

УДК 621.391 : 621.394/395.74

© 2019 г. А.А. Пухальский

## ГЕОМЕТРИЯ БОЛЬШИХ ОЧЕРЕДЕЙ

Предлагается подход к нахождению наиболее вероятных траекторий, ведущих к образованию длинных очередей в эргодической сети Джексона, основанный на решении уравнений Гамильтона. Так как соответствующий гамильтониан является разрывным и кусочно липшицевым, возникает необходимость использовать аппарат негладкого анализа. Обращение уравнений Гамильтона во времени приводит к уравнениям жидкостной динамики двойственной сети. Соответственно, оптимальные траектории есть обращенные во времени жидкостные траектории двойственной сети. Эти траектории с необходимостью проходят через области, удовлетворяющие некоторому условию “существенности”. Результаты проиллюстрированы на примере сети Джексона из двух узлов. Установлены также свойства субстохастических матриц, которые могут представлять самостоятельный интерес.

*Ключевые слова:* теория массового обслуживания, сеть Джексона, большие уклонения, принцип больших уклонений, оптимальные траектории, уравнения Гамильтона, двойственные марковские процессы, жидкостная динамика.

DOI: 10.1134/S0134347519020050

### § 1. Оптимальные траектории в сети Джексона и вариационные задачи с нефиксированным временем

Принцип больших уклонений позволяет находить грубые асимптотики вероятностей достижения случайным процессом нетипичных значений и наиболее вероятные сценарии осуществления редких событий. Для этого необходимо решить вариационную задачу минимизации функции уклонений (называемую также “функционалом действия”) по траекториям, которые реализуют такие события. Как правило, ищется решение уравнения Эйлера–Лагранжа (см., например, [1, 2]). В данной статье на примере сети Джексона изучаются возможности подхода, состоящего в решении уравнений Гамильтона.

Рассматривается (экспоненциальная) сеть Джексона из  $K$  узлов с матрицей маршрутизации  $P = (p_{kl})$  спектрального радиуса меньше единицы, с интенсивностями входящих потоков  $\lambda_k > 0$  и интенсивностями обслуживания в узлах  $\mu_k > 0$  (см., например, [3]). Обозначим через  $Q_k(t)$  длину очереди в узле  $k$  в момент  $t$ , и пусть  $Q(t) = (Q_1(t), \dots, Q_K(t))^T$ , где  $T$  – оператор транспонирования. Для  $J \subset \{1, 2, \dots, K\}$  обозначим через  $F_J$  множество векторов  $x = (x_1, \dots, x_K)^T$ , таких что  $x_i = 0$  при  $i \in J$  и  $x_i > 0$  при  $i \notin J$ . Как обычно принято,  $J^c = \{1, 2, \dots, K\} \setminus J$ . Обозначим также  $\pi(u) = u \ln u - u + 1$ , если  $u > 0$ , и положим  $\pi(0) = 1$ . Пусть  $\mathbf{1}_\Gamma$  представляет собой индикаторную функцию множества  $\Gamma$ , которая равна 1 на  $\Gamma$  и 0 вне  $\Gamma$ . Обозначим через  $\mathbb{S}_+^{K \times K}$  множество субстохастических (по строкам) матриц размера  $K \times K$ , через  $I$  – единичную матрицу размера  $K \times K$ , а через  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K)$  – пространство Скорохода непрерывных справа и имеющих пределы слева функций,

заданных на  $\mathbb{R}_+$  и принимающих значения в  $\mathbb{R}_+^K$ , снабженное метрикой, превращающей его в полное метрическое сепарабельное пространство (см., [4, 5]). Следующий результат получен в [6]. (Предполагается, что произведение функции  $\pi$  и числа 0 равно нулю, даже если аргумент функции  $\pi$  равен бесконечности, и что  $0/0 = 0$ .)

**Теорема 1.** Пусть  $Q(0) = 0 \in \mathbb{R}_+^K$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  процессы  $(Q(nt)/n, t \in \mathbb{R}_+)$  удовлетворяют принципу больших уклонений в  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K)$  с функцией уклонений  $\mathbf{I}(q)$ , которая для абсолютно непрерывных функций  $q = (q(t), t \in \mathbb{R}_+)$ , таких что  $q(0) = 0 \in \mathbb{R}_+^K$ , имеет вид

$$\mathbf{I}(q) = \int_0^\infty L(q(t), \dot{q}(t)) dt,$$

где

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \sum_{J \subset \{1, 2, \dots, K\}} \mathbf{1}_{F_J}(x) L_J(y), \\ L_J(y) &= \inf_{\substack{(a, d, \varrho) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{S}_+^{K \times K}: \\ y = a + (\varrho^T - I)d}} \psi_J(a, d, \varrho) \end{aligned} \quad (1.1)$$

и

$$\begin{aligned} \psi_J(a, d, \varrho) &= \sum_{k=1}^K \pi\left(\frac{a_k}{\lambda_k}\right) \lambda_k + \sum_{k \in J^c} \pi\left(\frac{d_k}{\mu_k}\right) \mu_k + \sum_{k \in J} \pi\left(\frac{d_k}{\mu_k}\right) \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) \mu_k + \\ &+ \sum_{k=1}^K d_k \left[ \sum_{\ell=1}^K \pi\left(\frac{\varrho_{k\ell}}{p_{k\ell}}\right) p_{k\ell} + \pi\left(\frac{1 - \sum_{\ell=1}^K \varrho_{k\ell}}{1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell}}\right) \left(1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если функция  $q$  не является абсолютно непрерывной или если  $q(0) \neq 0$ , то  $\mathbf{I}(q) = \infty$ .

В развернутом виде утверждение теоремы означает следующее: множества  $\{q \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K) : \mathbf{I}(q) \leq u\}$  являются компактными при всех  $u \geq 0$  и выполняются неравенства

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(q \in G) \geq - \inf_{q \in G} \mathbf{I}(q)$$

при условии, что  $G$  – открытое подмножество  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K)$ , и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(q \in F) \leq - \inf_{q \in F} \mathbf{I}(q)$$

при условии, что  $F$  – замкнутое подмножество  $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K)$ . Заметим, что формулируемый в теореме 1 принцип больших уклонений установлен также в [7, 8], где функция  $L_J$  имеет другой вид.

Из принципа больших уклонений следует, что в широких предположениях логарифм вероятности попадания процесса  $Q(nt)/n$  в заданное множество  $S$  на больших интервалах времени близок к  $-\inf_{q \in S'} \mathbf{I}(q)$ , где  $S' = \{q : q(0) = 0, q(T) \in S \text{ для некоторого } T > 0\}$ . Если последний инфимум достигается единственной функцией  $q$ , то попадание  $Q(nt)/n$  в множество  $S$  происходит с вероятностью, близкой к единице, движением в малой окрестности этой функции. В данной статье основное внима-

ние уделяется вопросу нахождения для эргодической сети Джексона такой функции  $q$ , начинающейся в начале координат и достигающей фиксированной точки в некоторый момент  $T$ , для которой  $\int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$  минимален. Показано, что обращение во времени уравнений Гамильтона для оптимальных траекторий приводит к уравнениям жидкостной динамики двойственной сети. Это наблюдение позволяет подтвердить для эргодической сети Джексона справедливость “фольклорной” теоремы, утверждающей, что наиболее вероятная траектория, обеспечивающая “большое уклонение” эргодического марковского процесса, является обращенной во времени траекторией жидкостного предела двойственного процесса (см., например, [9]). (В статфизической литературе соответствующее свойство известно как обобщенный принцип Онзагера – Махлупа: траектория флуктуации есть обращенная во времени траектория релаксации двойственной динамики; см., например, [10].) Показано, что найденная оптимальная траектория представляет собой предел (условного) закона больших чисел при условии, что длины очередей в сети достигают аномально больших значений. Найдено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого грань  $F_J$  может содержать часть оптимальной траектории, а следовательно, жидкостной траектории. В заключение на примере эргодической сети Джексона из двух узлов рассматриваются геометрические аспекты построения оптимальных траекторий. Кроме того, в статье установлены свойства субстохастических матриц, которые могут представлять самостоятельный интерес.

Так как функции  $L_J(y)$  являются выпуклыми по лемме 4.2 в [6], то в силу неравенства Йенсена оптимальное движение в области с постоянной динамикой, т.е. в грани  $F_J$ , происходит по прямой. Заметим также, что если  $J' \subset J''$ , то  $\psi_{J'}(a, d, \rho) \geq \psi_{J''}(a, d, \rho)$ , и как следствие,  $L_{J'}(y) \geq L_{J''}(y)$ . Поэтому если начальная и конечная точки участка траектории принадлежат  $F_J$ , то движение по прямой “выгоднее”, чем движение через смежные области  $F_{J'}$ , где  $J' \subset J$ . Более того, будет показано, что оптимальные траектории состоят из конечного числа отрезков, которые принадлежат граням  $F_J$  с убывающими по включению множествами  $J$ , если не считать конечную точку, для которой свойство убывания  $J$  может не выполняться. В частности, каждая из граней  $F_J$  содержит не более одного отрезка.

Для нахождения оптимальных траекторий в гранях  $F_J$  будет использоваться следующий общий результат. Для функции  $f(y)$ , удовлетворяющей условию Липшица локально, будем обозначать через  $\partial f(y)$  обобщенный градиент  $f$  в точке  $y$  (см. [11]). Если  $f$  выпукла, что верно для приложений в данной статье, то обобщенный градиент совпадает с субдифференциалом (см., например, [12]). Определение конуса, нормального к непустому замкнутому множеству в точке этого множества, как сопряженного к касательному конусу в этой точке можно найти в [11, с. 19]. Для случая выпуклого множества определение сводится к определению, данному в [12, с. 32] как совокупности векторов, нормальных к множеству в рассматриваемой точке, где вектор  $z$  называется нормальным к выпуклому множеству  $S$  в точке  $x \in S$ , если  $z \cdot (y - x) \leq 0$  для всех  $y \in S$ . (Здесь и далее  $a \cdot b$  используется для обозначения скалярного произведения векторов  $a$  и  $b$ . Кроме того, сокращение “п.в.” означает “почти всюду по мере Лебега”).

*Лемма 1. Пусть  $L(x, y)$  – функция из  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  в  $\mathbb{R}$ , удовлетворяющая условию Липшица по  $(x, y)$  локально и выпуклая по  $y$ . Предположим, что функция*

$$H(x, p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^k} (p \cdot y - L(x, y)) \quad (1.3)$$

*удовлетворяет условию Липшица локально (по  $(x, p)$ ). Пусть  $g(x)$  – полунепрерывная сверху функция, удовлетворяющая условию Липшица локально. Пусть  $S$  –*

выпуклое замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^k$  и  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ . Если минимум  $\int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt$  по  $T \geq 0$  и по абсолютно непрерывным функциям  $x(t)$ , таким что  $x(0) = x_0$ ,  $x(T) \in S$  и  $g(x(t)) \leq 0$  для всех  $t \leq T$ , достигается для  $T = T^*$  и  $x(t) = x^*(t)$ , то существуют мера  $\mu$  на  $[0, T^*]$ , а также  $\mu$ -измеримая функция  $\gamma(t)$  и абсолютно непрерывная функция  $p(t)$ , обе принимающие значения в  $\mathbb{R}^k$ , такие что имеют место следующие свойства:

1.  $\gamma(t) \in \partial^>g(x^*(t))$  для  $\mu$ -почти всех  $t \in [0, T^*]$ , и носитель меры  $\mu$  содержится в множестве  $\{t \in [0, T^*] : \partial^>g(x^*(t)) \neq \emptyset\}$ , где  $\partial^>g(x)$  представляет собой выпуклую оболочку пределов последовательностей  $\gamma_i$ , удовлетворяющих условиям  $\gamma_i \in \partial g(x_i)$ ,  $x_i \rightarrow x$ ,  $g(x_i) > 0$ ;

2.  $\left[ \begin{matrix} -\dot{p}(t) \\ \dot{x}^*(t) \end{matrix} \right] \in \partial H \left( x^*(t), p(t) + \int_0^t \gamma(s) d\mu(s) \right)$  п.в. на  $[0, T^*]$ ;

3.  $H \left( x^*(t), p(t) + \int_0^t \gamma(s) d\mu(s) \right) = 0$  на  $[0, T^*]$ ;

4.  $p(T^*) + \int_0^{T^*} \gamma(s) d\mu(s) \in -N_S(x^*(T^*))$ ,

где  $N_S(x^*(T^*))$  – нормальный конус к  $S$  в точке  $x^*(T^*)$ .

Доказательство леммы см. в Приложении. Ее применение облегчается тем обстоятельством, что в отличие от лагранжиана  $L_J$  соответствующий гамильтониан  $H_J(\theta) = \sup_{y \in \mathbb{R}^K} (\theta \cdot y - L_J(y))$ , где  $\theta \in \mathbb{R}^K$ , имеет сравнительно простой вид. Пусть для

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)^T$  и  $k = 1, 2, \dots, K$

$$h_k(\theta) = e^{-\theta_k} \left( \sum_{\ell=1}^K (e^{\theta_\ell} - 1) p_{k\ell} + 1 \right) - 1. \quad (1.4)$$

Вычисления, приводимые в Приложении, показывают, что

$$L_J(y) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^K} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k y_k - \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k - \sum_{k \in J} h_k(\theta)^+ \mu_k - \sum_{k \in J^c} h_k(\theta) \mu_k \right), \quad (1.5)$$

где используется обозначение  $u^+ = \max(u, 0)$ . Отсюда, в частности, вытекает, что функция  $L_J$  выпукла и полунепрерывна снизу. Кроме того,

$$H_J(\theta) = \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k + \sum_{k \in J} h_k(\theta)^+ \mu_k + \sum_{k \in J^c} h_k(\theta) \mu_k. \quad (1.6)$$

Обозначим также

$$H_0(\theta) = H_\emptyset(\theta) = \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k + \sum_{k=1}^K h_k(\theta) \mu_k. \quad (1.7)$$

Следующее утверждение вытекает из леммы 1 с  $L(x, y) = L_J(y)$  и  $g(x) = \sum_{i \in J} x_i^2$ , так что мера  $\mu$  равна нулю.

**Лемма 2.** *Оптимальное движение в грани  $F_J$  происходит с постоянным импульсом  $\theta$ , таким что  $H_J(\theta) = 0$ , а уравнение для оптимальной траектории имеет*

вид

$$\dot{q}(t) \in \partial H_J(\theta) \quad \text{n.в.} \quad (1.8)$$

Эта лемма оставляет открытым вопрос о существовании оптимальных траекторий. К сожалению, в отличие от случая фиксированного интервала времени, в рассматриваемой постановке существование оптимальной траектории не следует из компактности множеств  $\{q : \mathbf{I}(q) \leq u\}$ , где  $u \geq 0$ . Далее, как правило, будем предполагать, что оптимальная траектория существует, и будем исследовать ее свойства. Существование и единственность будут доказаны с помощью *ad hoc* рассуждений.

