Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

*Материалы XVII Международной конференции,
посвященной 100-летию со дня рождения
профессора Н. И. Фельдмана
и 90-летию со дня рождения
профессоров А. И. Виноградова,
А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко*

Тула, 23–28 сентября 2019 года

Тула
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2019

ББК 22.1
УДК 51
А45

Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы,
А45 приложения и проблемы истории: Материалы XVII Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. – 303 с.
ISBN 978-5-6042450-5-7

ББК 22.1
УДК 51

Сборник издан при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-41-710004_р_а) и федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

ISBN 978-5-6042450-5-7

ВЫДАЮЩИЕСЯ СОВЕТСКИЕ МАТЕМАТИКИ

Наум Ильич Фельдман,
доктор физико-математических наук, профессор
(26 ноября 1918 г. — 20 апреля 1994 г.)

Аскольд Иванович Виноградов
доктор физико-математических наук, профессор
(1 октября 1929 г. — 1 января 2006 г.)

Александр Васильевич Малышев
доктор физико-математических наук, профессор
(17 ноября 1928 г. — 10 мая 1993 г.)

Борис Фадеевич Скубенко
доктор физико-математических наук, профессор
(8 февраля 1929 г. — 5 июля 1993 г.)

Пленарные доклады

УДК 511.32

О проблеме вхождения в группах Артина конечного типа[1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Н. Б. Безверхняя (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On the problem of occurrence in Artin groups

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru
N. B. Bezverkhniaia(Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Пусть – $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ конечное множество слов, и M=$(m_{ij}), i, j \in \overline{1,n}$– симметрическая матрица Кокстера с индексами из множества σ, такая, что $m_{ij} = m_{ji}$, для всех $i, j \in \overline{1,n}, i \neq j, m_{ii} = 1, m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.

Свяжем с матрицей Коксетера конечный граф Г, между вершинами которого $\{v_i\}$ и множеством σ установлено взаимно однозначное соответствие, причем, если две вершины v_i, v_j графа Г соединены ребром, то данному ребру соответствует элемент $m_{ij} \in M, m_{ij} \neq \infty$, если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то данной паре v_i, v_j соответствует $m_{ij} = \infty$. Данный граф называется графом Коксетера.

С графом Коксетера связана группа Артина G_Γ со множеством образующих σ и системой определяющих соотношений $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}$ для $i \neq j$, $m_{ij} \neq \infty$, где $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i \ldots$ - слово из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_{ij}.

Копредставление группы Артина G_Γбудет иметь вид:

$$G_\Gamma = \langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1,n}, m_{ij} \neq \infty\rangle,$$

С каждой группой Артина G_Γ связана группа Коксетера $\overline{G_\Gamma}$,имеющая копредставление:

$$\overline{G}_\Gamma = \langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}, {\sigma_i}^2 = 1, i, j \in \overline{1,n}\rangle$$

Если группа $\overline{G_\Gamma}$конечна, то группа G_Γназывается группой Артина конечного типа. Данный класс групп содержит группы кос B_{n+1}.

Определение 1. *Неприводимыми группами Артина конечного типа называются группы, множество образующих которых X нельзя разделить на два множества X_1, X_2,таких, что $X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_1 \cup X_2 = X$, где образующие из одного множества коммутируют с образующими другого.*

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 19-41-710002 р_а.ё)

Известно, что это будут группы: $A_n, n \geqslant 1$; $B_n, n \geqslant 2$; $D_n, n \geqslant 4$; E_6; E_7; E_8; F_4; H_3; H_4; G_2; $I_2(p)$, где $p = 5$, или $p \geqslant 7$ [1].

Всякая группа Артина конечного типа является прямым произведением конечного числа неприводимых групп Артина.

Заметим, что группа A_nесть группа кос B_{n+1}.

Определение 2. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ и любой конечно порожденной подгруппы $H\langle G$установить, принадлежит ли w подгруппе H.*

Т. А. Маканиной было доказано, что в группах $B_{n+1}(A_n)$при $n\rangle 3$проблема вхождения неразрешима [2].

Г. С. Маканиным в «Коуровской тетради» была поставлена проблема «выяснить, разрешима ли проблема вхождения в группах $B_4(A_3)$» [3].

Для неприводимых групп Артина конечного типа:

$$B_n, n \geqslant 4; D_n, n \geqslant 4; E_6; E_7; E_8; F_4; H_4$$

была доказана неразрешимость проблемы вхождения [4] и была поставлена проблема: «Установить, разрешима ли проблема вхождения в группах B_3 и H_3.

Определение 3. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух подгрупп H_1, H_2из G выписать образующие их пересечения.*

Определение 4. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения смежных классов двух конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух подгрупп H_1, H_2из G и для любого элемента $w \in G$ установить, пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.*

Определение 5. *[5] Группа Артина называется группой с древесной структурой, если граф Коксетера Γ, соответствующий данной группе, является дерево-графом.*

Теорема 1. *В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Справедливость данной теоремы следует из утверждений

Лемма 1. *В группах Артина с двумя образующими*

$$G_{ab} = \langle a, b; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$$

1. *разрешима проблема вхождения;*
2. *разрешима проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп;*
3. *разрешима проблема пересечения смежных классов конечнопорожденных подгрупп.*

Теорема 2. *[6] [7] [8] Пусть группа*

$$G = \langle \prod_{i=1}^{n} * G_i; rel G_i, i = \overline{1,n}, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2\rangle$$

есть древесное произведение групп $G_i, i = \overline{1,n}$объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij}\langle G_i, U_{ji}\langle G_j$ с помощью фиксированных конструктивных изоморфизмов $\varphi_{ji} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы $U_{ij}, U_{ji}, i \in I_1, j \in I_2$,обладают условием максимальности и в сомножителях $G_i, i = \overline{1,n}$ разрешимы:

1. *Проблема вхождения*

2. *Проблема пересечения произвольной конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с каждой из подгрупп U_{ij}*

3. *Проблема пересечения произвольного смежного класса конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с каждой из подгрупп U_{ij}*

то в группе разрешима проблема вхождения.

Группу Артина G_Γ , являющуюся древесным произведением, можно представить в виде древесного произведения двупорожденных групп Артина G_{ab}, объединенных по циклическим подгруппам, порожденных образующими объединяемых подгрупп.

Рассмотрим группу Артина граф Коксетера Γ которой есть выпуклый m-угольник $m > 2$ с элементами матрицы Коксетера m_{ij}, принадлежащими множеству $\{2, 3, 4, \ldots, \infty\}$.

Теорема 3. *В группах Артина граф Коксетера Γ которой есть выпуклый m-угольник, $m \geqslant 3$, разрешима проблема вхождения.*

Следствие 1. *В группе кос с четырьмя нитями*

$$B_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle$$

разрешима проблема вхождения.

Следствие 2. *В группе*

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle$$

разрешима проблема вхождения.

Следствие 3. *В группе*

$$H_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \langle \sigma_2\sigma_1 \rangle^5 = \langle \sigma_1\sigma_2 \rangle^5, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle$$

разрешима проблема вхождения.

Рассмотрим группы Артина G_Γ граф Коксетера Γ которых состоит из выпуклых m-угольников, $m \geqslant 3$, причем, любые два m-угольника D, D' пересекаются максимум в одной вершине, $D \cap D' = v$,где v– общая вершина D, D'.Тогда, если вершины v_i пересечения многоугольников являются вершинами дерево-графа, образованного этими вершинами, то такие группы будем называть группами Артина с древесной структурой m-угольников.

Теорема 4. *В группах Артина с древесной структурой m-угольников разрешима проблема вхождения.*

При доказательстве используется теорема 2 и следующая лемма.

Лемма 2. *В группах Артина G_Γ граф Коксетера Γ которой есть выпуклый m-угольник разрешимы:*

1. *проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы H с циклической подгруппой, порожденной образующим группы G_Γ.*

2. *проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы H с циклической подгруппой, порожденной образующим группы G_Γ.*

Теорема 5. *В классе групп Артина проблема вхождения неразрешима [2], [4].*

Рассмотрим группу Артина G_Γ со множеством образующих σ, и пусть $A \subset \sigma, A$ – истинное подмножество множества σ. Обозначим через $\langle A \rangle$ подгруппу группы G_Γ, которая называется параболической подгруппой группы G_Γ.

Д. Титсем было доказано, что в группах Коксетера разрешима проблема вхождения в параболические группы.

Теорема 6. *В группах Артина разрешима проблема вхождения в параболические группы.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера.// Математика. 1974, т.18, №6, с. 56-79.
2. Маканина Т.А. Проблема вхождения для групп кос $B_(n+1)$ при $n \geqslant 5$.//Математические заметки, 1981. Т.29, №1 с.31-33.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 13-е изд. Новосибирск 1995 г.
4. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. жур. TXXVI, №5, 1985, с. 27-42.
5. В. Н. Безверхний О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения. Тезисы докладов V Международной конференции, Тула, 2003, с. 33- 34
6. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1986 с. 3-21.
7. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1981 с. 20-62.
8. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. //Вопросы теории групп и полугрупп. Тула. Тульский Государственный Педагогический институт. 1972, с. 3-86.

