.ru

One-relator quotients of partially commutative groups

A. Duncan

We generalise a key result of one-relator group theory, namely Magnus's Freiheitssatz, to partially commutative groups, under sufficiently strong conditions on the relator. The main theorem shows that under our conditions, on an element r of a partially commutative group P, certain Magnus subgroups embed in the quotient $G = P/N(r)$; if $r = s^n$ has root s in P then the order of s in G is n, and under slightly stronger conditions the word problem of G is decidable. We also give conditions under which the question of which Magnus subgroups of P embed in G reduces to the same question in the minimal parabolic subgroup of P containing r. In certain cases this allows us to characterise Magnus subgroups which embed in G, via a condition on r and the commutation graph of P, and to find further examples of quotients G where the word and conjugacy problems are decidable. We give evidence that situations in which our main theorem applies are not uncommon, by proving that for cycle graphs with a chord C, almost all cyclically reduced elements of the partially commutative group $P(C)$ satisfy the conditions of the theorem.

This is a result of joint work with Arye Juhasz, Technion, Haifa.

Newcastle University, Newcastle (UK)
E-mail: andrew.duncan@newcastle.ac.uk

Finite simple groups $^2E_6(q)$ in which the subgroups of odd index are pronormal

A. S. Kondrat′ev, N. V. Maslova, D. O. Revin

According to Ph. Hall, a subgroup H of a group G is said to be *pronormal* in G if H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g\rangle$ for every $g \in G$. Some problems in combinatorics and permutation group theory were solved in terms of the pronormality. Obvious examples of pronormal subgroups are normal subgroups, maximal subgroups, and Sylow subgroups of finite groups; Sylow subgroups of proper normal subgroups of finite groups; Hall subgroups of finite solvable groups.

In [**1**], E. Vdovin and the third author proved that the Hall subgroups are pronormal in all finite simple groups and, basing on the analysis of the proof, they conjectured that the subgroups of odd index are pronormal in finite simple groups. The conjecture was verified for many families of finite simple groups in [**2**]. Namely, it was proved that the subgroups of odd index are pronormal in the following finite simple groups: A_n, where $n \geq 5$; sporadic groups; groups of Lie type over fields of characteristic 2; $PSL_{2^n}(q)$; $PSU_{2^n}(q)$; $PSp_{2n}(q)$, where $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$; $P\Omega_{2n+1}(q)$; $P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$; exceptional groups of Lie type not isomorphic to $E_6(q)$ or $^2E_6(q)$. In [**3, 4**], it was proved that the conjecture fails. Precisely, if $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ and $n \notin \{2^m, 2^m(2^{2k}+1) \mid m,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, then the finite simple symplectic group $PSp_{2n}(q)$ contains a non-pronormal subgroup of odd index. Moreover, in [**4, 5**] we received the complete classification of finite simple symplectic groups in which all the subgroups of odd index are pronormal.

In this talk, we discuss the following recently proved theorem.

Theorem. The subgroups of odd index are pronormal in the finite simple group $^2E_6(q)$ if and only if $q \not\equiv -1 \pmod{18}$.

The work is supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

References

[1] Vdovin E. P., Revin D. O., Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups // Siberian Math. J. 2012. Vol. 53, no. 3. P. 419–430.

[2] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On the pronormality of subgroups of odd indices in finite simple groups // Siberian Math. J. 2015. Vol. 56, no. 6. P. 1101–1107.

[3] Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O., A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 296, Suppl. 1. P. 1145–1150.

[4] Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O., On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple symplectic groups // Siberian Math. J. 2017. Vol. 58, no. 3. P. 467–475.

[5] Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O., On pronormal subgroups in finite simple groups // Doklady Mathematics. 2018. Vol. 98, no. 2. P. 405–408.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru, danila.revin@gmail.com

On the $\mathfrak{F}$-hypercenter of hereditary $\check{S}$-formations

V. I. Murashka

All groups considered here will be finite. Recall that a formation $\mathfrak{F}$ is called a formation with the Shemetkov property if all s-critical for $\mathfrak{F}$-groups are Schmidt groups or groups of prime order. A. N. Skiba [**1**] showed that every hereditary formation with the Shemetkov property in the universe of all soluble groups is saturated. There are examples of hereditary non-saturated formations with the Shemetkov property (see [**2**]). According to [**3**] every hereditary formation with the Shemetkov property is solubly saturated (composition, Baer-local).

Recall that a subgroup U of G is called $\mathfrak{X}$-*maximal* in G provided that (a) $U \in \mathfrak{X}$, and (b) if $U \leq V \leq G$ and $V \in \mathfrak{X}$, then $U = V$. The symbol $\mathrm{Int}_{\mathfrak{X}}(G)$ denotes the intersection of all $\mathfrak{X}$-maximal subgroups of G. A a chief factor H/K of G is called $\mathfrak{X}$-*central* in G provided $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$. The symbol $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ denotes the $\mathfrak{X}$-*hypercenter* of G, that is, the largest normal subgroup of G such that every chief factor H/K of G below it is $\mathfrak{X}$-central.

L. A. Shemetkov possed the following question on Gomel Algebraic seminar in 1995 "For what non-empty normally hereditary solubly saturated formations $\mathfrak{X}$ do the equality $\mathrm{Int}_{\mathfrak{X}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ hold for every group G?" The solution to this question for hereditary saturated formations was obtained by A. N. Skiba in [**4**] (for the soluble case, see also [**5**]) and for the class of all quasi-$\mathfrak{F}$-groups, where $\mathfrak{F}$ is a hereditary saturated formation, was given in [**6**]. In particular, the intersection of maximal quasinilpotent subgroups is the quasinilpotent hypercenter. Note that methods of [**4, 5**] don't very useful in cases of non-saturated or non-hereditary formations. Let $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ be a partition of the set of all primes $\mathbb{P}$ into mutually disjoint subsets. Recall that $\times_{i\in I}\mathfrak{G}_{\pi_i} = (G \mid \mathrm{O}_{\pi_i}(G)$ is a Hall π_i-subgroup of G for all $i \in I)$.

Theorem. *Let $\mathfrak{F} \neq (1)$ be a hereditary formation with the Shemetkov property. Then $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ holds for every group G if and only if there is a partition $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ of $\mathbb{P}$ into mutually disjoint subsets such that $\mathfrak{F} = \times_{i\in I}\mathfrak{G}_{\pi_i}$.*

References

[1] Skiba A. N. On a class of formations of finite groups. Dokl. AN. BSSR. 34(11) (1994), 982–985 (In Russian).

[2] Ballester-BoHnches A., Perez-Eamos M. D. Two questions of Shemetkov L. A. on critical groups. J. Algebra 179 (1996), 905-917.

[3] Kamornikov S. F. On two problems by L. A. Shemetkov. Sib. Math. J. 35(4) (1994), 713–721.

[4] Skiba A. N. On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group. J. Pure Appl. Algebra 216(4) (2012), 789–799.

[5] Beidleman J. C., Heineken H. A note of intersections of maximal $\mathfrak{F}$-subgroups. J. Algebra 333 (2010), 120–127.

[6] Murashka V. I. On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group. J. Group Theory 23(3) (2018), 463–473.

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel (Belarus)
E-mail: mvimath@yandex.ru

On the axiomatic rank of the Levi class generated by the quasivariety qH_p

S. A. Shakhova

For an arbitrary class $\mathcal{M}$ of groups, we denote by $L(\mathcal{M})$ a class of all groups G in which the normal closure $(a)^G$ of each element $a \in G$ belongs to $\mathcal{M}$. The class $L(\mathcal{M})$ is called a Levi class generated by $\mathcal{M}$. In [**1**], it was stated that if $\mathcal{M}$ is a quasivariety of groups, then $L(\mathcal{M})$ is also a quasivariety of groups. Levi classes of nilpotent quasivarieties of groups were treated in [**2**–**6**].

Denote by $\mathcal{N}_c$ the variety of nilpotent groups of class at most c, by $\mathcal{N}_{c,\infty}$ the quasivariety of torsion-free nilpotent groups of class at most c, by $\mathcal{N}_{c,p}$ the variety of nilpotent groups of class at most c and exponent p, and by $F_n(\mathcal{M})$ the free group of rank n in $\mathcal{M}$.

Consider groups having the following representations in $\mathcal{N}_2$:

$$H_p = gr(x, y \parallel [x, y]^p = 1),$$

$$H_{p^s} = gr(x, y \parallel x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1).$$

Quasivarieties $qF_2(\mathcal{N}_2)$, qH_{p^s} (except qH_{2^1}), qH_p, where p runs through the set of prime numbers, constitute an exhaustive list of almost Abelian quasivarieties of nilpotent groups.

In [**4**], it was proved that for any $p \neq 2$, the following equalities are true:

$$L(qF_2(\mathcal{N}_{2,p})) = \mathcal{N}_{3,p}, L(qF_2(\mathcal{N}_2)) = \mathcal{N}_{3,\infty}.$$

Levi classes $L(qH_p)(p \neq 2)$ were studied in [**5**], and Levi classes $L(qH_{p^s})(p \neq 2, s \geq 2)$, in [**6**]. All of these classes, as it turned out, are defined by systems of quasi-identities in infinite number of variables. In [**7**], it was shown that $L(qH_{p^s})(p \neq 2, s \geq 2)$ is finitely axiomatizable, i.e., it can be defined by a finite system of quasi-identities.

In the present paper, we state that the following theorem is true.

Theorem. *The axiomatic rank of the quasivariety $L(qH_p)(p \neq 2)$ is finite, i.e. it can be defined by a system of quasi-identities in finite number of variables.*

References

[1] Budkin A. I., Levi quasivarieties, Sib. Math. J., 40, No. 2, 225-228 (1999).

[2] Budkin A. I., Levi classes generated by nilpotent groups, Algebra and Logic, 39, No. 6, 363-369 (2000).

[3] Budkin A. I. and Taranina L. V., On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups, Sib. Math. J., 41, No. 2, 218-223 (2000).

[4] Lodeishchikova V. V., On Levi quasivarieties generated by nilpotent groups, Izv. Altai State Univ., No. 1(61), 26-29 (2009).

[5] Lodeishchikova V. V., The Levi classes generated by nilpotent groups, Sib. Math. J., 51, No. 6, 1075-1080 (2010).

[6] Lodeishchikova V. V., Levi quasivarieties of exponent p, Algebra and Logic, 50, No. 1, 17-28 (2011).

[7] Shakhova S. A., The axiomatic rank of Levi classes, Algebra and Logic, 57, No. 5, 381-394 (2018).

Altai State University, Barnaul
E-mail: sashakhova@gmail.com

On tuples of commuting unitary and symplectic groups over a finite field

U. B. Sharma

In this talk, I will speak about the enumeration of simultaneous conjugacy classes of tuples of commuting unitary matrices, and those of commuting symplectic matrices over a finite field of odd size. The evaluation of the number of simultaneous conjugacy classes is done with the help of branching rules, where for a given conjugacy class, we determine the the orbits for the conjugacy action of the centralizer of that class on itself. These orbits are called branches of that given conjugacy class. We determine the branching rules for 2×2 and 3×3 unitary groups, $U_2(\mathbf{F}_q)$ and $U_3(\mathbf{F}_q)$, and for 2×2 and 4×4 symplectic groups, $Sp_2(\mathbf{F}_q)$ and $Sp_4(\mathbf{F}_q)$. This is work done with Dr. Anupam Singh.

Indian Institute of Science Education and Research, Pune (India)
E-mail: udaybsharmaster@gmail.com

Finiteness of z-classes in reductive groups

A. Singh

Let G be a group. Two elements of G are said to be z-conjugate if their centralizers are conjugate in G. This is an equivalence relation and the equivalence classes are called z-classes. Clearly, conjugate elements are z-conjugate.

For a reductive group G over an algebraically closed field $\bar{k}$, Steinberg proved that the z-classes are finitely many (even though the conjugacy classes are infinitely many). It's not difficult to see that for GL_n over $\mathbb{Q}$ this is infinite. We prove that for a reductive group G defined over base field k, when k is a field of type (F), the z-classes are finitely many. This extends several already known results for classical groups.

Indian Institute of Science Education and Research, Pune (India)
E-mail: anupamk18@gmail.com

$\{2^n + 3^n\}$ is a T-sequence on $\mathbb{Z}$

S. V. Skresanov

A sequence $\{a_n\}$ of elements of a group G is called a *T-sequence* if there exists a Hausdorff group topology on G such that $\{a_n\}$ converges to zero [**1**]. We prove the following result.

Theorem. $\{2^n + 3^n\}$ is a T-sequence on $\mathbb{Z}$.

This settles in the affirmative question 15.79 posed by I.V. Protasov in the Kourovka notebook [**2**]. The proof uses a number-theoretic lemma on solutions of equations over S-units.

References

[1] Zelenyuk E. G, Protasov I. V., Topologies on abelian groups, Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1991, 37(2):445

[2] Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook, 19th ed., Inst. of Mathematics, SO RAN, Novosibirsk, 2018.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: s.skresanov@g.nsu.ru

On $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of finite groups

M. M. Sorokina

Considered only finite groups. Not listed designations and definitions can be found in [**1**]. Let $\mathfrak{E}$ be a class of all finite groups, $\mathfrak{F}$ be a non-empty subclass of $\mathfrak{E}$, ω be a non-empty set of primes. An $\mathfrak{F}$-subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroup of G if whenever $H \leq U \leq G$, V is a normal ω-subgroup of U such that $U/V \in \mathfrak{F}$ then $U = HV$ [**2**]. The definition of an $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroup is the generalization of Gaschütz's definition of an $\mathfrak{F}$-covering subgroup (see, for example, [**1**], p.280). Let π be a non-empty set of primes. Denote a class of all π-groups belonging to the class $\mathfrak{F}$ by $\mathfrak{F}_{\pi}$. Let $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ be classes of groups. Denote the class $\{G \mid G$ has a normal subgroup $N \in \mathfrak{F}_1$ with $G/N \in \mathfrak{F}_2\}$ by $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$.

In the following theorems we have studied the question on the relation between $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of a Hall π-subgroup of the group G and $(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}_{\pi})^{\omega}$-covering subgroups of G.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty homomorph, π be a non-empty set of primes, G be a finite group such that $G = A[B]$ where A is a Hall π-subgroup of G, B is a Hall π'-subgroup of G, $\pi(B) \subseteq \omega$, H is a subgroup of G included into A. Then H is an $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroup of A if and only if HB is an $(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}_{\pi})^{\omega}$-covering subgroup of G.*

Theorem 2. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty homomorph, π be a non-empty set of primes, G be a finite group such that $G = A \times B$ where A is a Hall π-subgroup of G, B is a Hall π'-subgroup of G, $\pi(B) \subseteq \omega$. Then any two $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of A are conjugate in A if and only if any two $(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F}_{\pi})^{\omega}$-covering subgroups of G are conjugate in G.*

Theorems 1 and 2 have extended the results of [**3**].

References

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin-New Jork: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Vedernikov V.A., Sorokina M.M. The $\mathfrak{F}$-projectors and $\mathfrak{F}$-covering subgroups of finite groups. Siberian Mathematical Journal. 2016. V. 57, N 6. P. 1224–1239.

[3] Sementovskiy V.G. The projectors of finite π-solvable groups // The subgroup structure of finite groups. – Minsk: Science and Technology, 1981. – P. 116–138.