## § 2. Свойства гамильтониана

В этом параграфе найдены кандидаты для оптимальных импульсов  $\theta$  при движении в гранях  $F_J$ . Предварительно введем некоторые обозначения. Для квадратной матрицы  $B$  через  $B(i|j)$  обозначается матрица, получающаяся из  $B$  выбрасыванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Аналогично, через  $b_{\ell}$  обозначим  $\ell$ -й столбец матрицы  $B$  без  $\ell$ -го элемента, а через  $b_{\ell}$  —  $\ell$ -ю строку без  $\ell$ -го элемента.

Пусть вектор  $\theta^{(m)} = (\theta_1^{(m)}, \dots, \theta_K^{(m)})^T \neq 0$ , где  $m \in \{1, 2, \dots, K\}$ , удовлетворяет уравнениям  $h_k(\theta^{(m)}) = 0$  при  $k \neq m$  и  $H_0(\theta^{(m)}) = 0$ . В силу (1.4) отношения  $a_{m\ell} = (e^{\theta_{\ell}^{(m)}} - 1)/(e^{\theta_m^{(m)}} - 1)$  при  $m \neq \ell$  удовлетворяют системе уравнений

$$a_{mk} - \sum_{\ell \neq m} a_{m\ell} p_{k\ell} = p_{km}, \quad k \neq m. \quad (2.1)$$

(Заметим, что если  $\theta_m^{(m)} = 0$ , то  $\theta_k^{(m)} = 0$  для всех  $k$  в силу (1.4).) Уравнения (2.1) имеют единственное решение

$$a_{m.}^T = ((I - P)(m|m))^{-1} p_{.m}. \quad (2.2)$$

Кроме того,  $a_{mm} = 1$ . Числа  $a_{m\ell}$  определяются этими условиями единственным образом и являются неотрицательными. Подстановка в условие  $H_0(\theta^{(m)}) = 0$  (см. (1.7)) показывает, что

$$e^{\theta_m^{(m)}} = \frac{1 - \sum_{\ell=1}^K a_{m\ell} p_{m\ell}}{\sum_{\ell=1}^K a_{m\ell} \lambda_{\ell}} \mu_m. \quad (2.3)$$

Обозначим  $\theta^* = (\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(2)}, \dots, \theta_K^{(K)})^T$  и

$$\nu = (I - P^T)^{-1} \lambda, \quad (2.4)$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)^T$ . В стационарном режиме  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_K)^T$  — это вектор средних потоков через узлы сети. Положим  $\rho_m = \nu_m / \mu_m$ , где  $m \in \{1, 2, \dots, K\}$ . Следующая теорема показывает, в частности, что точка пересечения гиперплоскостей  $\{\theta : \theta_m = \theta_m^{(m)}\}$  лежит на поверхности  $H_0(\theta) = 0$ .

**Теорема 2.** *Имеют место соотношения  $H_0(\theta^*) = 0$  и  $e^{-\theta_m^{(m)}} = \rho_m$  для  $m \in \{1, 2, \dots, K\}$ .*

Предпошлем доказательству ряд лемм. Будем предполагать, что  $B = (b_{ij})$  —  $(K \times K)$ -матрица с ненулевым определителем и ненулевыми главными минорами. Ниже  $\text{adj}$  используется для обозначения присоединенной матрицы,  $\det$  — для обозначения определителя, а через  $M_{ij}(\ell|\ell)$  обозначается минор  $(i, j)$ -го элемента мат-

рицы  $B(\ell | \ell)$ . Для  $\ell \neq m$  положим

$$f_{m\ell} = \begin{cases} e_m, & \text{если } m < \ell, \\ e_{m-1}, & \text{если } m > \ell, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $e_i$  —  $i$ -й вектор стандартного базиса в  $\mathbb{R}^{K-1}$ .

Лемма 3. Если  $\ell \neq m$ , то

$$f_{m\ell}^T \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell} = (-1)^{m+\ell+1} \det(B(\ell | m)).$$

Доказательство. Пусть  $\ell > m$ . Имеем

$$e_m^T \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell} = \sum_{j=1}^{\ell-1} (-1)^{m+j} M_{jm}(\ell | \ell) b_{j\ell} + \sum_{j=\ell+1}^K (-1)^{m+j-1} M_{j-1,m}(\ell | \ell) b_{j\ell}.$$

Так как  $M_{jm}(\ell | \ell) = M_{j,\ell-1}(\ell | m)$  при  $j \leq \ell - 1$  и  $M_{j-1,m}(\ell | \ell) = M_{j-1,\ell-1}(\ell | m)$  при  $j \geq \ell + 1$ , получаем, что  $e_m^T \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell} = (-1)^{m+\ell+1} \det(B(\ell | m))$ .

Рассмотрим случай  $\ell < m$ . Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\begin{aligned} e_{m-1}^T \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell} &= \sum_{j=1}^{\ell-1} (-1)^{m+j-1} M_{j,m-1}(\ell | \ell) b_{j\ell} + \\ &+ \sum_{j=\ell+1}^K (-1)^{m+j} M_{j-1,m-1}(\ell | \ell) b_{j\ell} = \sum_{j=1}^{\ell-1} (-1)^{m+j-1} M_{j\ell}(\ell | m) b_{j\ell} + \\ &+ \sum_{j=\ell+1}^K (-1)^{m+j} M_{j-1,\ell}(\ell | m) b_{j\ell} = (-1)^{m+\ell+1} \det(B(\ell | m)). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Лемма 4. Для произвольного  $\ell \in \{1, 2, \dots, K\}$  имеет место равенство

$$b_{\ell\ell} \det(B(\ell | \ell)) - b_{\cdot\ell} \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell} = \det(B).$$

Доказательство. Так как

$$b_{\cdot\ell} \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell} = \sum_{j \neq \ell} b_{\ell j} f_{j\ell}^T \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell},$$

то применяя лемму 3, получаем

$$b_{\cdot\ell} \operatorname{adj}(B(\ell | \ell))b_{\cdot\ell} = \sum_{j \neq \ell} b_{\ell j} (-1)^{j+\ell+1} \det(B(\ell | j)) = -\det(B) + b_{\ell\ell} \det(B(\ell | \ell)). \quad \blacktriangle$$

Лемма 5. Имеют место равенства

$$\frac{b_{m\cdot}(B(m | m))^{-1}b_{\cdot m}}{b_{mm} - b_{m\cdot}(B(m | m))^{-1}b_{\cdot m}} = \sum_{\ell \neq m} \frac{b_{\ell m} f_{m\ell}^T (B(\ell | \ell))^{-1} b_{\cdot\ell}}{b_{\ell\ell} - b_{\ell\cdot}(B(\ell | \ell))^{-1} b_{\cdot\ell}} \quad (2.6)$$

и

$$\begin{aligned} -\frac{b_{mm} f_{\ell m}^T (B(m | m))^{-1} b_{\cdot m}}{b_{mm} - b_{m\cdot}(B(m | m))^{-1} b_{\cdot m}} &= -\frac{b_{\ell m}}{b_{\ell\ell} - b_{\ell\cdot}(B(\ell | \ell))^{-1} b_{\cdot\ell}} + \\ &+ \sum_{\substack{k \neq \ell, \\ k \neq m}} \frac{b_{km} f_{ik}^T (B(k | k))^{-1} b_{\cdot k}}{b_{kk} - b_{k\cdot}(B(k | k))^{-1} b_{\cdot k}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство. Умножая числители и знаменатели в обеих частях (2.6) на определители обращаемых матриц, видим, что (2.6) равносильно равенству

$$\begin{aligned} & \frac{b_m \cdot \text{adj}(B(m|m))b_m}{b_{mm} \det(B(m|m)) - b_m \cdot \text{adj}(B(m|m))b_m} = \\ & = \sum_{\ell \neq m} \frac{b_{\ell m} f_{m\ell}^T \text{adj}(B(\ell|\ell))b_\ell}{b_{\ell\ell} \det(B(\ell|\ell)) - b_\ell \cdot \text{adj}(B(\ell|\ell))b_\ell}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

По лемме 4 знаменатели в (2.8) равны  $\det(B) \neq 0$ . Поэтому нужно доказать, что

$$b_m \cdot \text{adj}(B(m|m))b_m = \sum_{\ell \neq m} b_{\ell m} f_{m\ell}^T \text{adj}(B(\ell|\ell))b_\ell.$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell \neq m} b_{\ell m} f_{m\ell}^T \text{adj}(B(\ell|\ell))b_\ell = \sum_{\ell \neq m} b_{\ell m} (-1)^{m+\ell+1} \det(B(\ell|m)) = \\ & = -\det(B) + b_{mm} \det(B(m|m)), \end{aligned}$$

что завершает доказательство (2.6) в силу леммы 4.

Аналогично доказательству (2.6) имеем, что (2.7) эквивалентно равенству

$$-b_{mm} f_{\ell m}^T \text{adj}(B(m|m))b_m = -b_{\ell m} \det(B(\ell|\ell)) + \sum_{\substack{k \neq \ell, \\ k \neq m}} b_{km} f_{ik}^T \text{adj}(B(k|k))b_k. \quad (2.9)$$

По лемме 3

$$\sum_{k \neq \ell} b_{km} f_{ik}^T \text{adj}(B(k|k))b_k = \sum_{k \neq \ell} b_{km} (-1)^{k+\ell+1} \det(B(k|\ell)). \quad (2.10)$$

Так как  $\sum_{k=1}^K b_{km} (-1)^{k+\ell} \det(B(k|\ell)) = 0$  в силу того, что сумма в левой части является определителем матрицы, получающейся из матрицы  $B$  заменой  $\ell$ -го столбца на  $m$ -й, то правая часть (2.10) равна  $b_{\ell m} \det(B(\ell|\ell))$ . Полученное равенство эквивалентно (2.9).  $\blacktriangle$

Доказательство теоремы 2. Будем доказывать сначала второе утверждение. Покажем, что

$$\frac{1}{1 - \sum_{\ell=1}^K a_{m\ell} p_{m\ell}} = 1 + \sum_{k=1}^K \frac{a_{km} p_{km}}{1 - \sum_{\ell=1}^K a_{k\ell} p_{k\ell}} \quad (2.11)$$

и

$$\frac{a_{m\ell}}{1 - \sum_{k=1}^K a_{mk} p_{mk}} = \sum_{k=1}^K \frac{a_{k\ell} p_{km}}{1 - \sum_{\ell'=1}^K a_{k\ell'} p_{k\ell'}} \quad \text{при условии, что } \ell \neq m. \quad (2.12)$$

Так как  $a_{mm} = 1$ , то равенство (2.11) можно представить в виде

$$\frac{\sum_{\ell \neq m} a_{m\ell} p_{m\ell}}{1 - p_{mm} - \sum_{\ell \neq m} a_{m\ell} p_{m\ell}} = \sum_{k \neq m} \frac{a_{km} p_{km}}{1 - p_{kk} - \sum_{\ell \neq k} a_{k\ell} p_{k\ell}}. \quad (2.13)$$

В силу равенств (2.1), (2.2) и (2.5) имеем  $a_{m\ell} = f_{\ell m}^T ((I - P)(m|m))^{-1} p_m$  и  $a_{km} = f_{mk}^T ((I - P)(k|k))^{-1} p_k$ . Это позволяет представить (2.13) в виде

$$\frac{p_m \cdot ((I - P)(m | m))^{-1} p_{\cdot m}}{1 - p_{mm} - p_m \cdot ((I - P)(m | m))^{-1} p_{\cdot m}} = \sum_{k \neq m} \frac{p_{km} f_{mk}^T ((I - P)(\ell | \ell))^{-1} p_{\cdot k}}{1 - p_{kk} - p_k \cdot ((I - P)(\ell | \ell))^{-1} p_{\cdot k}},$$

что является частным случаем (2.6) в утверждении леммы 5 при  $B = I - P$ . Равенство (2.11) доказано. Докажем (2.12). Перепишем это равенство в виде

$$\begin{aligned} \frac{a_{m\ell}(1 - p_{mm})}{1 - p_{mm} - \sum_{k \neq m} a_{mk} p_{mk}} &= \frac{p_{\ell m}}{1 - p_{\ell\ell} - \sum_{\ell' \neq \ell} a_{\ell\ell'} p_{\ell\ell'}} + \\ &+ \sum_{\substack{k \neq \ell, \\ k \neq m}} \frac{a_{k\ell} p_{km}}{1 - p_{kk} - \sum_{\ell' \neq k} a_{k\ell'} p_{k\ell'}}, \quad \text{где } \ell \neq m. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как и выше, в силу (2.2) и (2.5) равенство (2.14) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} \frac{(1 - p_{mm}) f_{\ell m}^T ((I - P)(m | m))^{-1} p_{\cdot m}}{1 - p_{mm} - p_m \cdot ((I - P)(m | m))^{-1} p_{\cdot m}} &= \frac{p_{\ell m}}{1 - p_{\ell\ell} - p_{\ell} \cdot ((I - P)(\ell | \ell))^{-1} p_{\cdot \ell}} + \\ &+ \sum_{\substack{k \neq \ell, \\ k \neq m}} \frac{p_{km} f_{lk}^T ((I - P)(k | k))^{-1} p_{\cdot k}}{1 - p_{kk} - p_k \cdot ((I - P)(k | k))^{-1} p_{\cdot k}} \end{aligned}$$

и выполнено в силу (2.7) в утверждении леммы 5. Это завершает доказательство равенства (2.12).

Положим

$$c_{mk} = \frac{a_{mk}}{1 - \sum_{\ell=1}^K a_{m\ell} p_{m\ell}} \quad (2.15)$$

и  $C = (c_{mk})$ . Покажем, что

$$C = (I - P^T)^{-1}. \quad (2.16)$$

В силу (2.15) соотношение (2.12) принимает вид  $c_{m\ell} = \sum_{k=1}^K p_{km} c_{k\ell}$ , так что  $(m, \ell)$ -элементы матриц  $C$  и  $P^T C$  совпадают, если  $m \neq \ell$ . Так как  $a_{mm} = 1$ , соотношение (2.15) позволяет переписать (2.11) в виде  $c_{mm} = 1 + \sum_{k=1}^K p_{km} c_{km}$ . Следовательно, диагональные элементы матриц  $C$  и  $I + P^T C$  совпадают. Таким образом,  $C = I + P^T C$ , что доказывает (2.16). Так как  $a_{mm} = 1$ , то в силу (2.15) имеем  $1 - \sum_{\ell=1}^K a_{m\ell} p_{m\ell} = 1/c_{mm}$  и

$$a_{mk} = \frac{c_{mk}}{c_{mm}}. \quad (2.17)$$

С учетом (2.3), (2.4) и (2.16) получаем  $e^{\theta^{(m)}} = \mu_m / \sum_{k=1}^K c_{mk} \lambda_k = \mu_m / \nu_m = 1/\rho_m$ .