———————————————————————————

УДК 511.34

О числе представлений натуральных чисел суммой квадрата и произведения

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
член-корреспондент РАН, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
e-mail: vab@iam.khv.ru

On the number of representations of natural numbers by the sum of a square and a product

V. A. Bykovskii (Russia, Khabarovsk)
corresponding member of RAS, Khabarovsk branch of the Institute of applied mathematics FEB RAS
e-mail: parshin@mi-ras.ru

Пусть $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ — натуральное число, отличное от квадрата. Обозначим через $N(d)$ количество троек n_1, b, n_2 с целым b и натуральными n_1, n_2, для которых

$$4n_1n_2 + b^2 = d.$$

В работе

Hooley C. *On the Representation of a Number as the Sum of a Square and Product.* Math. Zeitschr. Bd., 69 (1958), 211-217

впервые была получена асимптотическая формула для $N(d)$ при $d \equiv 0 \pmod 4$. В докладе будет рассказано о новых более сильных результатах на эту тему, полученных с помощью спектральной теории автоморфных функций.

———————————————————————————

УДК 511

Гипотеза Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1,\ p > 1$, её обобщения и квадратичные формы

Н. М. Глазунов (Украина, г. Киев)
Национальный Авиационный Университет
e-mail: glanm@yahoo.com

Minkowski's conjecture concerning critical lattices of the region $|x|^p + |y|^p < 1,\ p > 1$, its extensions and quadratic forms

N. M. Glazunov (Ukraine, Kiev)
National Aviation University
e-mail: glanm@yahoo.com

Основной текст тезисов

А. В. Малышев, наряду с другими своими математическими рабоиами, исследовал представление целых числе положительными квадратичными формами [1] и вышеназванную гипотезу Г. Минковского [2] (далее гипотеза М). Мы представляем расширенные варианты (обобщения) гипотезы М и результаты А. В. Малышевы (А. В.) в таком расширенном контексте. С точки зрения p-адических методов интересно рассмотреть функциональные аналоги гипотезы М. Мы формулируем такие аналоги в разделе 4 на основе результатов Малера, Карлица и Постникова[3]. В работах А.В. о представлении целых числе положительными квадратичными формами используются результаты об областях комплексной плоскости, в которых отсутствуют нули L-функций Дирихле. Для характеров Дирихле по модулю p^n А. Г. Постниковым[3] была доказана теорема о полиномиальном представлении индекса. Такое представление было применено В. Н. Чубариковым (см. [4] и ссылки в ней) для вывода оценок (коротких) сумм характеров.

В предлагаемом сообщении, посвященном памяти А.В., мы представляем расширения и модификаций гипотезы М, результаты о представлении целых числе положительными квадратичными формами в таком контексте, функциональные аналоги задач о квадратичных формах и функциональные аналоги гипотезы М, к:оторые могут быть отнесены к $p-$адической геометрии [5].

План сообщения следующий.

Расширения и обобщения гипотезы Минковского о критическом определителе области (ро-гипотезы М).

Квадратичные формы и ро-гипотезы М.

Функциональные аналоги ро-гипотезы М и $p-$адическая геометрия.

Представляемые результаты включают развитие исследований, описанных в работах [6, 7, 8, 9] и в ссылках в них на другие работы автора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Том 65. С.3–212.

2. Малышев А. В. Применения компъютеров к доказательству гипотезы Минковского о критическом определителе области из геометрии чисел // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Том 71. С.163–180.

3. Постников А. Г. Избранные труды. — М.: Физматлит, 2006, 512 с.

4. Чубариков В. Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова и его обобщений // Тр. МИАН СССР. 1981. Том 157. С.214–232.

5. Scholze P. p-adic Geometry // Proc. of ICM 2018. Научная статья в сети Интернет [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1712.03708

6. Glazunov N. M. On A. V. Malyshev's approach to Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p > 1$ // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 4. С. 185–193.

7. Glazunov N. M. Dualities in abelian varieties and formal groups over local fields. // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 1. С. 44–56.

8. Glazunov N. M. Algebraic-geometric aspects of function field analogues to abelian varieties // Международная конференция «Algebraic and geometric methods of analysis».: тезисы докладов международной конференции (Одесса, 28 мая — 3 июня 2019 г.) — Киев, 2019. С. 20–21. Режим доступа: http://imath.kiev.ua/ topology/conf/agma2019/

9. Глазунов Н. М. L-функций, кратные дзета значения, и приложения. Материалы конференции // XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 13–18 мая 2019 г.) — Тула, 2019. С. 17–19.

———————————————————————————————

УДК 511.32

Influence of singularities in the problem on the Convergence Exponent for Multidimensional Terry's problem

I. Sh. Jabbarov (Azerbaijan, Ganja)
Ganja State University,
e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Влияние особенностей в проблеме о показателе сходимости для многомерной проблемы Терри

И. Ш. Джаббаров (Азербайджан, г. Гянджа)
Гянджинский Государственный Университет,
e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Abstract

In the paper it is considered the question on Convergence Exponent of the special integral of multidimensional Terry's problem. The problem considered in the article consisted in investigation of singularities influence to the value of convergence exponent of the special integral.

In Multidimensional Analysis many questions of the theory of trigonometrical integrals lead to the investigation of singularities of some mappings. They have crucial importance when questions on asymptotics of oscillatory integrals are studying (see [1]).

The question on the convergence exponent of Terry's problem in one-dimensi-onal case was considered in [7]. Multidimensional case was studied in [4, 8]. Let the polynomial $F(\bar{x})$ be defined by an equality

$$F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \gamma_j(\bar{x}); \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_r),$$

where $\gamma_j(\bar{x}) = x_1^{k_{j1}} x_2^{k_{j2}} \cdots x_r^{k_{jr}}$ are monomials of degree $k(j) = k_{j1} + k_{j2} + \cdots + k_{jr}$, moreover, the polynomial has not a monomial of zero degree, i.e. $k_{j1} + k_{j2} + \cdots + k_{jr} > 0; k_{ji} \geq 0$, for all $j = 1, ..., N$. The special integral of a multidimensional Tarry's problem is defined as in [4, 8] as an integral

$$\theta_k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{2\pi i F(\bar{x})} d\bar{x} \right|^{2k} d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_N.$$

Definition 1. The number $\gamma > 0$ is called to be a convergence exponent of multi-dimensional Tarry's problem, if the special integral θ_k converges when $2k > \gamma$, and diverges when $2k < \gamma$.

For questions concerning the history of the problem one can refer to the works [7, 8, 10-15].

Designate

$$S(\bar{x}) = \begin{pmatrix} k_{11} x_1^{-1} \gamma_1(\bar{x}) & k_{12} x_2^{-1} \gamma_1(\bar{x}) & \cdots & k_{1\rho} x_\rho^{-1} \gamma_1(\bar{x}) \\ k_{21} x_1^{-1} \gamma_2(\bar{x}) & k_{22} x_2^{-1} \gamma_2(\bar{x}) & \cdots & k_{2\rho} x_\rho^{-1} \gamma_2(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} x_1^{-1} \gamma_N(\bar{x}) & k_{N2} x_2^{-1} \gamma_1(\bar{x}) & \cdots & k_{N\rho} x_\rho^{-1} \gamma_1(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

and

$$K(\bar{x}) = \begin{pmatrix} k_{11} \gamma_1(\bar{x}) & k_{12} \gamma_1(\bar{x}) & \cdots & k_{1\rho} \gamma_1(\bar{x}) \\ k_{21} \gamma_2(\bar{x}) & k_{22} \gamma_2(\bar{x}) & \cdots & k_{2\rho} \gamma_2(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} \gamma_N(\bar{x}) & k_{N2} \gamma_N(\bar{x}) & \cdots & k_{N\rho} \gamma_N(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

for each $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_r)$. Then the Jacoby matrix (2) can be written as a block-matrix

$$\varphi' = (S(\bar{x}_1), ..., S(\bar{x}_k), -S(\bar{x}_{k+1}), ..., -S(\bar{x}_{2k})).$$

Arranging the entries of every column consequently in a row, take the transposed Jacoby matrix of the obtained system of monomials, designating the received matrix as φ''. Continuing this procedure we get the sequence of matrices $\varphi^{(j)}, j = 1,..,m$, where $m = degF$. Let W_j be the set of points of $[0,1]^{2k}$ at which $\Phi_j = det(\varphi^{(j)} \cdot {}^t\varphi^{(j)}) = 0, j = 0,1,...,m$. The set of singular points is a union $W = \bigcup_{j=1}^{m} W_j$. Following two lemmas show that the algebraic set W has a zero Jordan measure (for the proof of our theorems below we need in a more detailed structure of algebraic sets (see [9])).

Definition 2. The matrix A of a rank ρ we will call to be the matrix of the structure $(\rho_1,...,\rho_q)$ if it can be represented as a block-matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_q \end{pmatrix},$$

and: 1) $rankA_j = \rho_j$; 2) if to the matrix A_j to join the first row of the matrix A_{j+1} then its rank remains unchanged, but if to delete its last row then the rank of the matrix A_j stands less.

The basic results of the paper are listed below.

Theorem 1. If k is a natural number such that $k\rho < N$ then θ_k diverges.