Bryansk State University I.G. Petrovsky, Bryansk
E-mail: mmsorokina@yandex.ru

On inductance property of the lattice of multiply σ-local formations

N. N. Vorob′ev, I. I. Staselka, A. Hojagulyyev

All groups considered are finite. Let σ be a partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n; $\sigma(n)$ denotes the set $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n)\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ and $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.
Any function f of the form

$$f : \sigma \to \{\text{formations of groups}\},$$

is called a *formation σ-function*. Following [**1, 2**] we put

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)),$$

where $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ is the product of all normal σ_i'-closed subgroups of G. If for some formation σ-function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then we say that class $\mathfrak{F}$ is *σ-local* and f is a *σ-local definition of* $\mathfrak{F}$ (see [**1, 2**]). In 1986 A. N. Skiba proposed the following concept (see [**1, 4**]): every formation is supposed to be 0-*multiply σ-local*; for $n > 0$, we say that the formation $\mathfrak{F}$ is *n-multiply σ-local* provided either $\mathfrak{F} = (1)$ is the class of all identity groups or $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i)$ is $(n-1)$-multiply σ-local for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. In what follows Θ denotes a complete lattice of formations [**4**]. The collection of all n-multiply σ-local formations is a complete lattice by an inclusion $\subseteq$ (see [**1**, Theorem 1.20]).

If $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H} \in \Theta$, then $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ is the greatest lower bound for $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ in Θ. The symbol $\mathfrak{M} \vee_\Theta \mathfrak{H}$ denotes the least upper bound for $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ in Θ.

We denote by Θ^{σ_l} the collection of all formations having a σ-local Θ-valued definition. A complete lattice Θ^{σ_l} is called *inductive* (see [**1, 4**]) if for any collection $\{\mathfrak{F}_i = LF_\sigma(f_i) \mid i \in I\}$, where f_i is an integrated definition of $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\sigma_l}$, the following equality holds:

$$\vee_{\Theta^{\sigma_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\sigma(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)).$$

We proved the following

Theorem. *The lattice of all n-multiply σ-local formations l_n^σ is inductive.*

Corollary ([4]). *The lattice of all n-multiply local formations is inductive.*

References

[1] Zhang Chi, Safonov V. G., Skiba A. N., On n-multiply σ-local formations of finite groups, Comm. Algebra, 2018, https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875.

[2] Zhang Chi, Skiba A. N., On Σ_t^σ-closed classes of finite groups, Ukrainian Math. J., 70 (2018), no. 2, 1707-1716.

[3] Shemetkov L. A., Skiba A. N., Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups, Sib. Adv. Math.,10 (2000), no. 2, 112–141.

[4] Skiba A. N., Algebra of Formations, Belaruskaya Navuka, Minsk, 1997 (in Russian).

Department of Algebra and Didactics, Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus
E-mail: vornic2001@mail.ru, mars17906@mail.ru, nazar_96_nazar_96@mail.ru

Nilpotency of the soluble radical of a finite group isospectral to a simple group

N. Yang

We refer to the set of the orders of elements of a finite group as its spectrum and say that groups are isospectral if their spectra coincide. We show that the solvable radical of an unsolvable finite group isospectral to a finite simple group must be nilpotent.

School of Science, Jiangnan University, Wuxi, P. R. China
E-mail: yangny@jiangnan.edu.cn

VIII. Секция «Теория колец»

Линеаризация автоморфизмов и триангуляция дифференцирований свободных алгебр ранга 2

А. А. Алимбаев, А. С. Науразбекова, Д. Х. Козыбаев

В 1968 году Р. Ренчлер [**4**] доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются триангулируемыми. Аналог этого результата для алгебр Пуассона доказан в [**3**].

Пусть k – произвольное поле и пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное однородное многообразие алгебр над полем k. Многообразие $\mathfrak{M}$ назовем $\circ$-*многообразием*, если любая однопорожденная подалгебра двупорожденной свободной $\mathfrak{M}$-алгебры является свободной.

Заметим, что многообразия ассоциативно-коммутативных алгебр, ассоциативных алгебр, алгебр Пуассона, всех неассоциативных алгебр, коммутативных и антикоммутативных алгебр являются $\circ$-многообразиями.

Доказано, что многообразие правосимметричных алгебр также является $\circ$-многообразием. Мы показали, что группа ручных автоморфизмов двупорожденной свободной алгебры $\circ$-многообразия над полем допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Используя эту структуру, мы доказали линеаризуемость редуктивной группы автоморфизмов и триангулируемость локально-нильпотентных дифференцирований свободной правосимметричной алгебры ранга два в случае нулевой характеристики. Аналогичные результаты также верны для свободных ассоциативных, свободных неассоцитивных и свободных коммутативных алгебр ранга два.

Работа выполнена в рамках проекта AP05133009.

Список литературы

[1] Jung H.W.E., Uber ganze birationale Transformationen der Ebene. J. Reine Angew. Math. 184 (1942), 161–174.
[2] Kulk van der W., On polynomial rings in two variables. Nieuw Arch. Wiskunde. 1 (3) (1953), 33–41.
[3] Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U., Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables. J. Algebra. 322 (9) (2009), 3318–3330.
[4] Rentschler R., Operations du groure additif sur le plan. C.R.Acad.Sci.Paris. 267 (1968), 384-387.
[5] Kozybaev D., Makar-Limanov L., Umirbaev U., The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras. Asian-European Journal of Mathematics. 1 (2008), 243–254.

Институт математики и математического моделирования МОН РК; Костанайский государственный педагогический университет им. У. Султангазина; Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева.
E-mail: alialimbayev@gmail.com, altyngul.82@mail.ru, kozybayev@gmail.com

О характеризации нётеровости

А. Б. Верёвкин

Хейман Басс нашёл критерий нётеровости кольца A, указав её равносильность инъективности любых прямых сумм инъективных A–модулей ([**1**], [**2**, с. 157]). Его результат переносится на фильтрованные произведения. Прежде отметим, что если заданы фильтр $\mathcal{F}$ над $X \neq \emptyset$ и $\{M_A^{(x)},\ x \in X\}$ – семейство A–модулей, индексированных X, тогда существует каноническая сюръекция A–модулей:

$$\pi(\mathcal{F})\colon \prod_{x\in X} M_A^{(x)} \twoheadrightarrow \prod_{\mathcal{F}} M_A^{(x)}.$$

Следующее утверждение переформулирует результат Басса.

Лемма. *Пусть $\mathcal{F}_0$ – фильтр Фреше коконечных множеств в бесконечном X, тогда точна последовательность:*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{x\in X} M_A^{(x)} \longrightarrow \prod_{x\in X} M_A^{(x)} \xrightarrow{\pi(\mathcal{F}_0)} \prod_{\mathcal{F}_0} M_A^{(x)} \longrightarrow 0$$

Правая нётеровость кольца A эквивалентна расщепимости этой последовательности для любых семейств инъективных правых A–модулей $\{M_A^{(x)},\ x \in X\}$.

Стандартными средствами, восходящими к работе Басса, можно доказать обобщение этого результата.

Теорема. *Равносильны утверждения:*

- *кольцо A нётерово справа;*
- *для любого семейства $\{I_A^{(x)},\ x \in X\}$ – инъективных правых A–модулей и фильтра $\mathcal{F}$ на X следующая точная последовательность расщепляется*

$$0 \longrightarrow \ker\big(\pi(\mathcal{F})\big)_A \longrightarrow \prod_{x\in X} I_A^{(x)} \xrightarrow{\pi(\mathcal{F})} \prod_{\mathcal{F}} I_A^{(x)} \longrightarrow 0$$

Следствие. *Если кольцо A – правонётерово, тогда любое фильтрованное произведение инъективных правых A–модулей – инъективно.*

Список литературы

[1] Chase S.U. Direct products of modules // Trans. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 97, pp. 457–473.

[2] Каш Ф. *Модули и кольца*,– М.: Мир, 1981.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

E-mail: abverevkin@gmail.com

Двумерные тернарные композиционные алгебры

А. Т. Гайнов

В работе вводится в рассмотрение новый класс алгебр: тернарные композиционные алгебры; для краткости, назовем их ТК-алгебрами.

Определение. Алгебру A над полем F, $char \neq 2$, назовём *тернарной композиционной алгеброй*, если на ней задана невырожденная симметрическая билинейная форма $n(x,y)$, удовлетворяющая равенству $n(xy,zt) = n(x,y) \cdot n(z,t)$ для всех $x,y,z,t \in A$.

Композиционные алгебры и монокомпозиционные алгебры являются ТК-алгебрами. Класс ТК-алгебр значительно шире класса монокомпозиционных алгебр. ТК-алгебры существуют любой конечной размерности, а также существуют бесконечномерные ТК-алгебры. В работе найдены все двумерные ТК-алгебры над полем R вещественных чисел: это 12 алгебр и одно бесконечное семейство.

Для всех алгебр имеем равенства: $e_1e_2 = 0$; $e_2e_1 = 0$.

Случай 1.

$bas\ A = \{e_1; e_2\}$; $n(e_1,e_1) = +1$; $n(e_2,e_2) = +1$; $n(e_1,e_2) = 0$.

$e_2e_2 = e_1e_1$.

Алгебра $A^{(1)}$: $e_1e_1 = +e_1$.

Алгебра $A^{(2)}$: $e_1e_1 = -e_1$.

Алгебра $A^{(3)}$: $e_1e_1 = +e_2$.

Алгебра $A^{(4)}$: $e_1e_1 = -e_2$.

Семейство $A^{(5)}$: 4 алгебры

$$e_1e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}} \cdot e_1 + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \cdot e_2; \quad (\varepsilon_1; \varepsilon_2 = \pm 1)$$

Семейство $A^{(6)}$: 4 алгебры

$$e_1e_1 = \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon_1}{2} \cdot e_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} \cdot e_2; \quad (\varepsilon_1; \varepsilon_2 = \pm 1)$$

Случай 2.

$bas\ A = \{e_1; e_2\}$; $n(e_1,e_1) = +1$; $n(e_2,e_2) = -1$; $n(e_1,e_2) = 0$.

$e_1e_2 = e_2e_1$.

Семейство $A^{(7)}$: бесконечное семейство

$e_1e_2 = 0$; $e_2e_1 = 0$;

$e_1e_1 = \alpha_{11}e_1 + \beta_{11}e_2$;

$e_2e_2 = \alpha_{22}e_1 + [-\beta_{11} + \varepsilon \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \cdot e_2$;

$\varepsilon = \pm 1$; $(\forall \beta_{11}, \alpha_{11}, \alpha_{22} \in R)$

При $\alpha_{11} = +1$, $\beta_{11} = 0$, $\varepsilon = +1$, $\alpha_{22} = -1$ — поле комплексных чисел.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: gainov@math.nsc.ru

Операторы Роты — Бакстера и решения классического уравнения Янга — Бакстера на конечномерных квадратичных алгебрах Ли

М. Е. Гончаров

Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики не равной 2 и 3 и ω — невырожденная билинейная ассоциативная форма на L. Пару (L,ω) будем называть квадратичной алгеброй Ли.

Линейное отображение $R : L \to L$ называется оператором Роты — Бакстера веса λ, если для любых $a, b \in L$:

$$[R(a), R(b)] = R([R(a), b] + [a, R(b)] + \lambda[a, b]).$$

Элемент $r = \sum a_i \otimes b_i \in L \otimes L$ является решением классического уравнения Янга — Бакстера, если

$$\sum_{i,j}[a_i, a_j] \otimes b_i \otimes b_j - a_i \otimes [a_j, b_i] \otimes b_j + a_i \otimes a_j \otimes [b_i b_j] = 0. \tag{1}$$

Пусть (L,ω) — квадратичная алгебра Ли, $r = \sum a_i \otimes b_i \in L \otimes L$. В работах [**1, 2**] была показано, элемент r является кососимметрическим (то есть $\tau(r) = -r$, где τ — морфизм перестановки) решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда оператор R, действующий по правилу

$$R(a) = \sum \omega(b_i, a)a_i, \tag{2}$$

является кососимметрическим оператором Роты — Бакстера веса 0.

Для не кососимметрических решений уравнения (1) известно, что если L — простая алгебра Ли и r — решение (1) такое, что $r + \tau(r)$ является L-инвариантным элементом, то найдется такая ассоциативная невырожденная билинейная форма ω на L, что оператор R, определенный как в (2) является оператором Роты — Бакстера ненулевого веса λ, удовлетворяющий $R + R^* + \lambda id = 0$, где R^* — сопряженный к R относительно формы ω оператор.

В данной работе изучается связь между решениями уравнения (1) и операторами Роты — Бакстера (разных весов) на произвольной конечномерной квадратичной алгебре Ли (L,ω).

Список литературы

[1] Белавин А. А., Дринфельд В. Г., О решениях классического уравнения Янга — Бакстера для простых алгебр Ли // Функц. анализ и его прил., т. 16, вып. 3(1982), 1–29.

[2] Семенов-Тян-Шанский М. А., Что такое классическая r-матрица, Функц. анализ и его прил., 17:4 (1983), 17–33.

[3] Goncharov M. E. On Rota-Baxter operators of non-zero weight arisen from the solutions of the classical Yang–Baxter equation, Sib. El. Math. Rep., 14 (2017) 1533–1544.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: gme@math.nsc.ru

Оценка коразмерностей в относительно свободной лиево нильпотентной алгебре $F^{(9)}$

А. В. Гришин

Пусть $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_n, \ldots\rangle$ — свободная счетнопорождённая унитарная ассоциативная алгебра над полем k характеристики $\neq 2, 3$, $T^{(l)}$ — T-идеал алгебры F, порождённый длинным коммутатором $[x_1, \ldots, x_l]$, и $F^{(l)} = F/T^{(l)}$ — относительно свободная лиево нильпотентная алгебра индекса l. Пусть, далее, M_n — подпространство алгебры $F^{(l)}$, состоящее из полилинейных многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и P_n — подпространство в M_n, состоящее из собственных полилинейных многочленов.

Скажем, что функция $f(x)$ *мажорирует* функцию $g(x)$, если для некоторого числа $\gamma > 0$ и для всех достаточно больших x имеем $f(x) > \gamma g(x)$. Обозначение: $f(x) \succ g(x)$. Если $f(x) \succ g(x)$ и $g(x) \succ f(x)$ одновременно, то будем говорить, что $f(x)$ и $g(x)$ *функции одного порядка роста*. Обозначение $f(x) \asymp g(x)$. Для алгебр $F^{(5)}$ и $F^{(7)}$ в [1] и [2] доказано, что $\dim M_n \asymp 2^n n^{2m}$ и $\dim P_n \asymp n^{2m}$, где $l = 2m + 3$, $m = 1$ и 2 соответственно.

Теорема 1. *Для любой алгебры $F^{(2m+3)}$ имеют место соотношения* $\dim M_n \succ 2^n n^{2m}$, $\dim P_n \succ n^{2m}$.

Теорема 2. *Для алгебры $F^{(9)}$ имеют место соотношения* $\dim M_n \asymp 2^n n^6$, $\dim P_n \asymp n^6$.

Доказательство основано на применении так называемой *расширенной алгебры Грассмана* (см. [3], [4]).

Список литературы

[1] Гришин А. В. Об аддитивной структуре и асимптотике коразмерностей c_n в алгебре $F^{(5)}$. Фундам. и прикл. матем., 21:1 (2016), 93–104.

[2] Гришин А. В. Об асимптотике коразмерностей c_n в алгебре $F^{(7)}$. Матем. заметки, 104:1 (2018), 25–32.

[3] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности. Матем. сб., 206:11 (2015), 113–130.

[4] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6. Матем. сб., 207:12 (2016), 54–72.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Уточнение теоремы Блока о дифференциально простых алгебрах

В. Н. Желябин

В работе строятся примеры дифференциально простых алгебр над полем комплексных чисел, которые не представляются в указанном в теореме Блока [1] виде.