Для завершения доказательства теоремы 2 заметим, что в силу (1.4), (1.7) и определения  $\theta^*$

$$H_0(\theta^*) = \sum_{m=1}^K (e^{\theta^{(m)}} - 1) \left( \lambda_m + \sum_{k=1}^K e^{-\theta^{(k)}} p_{km} \mu_k - e^{-\theta^{(m)}} \mu_m \right).$$

Так как  $e^{-\theta^{(k)}} = \nu_k / \mu_k$  и  $\nu = \lambda + P^T \nu$ , то  $\lambda_m + \sum_{k=1}^K e^{-\theta^{(k)}} p_{km} \mu_k - e^{-\theta^{(m)}} \mu_m = 0$ .  $\blacktriangle$

Пусть  $\tilde{\theta}^{(J)} = (\tilde{\theta}_1^{(J)}, \dots, \tilde{\theta}_K^{(J)})^T$  задается соотношениями  $\tilde{\theta}_k^{(J)} = \theta_k^{(k)}$ , если  $k \notin J$ , и  $h_k(\tilde{\theta}^{(J)}) = 0$  при  $k \in J$ . Заметим, что если  $J = \{1, 2, \dots, K\} \setminus \{m\}$ , то  $\tilde{\theta}^{(J)} = \theta^{(m)}$ . В силу (1.6) и (1.7)

$$H_J(\tilde{\theta}^{(J)}) = H_0(\tilde{\theta}^{(J)}). \quad (2.18)$$

Если движение происходит в гранях  $F_{J_1}, \dots, F_{J_k}$  со смещениями  $s_1, \dots, s_k$  в течение промежутков времени  $t_1, \dots, t_k$  соответственно, то поскольку  $H_0(\tilde{\theta}^{(J)}) = 0$ , как будет показано в лемме 6, а также поскольку  $\tilde{\theta}^{(J)} \cdot x = \theta^* \cdot x$  при  $x \in F_J$  и имеет место (2.18), затраты равны

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^k t_\ell L_{J_\ell} \left( \frac{s_\ell}{t_\ell} \right) &= \sum_{\ell=1}^k \sup_{\theta \in \mathbb{R}^K} (\theta \cdot s_\ell - t_\ell H_{J_\ell}(\theta)) \geq \sum_{\ell=1}^k (\tilde{\theta}^{(J_\ell)} \cdot s_\ell - t_\ell H_{J_\ell}(\tilde{\theta}^{(J_\ell)})) = \\ &= \sum_{\ell=1}^k (\theta^* \cdot s_\ell - t_\ell H_0(\tilde{\theta}^{(J_\ell)})) = \theta^* \cdot (s_1 + \dots + s_k) = \theta^* \cdot r, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где через  $r$  обозначена точка, в которую необходимо попасть. В общем случае, если  $q(0) = 0$  и  $q(t) = r$ , то с учетом того, что  $\dot{q}_k(s) = 0$  для  $k \in J$  п.в. на множестве  $\{s : q(s) \in F_J\}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^t L(q(s), \dot{q}(s)) ds &= \sum_J \int_0^t \mathbf{1}_{F_J}(q(s)) L_J(\dot{q}(s)) ds \geq \\ &\geq \sum_J \int_0^t \mathbf{1}_{F_J}(q(s)) (\tilde{\theta}^{(J)} \cdot \dot{q}(s) - H_0(\tilde{\theta}^{(J)})) ds = \\ &= \sum_J \int_0^t \mathbf{1}_{F_J}(q(s)) (\theta^* \cdot \dot{q}(s) - H_0(\tilde{\theta}^{(J)})) ds = \theta^* \cdot r. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Если траектория из  $O$  в  $r$  такова, что в (2.19) и (2.20) достигаются равенства, т.е. выполнены равенства (1.8) с  $\theta = \tilde{\theta}^{(J)}$ , то эта траектория оптимальна. С другой стороны, поскольку функции  $H_J(\theta)$  строго выпуклы, так что их производные инъективны, если для некоторого  $J$  с  $\int_0^t \mathbf{1}_{F_J}(q(s)) ds > 0$  не выполнено соотношение (1.8) с  $\theta = \tilde{\theta}^{(J)}$ , то неравенство в (2.20) является строгим. Поэтому для достижения нижней границы в (2.20) необходимо, чтобы движение в грани  $F_J$  п.в. происходило с импульсом  $\theta = \tilde{\theta}^{(J)}$ .

Следующая лемма обобщает соотношение  $H_0(\theta^*) = 0$ .

*Лемма 6. Имеет место равенство  $H_0(\tilde{\theta}^{(J)}) = 0$ .*

*Доказательство.* В силу (1.4), (1.7), определения  $\tilde{\theta}^{(J)}$  и равенства  $e^{-\theta_m^{(m)}} = \rho_m$  имеем

$$\begin{aligned} H_0(\tilde{\theta}^{(J)}) &= \sum_{m \notin J} (e^{\theta_m^{(m)}} - 1) \lambda_m + \sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) \lambda_m + \\ &+ \sum_{k \notin J} \left( e^{-\theta_k^{(k)}} \left( \sum_{m \notin J} (e^{\theta_m^{(m)}} - 1) p_{km} + \sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) p_{km} + 1 \right) - 1 \right) \mu_k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m \notin J} (e^{\theta_m^{(m)}} - 1) \left( \lambda_m + \sum_{k \notin J} e^{-\theta_k^{(k)}} p_{km} \mu_k - e^{-\theta_m^{(m)}} \mu_m \right) + \sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) \times \\
&\times \left( \lambda_m + \sum_{k \notin J} e^{-\theta_k^{(k)}} p_{km} \mu_k \right) = \sum_{m \notin J} (e^{\theta_m^{(m)}} - 1) \left( \lambda_m + \sum_{k \notin J} p_{km} \nu_k - \nu_m \right) + \\
&+ \sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) \left( \lambda_m + \sum_{k \notin J} p_{km} \nu_k \right). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Так как ввиду определения  $\nu$  (см. (2.4))  $\lambda_m + \sum_{k \notin J} p_{km} \nu_k = \nu_m - \sum_{k \in J} p_{km} \nu_k$ , то

$$\begin{aligned}
&\sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) \left( \lambda_m + \sum_{k \notin J} p_{km} \nu_k \right) = \\
&= \sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) \nu_m - \sum_{k \in J} \nu_k \sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) p_{km}. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Так как  $h_k(\tilde{\theta}^{(J)}) = 0$  при  $k \in J$ , то

$$\sum_{m \in J} (e^{\tilde{\theta}_m^{(J)}} - 1) p_{km} = e^{\tilde{\theta}_k^{(J)}} - 1 - \sum_{m \notin J} (e^{\theta_m^{(m)}} - 1) p_{km}. \tag{2.23}$$

Таким образом, правая часть (2.22) равна  $\sum_{m \notin J} (e^{\theta_m^{(m)}} - 1) \sum_{k \in J} p_{km} \nu_k$ . В силу (2.21)

$$H_0(\tilde{\theta}^{(J)}) = \sum_{m \notin J} (e^{\theta_m^{(m)}} - 1) \left( \lambda_m + \sum_{k=1}^K p_{km} \nu_k - \nu_m \right).$$

Так как  $\lambda_m + \sum_{k=1}^K p_{km} \nu_k - \nu_m = 0$  в силу (2.4), то  $H_0(\tilde{\theta}^{(J)}) = 0$ .  $\blacktriangle$

### § 3. Существенные и несущественные грани

В этом параграфе исследуется движение в гранях и приводится основной результат. Скажем, что грань  $F_J$  является существенной, если существует траектория, проходящая через  $F_J$  и удовлетворяющая на этом множестве утверждению леммы 2 с  $\tilde{\theta}^{(J)}$ . В противном случае грань называется несущественной. Поскольку  $\dot{q}_k(t) = 0$  п.в. при  $k \in J$ , если грань  $F_J$  существенна, то

$$0 \in \partial_k H_J(\tilde{\theta}^{(J)}) \quad \text{при } k \in J, \tag{3.1}$$

где через  $\partial_k H_J(\tilde{\theta}^{(J)})$  обозначено множество, получающееся проектированием множества  $\partial H_J(\tilde{\theta}^{(J)})$  на  $k$ -ю координатную ось. Заметим (см. (1.4)), что

$$\partial_k h_k(\theta) = -e^{-\theta_k} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} + \sum_{\ell \neq k} e^{\theta_\ell} p_{k\ell} \right) \tag{3.2}$$

и

$$\partial_\ell h_k(\theta) = e^{-\theta_k} e^{\theta_\ell} p_{k\ell}, \quad \ell \neq k. \tag{3.3}$$

Как следствие, получаем

$$\partial_\ell h_k(\theta) > 0, \quad \text{если } \ell \neq k \quad \text{и} \quad \partial_k h_k(\theta) < 0. \tag{3.4}$$

Заметим также, что если  $h_k(\theta) = 0$ , то  $\partial h_k(\theta)^+$  – это множество векторов  $\alpha \nabla h_k(\theta)$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ .

В силу (1.8) с  $\theta = \tilde{\theta}^{(J)}$ , (3.2), (3.3) и равенства  $h_\ell(\tilde{\theta}^{(J)}) = 0$  при  $\ell \in J$ , если грань  $F_J$  является существенной, то существуют числа  $\alpha_\ell^{(J)}$ ,  $\ell \in J$ , из интервала  $[0, 1]$ , такие что при  $k \in J$  п.в.

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{q}_k(t) = e^{\tilde{\theta}_k^{(J)}} \lambda_k + \sum_{\ell \notin J} \partial_k h_\ell(\tilde{\theta}^{(J)}) \mu_\ell + \sum_{\ell \in J} \alpha_\ell^{(J)} \partial_k h_\ell(\tilde{\theta}^{(J)}) \mu_\ell = \\ &= e^{\tilde{\theta}_k^{(J)}} \lambda_k + \sum_{\ell \notin J} e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} e^{\tilde{\theta}_k^{(J)}} p_{lk} \mu_\ell + \sum_{\substack{\ell \in J, \\ \ell \neq k}} \alpha_\ell^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} e^{\tilde{\theta}_k^{(J)}} p_{lk} \mu_\ell - \\ &- \alpha_k^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_k^{(J)}} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} + \sum_{\ell \neq k} e^{\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} p_{k\ell} \right) \mu_k. \end{aligned}$$

Так как  $h_k(\tilde{\theta}^{(J)}) = 0$ , то

$$1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} + \sum_{\ell \neq k} e^{\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} p_{k\ell} = e^{\tilde{\theta}_k^{(J)}} (1 - p_{kk}). \quad (3.5)$$

Поэтому требуется, чтобы при  $k \in J$

$$\lambda_k + \sum_{\ell \notin J} p_{lk} \nu_\ell + \sum_{\ell \in J} \alpha_\ell^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} p_{lk} \mu_\ell - \alpha_k^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_k^{(J)}} \mu_k = 0.$$

Так как  $\lambda_k + \sum_{\ell \notin J} p_{lk} \nu_\ell = \nu_k - \sum_{\ell \in J} p_{lk} \nu_\ell$ , то эквивалентным образом

$$\alpha_k^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_k^{(J)}} \mu_k - \sum_{\ell \in J} \alpha_\ell^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} p_{lk} \mu_\ell = \nu_k - \sum_{\ell \in J} p_{lk} \nu_\ell.$$

В векторной форме –

$$(I - P^T)(J^c | J^c)(\alpha_\ell^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} \mu_\ell, \ell \in J)^T = (I - P^T)(J^c | J^c)(\nu_\ell, \ell \in J)^T.$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: для матрицы  $W$  через  $W(U | V)$  обозначена матрица, получающаяся из  $W$  выбрасыванием строк и столбцов с номерами из множеств  $U$  и  $V$  соответственно.

Так как матрица  $(I - P^T)(J^c | J^c)$  невырождена, то при  $\ell \in J$

$$\alpha_\ell^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} \mu_\ell = \nu_\ell. \quad (3.6)$$

Поэтому для того чтобы грань  $F_J$  была существенной, необходимо, чтобы

$$\tilde{\rho}_\ell^{(J)} \geq \rho_\ell, \quad \ell \in J, \quad (3.7)$$

где использовано обозначение

$$\tilde{\rho}_\ell^{(J)} = e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}}. \quad (3.8)$$

Так как в силу (2.23)

$$(I - P)(J^c | J^c)((\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1} - 1, \ell \in J)^T = P(J^c | J)(\rho_\ell^{-1} - 1, \ell \notin J)^T,$$

то

$$((\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1} - 1, \ell \in J)^T = ((I - P)(J^c | J^c))^{-1} P(J^c | J)(\rho_\ell^{-1} - 1, \ell \notin J)^T. \quad (3.9)$$

Так как матрица  $((I - P)(J^c | J^c))^{-1} P(J^c | J)$  неотрицательна, то  $\tilde{\rho}_\ell^{(J)} \leq 1$  при  $\ell \in J$ . Кроме того, условие существенности (3.7) эквивалентно тому, что покомпонентно

$$(\rho_\ell^{-1} - 1, \ell \in J)^T \geq ((I - P)(J^c | J^c))^{-1} P(J^c | J)(\rho_\ell^{-1} - 1, \ell \notin J)^T. \quad (3.10)$$

Если  $k \notin J$ , то в силу (1.8) с  $\theta = \tilde{\theta}^{(J)}$ , (2.4), (3.2), (3.3) и (3.6) для траектории с импульсом  $\tilde{\theta}^{(J)}$  в грани  $F_J$  имеем

$$\begin{aligned} \dot{q}_k(t) &= e^{\theta_k^{(k)}} \lambda_k + \sum_{\substack{\ell \notin J, \\ \ell \neq k}} e^{-\theta_\ell^{(\ell)}} e^{\theta_k^{(k)}} p_{lk} \mu_\ell + \sum_{\ell \in J} \alpha_\ell^{(J)} e^{-\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} e^{\theta_k^{(k)}} p_{lk} \mu_\ell - \\ &- e^{-\theta_k^{(k)}} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} + \sum_{\ell \neq k} e^{\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} p_{k\ell} \right) \mu_k = \rho_k^{-1} \left( \lambda_k + \sum_{\ell=1}^K p_{lk} \nu_\ell \right) - \\ &- \left( 1 + \sum_{\ell=1}^K (e^{\tilde{\theta}_\ell^{(J)}} - 1) p_{k\ell} \right) \nu_k = \mu_k - \left( 1 + \sum_{\ell \notin J} (\rho_\ell^{-1} - 1) p_{k\ell} + \right. \\ &\left. + \sum_{\ell \in J} ((\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1} - 1) p_{k\ell} \right) \nu_k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Аналогичные рассуждения (или формальная подстановка  $J = \emptyset$  в последнее выражение в (3.11)) показывают, что для любого  $k$

$$\partial_k H_0(\theta^*) = \mu_k - \left( 1 + \sum_{\ell=1}^K (\rho_\ell^{-1} - 1) p_{k\ell} \right) \nu_k, \quad (3.12)$$

так что при  $k \notin J$

$$\dot{q}_k(t) = \partial_k H_0(\theta^*) + \sum_{\ell \in J} (\rho_\ell^{-1} - (\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1}) p_{k\ell} \nu_k. \quad (3.13)$$

Так как в силу (3.5) и (3.8) для  $k \in J$  равенство (3.12) может быть записано в виде

$$\partial_k H_0(\theta^*) = (\rho_k^{-1} - (\tilde{\rho}_k^{(J)})^{-1}) \nu_k - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} (\rho_\ell^{-1} - (\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1}) \nu_k \quad (3.14)$$

и  $\dot{q}_k(t) = 0$  п.в., то п.в. для  $k \in J$

$$\dot{q}_k(t) = \partial_k H_0(\theta^*) - (\rho_k^{-1} - (\tilde{\rho}_k^{(J)})^{-1}) \nu_k + \sum_{\ell \in J} (\rho_\ell^{-1} - (\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1}) p_{k\ell} \nu_k. \quad (3.15)$$

Напомним определение двойственной сети Джексона. В такой сети интенсивности обслуживания в узлах те же, что в исходной сети. Поток двойственной сети имеют те же интенсивности, что и в исходной, но направлены в противоположную сторону. Таким образом, обозначая параметры двойственной сети теми же символами, но с верхней чертой, имеем  $\bar{\mu}_k = \mu_k$ ,  $\bar{\nu}_k = \nu_k$  и  $\bar{\nu}_k \bar{p}_{k\ell} = \nu_\ell p_{lk}$ . Также меняются местами входящие и выходящие потоки:  $\bar{\lambda}_k = \nu_k \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right)$  и  $\lambda_k = \nu_k \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K \bar{p}_{k\ell} \right)$ .