Definition 4. We call the polynomial $F(\bar{x})$ to be v-complete if after of some permutation of variables $x_1, x_2, ..., x_r$ this polynomial contains with any monomial $x_1^{k_1}...x_v^{k_v}x_{v+1}^{k_{v+1}}...x_r^{k_r}$ the all of monomials of a view $x_1^{k'_1}...x_v^{k'_v}x_{v+1}^{k_{v+1}}...x_r^{k_r}$ with

$$0 \le k'_1 \le k_1, ..., 0 \le k'_v \le k_v, 0 \le k'_1 + \cdots + k'_v \leqslant k_v,$$

$$1 \le k'_1 + \cdots + k'_v + k_{v+1} + \cdots + k_r$$

Theorem 2. Let the polynomial (2) be v-complete $(0 \leqslant v \leqslant r)$, and the matrix of exponents (3) has a rank ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, is a matrix of the structure $(\rho_1,...,\rho_q)$. Then, the special integral θ_k of the multidimensional Terry's problem diverges for the natural $k \geqslant q$ such, that

$$2kr \leqslant v + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{r} k_{ji}.$$

Theorem 3. Let the polynomial (2) does't be represented as a sum of two polynomials of smaller number of variables, its senior form contains all of r independent variables, and the matrix of exponents (3) has a rank ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, is a matrix of the structure $(\rho_1,...,\rho_q)$. Then, the special integral of multidimensional Terry's problem converges for all natural $k \geqslant q$ such that $2kr \geqslant 2N + r$ and

$$2kr > r + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{r} k_{ji}.$$

Taking the most weak case of $\rho = 1$ we get following condition of convergence doesn't dependent from singularities.

Consequence. Let the polynomial is defined by (2), can't be represented as a sum of polynomials of smaller number of variables with common components, and their senior form contains all of independent variables. Then the special integral θ_k converges when $k \geqslant N$ and

$$2kr > r + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{r} k_{ji}.$$

The consequence gives almost exact value for the convergence exponent when

$$2kN \leqslant r + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{r} k_{ji}.$$

Theorem 4. Let the polynomial (2) doesn't be represented as a sum of two polynomials of smaller number of variables, its senior form contains all of r independent variables, and the matrix of exponents (3) has a rank ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, and is a matrix of the structure $(\rho, \rho, ..., \rho)$. If, in addition, the conditions of the consequence of the lemma 1 are satisfied, then the special integral of multidimensional Terry's problem converges for all natural k such that $k\rho \geq N, 2kr \geqslant 2N + r$ and

$$2kr > r + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{r} k_{ji}.$$

The proof of the theorems 2, 3 and 4 can be spent as well as theorems 2 and 3 of the work [14], using the result of the lemma 3.

REFERENCES

1. Arnold V. I., Varchenko A. N., Huseyn-zade S. M. Singularities of differenti-able mappings. M., Nauka, 2009.

2. Landau E. Introduction to Differential and Integral calculus. -2 ed. -M: KomKniga, 2005.

3. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. «Trigonometric integ-rals», Izv. Academy of Sciences. of USSR, math. ser. (1979), v.43, №5, pp.971-1003.

4. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. «Theory of multiple trigonometric sums». M., Nauka, 1987.

5. Chubarikov V. N. «On multiple trigonometric integrals». Dokl. Academy of Sciences of USSR, (1976), v.227, №6, pp.1308-1310.

6. Chubarikov V. N. «On multiple rational trigonometric sums and multiple integrals», Mat. Notes, v.20, №1, (1976), pp. 61-68.

7. Hua Loo Keng «On the number of solutions of Tarry's problem» Acta Sci. Sinica, (1952), v.1, №1, pp. 1-76.

8. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. «Multiple trigonometric sums and their applications», Proc. MIAN, (1980), v.151, pp.1-128.

9. Jabbarov I. Sh. On the structure of some algebraic varieties. Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 36 (1), 74-82 (2016). Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences.

10. Dzhabbarov I. Sh. "On an identity of Harmonic Analysis and its applica-tions". Proceedings of AS USSR, 1990, v, 314, №5, p. 1052-1054.

11. Dzhabbarov I. Sh. "On estimates of trigonometrically integrals» Transac-tions of RAS, 1994, v.207, pp. 82-92.

12. Dzhabbarov I. Sh. "On estimates of trigonometrically integrals» Chebishev-skii sbornik, v. 11, issue 1(2010), pp. 85-108.

13. Dzhabbarov I. Sh. "On convergence exponent of the special integral of two dimensional Terry's problem" Scientific Notes of Orlov State University, №6 (50), 2012, pp. 80-89.

14. Dzhabbarov I. Sh. "On convergence exponent of the special integral of multi-dimensional Terry's problem" Chebishevskii sbornik, v.14, issue 2(2013), pp. 74-103.

15. Jabbarov I. Sh. "On convergence exponent of the special integral of two dimensional Terry's problem". arXiv:1302.3888v2math.NT] 11 Mar 2017.

УДК 511

Основная и расширенная гипотезы Римана и нули рядов Дирихле, определяемых линейными комбинациями L-функций Дирихле

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
О. А. Матвеева (Россия, г. Саратов)
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

The basic and extended Riemann hypotheses and zeros of Dirichlet series defined by linear combinations of L-functions

V.N. Kuznetsov (Russia, Saratov)
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
O. A. Matveeva (Russia, Saratov)
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

В 1922 году Харди [1] выдвинул гипотезу о том, что нули L-функций Дирихле с числовыми характерами, расположенные в критической полосе: $0 < s < 1$, лежат на критической прямой. Эта гипотеза в дальнейшем получила название расширенной гипотезы Римана. При выдвижении такого предположения у Харди естественно встал вопрос о взаимосвязи его гипотезы и гипотезы Римана о нулях дзета-функции. Но этот вопрос остался открытым. В дальнейшем этой задачей занимались многие известные математики, но проблема оставалась не решенной по настоящее время.

Разработав новый подход к решению этой задачи, авторы показали, что расширенная гипотеза Римана является следствием основной. Более того, была установлена связь между нулями L-функций Дирихле, лежащими в критической полосе и нулями дзета-функции Римана. Этот результат позволил получить новые факты о нулях рядов Дирихле, являющихся линейной комбинацией L-функций Дирихле с числовыми характерами. В частности о нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, которую они рассмотрели в 1936 году [2].

Авторами показано, что для ряда Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{1}^{l} \chi_i L(s, \chi_i), s = \sigma + it, \tag{1}$$

где χ_i – характеры Дирихле по модулю m_i, имеет место представление

$$f(s) = f_1(s)\zeta(s)(\alpha_1 Q_{m_1}(s) + ... + \alpha_l Q_{m_l}(s)), \tag{2}$$

где $f_1(s)$ не имеет нулей в критической полосе, $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $Q_{m_i}(s)$ – полиномы Дирихле степени m_i.

В силу (2) для ряда Дирихле (1) задача определения оценки числа нулей, лежащих на критической прямой, с точностью до порядка $O(T)$, $|t| \leq T$, равносильна соответствующей оценке для дзета-функции Римана, а задача определения верхней оценки для числа нулей функции (1) , лежащих в полуплоскости $\sigma > 1$ равносильна соответствующей оценке для полинома Дирихле $Q_m(s)$, где $m = \max m_i$, которая решалась ранее Б.Я. Левиным и М.Г. Крейном (см.[3]).

Отметим, что указанные задачи для функции Дэвенпорта-Хейльбронна пытались решить многие авторы. В частности, А.А. Карацуба [4], С.М. Воронин [5] и другие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. – Москва: Огиз-гостехиздат, 1947.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. – М.: Физматгиз, 1994.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.– М.:изд-во технико-теоретической литературы, 1956.
4. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1990, Т. 94, №2, С. 303-315.
5. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. Мат.,1980, Т.44, №1, С. 63-91.

——————————————————————————————

УДК 511.32

Универсальность дзета-функции Римана в коротких интервалах [1]

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, факультет математики и информатики, Вильнюсский университет
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Universality of the Riemann zeta-function in short intervals

A. Laurinčikas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

In 1975, S. M. Voronin discovered the universality of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$. Roughly speaking, he proved [8] that every analytic non vanishing function on the strip $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ can be approximated by shifts $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. For a precise statement of the Voronin theorem, we need a certain notation. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H_0(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Then the modern version of the Voronin theorem says [4] that if $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$, then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

The latter inequality shows that there are infinitely many shifts $\zeta(s + i\tau)$ approximating with accuracy $\varepsilon > 0$ a given function $f(s) \in H_0(K)$. On the other hand, the above theorem is not effective in the sense that any τ with approximating property is not known.

Voronin understood the effectivation of his universality theorem as an indication of interval containing τ such that

$$\sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon. \tag{1}$$

[1]This research is funded by the European Social Fund according to the activity “Improvement of researchers’ qualification by implementing world-class R&D projects” of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

The first step in this direction was made by A. Good [3], however, his results are very complicated. R. Garunkštis applied the Good method and obtained understable effective theorems for approximation of analytic functions, defined in a small disc. Finally, in [2], it was found an effectively given interval $[T, 2T]$ containing τ such that the inequality (1) was satisfied. Obviously, this interval must be as short as possible. Therefore, the motivation arises to prove universality theorems for the function $\zeta(s)$ in short intervals $[T, T+H]$ with $H = o(T)$ as $T \to \infty$. The first results in this direction were obtained in [7].

THEOREM 1. *Suppose that $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \le H \le T$, $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{H\to\infty} \frac{1}{H}\text{meas}\left\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H}\text{meas}\left\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

The quantity $T^{1/3}(\log T)^{26/15}$, of course, is not the best possible, and depends on the choice of an exponent pair in the mean square estimates over short intervals.

Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compacta. Theorem 1 can be generalized for compositions $F(\zeta(s))$, where F is an operator $F : H(D) \to H(D)$. For $K \in \mathcal{K}$, let $H(K)$ be the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K, i. e, $H_0(K) \subset H(K)$. Let

$$S = \{g(s) \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

We give one example of the above operators.

THEOREM 2. *Suppose that $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \leqslant H \leqslant T$, and $F : H(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that, for every polynomial $p = p(s)$, the set $\left(F^{-1}\{p\}\right) \cap S$ is non-empty. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{H}\text{meas}\left\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{H}\text{meas}\left\{\tau \in [T, T+H] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Universality theorems for compositions $F(\zeta(s))$ for other classes of operators F can be found in [5] and [6], and can be generalized in short intervals.

Theorem 2 together with the classical Rouché theorem leads to the following corollary.

COROLLARY 1. *Suppose that H and F are as in Theorem* 2. Then, for every σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, there exists a constant $c = c(\sigma_1, \sigma_2, F) > 0$ such that, for sufficiently large T, the function $F(\zeta(s))$ has more than cH zeros in the rectangle

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2,\ T \leqslant t \leqslant T+H\}.$$

Theorems 1 and 2 are of continuous type, and have their discrete versions. Let $h > 0$ be fixed, and N and M run over positive integers.

Theorem 3. *Suppose that $N^{1/3}(\log N)^{26/15} \le M \le N$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \# \left\{ N \le k \le N+M : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \# \left\{ N \le k \le N+M : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Theorem 3 also has its analogues for compositions $F(\zeta(s))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garunkštis R. The effective universality theorem for the Riemann zeta-function // Proc. of the Session on Analytic Number Theory and Diophantine Equations, Bonn Math. Schriften vol. 360 — Bonn: Univ. Bonn, 2003. 21 pp.

2. Garunkštis R., Laurinčikas A., Matsumoto K., Steuding J., Steuding R. Effective uniform approximation by the Riemann zeta-function // Publ. Math. 2010. V. 54. P. 209-219.

3. Good A. On the distribution of the values of Riemann's zeta-function // Acta Arith. 1981. V. 38. P. 347-388.

4. Laurinčikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 1996. 306 pp.

5. Laurinčikas A. Universality of the Riemann zeta-function // J. Number Theory. 2010. V. 130. P. 2323-2331.

6. Laurinčikas A. Universality of composite functions // RIMS Kôkyôroku Bessatsu. 2012. V. B39. P. 191-204.

7. Laurinčikas A. Universality of the Riemann zeta-function in short intervals // J. Number Theory. 2019. V. 204. P. 279-295.

8. Voronin S. M. Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 1975. V. 39. P. 475–486 (in Russian).

––

УДК 511.331

Круги на полях, которые рисует дзета-функция Римана

Ю. В. Матиясевич (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Crop circles drawn by Riemann's zeta function

Yu. V. Matiyasevich (Russia, St.Petersburg)
St.Petersburg Department of V. A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

В выступлении будут рассматриваться приближения знакопеременной дзета-функции

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} = (1 - 2 \times 2^{-s})\zeta(s)$$

посредством конечных рядов Дирихле

$$\eta_N(\tau, s) = \sum_{n=1}^{N} a_{N,n}(\tau) n^{-s},$$

коэффициенты которых зависят от вещественного параметра τ (эти коэффициенты определяются специальным образом через значения тета-функции Римана–Зигеля и её производных в точке $1/2 + \mathrm{i}\tau$). На численных примерах будет продемонстрировано, что такие конечные ряды Дирихле дают хорошие приближения к знакопеременной дзета-функции, а также обладают ещё рядом интересных свойств.

В частности, будут продемонстрированы графики отношения

$$\frac{\eta_N(\tau, \sigma + \mathrm{i}t)}{\eta_M(\tau, \sigma + \mathrm{i}t)}$$

как функции от t при фиксированных M, N и σ. Эти графики имеют очень интересную структуру: каждый состоит из башни почти идеальных круговых дуг (“кругов на полях”), на каждой из которых лежит по одной точке, соответствующей значению рассматриваемого отношения при t, равном мнимой части некоторого нетривиального нуля дзета функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Matiyasevich Yu. V., *Crop circles drawn by Riemann's zeta function and some other its nearby properties*, POMI Preprints 02/2019, 74 pages; [Электронный ресурс], Режим доступа: `http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2019/19-02.html`

УДК 512.55+512.545

Спрямляющие направленные идеалы частично псевдоупорядоченных колец

А. В. Михалев (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Е. Е. Ширшова (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Rectifying directed ideals of partially pseudo-ordered rings

A. V. Mikhalev (Russian, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
E. E. Shirshova (Russian, Moscow)
Moscow Pedagogical State University
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Пусть $R =< R, +, \cdot >$ – произвольное кольцо (не обязательно ассоциативное).

R называется *частично псевдоупорядоченным кольцом*, если $< R, +, \leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

($*$) если $0 \leqslant a$ в $< R, +, \leqslant >$, то $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для любого $b \in R$ (см. [1]).

Если группа $< R, +, \leqslant >$ является направленной (линейно упорядоченной), то R называется *направленным (линейно) псевдоупорядоченным кольцом.*

Часто условию ($*$) удовлетворяют аддитивные группы колец без единицы (колец Ли, йордановых колец, например).

Свойства линейно псевдоупорядоченных колец исследовались ранее в работах [2, 3].

Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых элементов $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ всегда следует $g \in M$.

Идеал I частично псевдоупорядоченного кольца $R =< R, +, \cdot, \leqslant >$ называется *выпуклым*, если группа $< I, +, \leqslant >$ является выпуклой подгруппой аддитивной группы $< R, +, \leqslant >$.

Целью данного сообщения является характеризация множеств выпуклых направленных идеалов частично псевдоупорядоченных колец.

Выпуклый идеал I частично псевдоупорядоченного кольца R называется *спрямляющим*, если факторкольцо R/I является линейно псевдоупорядоченным кольцом.

Теорема 1. *Пусть R – частично псевдоупорядоченное кольцо, I – спрямляющий направленный идеал кольца R, $I \subset J$ и $I \subset K$, где J и K – выпуклые направленные идеалы кольца R. Тогда $J \subseteq K$ или $K \subseteq J$.*

Положительные элементы a и b частично упорядоченной группы $G =< G, +, \leqslant >$ называются *почти ортогональными или АО-элементами (almost orthogonal elements)* в G, если из неравенств $g \leqslant a, b$ следует верность неравенств $ng \leqslant a, b$ для всех элементов $g \in G$ и всех целых чисел $n > 0$.

Теорема 2. *Пусть $R =< R, +, \cdot, \leqslant >$ – частично псевдоупорядоченное кольцо, I – спрямляющий направленный идеал кольца R, a и b – почти ортогональные элементы группы $< R, +, \leqslant >$. Тогда $a \in I$ или $b \in I$.*

Частично упорядоченная группа $G =< G, +, \leqslant >$ называется *АО-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G.

Частично псевдоупорядоченное кольцо $R =< R, +, \cdot, \leqslant >$ называется *АО-псевдоупорядоченным кольцом*, если группа $< R, +, \leqslant >$ является *АО*-группой. Данный подкласс направленных псевдоупорядоченных колец включает в себя линейно псевдоупорядоченные кольца.

Теорема 3. *Пусть $R =< R, +, \cdot, \leqslant >$ – АО-псевдоупорядоченное кольцо, I – идеал кольца R. Тогда следующие условия равносильны:*

1) I – спрямляющий направленный идеал частично псевдоупорядоченного кольца R;

2) если элементы a и b почти ортогональны в группе $< R, +, \leqslant >$, то $a \in I$ или $b \in I$.

Подмножество Q решетки L называется *корневой системой*, если для любого $a \in Q$ множество $U_a = \{u \in L | \ a \leqslant u\}$ линейно упорядочено и лежит в Q.

Теорема 4. *Спрямляющие направленные идеалы AO-псевдоупорядоченного кольца R образуют корневую систему в решетке всех выпуклых направленных идеалов кольца R.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалев А. В., Ширшова Е. Е. Упорядоченные неассоциативные алгебраические структуры.// XV Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения посвященная столетию доктора физико-маткматических наук, профессора Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича (Тула, 28-31 мая 2018 г.). — Тула, 2018. С. 46-47.

2. Бибаева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно K-упорядоченных кольцах// Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Том 17. № 4. С. 13-23.

3. Ширшова Е. Е. О частично K-упорядоченных кольцах.// Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Том 21. № 1. С. 225-239.

УДК 51(092)

О жизни и творчестве Бориса Фадеевича Скубенко

Б. З. Мороз (Россия, г. Москва)
Московский физико-технический институт (государственный университет);
Санкт - Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт - Петербург, Россия;
Universität Bonn, D-53113 Bonn, Германия.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru
Н. Г. Мощевитин (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: moshchevitin@gmail.com

About the life and work of Boris Fadeevich Skubenko

B. Z. Moroz (Russia, Moscow)
Moscow Institute of physics and technology (state University);
St. Petersburg Department of the Mathematical Institute. V. A. Steklov of the RAS, Saint - Petersburg, Russia;
Universität Bonn, D-53113 Bonn, Germany.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru
N. G. Moshchevitin (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: moshchevitin@gmail.com

Мы постараемся рассказать об основных результатах Б. Ф. Скубенко и его жизненном пути.