Пусть C — поле комплексных чисел и $C[x_0, \ldots, x_n]$ — алгебра полиномов от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Положим

$$D_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \ldots, \ D_n = x_n \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Пусть $C\Lambda(n)$ — факторалгебра алгебры $C[x_0, \ldots, x_n]$ по идеалу, порожденному многочленом $x_0^2 + \ldots + x_n^2 - 1$. Дифференцирования $D_1, \ldots, D_n$ индуцируют дифференцирования алгебры $C\Lambda(n)$, которые мы также обозначим через $D_1, \ldots, D_n$. Отождествим образы переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ при гомоморфизме $C[x_0, \ldots, x_n] \mapsto C\Lambda(n)$ с $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Подалгебра $C\Lambda(n)_0$ в $C\Lambda(n)$, порожденная элементами $1, x_1^2, \ldots, x_n^2, x_i x_j$, $i, j = 0, \ldots, n, i \neq j$ дифференциально проста относительно дифференцирований D_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $C\Lambda(n)_1 = C\Lambda(n)_0 x_0 + \ldots + C\Lambda(n)_0 x_n$. Тогда $C\Lambda(n) = C\Lambda(n)_0 + C\Lambda(n)_1$ — Z_2-градуированная алгебра и $C\Lambda(n)_1$ — проективный $C\Lambda(n)_0$-модуль ранга 1.

Пусть теперь $A = A_0 \oplus A_1$ — Z_2-градуированная алгебра над полем C. Подалгебру $C\Lambda(n)(A) = C\Lambda(n)_0 \otimes A_0 \oplus C\Lambda(n)_1 \otimes A_1$, в тензорном произведении $C\Lambda(n) \otimes A$ алгебр над полем C, назовем $C\Lambda(n)$-*оболочкой* алгебры A.

Теорема. *Пусть A — центральная простая конечномерная ассоциативная, альтернативная, йорданова, лиева алгебра или алгебра Мальцева над полем комплексных чисел C, отличная от C. Тогда A допускает Z_2-градуировку. Для любой Z_2-градуировки алгебры A ее $C\Lambda(n)$-оболочка $C\Lambda(n)(A)$ дифференциально проста относительно множества дифференцирований $\mathfrak{D} = \{D_1 \otimes id, \ldots, D_n \otimes id\}$. Алгебра $C\Lambda(n)(A)$ — конечно-порожденный проективный модуль над своим центроидом, который изоморфен $C\Lambda(n)_0$. Если $[\frac{n}{2}] \geq \dim A$, то $C\Lambda(n)(A)$ — несвободный $C\Lambda(n)_0$-модуль.*

В случае поля вещественных чисел аналог этой теоремы доказан в [2].

Список литературы

[1] Block R. E., Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal // Ann. of Math. 1969. Vol. 90, no. 3, P. 433–459.

[2] Желябин В. Н., Попов А. А., Шестаков И. П., Координатное кольцо n-мерной сферы и некоторые примеры дифференциально простых алгебр // Алгебра и логика, 2013, Vol. 52, no. 4, С. 416-434; The coordinate ring of an n-dimensional sphere and some examples of differentially simple algebras // Algebra and Logic, 2013, Vol. 52, no. 4, P. 277-289.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru

О супералгебрах Гельфанда — Дорфман — Новикова — Пуассона

А. С. Захаров

Алгебры Гельфанда–Дорфман–Новикова ($\mathcal{GDN}$–алгебры) были введены в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [**2**] и в работе А. А. Балинского и С. П. Новикова [**3**]. В литературе встречалось название алгебр Новикова, Л. А. Бокуть и Е. И. Зельманов предложили добавить фамилии И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман к названию ввиду того, что их работа была раньше. К. Ксу [**1**] ввел понятие алгебр Гельфанда — Дорфман — Новикова — Пуассона ($\mathcal{GDNP}$–алгебры) для изучения простых $\mathcal{GDN}$–алгебр. Были обобщены результаты работ [**4**],[**5**] для $\mathcal{GDNP}$–супералгебр.

Скажем, что $\langle A, \circ\rangle$ — $\mathcal{GDN}$–супералгебра, если для однородных элементов имеют места тождества

$$(x\circ y)\circ z = (-1)^{|y||z|}(x\circ z)\circ y; \quad (x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z) = (-1)^{|x||y|}\Big((y\circ x)\circ z - y\circ(x\circ z)\Big).$$

Супералгебра $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ является обобщенной супералгеброй Гельфанда — Дорфман — Новикова — Пуассона ($g\mathcal{GDNP}$–супералгеброй), если

$$xy\circ z = x(y\circ z); \quad (-1)^{|y||z|}xz\circ y - x\circ yz = (-1)^{|x||y|+|x||z|}yz\circ x - (-1)^{|x||y|}y\circ xz.$$

Супералгебра $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ является $\mathcal{GDNP}$–супералгеброй, если $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра и $\langle A, \circ\rangle$ — $\mathcal{GDN}$–супералгебра.

Теорема. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра и x не делитель нуля в $\langle A, \cdot\rangle$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ вложима в $\mathcal{GDNP}$–супералгебру векторного типа и, в частности, сама является $\mathcal{GDNP}$–супералгеброй.* Для $g\mathcal{GDNP}$–супералгебры положим

$$\{a, b\} = a\circ b - (-1)^{|a||b|}b\circ a.$$

Тогда дубль Кантора для этой скобки обозначим $J(A, \{\,,\})$.

Теорема. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$-супералгебра. Тогда $J(A, \{\,,\})$ — специальная йорданова супералгебра.*

Список литературы

[1] Xu X, Novikov-Poisson algebra, J. Algebra, 190:2 (1997), 253–279.

[2] Gel'fand I. M., Dorfman I. Ya., Hamiltonian operators and algebraic structures related to them., Funktsional. Anal. i Prilozhen, 13:4 (1979), 13–30.

[3] Balinskii A. A., Novikov S. P., Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 283:5 (1985), 1036–1039.

[4] Захаров А. С., Вложение алгебр Новикова–Пуассона в алгебры Новикова-Пуассона векторного типа, Алгебра и логика, 52:3 (2013), 352–369.

[5] Желябин В. Н., Захаров А. С., Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова-Пуассона, Мат. заметки, 97:3 (2015), 359–367.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
Новосибирский Государственный Технический Университет, Новосибирск
E-mail: Antzakh@gmail.com

Локальные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов

И. Н. Зотов

Локальным автоморфизмом произвольной K-алгебры A называют автоморфизм K-модуля A, действующий на каждый элемент $\alpha \in A$ как некоторый автоморфизм алгебры A, вообще говоря, зависящий от выбора α. Локальные автоморфизмы алгебр систематически изучаются с 90-х годов, [**1**], [**2**]. Множество всех локальных автоморфизмов произвольной алгебры A обозначаем через $Laut\ A$. Относительно композиции они образуют группу, [**3**]. Тривиальные локальные автоморфизмы дают автоморфизмы алгебры.

Пусть K – ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. В [**3**] и [**4**] исследуются локальные автоморфизмы алгебры $NT(n,K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K и ассоциированной алгебры Ли; они описаны при $n = 3$ и, когда поле, $n = 4$. В [**5**] исследуются локальные автоморфизмы простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_\mathfrak{n}$ над полем нулевой характеристики.

Алгебру Шевалле над K ассоциируют с каждой неразложимой системой корней Φ евклидова пространства и характеризуют базой Шевалле, включающей порождающие элементы e_r $(r \in \Phi)$ [**6**, § 4.4]. Зафиксируем базу Π в Φ; система положительных корней $\Phi^+ \supseteq \Pi$ в Φ единственна [**6**]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем нильтреугольной.

Исследуется задача описания локальных автоморфизмов нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле над K, ассоциированной с системой корней Φ. Справедлива

Теорема. *В алгебре Ли $N\Phi(K)$ классического типа ранга > 4 идеал L_2 является $Laut\ N\Phi(K)$-инвариантным, а всякий локальный автоморфизм действует по модулю L_2 как её подходящий автоморфизм.*

Список литературы

[1] Larson D.R., Sourour A.R., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$, Proc. Sympos. Pure Math., 51 (1990), 187–194.

[2] Crist R., Local automorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 1409–1414.

[3] Елисова А.П., Зотов И.Н., Левчук В.М., Сулейманова Г.С., Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных матричных алгебр, Изв. ИГУ. «Серия Математика», 4 (2011), N. 1, 9–19.

[4] Елисова А.П., Локальные автоморфизмы нильпотентных алгебр матриц малых порядков, Изв. вузов. Матем., 57 (2013), N. 2, 40–48.

[5] Becker T., Escobar Salsedo J., Salas C., Turdibaev R., On local automorphisms of $\mathfrak{sl}_\mathfrak{n}$, arXiv:1711.11297, 2018.

[6] Carter R.W., Simple groups of Lie type, New York: Wiley and Sons, 1972.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: zotovin@rambler.ru

Теоремы конечности для градуированных коалгебр, комодулей и алгебр Хопфа

С. Г. Казаков

В классической алгебраической геометрии имеет место утверждение: *любая алгебраическая групповая аффинная схема* $G\colon \mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Gr}$ *над полем* $\Bbbk$ *изоморфна замкнутой подгруппе аффинной групповой схемы* GL_n *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$ [**1**, §3.4]. Для его доказательства используются т. н. *теоремы конечности* [**1**, §3.3].

Аналогичные утверждения можно сформулировать и доказать для случая Γ-градуированных алгебр и (Γ,λ)-коммутативных алгебр, где Γ – абелева группа, а λ – коммутационный фактор на Γ и $\Bbbk$ [**3, 4**].

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{C} = \langle C, \Delta, \varepsilon\rangle$ – Γ*-градуированная* $\Bbbk$*-коалгебра. Любое конечное подмножество* M *правого* Γ*-градуированного* $\mathfrak{C}$*-комодуля* $\mathfrak{V} = \langle V, \rho\rangle$ *лежит в конечномерном градуированном подкомодуле.*

Теорема 2. *Любое конечное подмножество* M Γ*-градуированной* $\Bbbk$*-коалгебры* $\mathfrak{C} = \langle C, \Delta, \varepsilon\rangle$ *лежит в её конечномерной* Γ*-градуированной подкоалгебре.*

Теорема 3. *Любое конечное подмножество* M (Γ,λ)*-коммутативная* $\Bbbk$*-алгебры Хопфа* $\mathfrak{H} = \langle H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S\rangle$ *лежит в её конечнопорождённой подалгебре Хопфа.*

В случае градуированных алгебр, для любых $n \in \mathbb{N}$, конечнопорождённой абелевой группы Γ и набора $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \Gamma$ можно определить функтор [**4**]:

$$GL_n^0(\boldsymbol{\nu}, -)\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set},$$

ставящий в соответствие каждой (Γ,λ)-коммутативной $\Bbbk$-алгебре $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, множество всех обратимых матриц $M = (a_{ij})_{i,\,j=1,\ldots,n}$ степени 0 с элементами из A, т. е. таких, что $a_{ij} \in A_{\nu_j - \nu_i}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Этот функтор групповой: $GL_n^0(\boldsymbol{\nu}, -)\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Gr}$ и в случае, когда $\Bbbk$ – поле характеристики 0, он представим (Γ,λ)-коммутативной $\Bbbk$-алгеброй [**4**], т. е. является групповой аффинной (Γ,λ)-схемой [**2**].

Теорема 4. *Любая алгебраическая групповая аффинная* (Γ,λ)*-схема*

$$G\colon (\Gamma,\lambda)\text{-}\mathsf{Alg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Gr}$$

над полем $\Bbbk$ *характеристики 0 изоморфна замкнутой подсхеме схемы* $GL_n^0(\boldsymbol{\nu}, -)$ *для некоторых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \Gamma$.

Список литературы

[1] Waterhouse W. C., Introduction to affine group schemes. NY: Springer-Verlag, 1979.

[2] Казаков С. Г., Групповые аффинные (Γ,λ)-схемы и (Γ,λ)-коммутативные алгебры Хопфа // Инф. бюлл. Омского НОЦ ОмГТУ и ИМ СО РАН в обл. матем. и инфор., 2:1 (2018), 34–37.

[3] Scheunert M., Generalized Lie algebra // J. of Mathematical Physics, **20**:4 (1979), 712–720.

[4] Covolo T., Michel J.-P., Determinants over graded-commutative algebras. A categorical viewpoint // L'Enseignement Mathématique, 62:2 (2016), 361–420.

Омский государственный технический университет, Омск
E-mail: kazakovsg@gmail.com

О минимальных ненулевых L-многообразиях векторных пространств над полем из двух элементов

А. В. Кислицин

Пусть F — некоторое поле, E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (говорят, что E вложено в алгебру A). Тождеством векторного пространства E назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E. В этом случае также говорят о тождествах пары (A, E)

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства E, будем называть L-многообразием, порожденным пространством E, и обозначать $\mathrm{Var}_L E$. L-многообразие $\mathcal{M}$ назовем минимальным ненулевым L-многообразием (относительно включения) или атомом, если для любого L-многообразия $\mathcal{N}$ из включения $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ следует, что либо $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{N}$ — нулевое L-многообразие.

А. Тарский показал, что атомы в классе колец порождаются либо простым полем $GF(p)$, либо кольцом с нулевым умножением [**1**]. Автором частично исследовано строение атомов в классе L-многообразий векторных пространств над произвольным полем. А именно, описаны атомы в случае бесконечного поля, найдены атомы над конечным полем. Указано, что L-многообразие $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L\langle [x,y] = 0, x^4 = x, x^2y = xy^2, x^3+x^2+x = 0\rangle$ является атомом в классе L-многообразий векторных пространств над полем $GF(2)$, причем многообразие $GF(2)$-алгебр, заданное тождествами $\mathcal{M}$, атомом не является [**2**]. Настоящая работа посвящена поиску атомов в классе L-многообразий над полем $GF(2)$.

Теорема 1. *В классе L-многообразий векторных пространств над полем $GF(2)$ существует бесконечное число атомов вида*

$$\mathcal{M}_k = \mathrm{Var}_L\langle [x,y] = 0, x^{2^k} = x, x^2y = xy^2, x^{2^k-1} + x^{2^k-2} + \cdots + x = 0\rangle,$$

где $k = 2, 3, \ldots$.

В частности, найденный ранее атом $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L\langle [x,y] = 0, x^4 = x, x^2y = xy^2, x^3 + x^2 + x = 0\rangle$ совпадает с $\mathcal{M}_2$.

Теорема 2. *$\mathcal{M}_k = \mathrm{Var}_L(GF(2^k), \langle a\rangle)$, где $\langle a\rangle$ — одномерное векторное пространство над полем $GF(2)$, a — порождающий элемент $GF(2)$-алгебры $GF(2^k)$, $k = 2, 3, \ldots$.*

Список литературы

[1] Tarski A. Equationally complete rings and relation algebras // Proc. Konninkl. Akad. Wetensch. 1956. Vol. 59. N 1. pp. 39–46.

[2] Кислицин А. В. О минимальных ненулевых L-многообразиях векторных пространств [Электронный ресурс] // Тезисы докладов международной конференции «Мальцевские чтения». 2018. pp. 154. Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/18/maltsev18.pdf

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: kislitsin@altspu.ru

Однородные факторно делимые абелевы TI-группы

Е. И. Компанцева, Т. К. Ч. Нгуен

Согласно [**1**], подкольцо A ассоциативного кольца R называется метаидеалом индекса n, если существует такой ряд $A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = R$, что A_i является идеалом A_{i+1} для всех $i = 0, \cdots, n-1$. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Изучение филиальных колец посвящены работы Г. Эрлича, А. Санда, М. Филиповича, А. Анрушкевича и др. Абелева группа G называется TI-группой, если любое ассоциативное кольцо с аддитивной группой G филиально. Понятие TI-группы было введено в [**2**], там же описаны периодические TI-группы.