(Следующее рассуждение показывает, что матрица  $\bar{P} = (\bar{p}_{k\ell})$  является субстохастической. Так как  $\nu = \lambda + P^T \nu$ , то  $\nu \geq P^T \nu$  покомпонентно. Поэтому  $\nu_k \geq \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \nu_\ell$ , т.е.  $\sum_{\ell=1}^K \bar{p}_{k\ell} = \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \nu_\ell / \nu_k \leq 1$ .) Если сеть Джексона находится в стационарном состоянии, то обращение во времени приводит к стационарной двойственной сети.

В этих обозначениях в силу (3.13) и (3.15), если  $q(t) \in F_J$ , то п.в.

$$\dot{q}(t) = \nabla H_0(\theta^*) - (I - \bar{P}^T) \varphi^{(J)},$$

где

$$\varphi_\ell^{(J)} = \begin{cases} (\rho_\ell^{-1} - (\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1}) \nu_\ell, & \text{если } \ell \in J, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Кроме того, (3.12) принимает вид

$$-\nabla H_0(\theta^*) = \bar{\lambda} - (I - \bar{P}^T) \mu, \quad (3.17)$$

где  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_K)^T$ . (Заметим, что правую часть также можно представить в виде  $\nabla \bar{H}_0(0)$ .) Пусть  $T > 0$ . Обозначая  $\bar{q}(t) = q(T - t)$ , где  $0 \leq t \leq T$ , получаем, что п.в.

$$\dot{\bar{q}}(t) = \bar{\lambda} - (I - \bar{P}^T) \mu + (I - \bar{P}^T) \dot{\varphi}(t), \quad (3.18)$$

где

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_J \mathbf{1}_{F_J}(\bar{q}(t)) \varphi^{(J)}. \quad (3.19)$$

Так как  $\dot{\varphi}_k(t) = 0$ , если  $\bar{q}_k(t) > 0$ , в силу (3.16), то (3.18) означает, что  $\bar{q}(t)$  получается косым отражением функции  $q(T) + (\bar{\lambda} - (I - \bar{P}^T) \mu)t$ , т.е. является жидкостной траекторией, начинающейся в конечной точке  $r$ , длин очередей в сети Джексона с интенсивностями входных потоков  $\bar{\lambda}_k$ , интенсивностями обслуживания  $\mu_k$  и матрицей переходов  $\bar{P}$ . Покажем обратное: если  $\bar{q}$  – жидкостная траектория двойственной системы, начинающаяся в конечной точке  $r$ , то ее обращение во времени является оптимальной траекторией. Так как  $\bar{q}$  – решение задачи косоуго отражения, то имеет место (3.18), где  $\varphi(t)$  – покомпонентно неубывающая абсолютно непрерывная функция, такая что  $\bar{q}_k(t) \dot{\varphi}_k(t) = 0$  п.в. Ввиду (3.17), если  $\bar{q}(t) \in F_J$ , то для сужений векторов на  $J$  и матриц на  $J \times J$  будет выполнено п.в.  $\dot{\varphi}_J(t) = (I_{J,J} - P_{J,J}^T)^{-1} (-\nabla H_0(\theta^*)_J)$ . В силу (3.14) и (3.16) имеем  $\dot{\varphi}_J(t) = \varphi^{(J)}$ , т.е. выполнено (3.19). Таким образом, обращение траектории  $\bar{q}$  проходит через  $F_J$  с импульсом  $\tilde{\theta}^{(J)}$ . Поэтому грани  $F_J$  в (3.19) существенные. Также получаем, что  $\varphi_\ell^{(J)} \geq 0$  при  $\ell \in J$  и что (3.7) не только необходимо, но и достаточно для существенности  $F_J$ , поскольку жидкостная траектория, начинающаяся в  $F_J$ , будет там находиться некоторое время, если выполнено (3.7). Следовательно, обращение оптимальной траектории с импульсами  $\tilde{\theta}^{(J)}$ , которая попадает из некоторой точки  $A$  в некоторую точку  $B$ , является жидкостной траекторией для попадания из  $B$  в  $A$  для двойственной сети, и наоборот.

Так как исходная сеть Джексона предполагается эргодической, то двойственная сеть тоже эргодична, так что жидкостная траектория двойственной сети, начинающаяся в точке  $r$ , попадает в конце концов в начало координат. Более того, соответствующая траектория состоит из конечного числа отрезков, принадлежащих граням  $F_J$  с возрастающими по включению множествами  $J$ , кроме, возможно,

“одноточечного отрезка”, представляющего собой начальную точку (см., например, [13, леммы 5.3, 5.4, с. 142, 143]). Поэтому оптимальная траектория из  $O$  в  $r$  существует, единственна и состоит из конечного числа отрезков, принадлежащих граням  $F_J$  с убывающими по включению множествами  $J$ , кроме, возможно, “одноточечного отрезка”, представляющего собой конечную точку (см. рис. 9 ниже). Пусть  $T^*$  – время, за которое жидкостная траектория  $\bar{q}(t)$ , начинающаяся в конечной точке  $r$ , попадает в начало координат. Положим  $q^*(t) = \bar{q}(T^* - t)$  при  $0 \leq t \leq T^*$ . (Напомним, что  $q^*$  достигает нижней границы затрат, см. (2.19).) Нами доказана следующая

**Теорема 3.** *Построенная траектория  $q^*(t)$  является единственной оптимальной с точностью до времени, проведенного в начале координат. Движение в существенной грани  $F_J$  происходит с импульсом  $\tilde{\theta}^{(J)}$ . Затраты на достижение точки  $r$  при движении по этой траектории равны  $\int_0^{T^*} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt = \theta^* \cdot r$ .*

Как следствие теоремы 3 получаем, что жидкостная траектория  $\bar{q}$  двойственной сети, начинающаяся в точке  $r$ , достигает начала координат, проходя через последовательность существенных граней, в каждой из которых она проводит положительное время. Если начальное значение принадлежит несущественной грани, то траектория сразу же уходит из этой грани. В существенной грани  $F_J$  движение происходит в соответствии с уравнениями  $\dot{\bar{q}}_k(t) = -\partial_k H_0(\theta^*) - \sum_{\ell \in J} (\rho_\ell^{-1} - (\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1}) p_{k\ell} \nu_k$ , если  $k \notin J$ , и  $\dot{\bar{q}}_k(t) = 0$  п.в., если  $k \in J$  (см. (3.11), (3.13)). Заметим также, что поскольку  $\dot{\bar{q}}(t) = \bar{\lambda} + (\bar{P}^T - I)\bar{d}^{(J)}$  при  $\bar{q}(t) \in F_J$ , где через  $\bar{d}^{(J)} = (\bar{d}_1^{(J)}, \dots, \bar{d}_K^{(J)})^T$  обозначен вектор интенсивностей потоков, протекающих через узлы, то в силу (3.18) и (3.19) имеем  $\bar{d}^{(J)} = \mu - \varphi^{(J)}$ . В силу (3.16) имеем  $\bar{d}_\ell^{(J)} = \mu_\ell$ , если  $\ell \notin J$ , и  $\bar{d}_\ell^{(J)} = (\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1} \nu_\ell$ , если  $\ell \in J$ . Так как  $1 \geq \tilde{\rho}_\ell^{(J)} \geq \rho_\ell$  при условии, что грань  $F_J$  существенна, то в этом случае  $\nu_\ell \leq \bar{d}_\ell^{(J)} \leq \mu_\ell$ . В силу (1.1) и (1.2) отсюда следует, что для двойственной сети  $\bar{L}_J(\bar{\lambda} + (\bar{P}^T - I)\bar{d}^{(J)}) = 0$ . Как следствие,

$$\bar{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t)) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (3.20)$$

Условие существенности имеет более явный вид для случая полуоси. Если грань  $F_J$  – это полуось  $x_m$ , то (3.9) принимает вид

$$(\tilde{\rho}_\ell^{(J)})^{-1} - 1 = a_{m\ell}(\rho_m^{-1} - 1), \quad \ell \neq m, \quad (3.21)$$

а (3.10) (с учетом (2.2)) –

$$\rho_\ell^{-1} - 1 \geq a_{m\ell}(\rho_m^{-1} - 1), \quad \ell \neq m. \quad (3.22)$$

(Разумеется, (3.22) можно получить напрямую из (3.6).) Подстановкой (3.21) в (3.11) с учетом того, что  $\sum_{\ell=1}^m a_{m\ell} p_{m\ell} = 1 - 1/c_{mm}$  (как показано в доказательстве теоремы 2), убеждаемся, что если полуось  $x_m$  существенна, то

$$\dot{q}_m^*(t) = \frac{1 - \rho_m}{c_{mm}} \mu_m > 0,$$

как и следовало ожидать. Следующее свойство матрицы  $C$  доказано в Приложении.

**Лемма 7.** *Имеет место неравенство  $c_{m\ell} \leq c_{mm}$ .*

Из леммы 7, (2.17) и (3.22) следует, что если  $\rho_m$  максимально, то полуось  $x_m$  является существенной, т.е. в случае попадания на нее оптимальная траектория будет находиться там некоторое время.

*Замечание 1.* Из теоремы 2 следует, что  $\theta^* > 0$  покомпонентно, и как следствие, нижняя граница в (2.19) и (2.20) положительна для всех  $r$  тогда и только тогда, когда рассматриваемая сеть эргодична. Таким образом, для неэргодической сети Джексона на оптимальность импульсов  $\widehat{\theta}^{(J)}$  при движении из  $O$  в  $r$  рассчитывать не придется. С другой стороны, сделанное наблюдение, что обращение уравнений Гамильтона приводит к жидкостным уравнениям, остается в силе, и оценки (2.19) и (2.20) могут быть полезны. Например, если  $\theta^* < 0$  покомпонентно, то жидкостные траектории двойственной сети убегают на бесконечность, а затраты на переход исходной сети из точки  $r$  в начало координат равны  $-\theta^* \cdot r$ .

#### § 4. Условные законы больших чисел. Обсуждение.

Как отмечено вначале, принцип больших уклонений позволяет получать логарифмические асимптотики вероятностей редких событий и находить наиболее вероятные сценарии, реализующие эти события. Следующие две леммы иллюстрируют это утверждение. Напомним, что сеть предполагается эргодической.

Лемма 8. Для произвольного  $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T^*} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta \mid \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon \right) = 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon \right) = -\theta^* \cdot r. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Для доказательства первого утверждения достаточно доказать, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T^*} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta \mid \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon \right) < 0. \quad (4.1)$$

В силу принципа больших уклонений

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon \right) \geq - \inf_{q: |q(T^*) - r| \leq \varepsilon/2} \mathbf{I}(q). \quad (4.2)$$

Продолжим  $q^*$  на интервал времени  $(T^*, \infty)$  по закону больших чисел. Аналогично (3.20) имеем  $\int_{T^*}^{\infty} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt = 0$ . Поэтому  $\mathbf{I}(q^*) = \int_0^{T^*} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt$ . Так как функция  $\mathbf{I}(q)$  компактна снизу и  $q^*(T^*) = r$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{q: |q(T^*) - r| \leq \varepsilon/2} \mathbf{I}(q) = \inf_{q: q(T^*) = r} \mathbf{I}(q) \leq \mathbf{I}(q^*) = \int_0^{T^*} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt. \quad (4.3)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T^*} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta, \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon \right) \leq \\ & \leq - \inf_{q: \sup_{t \leq T^*} |q(t) - q^*(t)| \geq \delta, q(T^*) = r} \mathbf{I}(q). \end{aligned}$$

Пусть последний инфимум достигается в точке  $\tilde{q}$ . Так как  $\inf_{q, T: q(T)=r} \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$  достигается на единственной траектории  $q^*$  и  $\tilde{q} \neq q^*$ , то  $I(\tilde{q}) \geq \int_0^{T^*} L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)) dt > \int_0^{T^*} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T^*} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta, \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon \right) < \\ & < - \int_0^{T^*} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt. \end{aligned}$$

С учетом (4.2) и (4.3) получаем (4.1). Второе утверждение леммы следует, по существу, из (4.2).  $\blacktriangle$

В качестве еще одного применения рассмотрим момент достижения суммарной очередью большого значения:  $\tau_n = \inf \left\{ t : \sum_{k=1}^K Q_k(nt) \geq nA \right\}$ . Определим  $r$  как точку минимума  $\theta^* \cdot x$  по всем  $x = (x_1, \dots, x_K)^T \in \mathbb{R}_+^K$ , таким что  $\sum_{k=1}^K x_k = A$ . “В общем положении” такая точка  $r$  определяется единственным образом.