УДК 51(091)+511.46

Наум Ильич Фельдман и трансцендентные числа

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: nester@mi-ras.ru

Naum Il'ich Feldman and transcendental numbers

Yu. V. Nesterenko (Russian Federation, Moscow)
Lomonosov Moscow state University
e-mail: nester@mi-ras.ru

В докладе будет рассказано об основных результатах Н. И. Фельдмана в теории трансцендентных чисел и его жизненном пути.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. — М.: Издательство МГУ, 1982. — 312 с.
2. Фельдман Н. И. Приближение алгебраических чисел. — М.: Издательство МГУ, 1981. — 202 с.

УДК 512.547.4+511.687

Двумерные локальные поля и тэта-функции

Д. В. Осипов (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук;
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики;
Национальный исследовательский технологический университет МИСиС
e-mail: d_osipov@mi-ras.ru

Two-dimensional local fields and theta-functions

D. V. Osipov (Russsia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russsian Academy of Sciences;
National Research University Higher School of Economics;
National University of Science and Technology MISiS
e-mail: d_osipov@mi-ras.ru

Двумерное локальное поле — это полное поле относительно дискретного нормирования, так что поле вычетов является полным полем относительно дискретного нормирования с конечным полем вычетов.

Такие поля естественно возникают из флага: точка и росток целой одномерной подсхемы на алгебраической поверхности над конечным полем или на арифметической поверхности.

Примерами двумерных локальных полей являются поля $\mathbb{F}_q((u))((t))$, $\mathbb{Q}_p((t))$ и $\mathbb{Q}_p\{\{u\}\}$. Причем первое поле естественно возникает из алгебраической поверхности, а последние два поля — из арифметической поверхности.

По двумерному локальному полю естественным и каноническим образом строится дискретная группа Гейзенберга степени нильпотентности два, то есть группа верхнетреугольных целочисленных матриц размера 3×3 с единицами на диагонали.

В совместных работах Д.В. Осипова и А.Н. Паршина был построен гармонический анализ на двумерных локальных полях, который включил в себя построение пространства распределений на двумерном локальном поле (с учетом того, что двумерное локальное поле не локально компактно). Дискретная группа Гейзенберга естественным образом действует на некотором подпространстве пространства распределений двумерного локального поля (подпространстве инвариантов относительно группы обратимых элементов кольца нормирования двумерного локального поля).

Дискретная группа Гейзенберга допускает естественное вложение в расширенную дискретную группу Гейзенберга, являющуюся полупрямым произведением исходной группы Гейзенберга и группы целых чисел. Расширенная дискретная группа Гейзенберга также естественным образом действует на том же самом подпространстве распределений двумерного локального поля, что и исходная дискретная группа Гейзенберга.

Основной результат состоит в том, что следы действия некоторых элементов расширенной дискретной группы Гейзенберга на бесконечномерных неприводимых подпредставлениях только что описанного представления, связанного с двумерным локальным полем, являются тэта-функциями Якоби.

Доклад основан на совместной работе с А. Н. Паршиным, см. [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов Д. В., Паршин А. Н. Представления дискретной группы Гейзенберга на пространствах обобщенных функций двумерных локальных полей // Алгебра, геометрия и теория чисел, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова, Тр. МИАН, Том 292, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2016, С. 191–208.

УДК 511.331

Дзета-функции и формула Пуассона

А. Н. Паршин (Россия, г. Москва)
академик РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: parshin@mi-ras.ru

Zeta-functions and the Poisson formula

A. N. Parshin (Russia, Moscow)
academician of the Russian Academy of Sciences, Mathematical Institute. V. A. Steklov of the RAS
e-mail: parshin@mi-ras.ru

Будет дан обзор как классических, так и новых результатов о применении гармонического анализа к доказательству основных свойств дзета-функций

арифметики (мероморфное продолжение, функциональное уравнение).
Доклад будет рассчитан на широкий круг участников конференции.

———————————————————————————————

УДК 511

Александр Васильевич Малышев и его исследования в теории чисел

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино-Балкарский государственный университет
e-mail: urusbi@rambler.ru
Е. В. Подсыпанин (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический университет
e-mail: podsypanin@mail.ru

Alexander Vasilievich Malyshev and his research in number theory

U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino-Balkarian State University
e-mail: urusbi@rambler.ru
E. V. Podsypanin (Russia, St. Petersburg)
St.Petersburg Polytechnic University
e-mail: podsypanin@mail.ru

В докладе будет рассказано о жизни и научно—педагогической деятельности Александра Васильевича Малышева.

Доклад построен по следующей схеме:

1) Краткие биографические сведения;

2) Основные достижения А. В. Малышева в теории чисел;

3) Научно—организационна и редакционно—издательская деятельность А. В. Малышева.

Основная часть нашего доклада будет посвящена достижениям А. В. Малышева в теории чисел. В своей научной деятельности в области теории чисел А. В. Малышев уделил основное внимание теории квадратичных форм и геометрии чисел.

В теории квадратичных форм А. В. Малышева привлекала прежде всего задача о целочисленных представления целых чисел квадратичными формами, т. е. исследование решений диофантовых уравнений вида

$$Q(x_1,\ \ldots,\ x_n) = m,$$

где Q — целочисленная квадратичная форма от n переменных, m — целое число.

Так, для $n > 5$ асимптотические формулы при $m \to \infty$ для числа представлений удавалось получить круговым методом Харди—Литтлвуда. Существенно улучшив технику применения этих методов к рассматриваемой задаче, А. В. Малышеву удалось впервые получить асимптотическую формулу с остаточным членом для числа представлений $x_1,\ \ldots,\ x_n$ целого числа m положительной целочисленной квадратичной формой f от $n \geqslant 4$ переменных и сравнимых с $(b_1,\ \ldots,\ b_n)$ по данному модулю g. Полученный результат А. В. Малышев приводит в гл. III своей монографии [1]. Если обозначим через $R_{g;\, b_1,\ldots,b_n}(f,\ m)$ количество представлений

$(x_1, \ldots, x_n)$ числа m положительной квадратичной формой f и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_n)$ по модулю g, то асимптотическая формула А. В. Малышева имеет вид

$$R_{g;\, b_1, \ldots, b_n}(f,\ m) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} m^{\frac{n}{2}-1} H_{g;\, b_1, \ldots, b_n}(f,\ m) + O\Big(d^{\frac{n}{4}+\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{3}{2}n+2} \cdot m^{\frac{n}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\Big),$$

где Γ — гамма функция; $H_{g;\, b_1, \ldots, b_n}(f,\ m)$ — особый ряд рассматриваемой задачи; d — определитель квадратичной формы f.

Этот результат при $g = 1$ как один из важных приводится в [2]. Кроме того, он также используется известным американским математиком П. Сарнаком в гл. 3 монографии [3].

Но больше всего внимание А. В. Малышева привлекал оставшийся наиболее сложный случай $n = 3$, т. е. задача о представлении целых чисел тернарными квадратичными формами. Но здесь следует еще отметить что основополагающие исследования в направлении были проведены выдающимся математиком Ю. В. Линником — известным в основном своими работами по аналитической теории чисел, теории вероятностей и математической статистики. Именно под руководством Ю. В. Линника была подготовлена кандидатская диссертация А. В. Малышева «О целых точках на эллипсоидах», защищённая в 1954 г.

Ю. В. Линнику принадлежит оригинальный аналитико—алгебраический метод в теории тернарных квадратичных форм, использующий некоммутативную арифметику кватернионов и матриц, названный А. В. Малышевым при его дальнейшем развитии дискретным эргодическим методом (далее ДЭМ).

При построении своего метода Ю. В. Линник исходил из замечательных исследований выдающегося математика по теории поворотов целых гамильтоновых кватернионов с нулевой скалярной частью (см. [4]).

Ю. В. Линник использовал теорию В. А. Венкова поворотов иначе, строя с помощью неё потоки целых точек на сфере (см. [5]).

Исследования по эргодическому методу были начаты А. В. Малышевым в статьях [6, 7] в которых даны некоторые обобщения результата Ю. В. Линника и уточнены оценки, истинные по порядку для величины $t(f,\ m)$, равной числу представлений числа m формой f. А. В. Малышев весьма активно продолжал развивать эргодические подходы Ю. В. Линника к задаче представления чисел тернарными квадратичными формами. Так в статье [8] он получил асимптотическую формулу для величины $t(f,\ m)$, где формы f инвариантов $[\Omega,\ 1]$ принадлежат роду инвариантов $G_{[\Omega,\ 1]}$ с характерами $\left(\frac{-f}{p}\right) = 1$ для всех простых делителей p числа Ω.

Результат этой работы Ю. В. Линник называл асимптотическим законом А. В. Малышева и применял его в некоторых своих работах.

Основные результаты А. В. Малышева по арифметической теории квадратичных форм, полученные им до 1962 г. изложены в его замечательной монографии «О представление целых чисел положительными квадратичными формами». Труды МИАН. Москва—Ленинград. 1962, 212 с., имеющий более 30 цитирований. В ней кроме квадратичных форм содержатся также и другие полезные для специалистов разделы теории чисел: суммы Гаусса, суммы Клостермана, арифметика эрмитионов (обобщённых кватернионов), играющие вспомогательную роль при применениях ДЭМ.