В настоящей работе описаны TI-группы в классе вполне разложимых однородных факторно делимых абелевых групп. Абелева группа G называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что G/F – делимая периодическая группа. Факторно делимые абелевы группы без кручения были введены в [**3**], а в [**4**] понятие факторно делимой группы было обобщено на смешанные абелевы группы. Согласно [**5**], смешанная факторно делимая группа G называется вполне разложимой, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. Если все эти факторно делимые группы ранга 1 изоморфны между собой, то есть определяются одной и той же кохарактеристикой χ, то группа G называется однородной вполне разложимой факторно делимой группой кохарактеристики χ. Таким образом, однородная вполне разложимая факторно делимая группа G полностью определяется своим рангом без кручения n и кохарактеристикой $cochar(G)$.

Теорема. *Пусть G – вполне разложимая однородная факторно делимая абелева группа $cochar(G) = (m_p)_{p \in \mathbb{P}}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Группа G является TI-группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ и в $cochar(G)$ нет целых чител $m_p > 1$.*

Список литературы

[1] Baer R. Meta ideals. Report conf. linear algebras. June 1956 // Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Counil. 1957. N 502. P. 33–52.

[2] Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33–41.

[3] Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math., 5 (1961). P. 61–98.

[4] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126, N 1, P. 45–52.

[5] Гордеева Е. В., Фомин А. А. Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы // Чебышевский сборник. 2018. Vol. 19. N 2. С. 376–387.

Финансовый университет при Правительстве РФ, МПГУ, Москва
E-mail: kompantseva@yandex.ru, trangnguyen.ru@gmail.com

О решеточных изоморфизмах конечных колец

С. С. Коробков

Пусть R и R^φ — ассоциативные кольца с изоморфными решётками подколец $L(R)$ и $L(R^\varphi)$ соответственно. Изоморфизм φ решётки $L(R)$ на решётку $L(R^\varphi)$ будем называть *решточным изоморфизмом* кольца R на кольцо R^φ. Под p-кольцом (p — простое число) будем понимать кольцо, аддитивная группа которого является p-группой.

Изучение решёточных изоморфизмов конечных ненильпотентных колец было начато в работах [**1**]–[**4**]. Дальнейшие исследования связаны с локальными и полулокальными кольцами. О проведённых исследованиях сообщалось в [**5**] и [**6**]. Следующим шагом является переход к общему случаю. Основанием для такого шага является структурная теорема о конечных кольцах с единицей:

Теорема 1. ([**7**, Теорема 5.IV.])*Если R — конечное кольцо с единицей, то $R = R_1 \dotplus \cdots \dotplus R_n \dotplus N$ (групповая прямая сумма), где $R_i = M_{n_i}(K_i)$ — полулокальное подкольцо кольца R ($i = \overline{1,n}$), $(N,+)$ — подгруппа группы $(\mathrm{Rad}\, R,+)$, и выполнены соотношения: $R_i^2 = R_i$, $R_iR_j = \{0\}$ при $i \neq j$, $R_iN \subset N$, $NR_i \subset N$ и $N^2 \subset \mathrm{Rad}\, R_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{Rad}\, R_n \dotplus N = \mathrm{Rad}\, R$.*

С использованием результатов, полученных в упомянутых выше работах [**1**]– [**6**], доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть конечное p-кольцо R с единицей представимо в виде: $R = S \dotplus N$, где $S = R_1 \oplus \cdots \oplus R_k$, $R_i = M_{n_i}(K_i)$, $n_i > 1$, K_i — локальное кольцо ($i = \overline{1,k}$), N — (S,S)-модуль из $\mathrm{Rad}\, R$. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда R^φ — p-кольцо и при этом $R^\varphi = S^\varphi + N'$, где $S^\varphi = R_1^\varphi \oplus \cdots \oplus R_k^\varphi$, $R_i^\varphi = M_{n_i}(K_i')$, K_i' — локальное кольцо ($i = \overline{1,k}$), N' — нильпотентное подкольцо из R^φ.*

Список литературы

[1] Коробков С. С., Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов, Изв. Урал. гос. ун-та, 2002, N 22, Матем. и механ., Вып. 4, 81–93.

[2] Коробков С. С., Проектирования колец Галуа, Алгебра и логика, 54, N 1 (2015), 16–33.

[3] Коробков С. С., Проектирования конечных однопорождённых колец с единицей, Алгебра и логика, 55, N 2 (2016), 192–218.

[4] Коробков С. С., Проектирования конечных коммутативных колец с единицей. Алгебра и логика, 57, N 3 (2018), 285–305.

[5] Коробков С. С., Проектирования конечных локальных колец // Международная конференция «Мальцевские чтения-18»: тезисы докладов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 19–22 ноября 2018 г.) — Новосибирск, 2018. С. 155.

[6] Коробков С. С., Проектирования полулокальных колец // Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (г. Казань, 24-28 июня, 2019). Казань: КФУ, 2019. С. 130–131.

[7] Елизаров В. П. Конечные кольца. Основы теории, Гелиос, М., 2006.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

Об ортогонально полных кольцах

В. В. Лобачевский

При изучении полупервичных колец часто удобно свести задачу к случаю первичных колец. Однако факторизация по первичному идеалу не всегда позволяет осуществить переход, поэтому был разработан метод ортогональной полноты [**1**].

Для ассоциативного полупервичного кольца R с единицей определим: $Q(R)$ — его полное правое кольцо частных, $C(R)$ — центр кольца $Q(R)$ (*расширенный центроид* кольца R), $B(R)$ — булево кольцо идемпотентов кольца $C(R)$ со сложением $a \oplus b = a + b - 2ab$. Известно, что $B(R)$ — полная булева алгебра.

Мы исследуем связь между строением ортогонально полного кольца R и булевой алгебры $B(R)$.

Теорема. *Пусть R — полупервичное ортогонально полное кольцо, A — множество атомов алгебры $B(R)$, $b = \bigvee A$. Тогда кольцо bR есть прямое произведение первичных колец aR, $a \in A$, $B(bR) \cong 2^A$, алгебра $B((1-b)R)$ безатомна.*

Следствие. *Пусть R — ортогонально полное кольцо. Тогда алгебра $B(R)$ атомна, если и только если R есть прямое произведение первичных колец.*

Теорема. *Пусть R — ортогонально полное кольцо и алгебра $B(R)$ безатомна. Тогда:*

(1) *существует разложение $R = R_1 \times R_2$;*
(2) *для любого разложения $R = \prod_{i \in I} R_i$ все $B(R_i)$ безатомны.*

Мы также обсудим различные подходы к ортогональной полноте [**2**] и [**3**] и установим связь между ними.

Теорема. *Пусть $B(R)$ — атомная булева алгебра, $n \in \mathbb{N}$, $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in R^n$, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная формула от n свободных переменных. Тогда*

$$\|\phi(r_1, \ldots, r_n)\| = E(\phi(\vec{r}))$$

Список литературы

[1] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи математических наук, 1985, т. 40, вып. 6, с. 79–115.

[2] Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with generalized identities. M. Dekker, 1995.

[3] Chuang C.-L. Boolean valued models and semiprime rings. Proc. of the International Conference of Algebra in Memory of Prof. K. I. Beidar, p. 23–53, 2005.

Московский государственный университет, Москва
E-mail: numzer0@yandex.ru

Центральные порядки в простых конечномерных йордановых супералгебрах

А. С. Панасенко

Изучение первичных алгебр в любом многообразии тесно связано с порядками в простых алгебрах. Например, ассоциативные первичные PI алгебры исчерпываются центральными порядками в матричных алгебрах, йордановы первичные невырожденные PI-алгебры являются центральными порядками в простых йордановых алгебрах, альтернативные первичные невырожденные алгебры являются центральными порядками в алгебрах октонионов.

Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Ее *суперцентром* называется четная часть центра $Z = Z(A) \cap A_0$. Z_2-градуированная алгебра A называется центральным порядком в Z_2-градуированной алгебре B, если $Z^{-1}A = B$. Как и в неградуированном случае, центральные порядки являются ключевыми примерами первичных супералгебр. Например, при наложении некоторых условий невырожденности на четную часть, первичные неассоциативные нетривиальные альтернативные супералгебры исчерпываются центральными порядками в простых альтернативных супералгебрах.

Как известно ([**1, 2, 3**]), центральный порядок в конечномерной простой ассоциативной (альтернативной, йордановой) алгебре вкладывается в конечный модуль над своим центром. В работе получено обобщение этого результата на йордановы супералгебры с полупростой четной частью, а именно доказана следующая

Теорема. *Пусть J — центральный порядок в простой конечномерной йордановой супералгебре с полупростой четной частью и пусть Z — суперцентр J. Тогда J вкладывается в конечный Z-модуль. В частности, если Z — нетеров, то J является конечным Z-модулем.*

Список литературы

[1] Formanek E., Noetherian PI-rings, Comm. in Algebra, 1, N 1 (1974), 79–86.

[2] Панасенко А.С., Почти конечномерные альтернативные алгебры, Матем. заметки, 98, N 5 (2015), 747–755.

[3] Желябин В.Н., Панасенко А.С., Почти конечномерные йордановы алгебры, Алгебра и логика, 57, N 5 (2018), 522–546.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
E-mail: a.panasenko@g.nsu.ru

О строении, определяющих соотношениях и тождествах в 2-порожденной нильпотентной алгебре R с условием $\dim R^2/R^3 = 3$

Е. П. Петров

Издавна вызывают определенный интерес строение, определяющие соотношения и тождества произвольной ассоциативной конечнопорожденной нильпотентной алгебры над полем. До сих пор остаются открытыми многие вопросы, связанные с такими алгебрами.

В поисках ответов на обозначенные вопросы автором в работе [1] было показано, что всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\limits_{\sigma\in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = 0$. Причем эта оценка оказалась точной.

В процессе обобщения указанного результата в работах [2], [3] изучалось строение, определяющие соотношения и тождества конечнопорожденной нильпотентной алгебры R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ при $N > 2$, где, в частности, выяснилось, что всякая такая алгебра над полем характеристики, не равной 2, удовлетворят стандартному тождеству степени $N + 2$.

С целью дальнейшего естественного продолжения изучения конечномерных нильпотентных алгебр над полем получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть R – 2-порожденная нильпотентная индекса $N \geqslant 4$ алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $dim R^2/R^3 = 3$, в которой выполняется одно единственное определяющее соотношение.*

Тогда тип и определяющее соотношение в алгебре R совпадают с одним из следующих вариантов:

1) *тип:* $\Big(2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots\ , F_{n+2},\ \ldots\ ,\ F_{N+1}\Big)$, *где* $\dim R^n/R^{n+1} = F_{n+2}$ *– числа Фибоначчи,* $n = \overline{1, N-1}$, *и в алгебре R выполняется определяющее соотношение:* $b^2 = au,\ u \in R^{N-2}$;

2) *тип:* $\Big(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ , n+1,\ \ldots\ ,\ N\Big)$, *где* $\dim R^n/R^{n+1} = n+1$, $n = \overline{1, N-1}$, *и в алгебре R выполняется одно из следующих определяющих соотношений:*

2.1) $$ba = a^2 + ab + \sum_{s\geqslant 0}\sum_{t\geqslant 1} \varepsilon_{st} a^{ps+3} b^{pt-1} + \sum_{n=3}^{N-1} \Big(\mu_n ab^{n-1} + \nu_n b^n\Big),$$

где $0 < charF = p < (N-2)$, $\varepsilon_{st}, \mu_n, \nu_n \in F$, *причем, если* $charF \neq 2$, *то* $\mu_n = 0$, $n = \overline{3, N-1}$;

2.2) $ba = a^2 + ab + \sum\limits_{n=3}^{N-1} \nu_n b^n$, *если* $charF = 0$ *или* $charF = p \geqslant (N-2)$;

2.3) $ba = \beta ab + \sum\limits_{(s+t)\geqslant 1} \varepsilon_{st} a^{ks+1} b^{kt+1}$, *где* $\beta \neq 1$ *имеет конечный мультипликативный порядок* $k < (N-2)$, $\varepsilon_{st} \in F$;

2.4) $ba = \sum\limits_{n=3}^{N-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{ni} a^{n-i} b^i$, $\varepsilon_{ni} \in F$;

2.5) $ba \equiv ab \pmod{R^3}$;

2.6) $ba = \beta ab$, *если* $\beta \neq 1$ *имеет бесконечный мультипликативный порядок или его порядок* $k \geqslant (N-2)$.

Здесь типом алгебры R мы называем следующую строчку натуральных чисел: $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{N-1})$, где $s_i = dim R^i/R^{i+1}$, $1 \leq i \leq N-1$, N – индекс нильпотентности алгебры R (данное понятие введено автором в работе [4] лишь применительно к конечномерным нильпотентным алгебрам).

Из работ [1]-[3] выясняется, что степень стандартного тождества в алгебре R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2, n > 1$, не зависит от величины индекса нильпотентности алгебры R. В случае, когда $\dim R^2/R^3 = 3$, такой независимости уже нет. Действительно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого натурального числа k найдется конечномерная нильпотентная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = 3$, не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени k.*

Однако, в некоторых частных случаях могут быть и исключения из сказанного в теореме 2. В подтверждение этому имеют место следующие факты.

Теорема 3. *Пусть R – 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем F с условием $dim R^2/R^3 = 3$ и определяющим соотношением $ba = 0$. Тогда R удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\limits_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0$. Причем эта оценка является точной.*

Теорема 4. *Пусть R – 2-порожденная нильпотентная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики не равной двум с условием $dim R^2/R^3 = 3$ и определяющим соотношением $ba = -ab$. Тогда R удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\limits_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0$. Причем эта оценка является точной.*

Список литературы

[1] Petrov E.P., *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dim R^2/R^3 = 2$*, Siberian Electronic Mathematical Reports, 13 (2016), 1052–1066.

[2] Petrov E.P., *Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dim R^N/R^{N+1} = 2$*, Siberian Electronic Mathematical Reports, 14 (2017), 1153–1187.

[3] Petrov E.P., *Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition $dim R^N/R^{N+1} = 2$*, Siberian Electronic Mathematical Reports, 15 (2018), 1048–1064.

[4] Petrov E.P., *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, 30, 5 (1991), 540–556.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: pep@email.asu.ru

Полиномиальные тождества йордановых алгебр пуассонова типа

А. В. Попов

Для любой супералгебры Пуассона P можно определить йорданову супералгебру $K(P)$, — так называемый дубль Кантора [**1**]. Соответствующие йордановы алгебры вида $G(K(P))$, где $G()$ – грассманова оболочка, будем называть йордановыми алгебрами пуассонова типа. Через $\overline{\mathcal{K}Jord}$ обозначим многообразие алгебр, порождаемое йордановыми алгебрами пуассонова типа.

Из результатов работы [**2**] следует, что в любой йордановой алгебре пуассонова типа выполнено нетривиальное тождество. Более точно, в соответствии с [**3**], в $\overline{\mathcal{K}Jord}$ выполнено тождество вида $St_{2k}^m \equiv 0$, где St_n — стандартный йорданов многочлен. Следующая теорема уточняет значения параметров k и m.

Теорема 1. *Тождество $St_{2k}^m \equiv 0$ выполнено в $\overline{\mathcal{K}Jord}$ тогда и только тогда, когда k и m удовлетворяют любому из следующих условий:*

(1) $k \geq 6$, $m \geq 3$;
(2) $k \geq 4$, $m \geq 4$;
(3) $k \geq 3$, $m \geq 5$;
(4) $k \geq 2$, $m \geq 7$.

В [**2**] также доказано, что многообразие $\overline{\mathcal{K}Jord}$ имеет сверхэкспоненцильный рост. Тоже независимо следует из результатов работы [**4**]. Следующая теорема дает оценку роста многообразия $\overline{\mathcal{K}Jord}$.