*Лемма 9. Для всех достаточно больших  $T$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\tau_n \leq T) = -\theta^* \cdot r \quad (4.4)$$

*и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| < \delta \mid \tau_n \leq T \right) = 1. \quad (4.5)$$

*Доказательство.* Рассуждения аналогичны тем, которые использовались при доказательстве леммы 8. Покажем, что для достаточно больших  $T$

$$\inf_{q: \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) > A} I(q) = \inf_{q: \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A} I(q) = \theta^* \cdot r. \quad (4.6)$$

Для  $\varepsilon > 0$  обозначим через  $q^{\varepsilon, *}$  оптимальную траекторию для попадания из начала координат в точку  $r(1 + \varepsilon)$ , построенную в доказательстве теоремы 3. Предполагается, что она продолжена в соответствии с законом больших чисел после попадания в  $r(1 + \varepsilon)$ . Поскольку  $q^{\varepsilon, *}$  до момента попадания в  $r(1 + \varepsilon)$  – это обращенная жидкостная траектория двойственной системы, то существует  $\widehat{T} > 0$  такое, что все траектории  $q^{\varepsilon, *}$ , соответствующие  $\varepsilon \in [0, 1]$ , попадают в точку назначения к моменту  $\widehat{T}$  (см., например, [13, лемма 5.4, с. 143]). Для  $T \geq \widehat{T}$  имеем

$$\begin{aligned} \theta^* \cdot r = I(q^*) &= \inf_{q: \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A \text{ для некоторого } t > 0} I(q) \leq \inf_{q: \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A} I(q) \leq \\ &\leq \inf_{q: \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) > A} I(q) \leq \inf_{q: \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A(1+\varepsilon)} I(q) \leq I(q^{\varepsilon, *}) = \theta^* \cdot r(1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем (4.6). Так как в силу принципа больших уклонений

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\tau_n \leq T) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq T} \frac{Q(nt)}{n} \geq A\right) \leq - \inf_{\substack{q: \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A}} \mathbf{I}(q), \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\tau_n \leq T) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq T} \frac{Q(nt)}{n} \geq A\right) \geq - \inf_{\substack{q: \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) > A}} \mathbf{I}(q), \end{aligned}$$

то (4.4) вытекает из (4.6).

Для доказательства (4.5) обозначим  $\tau(q) = \inf\{t : q(t) \geq A\}$ , где  $q = (q(t), t \geq 0) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K)$ . Так как множество

$$\left\{ q \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K) : \sup_{t \leq \tau(q)} |q(t) - q^*(t)| \geq \delta, \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A \right\}$$

содержит те свои предельные точки, которые являются непрерывными функциями, и так как  $\mathbf{I}(q) = \infty$ , если  $q$  разрывна, то

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta, \tau_n \leq T\right) &\leq \\ &\leq - \inf_{\substack{q: \sup_{t \leq \tau(q)} |q(t) - q^*(t)| \geq \delta, \\ \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A \text{ для некоторого } t \in [0, T]}} \mathbf{I}(q). \end{aligned}$$

Так как множество, по которому берется инфимум, замкнуто, то эта нижняя грань достигается некоторой функцией  $\check{q}$ . Пусть число  $\check{T} \in [0, T]$  таково, что  $\sum_{k=1}^K \check{q}_k(\check{T}) \geq A$ .

Поскольку  $\inf_{(q, T): \sum_{k=1}^K q_k(T) \geq A} \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$  достигается в единственной точке  $(q, T) = (q^*, T^*)$  и  $\check{q} \neq q^*$ , то  $\mathbf{I}(\check{q}) \geq \int_0^{\check{T}} L(\check{q}(t), \dot{\check{q}}(t)) dt > \int_0^{T^*} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt = \theta^* \cdot r$ . Поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta, \tau_n \leq T\right) < -\theta^* \cdot r.$$

Сопоставляя это неравенство с (4.4), получаем, что для всех достаточно больших  $T$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta \mid \tau_n \leq T\right) < 0,$$

что влечет за собой (4.5).  $\blacktriangle$

Есть примечательное объяснение тому, что  $q^*$  получается обращением времени из  $\bar{q}$ . Как и в [14] (см. также [15]), заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq T^*} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t) \right| \geq \delta \mid \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq T^*} \left| \frac{Q(n(T^* - t))}{n} - q^*(T^* - t) \right| \geq \delta \mid \left| \frac{Q(nT^*)}{n} - r \right| \leq \varepsilon\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq T^*} \left| \frac{\bar{Q}^n(nt)}{n} - \bar{q}(t) \right| \geq \delta \mid \left| \frac{\bar{Q}^n(0)}{n} - r \right| \leq \varepsilon\right), \end{aligned}$$

где  $\bar{Q}^n(t) = Q(nT^* - t)$ . Если процесс  $Q(t)$  является стационарным, то процесс  $\bar{Q}^n$  также является стационарным и представляет собой процесс длин очередей в обращенной по времени сети Джексона. В частности, его распределение не зависит от  $n$ . Так как  $\bar{q}(t)$  является жидкостным пределом эргодической сети Джексона, то стандартными методами можно показать, что последняя вероятность сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Похожее рассуждение можно найти в [16], а также в [9], где стационарность также играет ключевую роль. (Отметим, что ни одна из этих работ не опубликована в рецензируемых журналах.)

Так как  $\theta^* \cdot r = \inf_{\substack{q: q(0)=0, q(T)=r \\ \text{для некоторого } T}} \mathbf{I}(q)$ , то в соответствии с общей теорией (см. [1, 2]),

а также исходя из второго утверждения леммы 8, можно предположить следующую асимптотику стационарного распределения  $Q(t)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \left| \frac{Q(nt)}{n} - r \right| < \varepsilon \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \left| \frac{Q(nt)}{n} - r \right| < \varepsilon \right) = \\ &= -\theta^* \cdot r. \end{aligned}$$

В данном случае это свойство, очевидно, выполнено, так как стационарное распределение  $Q(t)$  известно явно:  $\mathbf{P}(Q(t) = (i_1, \dots, i_K)) = \prod_{k=1}^K (1 - \rho_k) \rho_k^{i_k}$  (см., например, [3]).

### § 5. Пример: эргодическая сеть из двух узлов

Проиллюстрируем общие результаты на примере эргодической сети из двух узлов. В этом случае анализ удается сделать более наглядным. Имеем

$$h_1(\theta) = e^{-\theta_1} ((e^{\theta_1} - 1)p_{11} + (e^{\theta_2} - 1)p_{12} + 1) - 1, \quad (5.1)$$

$$h_2(\theta) = e^{-\theta_2} ((e^{\theta_1} - 1)p_{21} + (e^{\theta_2} - 1)p_{22} + 1) - 1, \quad (5.2)$$

$$H_1(\theta) = (e^{\theta_1} - 1)\lambda_1 + (e^{\theta_2} - 1)\lambda_2 + h_1(\theta)^+ \mu_1 + h_2(\theta)\mu_2,$$

$$H_2(\theta) = (e^{\theta_1} - 1)\lambda_1 + (e^{\theta_2} - 1)\lambda_2 + h_1(\theta)\mu_1 + h_2(\theta)^+ \mu_2, \quad (5.3)$$

$$H_0(\theta) = (e^{\theta_1} - 1)\lambda_1 + (e^{\theta_2} - 1)\lambda_2 + h_1(\theta)\mu_1 + h_2(\theta)\mu_2.$$

Заметим, что  $h_1(\theta) = 0$  тогда и только тогда, когда  $(e^{\theta_1} - 1)/(e^{\theta_2} - 1) = p_{12}/(1 - p_{11})$ , т.е.  $\theta_1$  и  $\theta_2$  имеют один и тот же знак, и следовательно, график  $h_1(\theta) = 0$  лежит в I и III квадрантах. Кроме того,  $h_1(\theta) > 0$  над графиком и слева от него, и  $h_1(\theta) < 0$  под графиком и справа от него. Задавая  $\theta_2$  как функцию  $\theta_1$  в первом квадранте уравнением  $h_1(\theta) = 0$ , получаем, дважды дифференцируя, что  $d^2\theta_2/d\theta_1^2 = (1 - p_{11})/p_{12}e^{\theta_1 - \theta_2} - ((1 - p_{11})/p_{12}e^{\theta_1 - \theta_2})^2$ . Так как  $(1 - p_{11})/p_{12}e^{\theta_1 - \theta_2} = 1 + (1 - p_{11} - p_{12})/p_{12}e^{-\theta_2} \geq 1$ , то  $\theta_2$  является строго вогнутой функцией  $\theta_1$ , если  $p_{11} + p_{12} < 1$ , и является линейной функцией  $\theta_1$ , если  $p_{11} + p_{12} = 1$ . Аналогично, график  $h_2(\theta) = 0$  лежит в I и III квадрантах,  $h_2(\theta) < 0$  над графиком и слева от него,  $h_2(\theta) > 0$  под графиком и справа от него,  $\theta_2$  является строго выпуклой функцией  $\theta_1$  на графике  $h_2(\theta) = 0$ , если  $p_{22} + p_{21} < 1$ , и линейной функцией  $\theta_1$ , если  $p_{22} + p_{21} = 1$ . Так как  $(1 - p_{11})/p_{12} \geq p_{21}/(1 - p_{22})$ , то в I квадранте график  $h_1(\theta) = 0$  лежит над графиком  $h_2(\theta) = 0$ , причем строго над ним, если  $(1 - p_{11})/p_{12} > p_{21}/(1 - p_{22})$ . В III квадранте график  $h_1(\theta) = 0$  лежит под графиком  $h_2(\theta) = 0$ , причем строго под ним, если  $(1 - p_{11})/p_{12} > p_{21}/(1 - p_{22})$ .

Найдем оптимальное движение из  $(0, 0)$  в  $(1, 0)$  по прямой. Движение происходит в соответствии с гамильтонианом  $H_2(\theta)$  при дополнительном условии  $q_2(t) = 0$ . Тогда по лемме 1, выбирая  $g(q) = q_2^2$ , так что  $\gamma(t) = 0$ , имеем  $(\dot{q}_1(t), 0) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t)) \in \partial H_2(\theta)$ . Как следствие,  $0 \in \partial_2 H_2(\theta)$  и  $\dot{q}_1(t) \in \partial_1 H_2(\theta)$  (см. [11, предложение 2.3.15,

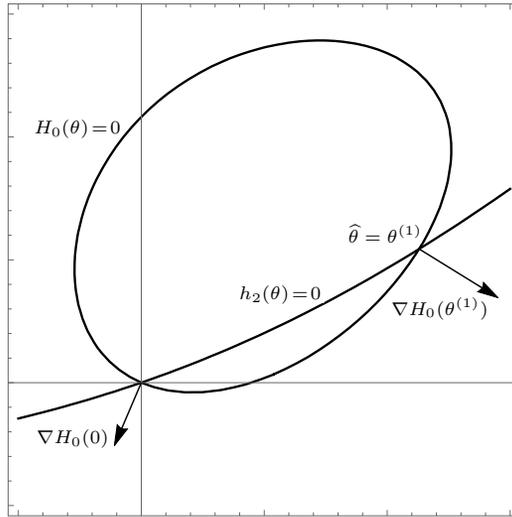


Рис. 1. Случай, когда  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) \leq 0$

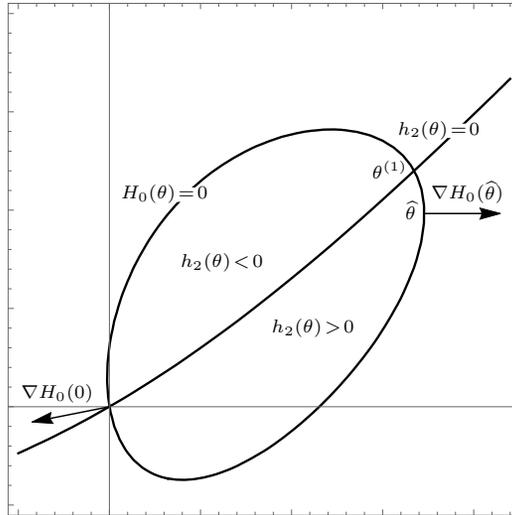


Рис. 2. Случай, когда  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) > 0$

с. 52]). Кроме того,  $H_2(\theta) = 0$ . Затраты равны  $1 \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 = \theta_1$ . В силу (5.1)–(5.3) для того, чтобы  $\partial_2 H_2(\theta) \ni 0$ , необходимо, чтобы  $h_2(\theta) \geq 0$  (так как  $\partial_2 h_1(\theta) > 0$ ; см., например, (3.4)).

Заметим также, что если  $h_2(\theta) = 0$ , то

$$\partial H_2(\theta) = \left\{ \left( e^{\theta_1} \lambda_1 + \partial_1 h_1(\theta) \mu_1 + \alpha \partial_1 h_2(\theta) \mu_2 \right), \alpha \in [0, 1] \right\}.$$

Таким образом, если точка  $\hat{\theta}$  такова, что  $H_0(\hat{\theta}) = 0$ ,  $h_2(\hat{\theta}) = 0$ , т.е.  $\hat{\theta} = \theta^{(1)}$ , и  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) \leq 0$ , то эта точка оптимальна. Если  $h_2(\hat{\theta}) > 0$ ,  $H_0(\hat{\theta}) = 0$  и  $\partial_2 H_0(\hat{\theta}) = 0$ , то  $\hat{\theta}$  также будет оптимальной. Как можно видеть, эти две возможности исключают

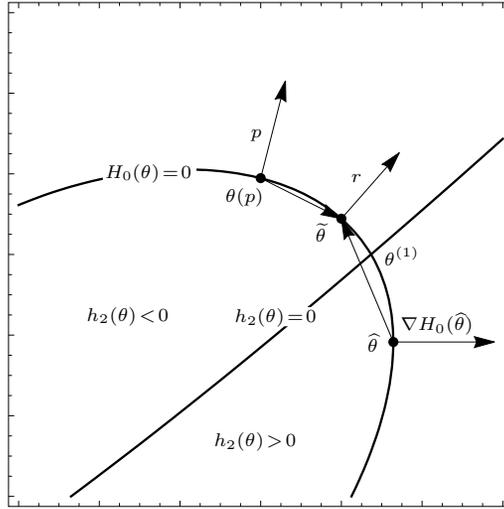


Рис. 3. Предпочтительность движения по вектору  $r$

друг друга. Они иллюстрируются на рис. 1 и 2 соответственно. (Вектор  $\nabla H_0(0)$  изображен по той причине, что принадлежность этого вектора III квадранту является достаточным условием эргодичности сети.)

Рассмотрим оптимальные пути попадания из  $(0, 0)$  в  $r = (r_1, r_2)$ . Сравним путь по прямой и путь горизонтально и затем по прямой. Покажем, что в случае, когда движение сначала происходит горизонтально по некоторому вектору  $s = (s_1, 0)$  с импульсом  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ , таким что  $\partial_2 H_0(\hat{\theta}) = 0$  и  $h_2(\hat{\theta}) > 0$ , как на рис. 2, непосредственное движение по вектору  $r$  не хуже. Рис. 3 иллюстрирует приводимые рассуждения. Затраты на движение сначала по вектору  $s$  и затем по вектору  $p = r - s$  равны  $\hat{\theta}_1 s_1 + \theta(p) \cdot p$ , где через  $\theta(p)$  обозначена точка на кривой  $H_0(\theta) = 0$ , в которой внешняя нормаль совпадает с вектором  $p$ . Обозначим также через  $\tilde{\theta}$  точку на кривой  $H_0(\theta) = 0$  с внешней нормалью  $r$ . Если  $r$  не лежит на оси абсцисс, то  $\tilde{\theta} \neq \hat{\theta}$ , поскольку движение с  $\hat{\theta}$  горизонтально. Затраты на движение сразу по вектору  $r$  равны  $\tilde{\theta} \cdot r = \tilde{\theta} \cdot s + \tilde{\theta} \cdot p$ . Так как  $s$  ортогонален кривой  $H_0(\theta) = 0$  в точке  $\hat{\theta}$  и функция  $H_0(\theta)$  является строго выпуклой, то  $(\tilde{\theta} - \hat{\theta}) \cdot s \leq 0$ , причем неравенство является строгим, если  $r$  не лежит на оси абсцисс и  $s \neq 0$ . Аналогично, так как  $p$  ортогонален кривой  $H_0(\theta) = 0$  в точке  $\theta(p)$ , то  $(\tilde{\theta} - \theta(p)) \cdot p \leq 0$ . Таким образом,  $\tilde{\theta} \cdot r \leq \hat{\theta} \cdot s + \theta(p) \cdot p$ , где неравенство является строгим, если  $r$  не лежит на оси абсцисс, т.е. затраты при движении по негоризонтальному вектору  $r$  меньше затрат при первоначальном движении по  $s$ .