А. В. Малышев много внимания уделял и отдельным проблемам, непосредственно связанными с ДЭМ. Одной из главных проблем в применениях ДЭМ является получение остаточных членов в асимптотических формулах для числа представлений целых чисел тернарными квадратичными формами, т. е. для числа целых точек на поверхностях второго порядка. Действуя ДЭМ можно определить, что остаточный член имеет порядок, равный главному члену, деленному на $(\log m)^{\alpha}$, где α — положительная константа, причём одним из недостатков этого метода в применениях к тернарным квадратичным формам являлось использование вспомогательного простого числа q, для которого $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$, привнесённого самим методом при построении потоков целых точек в эргодических теоремах. В связи с этим Александр Васильевич провёл важные исследования, устанавливающие связь рассматриваемого вопроса с гипотезами о нулях L-рядов Дирихле, изложенные в следующих статьях [9, 10]. Исследования А. В. Малышева в этом направлении позволяют устранить указанный недостаток и получить улучшенные формулировки асимптотических результатов с остаточными членами для представления чисел положительными тернарными квадратичными формами.

Можно утверждать, что Александр Васильевич внёс большой вклад в развитие дискретного эргодического метода: им впервые построены алгебра и арифметика эрмитионов (обобщённых кватернионов), исследованы положительные квадратичные формы, принадлежащие многоклассным родам и разработана ясная методика получения асимптотических формул.

В дальнейшем А. В. Малышев развивал ДЭМ в основном вместе со своими учениками. Некоторые работы в этой области проводились его учениками уже самостоятельно. Наиболее продвинутые результаты для положительных тернарных форм были получены им совместно с Ю. Г. Тетериным и позднее развивались Ю. Г. Тетериным самостоятельно.

Исследование же представлений числа n неопределёнными формами рассматривается в двух случаях, когда соответствующая поверхность представляет собой однополосный или двуполостный гиперболоид. В случае двуполостного гиперболоида основные результаты были получены Александром Васильевичем совместно с У. М. Пачевым; позднее У. М. Пачев продолжал эти исследования самостоятельно. Случай двуполостного гиперболоида рассматривался А. В. Малышевым совместно со своим вьетнамским аспирантом Нгуен Нгор Гоем, в результате чего было получено уточнение и улучшение результатов.

В развитии ДЭМ принимали участия также и другие ученики А. В. Малышев. В частности совместные с Александр Васильевич и самостоятельные публикации в этом направлении имела Н. Н. Белова, а Е. В. Посыпанин получил ряд результатов о распределении целых точек на поверхностях второго порядка, необходимых для применения ДЭМ в случае неопределенных тернарных форм.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды МИАН, Т. 65, 1962. С. 1–212.
2. Манин Ю. И., Панчишкин А. В. Введение в теорию чисел. Итоги науки и техники. Сер. Фундаментальные направления. Т. 49, М. 1990, 348 с.
3. Сарнак П. Модулярные формы и их приложения. М. 1998. 133 с.
4. Венков Б. А. Избранные труды. Ленинград: Наука. 1981. 448 с.
5. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та. 1967. 208 с.
6. Малышев А. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР.1958, т. 87, № 2, С. 175–178.
7. Малышев А. В. О представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР, 1953, т. 89, С. 405–406.
8. Малышев А. В. Асимптотический закон для представления чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР, т. 93, № 5, 1953. С. 771–774.

9. Малышев А. В. О связи теории распределения нулей L-рядов с арифметикой тернарных квадратичных форм // Докл. АН СССР, т. 122, № 3, 1958. С 343–345.

10. Малышев А. В. К теории тернарных квадратичных форм. О связи с гипотезой Римана // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех, астрон. 1960, № 7, вып. 2. С. 70–84.

———————————————————————————————

УДК 511.32

Числа Харди–Литлвуд в арифметических прогрессиях

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
О. О. Нозиров (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан
e-mail: nozirov92@bk.ru

Hardy–Littlewood numbers in arithmetic progressions

Z. Kh. Rakhmonov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
O. O. Nozirov (Tajikistan, Dushanbe)
A. Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan
e-mail: nozirov92@bk.ru

При решении ряда задач теории простых чисел возникает вопрос о поведении суммы вида

$$t(x;q)=\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|\psi(y,\chi)|$$

Г.Монтгомери [1], пользуясь своей плотностей теоремой, показал, что

$$t(x;q)\ll (x+x^{\frac57}q^{\frac57}+x^{\frac12}q)\mathscr{L}^{17},\qquad \mathscr{L}=\ln xq. \tag{1}$$

Этот результат уточнил Р.Вон [2] Он с помощью представления

$$\frac{L'}{L}=\left(\frac{L'}{L}+F\right)(1-FG)+(L'+LF)G-F,$$

где F и G – соответственно частные суммы для рядов Дирихле – $\frac{L'}{L}$ и $\frac{1}{L}$, доказал, что

$$t(x;q)\ll x\mathscr{L}^3+x^{\frac34}q^{\frac58}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}}+x^{\frac12}q\mathscr{L}^{\frac72}. \tag{2}$$

В 1989 году З.Х.Рахмонов в работе [3] показал, что

$$t(x;q)\ll (x+x^{\frac56}q^{\frac12}+x^{\frac12}q)x^{\delta}. \tag{3}$$

Это оценка сильнее (1) и слабее (2), но доказательство, в отличие от этих оценок, проводится элементарно и опирается на метод А.А.Карацубы решения мультипликативных тернарных задач [4].

Из оценок (1), (2) и (3) для $t(x;q)$ видно, что из трех слагаемых, присутствующих в этих оценках, два крайних равный между собой с точностью конечной степени логарифма, и их нельзя вообще улучшить относительно степеней x и q. Поэтому дальнейшим продвижением в оценке $t(x;q)$ мог быть только улучшение второго слагаемого, которого добился З.Х. Рахмонов [5]. Он доказал

$$t(x;q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathscr{L}^{34}.$$

В следующей теореме в этой оценке уточняется степени логарифмов в этих слагаемых.

Теорема 1. *При $x \geqslant 2$ и $q \geqslant 1$ имеет место оценка:*

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}.$$

Харди и Литтлвуд [6] сформулировали гипотезу о том, что все достаточно большие натуральные числа n разлагаются на сумму простого и степени натурального числа в виде

$$n = p + m^k, \qquad k \geq 2.$$

Такие числа мы назовем числами Харди-Литтлвуда. Г. Бабаев [7] опроверг эту гипотезу, а именно показал, что существует бесконечное число натуральных чисел, не являющихся числом Харди-Литтлвуда. Отсюда, в частности, следует, что существуют l, $1 \leq l \leq q$ для которых выполняется неравенство

$$H_k(q,l) > q, \qquad k \geq 2,$$

где $H_k(q,l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p + m^k$, лежащее в арифметической прогрессии $qt + l$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, q – целое. Поэтому, естественно, можно рассматривать следующие две задачи.

1. Оценить сверху величину $H_k(q,l)$ как можно лучше.
2. Получить асимптотический закон распределения чисел Харди - Литтлвуда, лежащих в очень коротких арифметических прогрессиях.

В случае q – простое число и $k \geq 2$, эти две задачи исследовались в работах [3, 5, 8, 9] была получена асимптотическая формула для числа решений сравнения

$$p + m^k \equiv l \pmod{q}, \qquad p \leq x, \qquad m \leq \sqrt[k]{x},$$
$$q \ll \min\left(x^{\frac{2}{k}}\mathscr{L}_x^{-8}, x^{\frac{k+5}{5k}}\mathscr{L}_x^{-35}, x^{\frac{k+2}{3k}}\mathscr{L}_x^{-\frac{70}{3}},\right), \qquad \mathscr{L}_x = \ln x,$$

откуда, в частности, следует, что

$$H_2(q,l) \ll q^{\frac{3}{2}}\ln^{35} q, \qquad H_3(q,l) \ll q^{\frac{15}{8}}\ln^{\frac{525}{8}} q.$$

Основным результатом является обобщение этого результата на случай когда q – разность прогрессии является степенью простого числа.

Теорема 2. *Пусть $x \geqslant x_0$, $q = p^\alpha$, p – простое число, $k \geqslant 2$ и α – фиксированные натуральные числа, $(l,p) = 1$, $q = p^\alpha$, $p > \mathscr{L}_x$,*

$$H_k(x;q,l) = \sum_{\substack{n \leq x,\, m^k \leq x \\ n + m^k \equiv l (mod\, q)}} \Lambda(n).$$

Тогда справедливо формула

$$H_k(x;q,l) = \frac{x^{\frac{k+1}{k}}}{\varphi(q)}\left(1 + O\left(\mathscr{L}_x^{-1} + x^{-\frac{1}{k}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^{28} + x^{-\frac{1}{5}-\frac{1}{k}}q\mathscr{L}_x^{31} + x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}q^{\frac{3}{2}}\mathscr{L}_x^{32}\right)\right),$$

где постоянная под знаком O зависит от k и α.