Теорема 2. *Для многообразия $\overline{\mathcal{K}Jord}$ последовательность коразмерностей $c_n(\overline{\mathcal{K}Jord})$ растет как $(Cn)^{\frac{n}{2}}$, где $C > 0$.*

Список литературы

[1] Кантор И. Я. Йорданова и лиева супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // II Сибирская Школа (Томск) «Алгебра и Анализ» // Деп. ВИНИТИ N 30 — 1990. С. 89–125.

[2] Giambruno A., Zelmanov E. On growth of codimensions of Jordan algebras // Groups, Algebras and Applications. XVIII Latin American algebra colloquium (San Pedro, Brazil, 2009). Contemporary mathematics. Providence: ASM, 2011. V. 537 P. 205–210.

[3] Семенов А. П. О подкольцах инвариантов конечной группы автоморфизмов йорданова кольца // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, N 1. С. 207–211.

[4] Попов А. В. Йордановы алгебры лиева типа // Матем. тр. 2019. Т. 22, N 1. С. 127–177.

Ульяновск
E-mail: klever176@rambler.ru

Универсальная эквивалентность частично коммутативных алгебр Ли, определенных графами без треугольников, квадратов и изолированных вершин

Е. Н. Порошенко

Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — неориентированный граф без петель с множеством вершин A и множеством ребер E. *Частично коммутативной алгеброй Ли* над областью целостности R с единицей называется R-алгебра с множеством порождающих $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и множеством определяющих соотношений вида

$$\{[a_i, a_j] = 0 \,|\, a_i \text{ и } a_j \text{ соединены ребром}\}. \tag{1}$$

В [**1, 2**] были установлены критерии универсальной эквивалентности для частично коммутативных (метабелевых) алгебр Ли, определенных циклами и деревьями. В 2018 году эти результаты были обобщены и был заявлен критерий универсальной эквивалентности для частично коммутативных алгебр Ли, определенных конечными связными графами без треугольников и квадратов [**3**]. В настоящей работе класс рассматриваемых алгебр Ли еще больше расширяется: определяющие графы могут быть несвязными, однако в них не должно быть изолированных вершин.

Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — неориентированный граф без треугольников и квадратов и без изолированных вершин. Через G^* обозначим подграф графа G, порожденный всеми его невисячими вершинами.

Теорема. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ и $H = \langle B; F\rangle$ — конечные графы без треугольников и квадратов и без изолированных вершин. Частично коммутативные алгебры Ли, определенные этими графами, универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда графы G^* и H^* изоморфны, а количество двухвершинных компонент связности в графах G и H одинаково.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18–01–00100).

Список литературы

[1] Порошенко Е. Н., Об универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли, Алгебра и логика, 56, 2 (2017), 202–225.

[2] Порошенко Е. Н., Об универсальной эквивалентности некоторых счетно порожденных частично коммутативных структур, Сиб. мат. ж., 58, 2 (2017), 386–398.

[3] Порошенко Е. Н. Универсальная эквивалентность частично коммутативных алгебр Ли некоторого класса, Международная конференция Мальцевские чтения, тезисы докладов, Новосибирск, 2018, 163.

Новосибирский государственный технический униврееситет, Новосибирск
E-mail: auto_stoper@ngs.ru

Простые правоальтернативные супералгебры с полупростой четной частью

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И. П. Шестаковым в [**1**]. В предыдущих работах авторов [**2**], [**3**] были классифицированы простые правоальтернативные супералгебры при дополнительных ограничениях на полупростую четную часть.

В данной работе классифицированы простые конечномерные унитальные правоальтернативные супералгебры с полупростой четной частью. Доказано, что всякая такая супералгебра является либо простой ассоциативной матричной алгеброй Уолла, либо простой альтернативной супералгеброй Шестакова, либо асимметричным дублем, либо абелевой супералгеброй типа $\mathrm{B}_{n|n}$, $n \geq 2$, $\mathrm{B}_{2|2}(\nu)$.

Кроме того, попутно получено описание правоальтернативных супералгебр с простой четной частью; всякая такая супералгебра либо проста, либо имеет нечетную часть с нулевым умножением.

Список литературы

[1] Филипов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 4-е издание, 1993.

[2] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные унитальные правоальтернативные супералгебры над алгеброй матриц порядка 2. Алгебра и логика, 58:1 (2019), 108–131.

[3] Murakami L. S. I., Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. Finite-dimensional right alternative superalgebras with a semisimple strongly alternative even part. Journal of Algebra, 528 (2019) 150–176.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru

О тождествах первичных альтернативных алгебр

С. В. Пчелинцев

Первичные вырожденные коммутативные альтернативные алгебры $S[X]$ (монстр [**1**]) и $Sk(X)$ (алгебра Скосырского [**2**]) удовлетворяют тождествам коммутативности, правой альтернативности и ниль индекса 3. В [**3**] было указано тождество степени 12

$$\prod_{i=1}^{4}(c, x_i, y_i) = 0,$$

выполняющееся в алгебрах $S[X]$ и $Sk(X)$. В этой работе доказано, что элемент

$$\begin{aligned} p(a, b, x, y, z, t) := (a, b, x)(y, z, t) - (a, b, y)(z, t, x) \\ + (a, b, z)(t, x, y) - (a, b, t)(z, x, y) \end{aligned}$$

является еще одним тождеством этих алгебр. Показано, что p не является следствием тождеств меньшей степени; для проверки этого факта построен аддитивный базис свободной коммутативной альтернативной ниль индекса 3 нильпотентной индекса 7 супералгебры, порожденной тремя нечетными свободными порождающими. Доказано также, что алгебры $S[X]$ и $Sk(X)$ неотличимы тождествами от 5 переменных.

Список литературы

[1] Пчелинцев С. В. О нильпотентных элементах и ниль-радикалах альтернативных алгебр. Алгебра и логика, 24:6 (1985), 674–695.

[2] Скосырский В. Г. Первичные йордановы алгебры и конструкция Кантора. Алгебра и логика, 33:3 (1994), 301–316.

[3] Пчелинцев С. В. Изотопы альтернативного монстра и алгебры Скосырского. Сиб. Матем. Журн., 57:4 (2016), 850–865.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru

О T-пространствах n-слов в относительно свободной алгебре Грассмана без единицы

Л. М. Цыбуля

Пусть $\mathbb{F}^{(3)} = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / \Big([[x_1, x_2], x_3]\Big)^T$ — *относительно свободная алгебра Грассмана* [1] без единицы над бесконечным полем k характеристики $p > 0$. Образы свободных переменных алгебры $k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ в $\mathbb{F}^{(3)}$ обозначаются теми же буквами. Следуя [1], назовем *n-словом* одночлен алгебры $\mathbb{F}^{(3)}$, содержащий каждую свою переменную с кратностью n, и рассмотрим *не унитарно замкнутые T-пространства* $\mathbb{W}_n$, порождённые всеми n-словами. Различные конструкции, использующие n-слова, возникали во многих исследованиях, например, в связи с решением задач шпехтовой проблематики. Так, для решения аналога проблемы Шпехта в ненулевой характеристике разными авторами [2-4] использовалась, по существу, конструкция T-пространства n-слов.

Настоящая заметка продолжает исследование вопроса о связи T-пространств $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$ при $r > n$ в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$, изучавшегося в работах [1], [5], [6]. В характеристике 0 ответ прост (см. [1]): $\mathbb{F}^{(3)} = \mathbb{W}_1 \supset \mathbb{W}_2 \supset \mathbb{W}_3 \supset \ldots$. В случае характеристики 2 в [6] удалось установить: $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$, если в r и n множитель 2 входит с одинаковой кратностью, а также если n нечётно. Как показывает следующая теорема, справедливо более общее утверждение.

Теорема. *Пусть в r и n множитель p входит с одинаковой кратностью, либо r делится, а n не делится на p. Тогда в алгебре $\mathbb{F}^{(3)}$ в характеристике p при $r > n$ выполнено строгое включение $\mathbb{W}_r \subset \mathbb{W}_n$.*

Эта теорема и включения $\mathbb{W}_{p^l n_i} \subset \mathbb{W}_{p^{l-1} n_i}$ из [5], позволяют построить следующую диаграмму строгих включений.

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbb{F}^{(3)} = & \mathbb{W}_1 & \supset & \mathbb{W}_{n_1} & \supset & \mathbb{W}_{n_2} & \supset \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & \\
& \mathbb{W}_p & \supset & \mathbb{W}_{pn_1} & \supset & \mathbb{W}_{pn_2} & \supset \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & \\
& \mathbb{W}_{p^2} & \supset & \mathbb{W}_{p^2 n_1} & \supset & \mathbb{W}_{p^2 n_2} & \supset \ldots \\
& \cup & & \cup & & \cup & \\
& \ldots & & \ldots & & \ldots &
\end{array}$$

Здесь $(n_i, p) = 1$, $1 < n_1 < n_2 < \ldots$. Как видим, алгебра $\mathbb{F}^{(3)}$ содержит бесконечное число бесконечных строго убывающих цепочек включений T-пространств n-слов. В работе [5] было доказано, что если r делится на меньшую степень числа p, чем n, то $\mathbb{W}_r \not\subset \mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}_r \not\supset \mathbb{W}_n$, но $\mathbb{W}_r \cap \mathbb{W}_n \neq \{0\}$. Открытым остается вопрос о взаимосвязи $\mathbb{W}_r$ и $\mathbb{W}_n$, когда r делится на большую степень числа p, чем n. Имеются как положительные и отрицательные примеры, так и примеры без ответа: $\mathbb{W}_{20} \subset \mathbb{W}_6$, $\mathbb{W}_{24} \not\subset \mathbb{W}_{20}$ в характеристике 2, а выполнено ли при этом включение $\mathbb{W}_{12} \subset \mathbb{W}_{10}$, не известно. Следует отметить, что при добавлении единицы к $\mathbb{F}^{(3)}$ все эти вопросы снимаются, ответом служит только первый столбец диаграммы.

Список литературы

[1] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О структуре относительно свободной алгебры Грассмана. Фундам. прикл. матем. 15:8 (2009), 3–93.

[2] Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях. Фундам. прикл. матем. 5:1 (1999), 47–66.

[3] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2. Фундам. прикл. матем. 5:1 (1999), 101–118.

[4] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов. Фундам. прикл. матем. 5:1 (1999), 307–312.

[5] Цыбуля Л. М. Основные T-пространства относительно свободной алгебры Грассмана без 1. Фундам. прикл. матем. 2018. В печати.

[6] Цыбуля Л. М. О T-пространствах n-слов в относительно свободной алгебре Грассмана без единицы в характеристике 2. Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ. Москва. Издательство МГУ. (2019), 62–63.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: liliya-kinder@mail.ru

Splitting of derivations on central simple algebras

A. Kulshrestha

Let k be a field of characteristic zero and $d_k : k \to k$ be a derivation on k. Let A be a central simple algebra over k and $d_A : A \to A$ be an extension of d_k to A. Such an extension exists due to a work of Amitsur [**1**]. Derivations d_A on matrix algebras obtained by applying d_k on each matrix entry are called *split* derivations. It is known due to a work of Lourdes and Magid [**2**] that, if for a given derivation d_A on a central simple algebra A, the constants of the derivation d_k are algebraically closed, then there exists a Picard-Vessiot differential extension over k that splits d_A.

We prove that in some cases algebraic extensions are enough to split derivations $d_A : A \to A$ and in such cases we compute, what we call *differential reduced norm group of* d_A, the group generated by nonzero norms from all algebraic extensions that split d_A. Further, we compare this group with the group of nonzero reduced norms of A. This is a joint work with Kanika Singla [**3**].

References

[1] Amitsur S. A., Extension of derivations to central simple algebras, Comm. Algebra 10 (1982), pp. 797–803.

[2] Lourdes J. and Magid A. R., Differential central simple algebras and Picard-Vessiot representations, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), pp. 1911–1918.

[3] Kulshrestha A. and Singla K., Algebraic extensions splitting differential central simple algebras. Preprint (2019), 12 pages.

Indian Institute of Science Education and Research, Mohali (India)
E-mail: amitk@iisermohali.ac.in

Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra and the enveloping algebras

V. M. Levchuk, G. P. Egorychev, N. D. Hodyunya

According to [**1**], an arbitrary algebra $R = (R, +, \cdot)$ is called *an enveloping algebra* to Lie algebra L if the algebra $R^{(-)} := (R, +, \ *)$ with new multiplication $a * b := ab - ba$ is isomorphic to L. (See also Lie-admissible algebras, [**2**].) Clearly that for such algebras R and L we may to choose the same base and then all automorphisms (analogously, ideals) of ring R are also the same for Lie ring L.

We study the case of Chevalley algebra L_K over a field K. It is generated by elements e_r $(r \in \Phi)$ of Chevalley base for correspondence irreducible root system Φ, [**3**]. Fix a positive root system Φ^+ in Φ. For any $r, s \in \Phi$ we have

$$e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s} = -e_s * e_r \ (r + s \in \Phi), \quad e_r * e_s = 0 \ (r + s \notin \Phi \cup \{0\}),$$

where $N_{rs} = \pm 1$ or $|r| = |s| < |r + s|$ and $N_{rs} = \pm 2$, or (for type G_2) $N_{rs} = \pm 2$ or ± 3. Up to isomorphisms of given algebra L_K, the signs of structural constants N_{rs} can be chosen arbitrary only for certain (*extraspecial*, by [**3**, Proposition 4.2.2]) pairs of positive roots r, s. Thus, enumeration of enveloping algebras for algebra L_K is reduced to similar enumeration for *niltriangular subalgebra* $N\Phi(K)$ with base $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$.

Constructed in [**1**] the enveloping algebras R for the Lie algebra $N\Phi(K)$ depend on the choice of signs of the structural constants N_{rs}. We find the conditions for the uniqueness of the enveloping algebra R and, at the same time, the uniqueness of the choice of signs of structural constants of the Chevalley base. Note that even for classical types the conditions aren't separately for each type, but on their in common.

Distinguished in [**1**] *standard ideals* of $N\Phi(K)$ are also ideals in each enveloping algebra R. One of the constructed algebras R of type A_{n-1} is associative algebra $NT(n, K)$ of all nil-triangular $n \times n$ matrices over K. By well-known DubishЦPerlisTs theorem (1951) it is a standard enveloping algebra, i.e., all ideals in R are standard. The standard enveloping algebra R exists for algebras $N\Phi(K)$ of all types, except for the type D_n $(n \geq 4)$ and E_n $(n = 6, 7, 8)$. The solution of Problem 1 from [**4**] of the combinatorial enumeration of standard ideals of $N\Phi(K)$ with $K = GF(q)$ using q-binomial coefficients has been completed.

References

[1] Levchuk V.M., Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: enveloping algebra, ideals and automorphisms, Dokl. Math., 478 (2018), No. 1, 23–27.

[2] Myung H.-C., Some Classes of Flexible Lie-Admissible Algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 167 (1972), 79–88.

[3] Carter R.W., Simple groups of Lie type, New York: Wiley and Sons, 1972.

[4] Egorychev G. P., Levchuk V. M., Enumeration in the Chevalley algebras, ACM SIGSAM Bulletin, 35 (2001), No. 2, 20–34.

Institute of Math. and Computer Sciences, Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

The compressed zero divisor graph of small order for a finite associative ring

A. S. Monastyreva, E. V. Zhuravlev

We study the compressed zero divisor graph of a finite associative ring R.

Let R be a associative ring. $D(R)$ denotes the set of all (one sided and two-sided) zero-divisors of R. Also, $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$. For any $a \in R$, we denote $l(a) = \{x \in R;\ xa = 0\}, r(a) = \{x \in R;\ ax = 0\}$. For $x, y \in D(R)$, we say that $x \sim y$ if and only if $r(x) \cup l(x) = r(y) \cup l(y)$. We note that $\sim$ is a equivalence relation. The class of x is denoted by $[x]$.