Как и выше, пусть  $\theta^{(1)}$  – точка пересечения кривых  $H_0(\theta) = 0$  и  $h_2(\theta) = 0$ , и пусть  $\theta^{(2)}$  – точка пересечения кривых  $H_0(\theta) = 0$  и  $h_1(\theta) = 0$ . Как доказано в теореме 2, прямые  $\theta_1 = \theta_1^{(1)}$  и  $\theta_2 = \theta_2^{(2)}$  пересекаются в точке  $\theta^*$ , которая лежит на кривой  $H_0(\theta) = 0$ . Приведенный выше анализ показывает, что если  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) > 0$ , то начальное движение по горизонтали не является оптимальным. Более того, как видно из дальнейшего, в этом случае движение вертикально, и затем пересечение внутренности квадранта так, чтобы оказаться в нужном месте оси абсцисс, стоит меньше даже в случае, когда требуется переместиться горизонтально. Аналогично, начальное вертикальное движение не является оптимальным, если  $\partial_1 H_0(\theta^{(2)}) > 0$ .

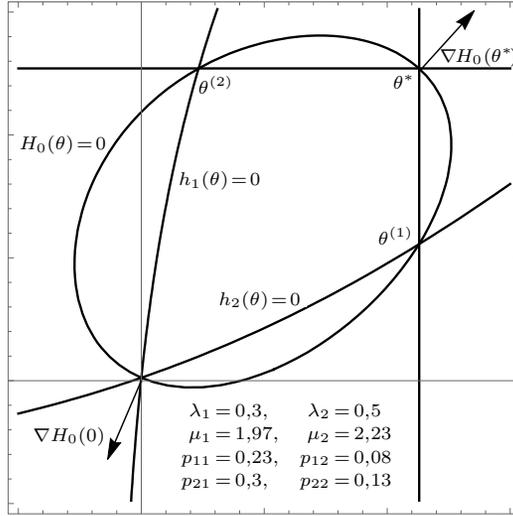


Рис. 4. Движение внутри квадранта направо и вверх

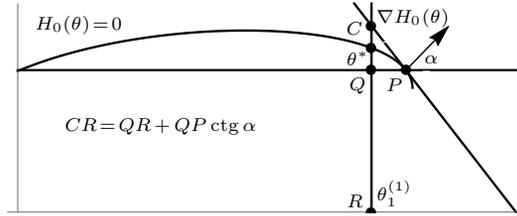


Рис. 5. Оптимальность движения по нормали в  $\theta^*$

Предположим, что  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) \leq 0$  и  $\partial_1 H_0(\theta^{(2)}) \leq 0$  (см. рис. 4). В этом случае  $\partial_1 H_0(\theta^{(1)}) > 0$  и  $\partial_2 H_0(\theta^{(2)}) > 0$ . Тогда оптимальным горизонтальным движением является движение с импульсом  $\theta^{(1)}$ , а оптимальным вертикальным – движение с импульсом  $\theta^{(2)}$ . Затраты на движение сначала по вектору  $s = (s_1, 0)$  горизонтально и затем по вектору  $p$  равны  $\theta_1^{(1)} s_1 + \theta(p) \cdot p$ . Поэтому, как и на рис. 3, если  $\tilde{\theta}_1 \leq \theta_1^{(1)}$ , что имеет место, если наклон вектора  $r$  больше наклона нормали к кривой  $H_0(\theta) = 0$  в точке  $\theta^*$ , и соответственно,  $\tilde{\theta}$  находится слева от  $\theta^*$ , то движение по  $r$  предпочтительней. Предположим, что наклон вектора  $r$  меньше наклона нормали к кривой  $H_0(\theta) = 0$  в точке  $\theta^*$ , т.е.  $\tilde{\theta}$  находится справа от  $\theta^*$ . Найдем оптимальное горизонтальное смещение  $s$ . Нужно минимизировать  $\theta_1^{(1)} s_1 + \theta(p) \cdot p$  по  $\theta(p)$  при условии, что  $r = p + s$  и  $p$  пропорционален  $\nabla H_0(\theta(p))$ . Обозначая  $\theta(p)$  через  $\theta$ , а  $p$  через  $p(\theta)$ , имеем  $\theta_1^{(1)} s_1 + \theta \cdot p(\theta) = \theta_1^{(1)}(r_1 - p_1(\theta)) + \theta \cdot p(\theta) = \theta_1^{(1)} r_1 - \theta_1^{(1)} p_1(\theta) + \theta \cdot p(\theta)$ , где  $\varkappa \nabla H_0(\theta) = p(\theta)$  для некоторого  $\varkappa > 0$ . Так как  $p_2(\theta) = r_2$ , то  $\varkappa \partial_2 H_0(\theta) = r_2$ . Минимизируем  $-\theta_1^{(1)} p_1(\theta) + \theta \cdot p(\theta)$  при ограничениях  $H_0(\theta) = 0$ ,  $\varkappa \nabla H_0(\theta) = p(\theta)$ ,  $\varkappa \partial_2 H_0(\theta) = r_2$ . Имеем  $-\theta_1^{(1)} p_1(\theta) + \theta \cdot p(\theta) = (\partial_1 H_0(\theta) / \partial_2 H_0(\theta) (\theta_1 - \theta_1^{(1)}) + \theta_2) r_2$ . Покажем, что  $\partial_1 H_0(\theta) / \partial_2 H_0(\theta) (\theta_1 - \theta_1^{(1)}) + \theta_2$  убывает на дуге  $[\tilde{\theta}, \theta^*]$ . Предположим, что  $\theta$  находится между  $\tilde{\theta}$  и  $\theta^*$ . Рис. 5 иллюстрирует приводимые рассуждения. Точка  $P$  соответствует переменному импульсу  $\theta$ . Обозначим через  $\alpha$  угол между нормалью к  $H_0(\theta) = 0$  в точке  $P$  и горизонталью через точку  $\theta$ . Имеем  $\partial_1 H_0(\theta) / \partial_2 H_0(\theta) = \text{ctg } \alpha$ .

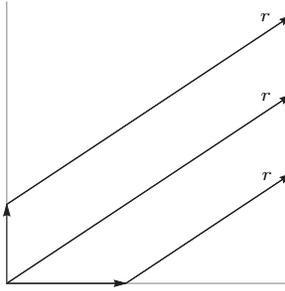


Рис. 6. Оптимальные траектории для параметров рис. 4 в зависимости от конечной точки

По свойству углов со взаимно перпендикулярными сторонами угол  $QCP$  между касательной к  $H_0(\theta) = 0$  в точке  $\theta$  и вертикальной прямой с абсциссой  $\theta_1^{(1)}$  также равен  $\alpha$ . Поэтому отрезок  $CQ$ , соединяющий точку  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2)$  и пересечение касательной с вертикальной прямой с абсциссой  $\theta_1^{(1)}$ , равен  $(\theta_1 - \theta_1^{(1)}) \operatorname{ctg} \alpha$ . Поэтому  $\partial_1 H_0(\theta) / \partial_2 H_0(\theta) (\theta_1 - \theta_1^{(1)}) + \theta_2$  – длина вертикального отрезка  $CR$  от точки пересечения касательной с вертикальной прямой с абсциссой  $\theta_1^{(1)}$  до оси абсцисс. По мере того как точка  $\theta$  движется по кривой  $H_0(\theta) = 0$  от точки  $\tilde{\theta}$  против часовой стрелки, длина этого отрезка уменьшается и достигает минимума, когда  $\theta$  попадает в точку  $\theta^*$ . Если продолжать движение за  $\theta^*$  против часовой стрелки, то отрезок опять начнет увеличиваться. Таким образом, если начать двигаться горизонтально, то оптимальным является движение с импульсом  $\theta_1^{(1)}$  до тех пор, пока наклон прямой, соединяющей движущуюся точку и точку  $r$ , не станет равным наклону внешней нормали в точке  $\theta^*$ . После этого нужно двигаться прямолинейно с наклоном этой внешней нормали. Поскольку движение по  $r$  является частным случаем начального движения горизонтально с  $s_1 = 0$ , в этом случае оптимальное движение горизонтально лучше, чем движение по  $r$ . Наконец, если сначала двигаться вертикально и затем по направлению к точке  $r$ , то поскольку  $\tilde{\theta}_2 < \theta_2^*$ , ситуация будет аналогична рассмотренному выше случаю, когда  $\tilde{\theta}_1 < \theta_1^*$ , т.е. сразу двигаться по прямой выгоднее. Таким образом, оптимальным является движение по оси абсцисс до того момента, пока прямая, соединяющая движущуюся точку и точку  $r$ , не будет иметь тот же наклон, что и нормаль к  $H_0(\theta) = 0$  в точке  $\theta^*$ . После этого оптимальным является движение по направлению этой нормали. При этом  $s_1 = r_1 - p_1 = r_1 - \partial_1 H_0(\theta^*) / \partial_2 H_0(\theta^*) r_2 = r_2 (r_1 / r_2 - \partial_1 H_0(\theta^*) / \partial_2 H_0(\theta^*))$ . Затраты равны  $\theta_1^{(1)} s_1 + \theta^* \cdot (r - s) = \theta^* \cdot r$ . Аналогично, если наклон вектора  $r$  больше наклона нормали в точке  $\theta^*$ , то нужно сначала двигаться вертикально, пока наклон не сравняется с наклоном нормали, а затем идти по нормали в  $\theta^*$ . Затраты также равны  $\theta^* \cdot r$ . Эти варианты иллюстрирует рис. 6.

Если  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) \leq 0$  и  $\partial_1 H_0(\theta^{(2)}) > 0$ , то точка  $\theta^*$  находится левее точки  $\theta^{(2)}$  (см. рис. 7). Так как оптимальное вертикальное движение будет происходить в соответствии с апексом кривой  $H_0(\theta) = 0$ , то оно будет уступать движению прямо по направлению  $r$ . Геометрические рассуждения, аналогичные использованным выше, показывают, что в этом случае нужно двигаться горизонтально, пока наклон не сравняется с наклоном внешней нормали в точке  $\theta^*$ , и после этого “возвращаться” по этой нормали. Если  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) > 0$  и  $\partial_1 H_0(\theta^{(2)}) \leq 0$  (см. рис. 8), то нужно двигаться вертикально и потом “возвращаться”. Рис. 9 иллюстрирует оптимальные траектории для параметров рис. 8. Ось абсцисс при этом является несущественной, так что оптимальная траектория, ведущая в точку на этой оси, проходит по оси ординат. Во всех

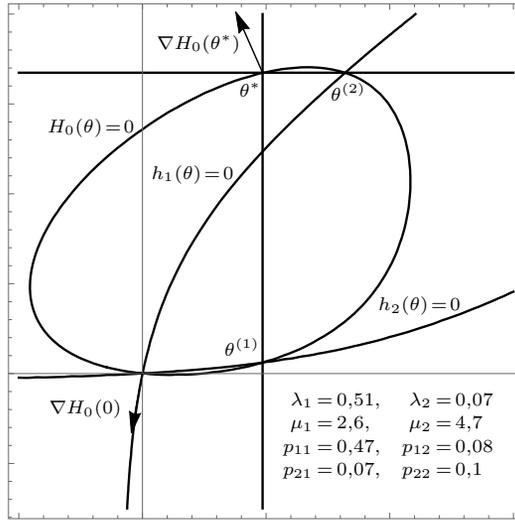


Рис. 7. Движение внутри квадранта налево и вверх

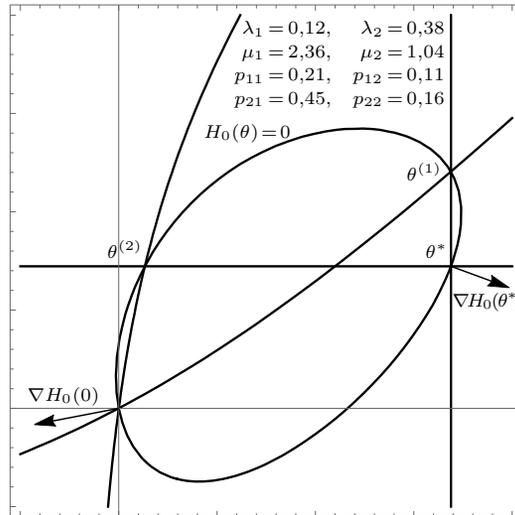


Рис. 8. Движение внутри квадранта направо и вниз

случаях надо двигаться по одной из осей координат так, чтобы вектор, соединяющий движущуюся точку с точкой назначения, стал коллинеарен нормали в точке  $\theta^*$ . После этого нужно двигаться по прямой к точке назначения. Если система эргодична, то одна из этих комбинаций знаков  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)})$  и  $\partial_1 H_0(\theta^{(2)})$  обязательно имеет место. Затраты всегда равны  $\theta^* \cdot r$ . Как следствие, если  $\partial_2 H_0(\theta^{(1)}) > 0$  (соответственно,  $\partial_1 H_0(\theta^{(2)}) > 0$ ), то первоначальное движение по горизонтали (соответственно, по вертикали) не является частью оптимального пути, т.е. ось абсцисс (соответственно, ось ординат) является несущественной. Кроме того, оптимальный маршрут можно получить, двигаясь по антиградиенту  $H_0$  в точке  $\theta^*$  до пересечения с одной из осей координат и затем двигаясь по этой оси в начало координат. Эта ось обязательно является существенной. Рис. 10 и 11 иллюстрируют варианты оптимального движе-

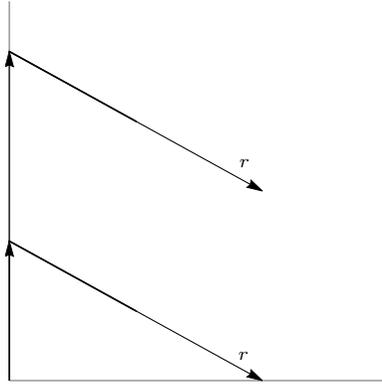


Рис. 9. Оптимальные траектории при параметрах рис. 8

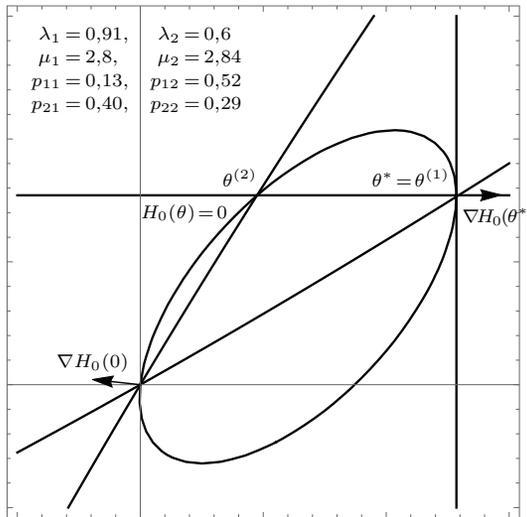


Рис. 10. Горизонтальное движение внутри квадранта

ния внутри I квадранта параллельно одной из осей координат. (Хотя вектор  $\nabla H_0(0)$  на рис. 10 не принадлежит III квадранту, выкладки показывают, что сеть тем не менее эргодична.)