Отметим, что эта формула становится нетривиальной, если

$$q \ll \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_x^{-\frac{64}{3}}, & \text{при} \quad k=2; \\ x^{\frac{k+5}{5k}}\mathscr{L}_x^{-32}, & \text{при} \quad k=3,4,5; \\ x^{\frac{2}{k}}\mathscr{L}_x^{-32}, & \text{при} \quad k\geq 6. \end{cases}$$

Следствие 1. *Пусть $q=p^\alpha$, p – простое число, α – фиксированное натуральное число, $(l,p)=1$. Тогда*

$$H(q,l) \ll \begin{cases} q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{32}, & \textit{при} \quad k=2; \\ q^{\frac{5k}{k+5}}(\ln q)^{\frac{160k}{k+5}}, & \textit{при} \quad k=3,4,5; \\ q^{\frac{k}{2}}(\ln q)^{16k}, & \textit{при} \quad k\geq 6. \end{cases}$$

При доказательстве воспользуемся следующими леммами.

Доказательство теоремы 2. Разбивая в $H_k(x;p^\alpha,l)$ сумму по n и m на три части имеем

$$H_k(x;p^\alpha,l) = \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m^k\leq x,\,(m^k-l,p)=1\\ n\equiv l-m^k (mod p^\alpha)}}1 + R_1(x,p^\alpha)+R_2(x,p^\alpha),$$

$$R_1(x,p^\alpha) = \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=p}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m^k\leq x\\ m^k\equiv l-n (mod p^\alpha)}}1 \leqslant k\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{p^\alpha}+1\right)\mathscr{L}_x^2,$$

$$R_2(x,p^\alpha) = \sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}\Lambda(n)\sum_{\substack{m^k\leq x,\,(m^k-l,p)=p\\ n\equiv l-m^k (mod p^\alpha)}}1 = 0.$$

Далее пользуясь свойством ортогональности характеров, найдем

$$H_k(x;p^\alpha,l) = \frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\chi mod\, p^\alpha}\psi(x,\chi)V_k(\sqrt[k]{x},\overline{\chi}) + O\left(k\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{p^\alpha}+1\right)\mathscr{L}_x^2\right),$$

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n), \qquad V_k(u,\chi)=\sum_{m\leqslant u}\chi(l-m^k).$$

Разбивая последнюю сумму по χ на две части находим

$$H_k(x;p^\alpha,l) = S(x,p^\alpha)+R_3(x,p^\alpha)+O\left(k\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{p^\alpha}+1\right)\mathscr{L}_x^2\right), \tag{4}$$

$$S(x,p^\alpha)=\frac{\psi(x,\chi_0)V_k(x,\chi_0)}{\varphi(p^\alpha)}, \quad R_3(x,p^\alpha)=\frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\psi(x,\chi)V_k(x,\overline{\chi}).$$

В этой формуле $S(x,p^\alpha)$ дает предполагаемый главный член $H_k(x,q,l)$, а $R_3(x,p^\alpha)$ входит в его остаточный член. Вычислим главный член. Из теоремы Ш. Валле – Пуссена, получим

$$\psi(x,\chi_0)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)+O(\mathscr{L}_x^2)=x+O(x\exp(-c\sqrt{\mathscr{L}_x})).$$

Рассмотрим теперь

$$V(x,\chi_0)=\sum_{\substack{m\leq\sqrt[k]{x}\\(l-m^k,p)=1}}1=\sum_{m\leq\sqrt[k]{x}}1-\sum_{\substack{m\leq\sqrt[k]{x}\\(l-m^k,p)=p}}1=x^{\frac{1}{k}}+O\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}}{p}+1\right).$$

Поэтому
$$S(x,p^\alpha)=\frac{x^{\frac{k+1}{k}}}{\varphi(p^\alpha)}\left(1+O\left(\exp(-c\sqrt{\mathscr{L}_x})+\frac{1}{p}+x^{-\frac{1}{k}}\right)\right). \qquad (5)$$

Оценим остаточный член $R_3(x,p^\alpha)$. Переходя к примитивным характерам, имеем
$$R_3(x,p^\alpha)=\frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha}\sum\nolimits_{\chi}''\psi(x,\chi)V_k(x,\overline{\chi})\leqslant\frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha}\max_{\chi}|V_k(x,\overline{\chi})|\sum\nolimits_{\chi}''|\psi(x,\chi)|,$$

$\sum\nolimits_{\chi}''$ означает, что суммирование ведется по всем примитивным характерам по модулю p^β.

Сумму $V_k(\sqrt[k]{x},\overline{\chi})$ оценим воспользовавшись теоремой 2 работы [10]. Сравнение
$$l-u^k=0(mod\,p^\beta)$$
не имеет кратных корней, $k<p$, $(a_0,a_1,\dots,a_k,p)=(l,1)=1$, $(a_1,2a_2,\dots,ka_k)=k$, то есть $\tau_0=1$, поэтому согласно этой лемме при $\beta\geqslant2$ и теореме А.Вейля при $\beta=1$ для полной суммы $V_k(p^\beta,\overline{\chi})$ имеем
$$|V_k(p^\beta,\overline{\chi})|\leqslant k^2p^{\frac{\beta}{2}}.$$

Следовательно
$$|R_3(x,p^\alpha)|\leqslant\frac{k^2}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha}p^{\frac{\beta}{2}}\sum\nolimits_{\chi}''|\psi(x,\chi)|\leqslant\frac{k^2}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha}p^{\frac{\beta}{2}}\sum_{\chi mod\,p^\beta}|\psi(x,\chi)|,$$

Применяя к последней сумме теорему 1, найдем
$$|R_3(x,p^\alpha)|\ll\frac{k^2}{\varphi(p^\alpha)}\sum_{\beta=1}^{\alpha}p^{\frac{\beta}{2}}\left(x\mathscr{L}_x^{28}+x^{\frac{4}{5}}p^{\frac{\beta}{2}}\mathscr{L}_x^{31}+x^{\frac{1}{2}}p^{\beta}\mathscr{L}_x^{32}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{k^2\alpha}{\varphi(p^\alpha)}\left(xp^{\frac{\alpha}{2}}\mathscr{L}_x^{28}+x^{\frac{4}{5}}p^{\alpha}\mathscr{L}_x^{31}+x^{\frac{1}{2}}p^{\frac{3\alpha}{2}}\mathscr{L}_x^{32}\right).$$

Подставляя в (4) правую часть формулы (5), последнюю оценку для $|R_3(x,p^\alpha)|$ и имея в виду что k и α – фиксированные натуральные числа и $p>\mathscr{L}_x$, имеем
$$H_k(x;p^\alpha,l)=\frac{x^{\frac{k+1}{k}}}{\varphi(p^\alpha)}\left(1+O\left(\mathscr{L}_x^{-1}+x^{-\frac{1}{k}}p^{\frac{\alpha}{2}}\mathscr{L}_x^{28}+x^{-\frac{1}{5}-\frac{1}{k}}p^{\alpha}\mathscr{L}_x^{31}+x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}p^{\frac{3\alpha}{2}}\mathscr{L}_x^{32}\right)\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. — Москва, 1974.

2. Vaughan R.O. Mean value theorems in prime number theory // J.London Math. Soc. (2), 10(1975), 153 – 162.

3. Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, № 1. С. 211 – 224.

4. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

5. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57(4). С. 55 – 71.

6. Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to theory of numbers. —- Oxford at the clarendon press. 1954.

7. Бабаев Г.Б. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна // УМН. 1958. Т. 13. В. 6(84). С. 63 – 64.

8. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Докл. АН России. 1993. Т. 331(3). С. 281 – 282. С. 55 – 71.

9. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИРАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

10. Исмоилов Д. Оценки полных сумм характеров от многочленов // Труды МИАН СССР. 1991. Т. 200. С. 171 – 184.

———————————————————————————————

УДК 511.32

Арифметические функции

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Arithmetical functions

V. N. Chubarikov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow state University, Faculty of Mechanics and Mathematics
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

В докладе будут рассмотрены следующие темы:

О некоторых верхних и нижних пределах значений теоретико-числовых функций.

Короткие и очень короткие суммы Гаусса.

Среднее значение произведений символов Лежандра по “сдвинутым” простым.

О методе Адамара в теории L-функций Дирихле.

О простых в редких последовательностях.

———————————————————————————————

Секция 1. Группы

УДК 512.9

О сопряжённости слов в полугруппах Артина.[1]

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru
А. Е. Устян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

On conjugacy words in semigroups Artin

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru
A. E. Ustian (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru‘

Группа Артина G задается системой образующих $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ и системой определяющих соотношений $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}$ при $i \neq j$ где m_{ij} элементы симметрической матрицы Кокстера $M = (m_{ij}), i = \overline{1,n}$, соответствующей данной группе G, $m_{ij} = m_{ji}$, и для любого $i = \overline{1,n}, m_{ii} = 1, \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i\cdots -$ слово из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_{ij}. Элементы матрицы Коксетера $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, n, \ldots, \infty\}$

Копредставление группы Артина G будет иметь вид:

$$G_\Gamma = \langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1,n}, m_{ij} \neq \infty\rangle,$$

Данной группе Артина G можно поставить в соответствие конечный граф Γ между вершинами которого v_i и множеством σ установлено взаимно однозначное соответствие, причем, если две вершины v_i, v_j графа Γ соединены ребром, то данному ребру соответствует элемент $m_{ij} \in M, m_{ij} \neq \infty$,если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то данной паре v_i, v_j соответствует $m_{ij} = \infty$. Данный граф называется графом Коксетера, а группу Артина, соответствующую данному графу Γ будем обозначать G_Γ.