The compressed zero-divisor graph $\Gamma_\sim(R)$ of an ring R is the looped graph whose vertices are all classes $[x]$ where $x \in D(R)^*$, and two vertices $[x]$ and $[y]$ are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$.

Such graphs for commutative case are studied in [**1, 2**].

We describe commutative finite rings which have the compressed zero divisor graphs of order 2. Moreover, we found all graphs of order 3 which are the compressed zero divisor graphs of some finite rings.

References

[1] Bloomfield N., The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3, Communications in Algebra, 41 (2013), 765–775.

[2] Spiroff S., Wickham C., A Zero-Divisor Graph Determined by Equivalence Classes of Zero Divisors, Communications in Algebra, 39 (2011), 2338–2348.

Altai State University, Barnaul
E-mail: akuzmina1@yandex.ru, evzhuravlev@mail.ru

The right-symmetric algebras possessing a "unital" matrix subalgebra

A. P. Pozhidaev, I. P. Shestakov

Left(right)-symmetric algebras are an important generalization of associative algebras. An algebra is said to be *left-symmetric* provided that the associator is left-symmetric, i. e., it is symmetric with respect to the first two variables: $(x, y, z) = (y, x, z)$ for all $x, y, z \in A$, where $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ is the *associator* of x, y, z. The right-symmetric algebras are defined analogously, and every right-symmetric algebra is anti-isomorphic to a left-symmetric algebra. The left-symmetric algebras arise naturally in various contexts. Apparently, these algebras for the first time were introduced by A. Cayley in 1857 via rooted tree algebras. In 1961, J. L. Koszul used them in the study of actions of affine transformations. In 1963, E. B. Vinberg applied the left-symmetric algebras to classify the convex homogeneous cones, and M. Gerstenhaber used them to study the deformations of algebras.

Left-symmetric algebras also arise in the study of Yang–Baxter equation, in the differential geometry of flat manifolds, and in the representation theory of Lie groups. Given a variety of algebras $\mathcal{V}$, a general notion of a pre-$\mathcal{V}$-variety was defined by V. Y. Gubarev and P. S. Kolesnikov in 2014. It is easy to see that the notion of left-symmetric algebra coincides with one of *pre-Lie algebra*.

In the present talk we give classification of all finite-dimensional left(right)-symmetric algebras $\mathcal{A} = W \oplus M_2$ over a field F of characteristic zero such that W is an irreducible unital right module over $M_2 := M_2(F)$, and M_2 is a subalgebra of $\mathcal{A}$, whose unity E serves as the unity for $\mathcal{A}$ as well (we call such subalgebras *unital*). We also show that for every natural n there exists a simple nonassociative left(right)-symmetric algebra, which possesses the "unital" matrix subalgebra $M_n(F)$.

Let $\mathbb{V}_2$ be the standard two-dimensional right module over M_2. Fix some linear mappings $\phi, \psi : \mathbb{V}_2 \mapsto M_2$ and a homomorphism $\pi : \mathbb{V}_2 \mapsto M_2$ of right M_2-modules. Define a product $w \star v$ on $\mathbb{V}_2$ by the rule $w \star v = \theta(v)w$ for some fixed $\theta \in W^*$.

Theorem. *Let $\mathcal{A} = W \oplus M_2$, where W is an irreducible finite-dimensional module over sl_2. Then $W \cong \mathbb{V}_2$ is the standard module over sl_2, and the product on $\mathcal{A}$ is given by the rules*

$$m \cdot w = wm + [m, \phi(w)],$$
$$w \cdot u = w \star u + w\phi(u) + \psi(u)\pi(w),$$

where $w, u \in W$, $m \in M_2$.

Supported by FAPESP 18/05372-7.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: app@math.nsc.ru
Sobolev Institute of Mathematics, Universidade de São Paulo
E-mail: shestak@ime.usp.br

Group action on Leibniz algebras and equivariant cohomology

R. Saha

This is a joint work with Prof. Goutam Mukherjee.

J.-L. Loday introduced some new types of algebras along with their (co)homologies and studied the associated operads. Leibniz algebras and their Koszul duals, zinbiel algebras are examples of such algebras. Let Leib be the category of Leibniz algebras over a fixed field $\mathbb{K}$. Given any Leibniz algebra $\mathfrak{g}$, J.-L. Loday introduced a cup-product operations on the graded Leibniz cohomology $HL_*(\mathfrak{g}; A)$ groups with coefficients in a commutative, associative algebra A. This product is neither associative nor commutative but satisfies graded Zinbiel algebra structure. We study finite group actions on Leibniz algebras. Let G be a finite group and $\mathfrak{g}$ be a Leibniz algebra equipped with a given action of G. We discuss examples of such actions and introduce equivariant cohomology groups of a Leibniz algebra g equipped with an action of a finite group G, along the line of Bredon cohomology of a G-space. We introduce a cup-product operation in the equivariant context and prove that for a Leibniz algebra $\mathfrak{g}$equipped with an action of G, equivariant graded Leibniz cohomology groups also admit a graded zinbiel algebra structure.

Department of mathematics, Raiganj University, West Bengal-733134, India
E-mail: ripanjumaths@gmail.com

IX. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

Субмаксимальные подалгебры в $P_2 \times P_2$

А. А. Бабаев, С. Мешаик

Для описания максимальных подалгебр алгебры

$$P_2 \times P_2 = \left\langle \bigcup_{m=0}^{\infty} P_2^{(m)} \times P_2^{(m)};\ \xi,\ \tau,\ \Delta, \nabla, * \right\rangle$$

достаточно найти все минимальные отношения по выразимости с помощью $\left(\exists, \&, \underset{1}{=}, \underset{2}{=}\right)$-формул арности $(4,4)$ над множествами $E_2 = \{0;\ 1\}$ и $\overline{E}_2 = \left\{\overline{0};\ \overline{1}\right\}$.

В [2] показано, что число максимальных подалгебр $P_2 \times P_2$ равно 21, причем 10 из них связаны с классам Поста [3], а остальные 11 — подпрямые произведения системы P_2. Эти максимальные подалгебры определяется минимальными отношениями $R_1 - R_{21}$.

Следовательно, для решения проблемы полноты максимальных подалгебр алгебры $P_2 \times P_2$, достаточно найти субмаксимальные подалгебры в $P_2 \times P_2$.

Для нахождения субмаксимальных подалгебр поступаем следующим образом. Пусть $u \subset Pol\,(R_i)$ — субмаксимальная подалгебра, которая не является алгеброй Слупецкого, т.е. $u^{(1)} \not\subset Pol\,(R_i)^{(1)}$, где $u^{(1)}$ и $Pol\,(R_i)^{(1)}$ все унарные функции соответственно в u и $Pol\,(R_i)$. Тогда рассмотрим график $G_1\,[\varphi]$ — образ точки $\left(0,\ 1,\ \overline{0},\ \overline{1}\right)$ при всех $\varphi \in u^{(1)}$. Если u — субмаксимальная подалгебра Слупецкого, т.е. $u^{(1)} \subset Pol\,(R_i)^{(1)}$, то рассмотрим график тех функций из $L \times P_2$, $P_2 \times L$ и $Pol\,(R_{ii})$, которые принадлежат $Pol\,(R_i)$.

Вышесказанном способом находим все субмаксимальные подалгебры в $P_2 \times P_2$. В $C_0 \times P_2$ их 12, в $C_1 \times P_2$ — 12, в $S \times P_2$ — 6, в $M \times P_2$ — 18, в $L \times P_2$ — 18. Дуальным образом описываются максимальные подалгебры систем $P_2 \times C_{\overline{0}}$, $P_2 \times C_{\overline{1}}$, $P_2 \times S$, $P_2 \times M$, $P_2 \times L$.

Число максимальных подалгебр системы $Pol\,(R_{11}) \bigcup P_2^{(1)} \times P_2^{(1)}$ равно 10, системы $Pol\,(R_{12})$ равно 5, системы $Pol\,(R_{13})$ равно 5. А число максимальных подалгебр каждый системы $Pol\,(R_{14})$, $Pol\,(R_{15})$, $Pol\,(R_{16})$, $Pol\,(R_{17})$, $Pol\,(R_{18})$, $Pol\,(R_{19})$, $Pol\,(R_{20})$, $Pol\,(R_{21})$ равно 6.

Теорема. *Число субмаксимальных подалгебр в $P_2 \times P_2$ равно 200.*

Список литературы

[1] Мальцев А. И., Мальцев И. А. Итеративные алгебры Поста: Новосибирск, 2009, с. 188.

[2] Ромов Б. А. О полноте на квадрате функции алгебры логики и в системе $P_k \times P_l$. // Кибернетика, 1987, N 4, 9–14.

[3] Post E. Two valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies, v. 5, Princeton Univ. Press, Princeton, London, 1941.

[4] Lau D. On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // Elektron. Inf. Kybern. 1991, v. 27 (3), 167–178.

Институт математики и механики НАНА, Баку (Азербайджан), Гянджинский государственный университет, Гянджа (Азербайджан)

E-mail: ali_babaev@inbox.ru, seymur_meshaik@inbox.ru

Классификация и перечисление типов базисов мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2

С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев

Пусть $A = \{0,1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P^{\bar{*}}_{2,n} = \{f \mid f : A^n \to F\}, P^{\bar{*}}_2 = \bigcup\limits_n P^{\bar{*}}_{2,n}$,

$P^{*}_{2,n} = \{f \mid f \in P^{\bar{*}}_{2,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P^{*}_2 = \bigcup\limits_n P^{*}_{2,n}$.

$P^{-}_{2,n} = \{f \mid f \in P^{\bar{*}}_{2,n}$ и $1 \leq |f(\tilde{\alpha})| \leq 2$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P^{-}_2 = \bigcup\limits_n P^{-}_{2,n}$.

$P_{2,n} = \{f \mid f \in P^{\bar{*}}_{2,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$.

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P^{*}_2 – частичными функциями на A, из P^{-}_2 — гиперфункциями на A, из $P^{\bar{*}}_2$ — мультифункциями на A.

Задача о принадлежности функций максимальным (предполным) классам является достаточно известной, например, для булевых функций она решена в [**1**].

В [**2**] описаны все 12 максимальных частичных ультраклонов мультифункций на A. В докладе рассматривается вопрос об отношении принадлежности мультифункций максимальным частичным ультраклонам, которое является отношением эквивалентности и порождает разбиение на классы эквивалентности. Исследование свойств мультифункций и компьютерный эксперимент позволили получить следующие утверждения.

Теорема 1. *Число классов мультифункций, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 91.*

Теорема 2. *Число классов функций алгебры логики, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 15.*

Теорема 3. *Число классов частичных функций, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 49.*

Теорема 4. *Число классов гиперфункций, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, равно 28.*

Полный компьютерный перебор показал, что имеется 1 тип базисов мощности 1, 690 типов базисов мощности 2, 7940 типов базисов мощности 3, 2830 типов базисов мощности 4, базисов большей мощности не существует.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект 18-31-00020.

Список литературы

[1] Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики // Математический сборник. 1952. Т. 30 (72), N 2. С. 329–348.

[2] Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 450–474.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: badmaevsa@mail.ru, goran5@mail.ru

О неравенствах в полиадических группоидах специального вида

А. М. Гальмак

Полиадическим группоидом специального вида называется l-арный группоид

$$\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k}\rangle$$

с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1)+1$, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $k \geq 2$, которая была определена в [**1**] на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $\langle A, \eta\rangle$ с помощью подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ и n-арной операции η. Частными случаями l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил и изучал в [**2**].

Теорема 1. *Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n-арный группоид $\langle A, \eta\rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, что $a \neq e_r$, $\eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a$,*

$$\eta(e_r e_1 \ldots e_{n-1}) = e_r,\ \eta(e_{n-1} e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}. \tag{1}$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_r,\ a_j = a,\ a_{j+1} = \ldots = a_k = e_r), \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \ldots e_1}_{k}),\ \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \ldots e_2}_{k}), \ldots, \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \ldots e_{n-1}}_{k}). \tag{3}$$

Тогда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ \ldots\ \mathbf{e}_{n-1}\ \mathbf{e}_1\ \ldots\ \mathbf{e}_{n-1}\ \ \ldots\ \ \mathbf{e}_1\ \ldots\ \mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq \tag{4}$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{r-1}\mathbf{a}\mathbf{e}_{r+1} \ldots \mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1\ \ldots\ \mathbf{e}_{n-1}\ \mathbf{e}_1\ \ldots\ \mathbf{e}_{n-1}\ \ \ldots\ \ \mathbf{e}_1\ \ldots\ \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}).$$

Теорема 2. *Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n-арный группоид $\langle A, \eta\rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \ldots, e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_r$ и верны равенства (1). Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, положим в (2) $a_j = e_{n-1}$ и определим элементы $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3). Тогда верно неравенство (4).*

Теорема 3. *Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n-арный группоид $langle A, \eta\rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \ldots, e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_r$, $\eta(e_1 e_1 \ldots e_{n-1}) = e_1$ и верны равенства (1). Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, положим в (2) $a_j = e_1$ и определим элементы $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3). Тогда верно неравенство (4).*

Список литературы

[1] Гальмак А. М., Русаков А. Д., О полиадических операциях на декартовых степенях // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 3 (2014), 35–40.

[2] Post E. L., Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1940), 208–350.

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв (Белоруссия)
E-mail: halm54@mail.ru

О решётках, близких к дистрибутивным

А. Г. Гейн, И. Д. Маслинцын, К. Э. Рабой

Хорошо известно, что любая конечнопорождённая дистрибутивная решётка конечна, так же, как и 3-порождённая свободная модулярная решётка. В то же время свободная модулярная решётка ранга 4 имеет бесконечную длину. Естественно поэтому исследовать вопрос, при каких ослаблениях условия модулярности 3-порождённая решётка будет по крайней мере иметь конечную длину, а возможно, и конечной. Перспективным в этом направлении нам представляется свойство, названное нами близостью к дистрибутивности, рассматривается в данной работе.

Определение. Решётка называется близкой к дистрибутивной, если для любых элементов x, y и z интервалы $[(x \wedge z) \vee (y \wedge z); (x \vee y) \wedge z]$ и

$$[(x \wedge y) \vee z; (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$$

имеют длину, не большую 1.

Нетрудно проверить, что любая модулярная решётка является близкой к дистрибутивной.

Теорема. *Длина 3-порождённой решётки, близкой к дистрибутивной, конечна.*

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: a.g.geyn@urfu.ru, maslintsyn@gmail.com, raboyk@mail.ru

Стандартные элементы решетки многообразий моноидов

С. В. Гусев

Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называют

нейтральным, если $\forall\, y, z \in L\colon\ (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$

стандартным, если $\forall\, y, z \in L\colon\ (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$

Изучение специальных элементов в решетке $\mathbb{MON}$ всех многообразий моноидов было начато в работе [**1**]. В частности, там были полностью описаны нейтральные элементы этой решетки. Данная работа посвящена полному описанию стандартных элементов решетки $\mathbb{MON}$.

Через $\mathbf{T}$ обозначим тривиальное многообразие моноидов, а через $\mathbf{MON}$ — многообразие всех моноидов. Многообразие всех полурешеток будем обозначать через $\mathbf{SL}$. Основным результатом работы является

Теорема. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*
(i) $\mathbf{V}$ *является стандартным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*
(ii) $\mathbf{V}$ *является нейтральным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*;*
(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ *или* $\mathbf{MON}$.

Отметим, что эквивалентность условий (ii) и (iii) этой теоремы была доказана в [**1**, теорема 1.1]. Интересно, что в решетке многообразий полугрупп, в отличие от решетки $\mathbb{MON}$, свойства быть стандартным и нейтральным элементом не эквивалентны (см. теоремы 3.3 и 3.5 в [**2**]).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект No. 1.6018.2017/8.9) и РФФИ (грант No. 17-01-00551).