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство леммы 1.** Если минимум  $\int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt$  по  $T \geq 0$  и по абсолютно непрерывным функциям  $x(t)$ , таким что  $x(0) = x_0, (T, x(T)) \in S'$  и  $g(x(t)) \leq 0$  для всех  $t \leq T$ , где  $S'$  – выпуклое замкнутое подмножество  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ , достигается для времени  $T^*$  и функции  $x^*(t)$ , то существуют мера  $\mu$  на  $[0, T^*]$ ,  $\mu$ -измеримая функция  $\gamma(t)$  и абсолютно непрерывная функция  $p(t)$ , такие что

1.  $\gamma(t) \in \partial^> g(x^*(t))$  для  $\mu$ -почти всех  $t \in [0, T^*]$ , и носитель меры  $\mu$  содержится в множестве  $\{t \in [0, T^*] : \partial^> g(x^*(t)) \neq \emptyset\}$ ;

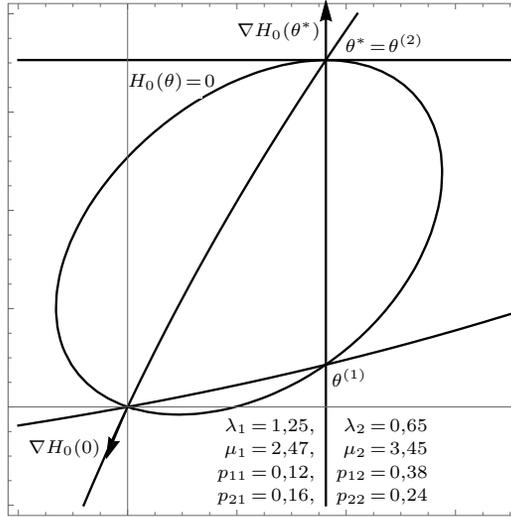


Рис. 11. Вертикальное движение внутри квадранта

$$2. \quad \begin{bmatrix} -\dot{p}(t) \\ \dot{x}^*(t) \end{bmatrix} \in \partial H \left( x^*(t), p(t) + \int_0^t \gamma(s) \mu(ds) \right) \quad \text{п.в. на } [0, T^*];$$

3. Существует постоянная  $h$ , такая что

$$H \left( x^*(t), p(t) + \int_0^t \gamma(s) \mu(ds) \right) = h \quad \text{на } [0, T^*];$$

$$4. \quad \begin{bmatrix} -h \\ p(T^*) + \int_0^{T^*} \gamma(t) \mu(dt) \end{bmatrix} \in -N_{S'}(T^*, x^*(T^*)).$$

Несколько более подробно: если множество  $S'$  имеет вид  $\{T'\} \times S''$  для некоторых  $T' > 0$  и выпуклого замкнутого множества  $S'' \subset \mathbb{R}^k$ , то утверждения 1 и 2 вытекают из [17, теорема 10.2.1 и обсуждение, с. 362–364], а также из “гамильтоновой дуализации” (см. [17, теорема 7.6.5, с. 266]). Для общего выбора  $S'$  можно применить прием сведения задачи с нефиксированным временем к задаче с фиксированным временем, как в [11, доказательство следствия 3.6.1, с. 142] (см. также [17, теорема 8.2.1, с. 290]). Можно также применить [11, следствие 3.6.1, с. 142], где функция  $f$  – это значение дополнительной переменной, так что  $\zeta$  – единичный  $(k+2)$ -вектор, у которого последний элемент равен единице, а все остальные – нулю, откуда следует, что число  $\lambda$  в [11, условие 4), с. 142] не влияет на значения первых  $k+1$  компонент в левой части. Используется также утверждение [11, предложение 2.4.4, с. 55], в соответствии с которым  $\partial d_{S'}(T^*, x^*(T^*))$  может быть заменено на  $N_{S'}(T^*, x^*(T^*))$ . В условиях леммы 1 имеем  $S' = \mathbb{R}_+ \times S$ . Поэтому первая компонента всех векторов из  $N_{S'}(T^*, x^*(T^*))$  равна нулю, например, согласно [11, теорема 2.5.6, с. 67]. Как следствие условия трансверсальности 4 имеем  $h = 0$ . Тот факт, что функция  $H$  из (1.3) может использоваться как функция  $H$  из [11, следствие 3.6.1, с. 142], устанавливается рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве теоремы 4.2.2 в [11, с. 156], где условие строгой липшицевости функции  $H$

заменено на условие локальной липшицевости функции  $L$ . Результат, аналогичный следствию 3.6.1 в [11, с. 142], содержится также в [17, теорема 10.5.1, с. 383].  $\blacktriangle$

**Доказательство формулы (1.5).** Заметим, что  $\pi(u) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (u\theta - (e^\theta - 1))$ , где  $u \geq 0$ .

Как следствие, применяя теорему о минимаксе к (1.1), получаем

$$\begin{aligned}
L_J(y) &= \inf_{\substack{(a,d,\varrho) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{S}_+^{K \times K}: \\ y = a + (\varrho^T - I)d}} \psi_J(a, d, \varrho) = \\
&= \inf_{\substack{(a,d,\varrho) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{S}_+^{K \times K}: \\ y = a + (\varrho^T - I)d}} \left( \sum_{k=1}^K \sup_{\theta} (\theta a_k - (e^\theta - 1)\lambda_k) + \right. \\
&+ \sum_{k \in J^c} \sup_{\theta} (\theta d_k - (e^\theta - 1)\mu_k) + \sum_{k \in J} \sup_{\theta} (\theta d_k - (e^\theta - 1)\mu_k) \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) + \\
&+ \sum_{k=1}^K d_k \left[ \sum_{\ell=1}^K \sup_{\theta} (\theta \varrho_{k\ell} - (e^\theta - 1)p_{k\ell}) + \sup_{\theta} \left( \theta \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K \varrho_{k\ell} \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. - (e^\theta - 1) \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) \right) \right] \Big) = \\
&= \inf_{\substack{(a,d,\varrho) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{S}_+^{K \times K}: \\ y = a + (\varrho^T - I)d}} \sup_{\substack{\theta_k, \vartheta_k, \sigma_{k\ell}, \tau_k, \\ k, \ell \in \{1, 2, \dots, K\}}} \left( \sum_{k=1}^K (\theta_k a_k - (e^{\theta_k} - 1)\lambda_k) + \right. \\
&+ \sum_{k \in J^c} (\vartheta_k d_k - (e^{\vartheta_k} - 1)\mu_k) + \sum_{k \in J} (\vartheta_k d_k - (e^{\vartheta_k} - 1)\mu_k) \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) + \\
&+ \sum_{k=1}^K d_k \left[ \sum_{\ell=1}^K (\sigma_{k\ell} \varrho_{k\ell} - (e^{\sigma_{k\ell}} - 1)p_{k\ell}) + \tau_k \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K \varrho_{k\ell} \right) - \right. \\
&\left. \left. - (e^{\tau_k} - 1) \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) \right] \Big) = \\
&= \sup_{\substack{\theta_k, \vartheta_k, \sigma_{k\ell}, \tau_k, \\ k, \ell \in \{1, 2, \dots, K\}}} \inf_{\substack{(a,d,\varrho) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{S}_+^{K \times K}: \\ y = a + (\varrho^T - I)d}} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k a_k + \sum_{k \in J^c} \vartheta_k d_k + \right. \\
&+ \sum_{k \in J} \vartheta_k d_k \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) + \sum_{k=1}^K d_k \sum_{\ell=1}^K \sigma_{k\ell} \varrho_{k\ell} + \sum_{k=1}^K d_k \tau_k \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K \varrho_{k\ell} \right) - \\
&- \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1)\lambda_k - \sum_{k \in J^c} (e^{\vartheta_k} - 1)\mu_k - \sum_{k \in J} (e^{\vartheta_k} - 1)\mu_k \mathbf{1}(d_k > \mu_k) - \\
&\left. - \sum_{k=1}^K d_k \sum_{\ell=1}^K (e^{\sigma_{k\ell}} - 1)p_{k\ell} - \sum_{k=1}^K d_k (e^{\tau_k} - 1) \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) \right) = \\
&= \sup_{\substack{\theta_k, \vartheta_k, \sigma_{k\ell}, \tau_k, \\ k, \ell \in \{1, 2, \dots, K\}}} \inf_{\substack{(d,\varrho) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{S}_+^{K \times K}: \\ y \geq (\varrho^T - I)d}} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k y_k - \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^K \theta_\ell \varrho_{k\ell} d_k + \sum_{k=1}^K \theta_k d_k + \right. \\
&+ \sum_{k \in J^c} \vartheta_k d_k + \sum_{k \in J} \vartheta_k d_k \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) + \sum_{k=1}^K d_k \sum_{\ell=1}^K \sigma_{k\ell} \varrho_{k\ell} + \sum_{k=1}^K d_k \tau_k \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K \varrho_{k\ell} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k - \sum_{k \in J^c} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k - \sum_{k \in J} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) - \\
& - \sum_{k=1}^K d_k \sum_{\ell=1}^K (e^{\sigma_{k\ell}} - 1) p_{k\ell} - \sum_{k=1}^K d_k (e^{\tau_k} - 1) \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right).
\end{aligned}$$

Найдем инфимум по  $\varrho$ . Нужно минимизировать  $\sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^K (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k) d_k \varrho_{k\ell}$  при условии, что  $\sum_{k=1}^K \varrho_{k\ell} d_k \leq y_\ell + d_\ell$ ,  $\varrho_{k\ell} \geq 0$  и  $\sum_{\ell=1}^K \varrho_{k\ell} \leq 1$ . В соответствии с методом множителей Лагранжа (см., например, [18, теорема 6.2.4, с. 196]) существует неотрицательный вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ , такой что достигается минимум выражения

$$\sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^K (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k + \alpha_\ell) d_k \varrho_{k\ell}$$

при условии, что  $\varrho_{k\ell} \geq 0$  и  $\sum_{\ell=1}^K \varrho_{k\ell} \leq 1$ . Если  $\min_\ell (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k + \alpha_\ell) \leq 0$ , то нужно взять  $\varrho_{km} = 1$ , где  $(-\theta_m + \sigma_{km} - \tau_k + \alpha_m) = \min_\ell (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k + \alpha_\ell)$  и  $\varrho_{k\ell} = 0$  при  $\ell \neq m$ . Если  $\min_\ell (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k + \alpha_\ell) > 0$ , то  $\varrho_{k\ell} = 0$ . Получаем, что минимум равен  $\sum_k d_k \min_\ell (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k + \alpha_\ell) \wedge 0$ , где использовано обозначение  $u \wedge 0 = \min(u, 0)$ . Максимум по  $\alpha$  достигается при  $\alpha = 0$ . Это и есть нужное  $\alpha$ .

Таким образом, обозначая

$$V_k = \sum_{\ell=1}^K (e^{\sigma_{k\ell}} - 1) p_{k\ell} + (e^{\tau_k} - 1) \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) + \max_\ell (\theta_\ell - \sigma_{k\ell}) \vee (-\tau_k), \quad (\text{П.1})$$

где используется обозначение  $u \vee v = \max(u, v)$ , получаем

$$\begin{aligned}
L_J(y) &= \sup_{\substack{\theta_k, \vartheta_k, \sigma_{k\ell}, \tau_k, \\ k, \ell \in \{1, 2, \dots, K\}}} \inf_{d \in \mathbb{R}_+^K} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k y_k - \sum_{k=1}^K V_k d_k + \right. \\
&+ \sum_{k \in J} (\vartheta_k \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) + \theta_k) d_k + \sum_{k \in J^c} (\theta_k + \vartheta_k) d_k - \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k - \\
&- \sum_{k \in J^c} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k - \sum_{k \in J} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) \Big) = \\
&= \sup_{\substack{\theta_k, \vartheta_k, \sigma_{k\ell}, \tau_k: \\ \theta_k + \vartheta_k \geq V_k}} \inf_{d \in \mathbb{R}_+^K} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k y_k - \sum_{k=1}^K V_k d_k + \sum_{k \in J} (\vartheta_k \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) + \theta_k) d_k + \right. \\
&+ \sum_{k \in J^c} (\theta_k + \vartheta_k) d_k - \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k - \sum_{k \in J^c} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k - \\
&- \sum_{k \in J} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k \mathbf{1}_{(\mu_k, \infty)}(d_k) \Big) = \sup_{\substack{\theta_k, \vartheta_k, \sigma_{k\ell}, \tau_k: \\ \theta_k + \vartheta_k \geq V_k}} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k y_k + \right. \\
&+ \sum_{k \in J} \mu_k (\theta_k + \vartheta_k - V_k - (e^{\vartheta_k} - 1)) \wedge 0 - \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k - \sum_{k \in J^c} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k \Big). \quad (\text{П.2})
\end{aligned}$$

Поясним, как получается последнее равенство. Если брать инфимум членов с  $d_k$  по  $d_k > \mu_k$  для  $k \in J$ , то получится  $\mu_k(-V_k + \theta_k + \vartheta_k - (e^{\vartheta_k} - 1))$ . Если брать инфимум по  $d_k \leq \mu_k$ , то получится  $\mu_k(\theta_k - V_k) \wedge 0$ . Поскольку  $\vartheta_k - (e^{\vartheta_k} - 1) \leq 0$ , то минимум этих выражений равен  $\mu_k(-V_k + \theta_k + \vartheta_k - (e^{\vartheta_k} - 1)) \wedge 0$ .