Список литературы

[1] Gusev S. V. Special elements of the lattice of monoid varieties // Algebra Universalis, 97, No. 2, Article 29 (2018), 1–12.
[2] Vernikov B. M. Special elements in lattices of semigroup varieties // Acta Sci. Math. (Szeged), 81 (2015), 79–109.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: sergey.gusb@gmail.com

О примитивной нормальности класса слабо инъективных полигонов

Е. Л. Ефремов, А. А. Степанова

В работе описаны моноиды, над которыми класс всех слабо инъективных полигонов является примитивно нормальным. Примитивно нормальные теории полигонов изучаются в [1–3]. В частности, в [1] доказывается, что класс всех полигонов над моноидом S примитивно нормален тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид; в [2] исследуются моноиды, над которыми аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов является примитивно нормальным; в [3] доказывается, что класс всех инъективных полигонов примитивно нормален.

Напомним некоторые понятия из теории полигонов и теории моделей.

Под *(левым) полигоном* ${}_SA$ *над моноидом* S понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица S действует на A тождественно. Полигон ${}_SQ$ называется слабо инъективным, если для любого левого идеала I моноида S и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_SI \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SQ$, продолжающий φ.

Формула вида $\exists x_1 \ldots \exists x_k\, (\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n)$, где Φ_i — атомарная формула сигнатуры Σ $(i \leqslant n)$, называется *примитивной*. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула сигнатуры Σ, $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, $\bar{a}, \bar{b} \in A$ — кортежи элементов той же длины, что и $\bar{y}$, то множества $\Phi(A, \bar{a})$ и $\Phi(A, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*. Теория T сигнатуры Σ называется *примитивно нормальной*, если любые две примитивные копии либо совпадают, либо не пересекаются. Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры Σ называется *примитивно нормальным*, если теория любой алгебраической системы класса $\mathcal{K}$ примитивно нормальна.

Моноид S будем называть *квазиупорядоченным*, если для любых $s, t \in S$

$$Ss \cap St \neq \varnothing \Rightarrow Ss \subseteq St \text{ или } St \subseteq Ss.$$

Теорема. *Если S — квазиупорядоченный моноид, то класс всех слабо инъективных полигонов над S примитивно нормальный.*

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531).

Список литературы

[1] Степанова А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, N 4. С. 491–508.

[2] Птахов Д. О. Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, N 5. С. 614–624.

[3] Ефремов Е. Л. Примитивная нормальность и примитивная связность класса инъективных полигонов // Алгебра и логика (в печати).

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: efremov-el@mail.ru, stepltd@mail.ru

P-стабильность класса делимых полигонов

А. И. Красицкая

В работе рассматриваются вопросы, связанные с P-стабильностью класса делимых полигонов. Аналогичные вопросы для класса всех полигонов рассмотрены в работе [**1**], где доказывается, что (P, s)-, (P, a)-, (P, e)-стабильность класса всех полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S — группа. В [**2**] даётся полное описание $(P, 1)$-стабильных теорий в терминах определимой интерпретируемости в теории языка одноместных предикатов.

Напомним некоторые определения.

Через $L(X)$ будем обозначать язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант, $\mathcal{C}$ — монстр-модель, т.е. насыщенная в достаточно большой мощности модель теории. Пусть $T(X) = \{\varphi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X, \mathcal{C} \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x})$ — формула языка $L\}$, язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P, Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Теория T называется P_Δ*-стабильной в мощности* λ, если для любого множества X в теории T мощности $\leqslant \lambda$ множество $T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$ имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$. Теория T называется (P, s)*-стабильной,* если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определимых функциональными символами языка L. Теория T называется (P, a)*-стабильной,* если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, т.е. содержит все конечные множества, определимые структуре $\mathcal{C}$ формулами языка L с параметрами из предиката P. Теория T называется (P, e)*-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подсистемой.

Пусть S — моноид. Элемент $c \in S$ называется сократимым справа, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. Под S-полигоном ${}_SA$ понимается множество A, на котором определено действие элементов из S слева, причем единица действует на A тождественно. Делимый S-полигон — это S-полигон ${}_SA$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$.

Теорема. *Класс всех делимых S-полигонов (P, s)-,(P, a)-, (P, e)-стабилен тогда и только тогда, когда S — группа.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00531).

Список литературы

[1] Птахов Д. О. P-стабильные полигоны // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 4. С. 486–505.
[2] Русалеев М. А. Характеризация $(P, 1)$-стабильных теорий // Алгебра и логика. 2007. Т. 52, N 5. С. 606–631.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stasyakras@gmail.com

P-комбинации упорядоченных структур

Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов

В серии работ [**1**]–[**3**] изучались свойства комбинаций структур. В настоящем докладе мы исследуем P-комбинации упорядоченных структур.

Если $\langle M_1, <_1\rangle$ и $\langle M_2, <_2\rangle$ — линейные порядки, то их *линейно упорядоченная непересекающаяся комбинация* (или *конкатенация*), обозначаемая через $M_1 + M_2$, есть линейный порядок $\langle M_1 \cup M_2, <\rangle$, где $a < b \Leftrightarrow ([a, b \in M_1 \wedge a <_1 b]$ или $[a, b \in M_2 \wedge a <_2 b]$ или $[a \in M_1 \wedge b \in M_2])$.

Пусть $M_i := \langle M_i; <_{M_i}, \Sigma_i\rangle$ — линейно упорядоченная структура для каждого $i \in \omega$. Будем обозначать через M' линейно упорядоченную P-комбинацию непересекающихся структур M_i, $i \in \omega$, в языке $\{<, \Sigma, P_i^1\}_{i\in\omega}$, где $\Sigma = \cup_{i\in\omega}\Sigma_i$, и универсумом комбинации является $\bigcup_{i\in\omega} M_i$; $P_i(M') = M_i$ для каждого $i \in \omega$; либо $P_k(M') < P_m(M')$, либо $P_m(M') < P_k(M')$ для любых $k, m \in \omega$ с условием $k \neq m$, и не существует совпадающих отношений (кроме отношения порядка) и функций, действующих в разных P-предикатах.

Множество $(P_i, P_j) := \{P_k \mid P_i(M') < P_k(M') < P_j(M')\}$, где $i, j \in \omega$, будем называть *P-интервалом.* Разбиение $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ множества всех предикатов P_i с условиями $P_j(M') < P_k(M')$ для $P_j \in \mathcal{P}$ и $P_k \in \mathcal{P}'$ называется *P-сечением* в M' . P-сечения $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ являются *ортогональными*, если они реализуются независимо друг от друга. Для P-сечения $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ число попарно неизоморфных счетных моделей теории $\mathrm{Th}(M')$, в которых реализуется $\mathcal{C}$, а все P-сечения, являющиеся ортогональными сечению $\mathcal{C}$, не реализуются, называется *$\mathcal{C}$-спектром.*

Теорема 1. *Пусть M_i — $\aleph_0$-категоричная линейно упорядоченная структура для каждого $i \in \omega$. Тогда $\mathrm{Th}(M')$ эренфойхтова $\Leftrightarrow$ когда не существует бесконечного разбиения M' на бесконечные P-интервалы, и $\mathcal{C}$-спектр конечен для каждого P-сечения $\mathcal{C}$.*

Теорема 2. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная структура чистого линейного порядка, M' — линейно упорядоченная P-комбинация ω копий структуры M. Тогда $Th(M')$ имеет либо 2^ω счетных моделей, либо $(k + 2)^m \cdot (k^2 + 3k + 2)^s$ счетных моделей для некоторых неотрицательных целых чисел k, m и s, где $k \geq 1$.*

Список литературы

[1] Sudoplatov S.V. Combinations of structures // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 24 (2018), 82–101.

[2] Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, 16 (2016), 131–144.

[3] Sudoplatov S.V. Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories // Siberian Electronic Mathematical Reports, 14 (2017), 135–150.

Казахстанско-Британский технический университет, Международный университет информационных технологий, Алматы (Казахстан)

E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Алгебры унарных операций и конечные алгебры Краснера мультиопераций

Н. А. Перязев

Пусть A — конечное множество и $B(A)$ — множество всех подмножеств A. Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A. Если при этом все образы одноэлементные, то f называем операцией. Ранг k мультиоперации определим так $k = |A|$. Введем обозначения $\mathcal{O}_A^{(1)}$ для множества унарных операций и $\mathcal{M}_A^{(n)}$ для множества n-местных мультиопераций.

Определим мультиоперации и метаоперации на мультиоперациях следующим образом: пустая $o^n(a_1, \ldots, a_n) = \varnothing$; полная $\pi^n(a_1, \ldots, a_n) = A$; проекция по i аргументу $e_i^n(a_1, \ldots, a_n) = \{a_i\}$. Суперпозиция мультиопераций $f, f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_A^{(n)}$:

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_n) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_n)} f(b_1, \ldots, b_n).$$

Разрешимость $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ по i аргументу, где $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$(\mu_i f)(a_1, \ldots, a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)\}.$$

Пересечение $(f \cap g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \cap g(a_1, \ldots, a_n)$.
Объединение $(f \cup g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \cup g(a_1, \ldots, a_n)$.

Алгеброй унарных операций над множеством A называется любое подмножество $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(1)}$, содержащее тождественную операцию e_1^1 и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции. Введем обозначение V_k^1 для решетки всех алгебр унарных операций ранга k.

Алгеброй Краснера n-местных мультиопераций над множеством A называется любое подмножество $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую n-местную мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции, разрешимости и объединения, а при $n = 1$ еще содержит полную и замкнуто относительно пересечения. Введем обозначение Y_k^n для решетки всех алгебр Краснера n-местных мультиопераций ранга k.

В работе [**1**] определена связь Галуа для решеток алгебр операций и решеток алгебр мультиопераций. Следующее утверждение устанавливает критерий совершенности этой связи для решеток V_k^1.

Теорема. *Связь Галуа для решеток V_k^1 и Y_k^n является совершенной тогда и только тогда, когда $n \geq k - 1$.*

Список литературы

[1] Перязев Н. А. Алгебры n-местных операций и мультиопераций // XV Международная конференция ««Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения»»: тезисы докладов. (Тула, 28-31 мая 2018 г.). Тула, 2018. С. 113–116.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Санкт-Петербург
E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Алгебраические и квазинеявные функции на универсальных алгебрах

А. Г. Пинус

Напомним, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ действительных переменных определяется в анализе как алгебраическая, если в некоторой окрестности любой точки из ее области определения она может быть задана неявно с помощью алгебраического уравнения.

Поскольку, в общем случае для произвольной универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ отсутствует однозначно определенная каноническая топология на $\mathfrak{A}$ и для $\mathfrak{A}$ не обязано выполняться условие нетеровости по уравнениям, то естественными представляются следующие определения. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовем алгебраической (глобально алгебраической) для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, если ее график $Grf = \{\langle a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n)\rangle \mid a_i \in A\}$ является объединением алгебраических для $\mathfrak{A}$ множеств (является алгебраическим для $\mathfrak{A}$ множеством). При этом подмножество $B \subseteq A^m$ алгебраично для $\mathfrak{A}$, если оно суть совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) системы термальных уравнений.

Внутренним гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ называется гомоморфизм между любыми ее подалгебрами. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на алгебре $\mathfrak{A}$ определим как квазинеявную для $\mathfrak{A}$, если она коммутирует со всеми внутренними гомоморфизмами этой алгебры.

Очевидно, что всякая алгебраическая (глобально алгебраическая) для алгебры $\mathfrak{A}$ функция является квазинеявной для $\mathfrak{A}$. Обратное неверно для глобально алгебраических функций. Но имеют место:

Теорема. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является квазинеявной для универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она алгебраическая для $\mathfrak{A}$.*

Следствие. *Для любой конечной эквациональной области $\mathfrak{A}$ понятия квазинеявной и алгебраической функции для $\mathfrak{A}$ равносильны.*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Ранги планарности многообразий полугрупп

Д. В. Соломатин

Напомним, что натуральное число r называют *рангом планарности* многообразия полугрупп $\mathbf{V}$, если все свободные в $\mathbf{V}$ полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарные графы Кэли, а свободная в этом многообразии полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли. Если для многообразия $\mathbf{V}$ такого натурального числа r не существует, то говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет бесконечный ранг планарности.

В работе [**1**] сформулирована проблема описания рангов планарности. Решение этой проблемы дает следующая

Теорема. *Ранг планарности любого многообразия полугрупп либо бесконечен, либо может быть любым натуральным числом.*

Тем самым показано существование полугрупповых многообразий наперед заданного конечного ранга планарности. В качестве комментария отметим, что многообразия полугрупп ранга планарности равного 1, 2, 3 уже приводились, например, в [**2**]; ранга 2, 3, 4, например в [**3**], а многообразия бесконечного ранга планарности, среди прочих, появлялись в каждой из упомянутых статей. Однако до настоящего времени не было известно ни одного многообразия полугрупп с конечным рангом планарности > 4. Оставшиеся ранги планарности многообразий полугрупп в теореме дают ранги планарности многообразий V_n полугрупп, заданные тождествами $x^2 = 0$, $xyx = 0$, $x_1x_2x_3 \cdots x_n = x_2x_1x_3 \cdots x_n$ для любого натурального $n > 3$, имеющие ранг планарности равный $n-1$.

Автор выражает благодарность С. В. Гусеву и Л. М. Мартынову за полезные обсуждения результатов.

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. Проблема описания рангов планарности многообразий полугрупп // В. Н. Ремесленников и др. Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара. — Омский алгебраический семинар, ОФ ИМ СОРАН, 12 ноября 2015 г. URL: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=12900.

[2] Соломатин Д. В. О рангах планарности многообразий полугрупп идемпотентов, нильполугрупп и полугрупп с перестановочным тождеством // Вестник Омского университета, 2017, N 4 (86), С. 11–21.

[3] Соломатин Д. В. Планарные многообразия полугрупп // Сиб. электрон. матем. изв., 2015, Т. 12, С. 232–247.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

Piecewise monotonicity for unary functions definable in ordered non-valuational o-stable groups

A. B. Dauletiyarova, V. V. Verbovskiy

We consider the class of ordered groups whose elementary theory is o-stable accordingly to the following definition. The aim of this research is to investigate properties of unary functions that are definable in an o-stable non-valuational densely ordered group.

Let $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ be a totally ordered structure, and let A, B be subsets of M. As usually we write $A < B$ if $a < b$ for any $a \in A$ and $b \in B$. A partition $\langle C, D\rangle$ of M is called a *cut* if $C < D$. Given a cut $\langle C, D\rangle$ one can construct a partial type $\{c < x < d : c \in C,\ d \in D\}$, which we also call a cut and use the same notation $\langle C, D\rangle$.

Definition (B. Baizhanov, V. Verbovskiy).

(1) An ordered structure $\mathcal{M}$ is *o-stable in* λ if for any $A \subseteq M$ with $|A| \le \lambda$ and for any cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ there are at most λ 1-types over A which are consistent with the cut $\langle C, D\rangle$.

(2) A theory T is *o-stable in* λ if every model of T is. Sometimes we write T is o-λ-stable.

(3) A theory T is *o-stable* if there exists an infinite cardinal λ in which T is o-stable.

Recall that an ordered group is said to be of *non-valuational type* if no non-trivial convex subgroup is definable.

Fact. Let f be a continuous unary function in a densely ordered group, and let $A \subseteq \operatorname{dom} f$ be open. Then for any $g \in G$ both $\{a \in A : f(a) > g\}$ and $\{a \in A : f(a) < g\}$ are open.

Lemma. Let A be a definable open subset of an o-stable densely ordered group G of non-valuational type. Then A is a finite union of convex sets.