Проминимизируем  $V_k$  по  $\sigma_{k\ell}, \tau_k$ . В силу (П.1) эта функция выпукла по  $(\sigma_{k\ell}, \tau_k)$ . Если  $p_{k\ell} = 0$  для некоторого  $\ell$ , то можно положить  $\sigma_{k\ell} = \infty$ , что позволяет ограничиться рассмотрением тех  $\ell$ , для которых  $p_{k\ell} > 0$ . Аналогично можно исключить из рассмотрения  $\tau_k$ , если  $\sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} = 1$ , полагая  $\tau_k = \infty$ . Поэтому минимум правой части (П.1) существует. В этой точке субдифференциал содержит нулевой вектор. Обозначим через  $\beta_k$  значение максимума в правой части (П.1). Субдифференциал правой части (П.1) по  $((\sigma_{k\ell}, \ell \in \{1, 2, \dots, K\}), \tau_k)$  равен

$$\left( (e^{\sigma_{k\ell}} p_{k\ell}, \ell \in \{1, 2, \dots, K\}), e^{\tau_k} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) \right) - \\ - \text{co}((\mathbf{1}_U(\ell), \{\ell \in 1, 2, \dots, K\}), \mathbf{1}_{\beta_k}(-\tau_k)),$$

где  $\text{co}$  обозначает операцию взятия выпуклой оболочки, а  $U$  – множество (возможно, пустое) тех  $\ell$ , для которых  $\theta_\ell - \sigma_{k\ell} = \beta_k$ . Так как в точке минимума субдифференциал содержит нулевой вектор, то  $U$  содержит все  $\ell$ , такие что  $p_{k\ell} > 0$ , и  $\tau_k = -\beta_k$ , если  $\sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} < 1$ . Поэтому существуют неотрицательные  $\alpha_1, \dots, \alpha_K, \alpha_{K+1}$ , сумма которых равна 1, такие что  $e^{\sigma_{k\ell}} p_{k\ell} - \alpha_\ell = 0$  для  $\ell \in U$ ,  $\alpha_\ell = 0$  для  $\ell \notin U$ ,  $e^{\tau_k} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) - \alpha_{K+1} = 0$  при условии, что  $\tau_k = -\beta_k$ , и  $\alpha_{K+1} = 0$  в противном случае. Таким образом,  $\alpha_\ell = e^{\sigma_{k\ell}} p_{k\ell}$  для всех  $\ell \in \{1, 2, \dots, K\}$  и  $\alpha_{K+1} = e^{\tau_k} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right)$ . Получаем, что  $\sum_{\ell=1}^K e^{\sigma_{k\ell}} p_{k\ell} + e^{\tau_k} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) = 1$ . Так как  $\theta_\ell - \sigma_{k\ell} = \beta_k$ , если  $p_{k\ell} > 0$ , и  $\tau_k = -\beta_k$ , если  $1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} > 0$ , то  $\sum_{\ell=1}^K e^{-\beta_k + \theta_\ell} p_{k\ell} + e^{-\beta_k} \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) = 1$ , т.е.  $e^{\beta_k} = \sum_{\ell=1}^K e^{\theta_\ell} p_{k\ell} + 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell}$ . Окончательно получаем, что  $\beta_k = \ln \left( \sum_{\ell=1}^K e^{\theta_\ell} p_{k\ell} + 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right)$ , и минимум  $V_k$  равен  $\sum_{\ell=1}^K (e^{-\beta_k + \theta_\ell} - 1) p_{k\ell} + (e^{-\beta_k} - 1) \left( 1 - \sum_{\ell=1}^K p_{k\ell} \right) + \beta_k = \beta_k$ .

Таким образом, самое последнее выражение в (П.2) равно

$$\sup_{\theta_k, \vartheta_k: \theta_k + \vartheta_k \geq \beta_k} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k y_k + \sum_{k \in J} \mu_k (\theta_k + \vartheta_k - \beta_k - (e^{\vartheta_k} - 1)) \wedge 0 - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k - \sum_{k \in J^c} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k \right). \quad (\text{П.3})$$

Если  $\theta_k - \beta_k \geq 0$ , где  $k \in J$ , то выбор  $\vartheta_k = 0$  показывает, что супремум по  $\vartheta_k$  множителя при  $\mu_k$  равен нулю. Поэтому (П.3) переписывается в виде

$$\sup_{\theta_k, \vartheta_k: \theta_k + \vartheta_k \geq \beta_k} \left( \sum_{k=1}^K \theta_k y_k + \sum_{k \in J} \mathbf{1}_{(-\infty, \beta_k)}(\theta_k) \mu_k (\theta_k + \vartheta_k - \beta_k - (e^{\vartheta_k} - 1)) \wedge 0 - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^K (e^{\theta_k} - 1) \lambda_k - \sum_{k \in J^c} (e^{\vartheta_k} - 1) \mu_k \Big).$$

Так как функция  $u - (e^u - 1)$  убывает при  $u \geq 0$ , то супремум по  $\vartheta_k$  для  $k \in J$  достигается на границе области ограничений. Соотношение (1.5) следует теперь из определения  $h_k(\theta)$  в (1.4).  $\blacktriangle$

**Доказательство леммы 7.** Так как  $C = (I - P^T)^{-1}$ , то

$$c_{m\ell} = \frac{1}{\det(I - P^T)} (-1)^{m+\ell} M_{\ell m},$$

где  $M_{\ell m}$  —  $(\ell, m)$ -минор матрицы  $I - P^T$ . Заметим, что  $\det(I - P^T) > 0$ . Действительно,  $\det I = 1$  и  $\det(I - \lambda P^T) \neq 0$  при  $\lambda \in [0, 1]$ , поскольку спектральный радиус  $P$  меньше единицы. По непрерывности  $\det(I - P^T) > 0$ . Таким образом, требуется доказать, что  $(-1)^{m+\ell} M_{\ell m} \leq M_{mm}$ . Предположим, что  $\ell = m + 1$ . Нужно доказать, что  $M_{mm} + M_{m+1, m} \geq 0$ . В силу мультилинейности детерминанта  $M_{mm} + M_{m+1, m}$  является детерминантом матрицы  $\tilde{I} - \tilde{P}$ , где  $\tilde{I}$  — единичная  $((K - 1) \times (K - 1))$ -матрица, а  $\tilde{P} - ((K - 1) \times (K - 1))$ -матрица, получающаяся из  $P^T$  сложением строк  $m$  и  $m + 1$  с последующим вычеркиванием  $m$ -го столбца. Так как матрица  $P^T$  является субстохастической по столбцам, то матрица  $\tilde{P}$  также является субстохастической по столбцам. Следовательно, ее спектральный радиус не превосходит единицы. Отсюда следует, что  $\det(\tilde{I} - \tilde{P}) \geq 0$ , т.е.  $M_{m+1, m} + M_{m, m} \geq 0$ . Пусть  $\ell > m + 1$ . С помощью последовательности транспозиций соседних строк и столбцов передвинем в матрице  $\tilde{I} - \tilde{P}$  строку  $\ell$  и столбец  $\ell$  в положение строки  $m + 1$  и столбца  $m + 1$  соответственно, сохраняя при этом взаимное расположение остальных строк и столбцов. Эта матрица по-прежнему имеет вид  $\tilde{I} - \tilde{P}$ . В ней  $\tilde{M}_{m+1, m} = (-1)^{\ell-m-1} M_{\ell m}$ , так как знак минора меняется только при транспозиции столбцов, и  $\tilde{M}_{mm} = (-1)^{2(\ell-m-1)} M_{mm}$ . Так как  $\tilde{M}_{mm} \geq (-1) \tilde{M}_{m+1, m}$ , то  $M_{mm} \geq (-1)^{\ell-m-2} M_{\ell m} = (-1)^{\ell+m} M_{\ell m}$ . Случай  $\ell < m$  рассматривается аналогично.  $\blacktriangle$

Автор выражает признательность С.А. Пирогову и А.Н. Рыбко за полезные обсуждения и рекомендации по улучшению изложения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
2. *Shwartz A., Weiss A.* Large Deviations for Performance Analysis: Queues, Communications, and Computing. London: Chapman & Hall, 1995.
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.
4. *Жакод Ж., Шуряев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994.
5. *Ethier S.N., Kurtz T.G.* Markov Processes: Characterization and Convergence. New York: Wiley, 1986.
6. *Puhalskii A.A.* The Action Functional for the Jackson Network // Markov Process. Related Fields. 2007. V. 13. № 1. P. 99–136.
7. *Atar R., Dupuis P.* Large Deviations and Queueing Networks: Methods for Rate Function Identification // Stochastic Process. Appl. 1999. V. 84. № 2. P. 255–296.
8. *Ignatiouk-Robert I.* Large Deviations of Jackson Networks // Ann. Appl. Probab. 2000. V. 10. № 3. P. 962–1001.
9. *Collingwood J.* Path Properties of Rare Events. PhD Thesis. Univ. of Ottawa, Canada, 2015.

10. *Bouchet F., Laurie J., Zaboronski O.* Langevin Dynamics, Large Deviations and Instantons for the Quasi-geostrophic Model and Two-Dimensional Euler Equations // *J. Stat. Phys.* 2014. V. 156. № 6. P. 1066–1092.
11. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
13. *Bramson M.* Stability of Queueing Networks. Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXVI-2006 // *Lect. Notes Math.* V. 1950. Berlin: Springer, 2008.
14. *Anantharam V., Heidelberger R., Tsoukas P.* Analysis of Rare Events in Continuous Time Markov Chains via Time Reversal and Fluid Approximation. IBM Res. Rep. RC 16280. Yorktown Heights, NY, 1990.
15. *Shwartz A., Weiss A.* Induced Rare Events: Analysis via Large Deviations and Time Reversal // *Adv. in Appl. Probab.* 1993. V. 25. № 3. P. 667–689.
16. *Majewski K., Ramanan K.* How Large Queue Lengths Build Up in a Jackson Network. Preprint, 2008.
17. *Vinter R.B.* Optimal Control. Boston: Birkhäuser, 2000.
18. *Базара М., Шеттму К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.

*Пухальский Анатолий Анатольевич*  
 Институт проблем передачи информации  
 им. А.А. Харкевича РАН  
 puhalski@iitp.ru

Поступила в редакцию  
 29.08.2018  
 После доработки  
 14.01.2019  
 Принята к публикации  
 15.01.2019

УДК 621.391 : 621.394/395.74

© 2019 г. А.А. Пухальский

**ПОПРАВКИ К СТАТЬЕ “ГЕОМЕТРИЯ БОЛЬШИХ ОЧЕРЕДЕЙ”  
(ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ. 2019. Т. 55. № 2. С. 82–111)**

Исправлены неточности в формулировке и доказательстве леммы 9, а также в доказательствах леммы 1 и формулы (1.5) указанной статьи.

DOI: 10.1134/S055529231903????

В указанной статье автором допущены неточности. Для их исправления в текст статьи необходимо внести следующие изменения:

1. Соотношение (4.5) в формулировке леммы 9 должно быть заменено на

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{(\tau_n - T^*)^+ \leq t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t - (\tau_n - T^*)^+) \right| < \delta \mid \tau_n \leq T \right) = 1. \quad (4.5)$$

Соответственно, доказательство соотношения (4.5) в опубликованном варианте статьи нужно заменить на следующее рассуждение.

Для доказательства (4.5) обозначим  $\tau(q) = \inf \left\{ t : \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A \right\}$ , где  $q = (q(t), t \geq 0) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K)$ . Так как множество

$$\left\{ q \in \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^K) : \sup_{(\tau(q) - T^*)^+ \leq t \leq \tau(q)} |q(t) - q^*(t - (\tau(q) - T^*)^+)| \geq \delta, \right. \\ \left. \sup_{t \leq T} \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A \right\}$$

содержит те свои предельные точки, которые являются непрерывными функциями, и так как  $\mathbf{I}(q) = \infty$ , если  $q$  разрывна, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \sup_{(\tau_n - T^*)^+ \leq t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t - (\tau_n - T^*)^+) \right| \geq \delta, \tau_n \leq T \right) \leq \\ \leq - \inf_{\substack{q: \sup_{(\tau(q) - T^*)^+ \leq t \leq \tau(q)} |q(t) - q^*(t - (\tau(q) - T^*)^+)| \geq \delta, \\ \sum_{k=1}^K q_k(t) \geq A \text{ для некоторого } t \in [0, T]}} \mathbf{I}(q).$$

Так как множество, по которому берётся последний инфимум, замкнуто, то эта нижняя грань достигается некоторой функцией  $\check{q}$ . Как мы видели, если

$$(q, T') : \sum_{k=1}^K q_k(T') \geq A \quad \int_0^{T'} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

достигается в точке  $(q, T')$ , то  $T' \geq T^*$  и  $q(T' - t) = q^*(T^* - t)$  при  $0 \leq t \leq T^*$  (как следствие,  $\tau(q) = T'$ ). Следовательно, если  $\tau(\check{q}) < T^*$ , то пара  $(\check{q}, \tau(\check{q}))$  не достигает указанной нижней грани. Предположим, что  $\tau(\check{q}) \geq T^*$ . Тогда существует момент  $t \in [\tau(\check{q}) - T^*, \tau(\check{q})]$ , такой что  $\check{q}(t) - q^*(t - \tau(\check{q}) + T^*) \geq \delta$ , т.е.  $(\check{q}, \tau(\check{q}))$  также не достигает указанной нижней грани. Таким образом,  $\mathbf{I}(\check{q}) \geq \int_0^{\check{q}} L(\check{q}(t), \dot{\check{q}}(t)) dt > \int_0^{T^*} L(q^*(t), \dot{q}^*(t)) dt = \theta^* \cdot r$ . Поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \sup_{(\tau_n - T^*)^+ \leq t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t - (\tau_n - T^*)^+) \right| \geq \delta, \tau_n \leq T \right) < -\theta^* \cdot r.$$

Сопоставляя это неравенство с (4.4), получаем, что для всех достаточно больших  $T$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \sup_{(\tau_n - T^*)^+ \leq t \leq \tau_n} \left| \frac{Q(nt)}{n} - q^*(t - (\tau_n - T^*)^+) \right| \geq \delta \mid \tau_n \leq T \right) < 0,$$

что влечет за собой (4.5).

2. В определении вектора  $\zeta$  в доказательстве леммы 1 в Приложении слово “единичный” должно быть опущено.

3. Функция Лагранжа в доказательстве формулы (1.5) в Приложении должна иметь следующий вид:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^K (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k + \alpha_\ell) d_k \varrho_{k\ell} - \sum_{\ell=1}^K \alpha_\ell (y_\ell + d_\ell).$$

Минимум этой функции по переменным  $\varrho_{k\ell}$  равен  $\sum_k d_k \min_\ell (-\theta_\ell + \sigma_{k\ell} - \tau_k + \alpha_\ell) \wedge 0 - \sum_k \alpha_k (y_k + d_k)$ .

Автор приносит свои извинения за допущенные неточности.

*Пухальский Анатолий Анатольевич*  
Институт проблем передачи информации  
им. А.А. Харкевича РАН  
puhalski@iitp.ru

Поступила в редакцию  
20.06.2019  
После доработки  
20.06.2019  
Принята к публикации  
???.???.2019