Theorem. *Let G be an o-stable densely ordered group of non-valuational type. Let f be a definable continuous function. Then f is piecewise monotone, that is there exists a definable partition X, $A_1, \dots, A_n$ of* $\operatorname{dom} f$, *where X is finite and A_i is convex for each i, and the restriction of f to each A_i is monotone.*

The proof is inspired by the proof of the similar result for weakly o-minimal theories by D. Machperson, D. Marker, and C. Steinhorn: let $\mathcal{M}$ be a model of a weakly o-minimal theory, and let f be a definable in $\mathcal{M}$ function; then f is locally monotone.

The research is supported by the grant of MES of RK for the project AP05132688 "Relative stability".

Suleyman Demirel University, Kaskelen (Kazakhstan), Satbayev University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: d_aigera95@mail.ru, viktor.verbovskiy@gmail.com

On compositions of circular discrete orders with structures and their algebras of binary formulas

D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov

Algebras of binary formulas were studied in a series of paper both in general case [**1, 2, 3**] and for theories of ordered structures [**4, 5, 6, 7**]. Aspects of circular orders are considered in [**8, 9, 10, 11, 12**].

We consider both compositions of structures and compositions of theories, for discrete linear orders and given structures, as well as related algebras.

Let $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ be structures of relational languages $\Sigma_{\mathcal{M}}$ and $\Sigma_{\mathcal{N}}$, respectively. We define the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ of $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ satisfying $\Sigma_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]} = \Sigma_{\mathcal{M}} \cup \Sigma_{\mathcal{N}}$, $M[N] = M \times N$ and the following conditions:

1) if $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$;

2) if $R \in \Sigma_{\mathcal{N}} \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $a_1 = \ldots = a_n$ and $(b_1, \ldots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$;

3) if $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \cap \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, then $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ if and only if $(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$, or $a_1 = \ldots = a_n$ and $(b_1, \ldots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$.

The theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ is called the *composition* $T_1[T_2]$ of the theories $T_1 = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ and $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

By the definition, the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is obtained replacing each element of $\mathcal{M}$ by a copy of $\mathcal{N}$.

The composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is called *E-definable* if $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ has an $\emptyset$-definable equivalence relation E whose E-classes are universes of the copies of $\mathcal{N}$ forming $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$. By the definition, each E-definable composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is represented as a E-combination [**13**] of copies of $\mathcal{N}$ with an extra-structure generated by predicates on $\mathcal{M}$ and linking elements of the copies of $\mathcal{N}$.

Notice that compositions preserve the transitivity of theories. Besides, if the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is E-definable then the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ uniquely defines the theories $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, and vice versa.

Let λ be a positive cardinality, $\mathcal{M}_\lambda = \langle M_\lambda, < \rangle$ be a discrete linearly preordered set obtained from $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}; \leq \rangle$ by replacements of all elements by antichains A having the same cardinality λ.

Clearly, the theory $T_\lambda = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_\lambda)$ is transitive, i.e., has unique 1-type.

The structure $\mathcal{M}_\lambda$ is linearly ordered if and only if $\lambda = 1$. In such a case the algebra $\mathfrak{P}_{\mathbb{Z}}$ of binary isolating formulas for the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ is generated by the monoid $\mathfrak{P}'_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}; + \rangle$ assuming that all labels for $\mathbb{Z}$ are non-negative.

Now we consider an infinite discrete circular order $\mathcal{C}$ obtained from the discrete order on $\mathbb{Z}$. Replacing elements of $\mathcal{C}$ by copies of a structure $\mathcal{N}$ with a transitive automorphism group, we obtain an E-definable composition $\mathcal{C}[\mathcal{N}]$ with a transitive theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{C}[\mathcal{N}])$. The obtained structure $\mathcal{C}[\mathcal{N}]$ can be considered as a variant of transitive arrangements of structures [**14**]. Notice that if $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ has an algebra $\mathfrak{P}$ of binary isolating formulas then T has a unique type $p \in S(T)$ and a regular labelling function $\nu(p)$ such that $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\mathbb{Z}}[\mathfrak{P}]$.

It was shown in [**1, 2**] that each algebra $\mathfrak{P}$ of binary isolating formulas of a fixed isolated type is an I-groupoid with non-negative labels and it can be realized by a structure $\mathcal{N}$, with a transitive theory, using a syntactic generic construction.

Considering the compositions $\mathcal{C}[\mathcal{N}]$, we obtain the following:

Theorem. *For any I-groupoid $\mathfrak{P}$, consisting of non-negative labels, there is a theory T with a type $p \in S(T)$ and a regular labelling function $\nu(p)$ such that $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\mathbb{Z}}[\mathfrak{P}]$.*

This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546), the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a).

References

[1] Sudoplatov S. V. Classification of Countable Models of Complete Theories. Novosibirsk : NSTU, 2018.
[2] Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.
[3] Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 408–433.
[4] Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. On algebras of distributions of binary formulas for quite o-minimal theories // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-Mathematical Series. 2015. Vol. 300, No. 2. P. 5–13.
[5] Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures // Algebra and Logic. 2017. Vol. 56, No. 1. P. 13–36.
[6] Baikalova K. A., Emelyanov D.‘Yu., Kulpeshov B. Sh., Palyutin E. A., Sudoplatov S. V. On algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered enrichments // Russian Mathematics. 2018. Vol. 62, No. 4.c P. 1–12.
[7] Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. On algebras of distributions for binary formulas for quite o-minimal theories // Algebra and Logic. 2018. Vol. 57, No. 6.
[8] Kulpeshov B. Sh., Macpherson H. D., Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. 2005. Vol. 51, No. 4. P. 377–399.
[9] Kulpeshov B. Sh. On $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures // Mathematical Logic Quarterly. 2006. Vol. 52, No. 6. P. 555–574.
[10] Kulpeshov B. Sh. Definable functions in the $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures // Siberian Mathematical Journal. 2009. Vol. 50, No. 2. P. 282–301.
[11] Kulpeshov B. Sh. On indiscernibility of a set in circularly ordered structures // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 255–266.
[12] Kulpeshov B. Sh. On almost binarity in weakly circularly minimal structures // Eurasian Math. J. 2016. Vol. 7, No. 2. P. 38–49.
[13] Sudoplatov S. V. Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2018. Vol. 24. P. 65–84.
[14] Sudoplatov S. V. Transitive arrangements of algebraic systems // Siberian Mathematical Journal. 1999. Vol. 40, No. 6. P. 1142–1145.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru
International Information Technology University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru, b.kulpeshov@iitu.kz

To the spectral theory of posets

Yu. L. Ershov, M. V. Schwidefsky

Following [**1**], we suggest two ways to define an ideal of a poset. Within the frames of the first approach, a topology defined on a set plays the principal role; it defines a partial order on this set (the specialization order). There are at least two ways to embed an arbitrary topological T_0-space into a space which is a join semilattice (and even a lattice) with respect to its specialization order—embedding into an injective space and embedding into its own essential completion. Then ideals are defined as restrictions of those of join semilattices on the original space. An inner characterization of ideals obtained in this way is presented. Along with that, sufficient conditions are found for two extensions of a topological space to be isomorphic.

The second, a more general, approach does not establish such a tight connection of partial order with topology, allows nonetheless to obtain generalizations of some results from [**2**], where they were obtained for join semilattices. For example, the Hofmann–Mislove theorem holds also in case of posets. Apart from that, we provide a characterization of [almost] sober spaces as spectra of posets with topology (or, equivalently, semitopological posets) and give a description of essential completions of posets with topology.

All the main ideas which we use go back to [**2**]. Adapting those ideas in case of arbitrary posets involves the definition of ideal in posets given in [**3**].

Both authors were supported by the fundamental research program of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences I.1.1, project 0314-2019-0002, and by RFBF, project 18-01-00624a.

References

[1] Ershov Yu. L., Schwidefsky M. V. To the spectral theory of partially ordered sets // Siberian Math. J. 60, no. 3 (2019), 450–463.

[2] Ershov Yu. L. The spectral theory of semitopological semilattices // Siberian Math. J. 44, no. 5 (2003), 791–806.

[3] Batueva C., Semenova M. Ideals in distributive posets // Cent. Eur. J. Math. 9, no. 6 (2011), 1380–1388.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: ershov@math.nsc.ru, semenova@math.nsc.ru

Sacerdote's theorem and free projective planes

N. T. Kogabaev

Denote by F_n the free group of finite rank n, $n \geqslant 2$. Let x and y be t- and s-tuples of distinct individual variables. In [**1**] Sacerdote proved the following result on elementary properties of free groups.

Theorem (Sacerdote [**1**]). *Let $m > n \geqslant 2$. Suppose that $\Phi(x, y)$ is quantifier-free formula in the language of group theory and that u is an arbitrary t-tuple of elements of F_m. Then there is a homomorphism $\psi : F_m \to F_n$ such that $\psi \restriction F_n = \mathrm{id}$, and for any s-tuple v of elements of F_n with the property $F_n \models \Phi(\psi(u), v)$ there exists an s-tuple $\widehat{v}$ of elements of F_m such that $\psi(\widehat{v}) = v$ and $F_m \models \Phi(u, \widehat{v})$.*

Applying Sacerdote's theorem one can easily obtain that any two nonabelian free groups of finite rank have the same positive theory (Merzlyakov's theorem), and that the ∀∃-theories of all nonabelian free groups of finite rank coincide.

The free projective planes were introduced by Hall in [**2**]. In [**3, 4**] Shirshov and Nikitin proved that any two free projective planes of finite rank can be mapped homomorphically onto each other. Thus, all free projective planes of finite rank have the same positive theory. In [**2, 3**] it was shown that any two free projective planes of finite rank are embeddable into each other. Therefore, they all have the same ∀-theory.

In the present paper we prove an analogue of Sacerdote's theorem for free projective planes and show that all free projective planes of finite rank have the same ∀∃-theory.

This work was supported by RFBR (grant 17-01-00247) and by the Grants Council under RF President for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-5913.2018.1).

References

[1] Sacerdote G. S. Elementary properties of free groups // Trans. Am. Math. Soc., 178, 1973, 127–138.
[2] Hall M. J. Projective planes // Trans. Am. Math. Soc., 54, 1943, 229–277.
[3] Shirshov A. I., Nikitin A. A. Theory of projective planes // Algebra and Logic, 20, 1981, 220–239.
[4] Nikitin A. A. Homomorphisms of freely generated projective planes, Algebra and Logic, 20, 1981, 277–282.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: kogabaev@math.nsc.ru

On algebras for definable families of theories

N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov

We define algebras associated with sentence-definable and diagram-definable subfamilies [**1**] as well as related characteristics connected with given families of theories. Topological properties and ranks [**2**] for these algebras are characterized.

For a given family $\mathcal{T}$ of theories we consider both the Boolean algebra $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ of sentence-definable subfamilies and the algebra $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ of diagram-definable subfamilies.

Theorem. *For any nonempty E-closed family $\mathcal{T}$, an ordinal $\alpha \geq 1$, and $n \in \omega \setminus \{0\}$, the following conditions are equivalent:*

(1) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ *and* $\mathrm{ds}(\mathcal{T}) = n$*;*

(2) *the Boolean algebra $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ is isomorphic to a direct product of n Boolean algebras $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ each of which is generated by elements of ranks $< \alpha$ such that each $\mathcal{B}_i$ contains infinitely many elements of each rank $\beta < \alpha$;*

(3) *the algebra $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ consists of infinitely many atomic elements of each rank $\beta < \alpha$, $\beta \geq 0$, and exactly n atomic elements of rank α, these n atomic elements correspond non-principal ultrafilters with respect to elements of ranks $< \alpha$.*

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP05132349, AP05132546), Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 17-01-00531), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

References

[1] Markhabatov N. D., Sudoplatov S. V. Definable subfamilies of theories, related calculi and ranks // arXiv:1901.08961v1 [math.LO], 2019.

[2] Sudoplatov S. V. Ranks for families of theories and their spectra // arXiv:1901.08464v1 [math.LO], 2019.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics,
Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: nur_24.08.93@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

On non-standardness of topological quasivarieties

A. M. Nurakunov

A topology τ on a set A is *Boolean* if the topological space (A, τ) is Hausdorff, compact and totally disconnected. A *Boolean topological algebra* is a topological algebra which topology is Boolean. A class of all Boolean topological algebras with algebraic reducts in some quasivariety is called a *topological quasivariety*. *Profinite algebras* are exactly those that are isomorphic to inverse limits of finite algebras. Such algebras are naturally equipped with Boolean topologies. For quasivariety $\mathcal{R}$, a topological quasivariety $\mathcal{R}_\tau$ is *standard* if every Boolean topological algebra with the algebraic reduct in $\mathcal{R}$ is profinite.

The main result of the talk is:

Theorem. *Let $\mathcal{M}$ be a locally finite quasivariety. And let a proper subquasivariety $\mathcal{R}$ of $\mathcal{M}$ have no covers in quasivariety lattice $Lq(\mathcal{M})$. Then topological quasivariety $\mathcal{R}_\tau$ is not standard.*

We also provide some corollaries from the theorem.

Institute of mathematics, NAS KR, Bishkek (Kyrgyzstan)
E-mail: a.nurakunov@gmail.com

Hanf's isomorphisms between predicate calculi of finite rich signatures preserving all real model-theoretic properties

M. G. Peretyat′kin

We follow the *algebraic type of definability* using $\exists \cap \forall$-formulas affecting more delicate properties of theories in comparison with the normal approach based on the definability via arbitrary first-order formulas. An approach when exclusively complete theories are studied is said to be *radical*. Within the radical approach, *model-theoretic properties* are classes of complete theories. Besides, there are *classical-type model-theoretic properties* presented by classes of arbitrary theories. By definition [1], a class $\mathfrak{p}$ of complete theories is said to be a *real model-theoretic property* (corresponding to the common practice of investigations in model theory), if $\mathfrak{p}$ is closed under algebraic isomorphisms of theories as well as under Cartesian extensions and inverse passages in the operation of a Cartesian extension of a theory.

Theorem 1. *Based on Main Theorem* [2], *we can build a computable isomorphism* $\mu\colon \mathcal{L}(PC\,(\sigma_1)) \to \mathcal{L}(PC\,(\sigma_2))$ *between the Tarski-Lindenbaum algebras of predicate calculi of any two finite rich signatures* σ_1 *and* σ_2 *preserving all real model-theoretic properties available in the common practice of investigations; moreover, the isomorphism* μ *preserves the following classical-type model-theoretic properties*:

1. *finite axiomatizability*,
2. *decidability*,
3. *computable axiomatizability*,
4. *to be a theory of a given degree* $\mathfrak{a}$ *of unsolvability* (*with respect to the* 1*-reducibility, the more, under any weaker type of reducibility*),
5. *model completeness*,
6. Π_n*-axiomatizability, for any fixed* $n \geqslant 2$, Σ_n*-axiomatizability, for any fixed* $n \geqslant 3$,
7. *existence of a finite model, existence of a finite model with a given group* G *of automorphisms, existence of a finite model* $\mathfrak{N}$ *whose group of automorphisms* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ *is included in a given family* $\mathfrak{G}$ *of finite groups.*

Theorem 1 strengthens Corollary of Main Theorem in [2]. Notice that, the definition [1] of a model-theoretic property is not applicable to the classical-type properties. Thus, a natural question arises about the possibility of any adequate definition for the informal concept of a classical-type model-theoretic property.

References

[1] Peretyatkin M. G. First-order combinatorics and a definition to the concept of a model-theoretic property with demonstration of possible applications // Algebra and Model Theory 11, Conference: Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory, Novosibirsk–Erlagol, 2017, pp. 86–101.

[2] Peretyatkin M. G. There is a virtual isomorphism between any two undecidable predicate calculi of finite signatures // Maltsev's Meeting, Novosibirsk, 2016, Abstracts, p. 208.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: peretyatkin@math.kz

X. Авторский указатель