Обозначим $\prod_\Gamma$ полугруппу Артина, соответствующую группе G_Γ, и имеющую копредставление

$$\prod_\Gamma = \langle\langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1,n}, m_{ij} \neq \infty\rangle\rangle,$$

Группа Артина G_Γ называется группой с древесной структурой, если граф Коксетера Γ, соответствующий данной группе, является дерево-графом, а полугруппу $\prod_\Gamma$, имеющую ту же систему образующих и определяющих соотношений назовем полугруппой с древесной структурой, соответствующей данной группе G_Γ. [1]

Основной нашей целью является решение проблемы сопряженности слов в полугруппах Артина с древесной структурой.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 19-41-710002 р_а)

Теорема 1. *Два слова* $v, w \in \prod_\Gamma$, *где* $\prod_\Gamma$ *−полугруппа Артина с древесной структурой, равны в* $\prod_\Gamma$ *тогда и только тогда, когда они равны в соответствующей ей группе Артина* G_Γ.

При доказательстве непосредственно используется структура диаграммы равенства слов в группах Артина с древесной структурой. [2]

Теорема 2. *Полугруппа* $\prod_\Gamma$ *Артина с древесной структурой изоморфно вложима в соответствующую ей группе Артина* G_Γ *с древесной структурой.*

Определение 1. *Два слова* v, w, *принадлежащие полугруппе* $\prod$, *сопряжены в* $\prod$, *если существует слово* $z \in \prod$,*такое, что* $zw = vz$*либо* $wz = zv$.

Определение 2. *Будем говорить, что в полугруппе* $\prod$ *разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов* v, w *принадлежащих* $\prod$, *установить сопряжены ли* w *и* v *в* $\prod$.

Теорема 3. *В полугруппе Артина* $\prod_\Gamma$ *с древесной структурой два слова* v, w *сопряжены в* $\prod_\Gamma$*тогда и только тогда, когда они сопряжены в соответствующей ей группе Артина* G_Γ *с древесной структурой.*

При доказательстве используется структура диаграммы сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой [2]

Теорема 4. *В полугруппе Артина* $\prod_\Gamma$ *с древесной структурой алгоритмически разрешима проблема сопряженности слов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Н. Безверхний О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения. Тезисы докладов V Международной конференции, Тула, 2003, с. 33- 34

2. Безверхний В. Н. Карпова О.Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия тул. Гос. Университета, серия Математика. Механика. Кибернетика. 2006, т. 12 вып. 1, с. 67-82.

––

УДК 512.54

О пересечении A-допустимых абнормальных подгрупп

Р. В. Бородич (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: Borodich@gsu.by
Е. Н. Бородич (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: Borodich@gsu.by
М. В. Селькин (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: Borodich@gsu.by

On the intersection of A - admissible abnormal subgroups

R. V. Borodich (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: Borodich@gsu.by
E. N. Borodich (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: Borodich@gsu.by
M. V. Sel'kin (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: Borodich@gsu.by

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп является одной из классических задач восходящих к работе Фраттини [1]. В 50-х годах теорема Фраттини получила развитие в работах Гашюца [2], Дескинса [3]. Дальнейший интерес к подгруппам фраттиниевого типа, в значительной степени, связан с развитием теории формаций (см. монографии [4, 5]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ — автоморфное отображение группы G в себя или автоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Обозначим через $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп. Если в G абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп нет, то положим $\Delta(G, A) = G$. В случае единичности группы операторов подгруппа $\Delta(G, A)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ [2].

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе (см. [6]).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$ и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frattini G. *Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni* // Atti Acad. Dei Lincei 1885. Vol. 1. P. 281–285.

2. Gaschütz W. *Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen* // Math. Z. 1953. Bd. 58. S. 160–170.

3. Deskins W. E. *A condition for the solvability of a finite group* // III.J.Math. 1961. Vol. 5. № 2, P. 306–313.

4. Селькин М. В. *Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп.* Мн.: Беларуская навука, 1997.

5. Скиба А. Н. *Алгебра формаций.* Мн.: Беларуская навука, 1997.

6. Бородич Р. В. *Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами* / Бородич Р.В., Бородич Е.Н., Селькин М.В. // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 2, — с. 33–39.

УДК 512.542

Конечные группы с заданным вложением силовских подгрупп

А. Ф. Васильев (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: formation56@mail.ru

Finite groups with a given embedding of Sylow subgroups

A. F. Vasil'ev (Belarus, Gomel)
Francisk Scorina Gomel State University
e-mail: formation56@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Знание свойств вложения силовских подгрупп в группу позволяет во многих случаях получить существенную информацию о самой группе. Например, группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда ее силовские подгруппы нормальны (субнормальны) в G. Согласно известной теореме Глаубермана [1], если все силовские подгруппы группы самонормализуемы, то группа является p-группой для некоторого простого числа p.

Хорошо известны [2] следующие обобщения понятия субнормальности. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы называется: *$\mathfrak{F}$-субнормальной в G*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$; K-*$\mathfrak{F}$-субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, всякая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа является субнормальной, обратное утверждение в общем случае неверно. Однако в разрешимых группах эти понятия эквивалентны.

Отметим, что в любой группе всякая субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной, обратное утверждение верно не всегда. Для случая $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ понятия субнормальной и K-$\mathfrak{N}$-субнормальной подгрупп эквивалентны.

В монографии [2] нашли отражение результаты многочисленных работ, в которых изучались свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных, K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения.

В [3] были начаты исследования влияния $\mathfrak{F}$-субнормальных силовских подгрупп на строение всей группы, где $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. В [4, 5] были исследованы классы $\mathrm{w}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{F}$ всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и для p из π все силовские p-подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными, соответственно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными в G.

Хорошо известно, какую важную роль играют свойства нормализаторов неединичных примарных подгрупп (локальных подгрупп) при классификации конечных простых неабелевых групп. В последние годы локальные подгруппы активно используются при изучении непростых, в частности, разрешимых групп. В 1986 году в работе [6] было установлено, что группа нильпотентна, если нормализаторы ее силовских подгрупп (кратко, силовские нормализаторы) нильпотентны. В [7] приведен обзор работ, в которых изучались группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами, а также группы с принадлежащими насыщенной формации $\mathfrak{F}$ силовскими нормализаторами.

Работы [8, 9] послужили мотивацией для начала исследования групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими нормализаторами [10].

Определение 1. *[10] Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация групп. Подгруппа H группы G называется сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной в G, если $N_G(H)$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.*

Отметим, что подгруппа нормальна в своем нормализаторе. Поэтому в любой группе всякая сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной. Обратное утверждение неверно, например, для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. Пусть S — симметрическая группа степени 3, U — точный неприводимый S-модуль над полем F_7 из 7 элементов, группа $G = [U]S$. Из неабелевости S следует, что G не является сверхразрешимой. Так как G/U сверхразрешима, подгруппа $H = UQ$ является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой группы G, где Q — силовская 3-подгруппа группы G, лежащая в S. Из сверхразрешимости H следует, что Q K-$\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Заметим, что подгруппа Q не является сильно K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G. Это следует из того, что нормализатор Q в G равен подгруппе S, которая не является нормальной и $\mathfrak{U}$-субнормальной в G.

Определение 2. *Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации $\mathfrak{F}$ через $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и для любого $q \in \pi \cap \pi(G)$ всякая силовская q-подгруппа является сильно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G.*

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, будем обозначать $\mathrm{w}^*_{\mathbb{P}}\mathfrak{F} = \mathrm{w}^*\mathfrak{F}$. Отметим, если $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi \cap \pi(G) = \emptyset$, то $N_G(1) = G$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и $G \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$.

(2) $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ *— формация.*

(3) $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{w}^*_\pi(\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F})$.

Пусть p — простое число. Через $l_p(G)$ обозначается p-длина p-разрешимой группы G. Арифметическая длина — это $al(G) = \mathrm{Max}\, l_p(G)$, когда p пробегает все простые числа. $\mathfrak{L}_a(n)$ — класс всех разрешимых групп, арифметическая длина которых $al(G) \leq n$, $\mathfrak{L}_a(1)$ — класс всех разрешимых групп с $al(G) \leq 1$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_a(1)$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда и только тогда группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi'} \times \mathfrak{F}$, когда все ее силовские подгруппы являются сильно* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальными в G.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_a(1)$ и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда и только тогда группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда все ее силовские подгруппы являются сильно К-$\mathfrak{F}$-субнормальными в G, т. е. $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.*

Следствие 2. *[8] Если нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 3. *[10] Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех метанильпотентных групп. Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{F}$, когда нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.*

Следствие 4. *[10] Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех групп с нильпотентным коммутантом. Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{F}$, когда нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G.*

Следствие 5. *Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{L}_a(1)$, когда нормализатор любой силовской подгруппы группы G является $\mathfrak{L}_a(1)$-субнормальной подгруппой в G.*

Отметим, что в общем случае $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^3$ — формация всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит 3. Обозначим $M = S_4$, где S_4 — симметрическая группа степени 4. Известно, что существует точный неприводимый M-модуль U над полем F_3 из 3 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]M$. Заметим, что нильпотентная длина G равна 4 и $\pi(G) = \{2, 3\}$. Так как подгруппа M является минимальной не $\mathfrak{N}^2$-группой, то G — минимальная не $\mathfrak{N}^3$-группа. Отметим также, что G имеет арифметическую длину $al(G) = 2$. Нетрудно видеть, что нормализаторы ее силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами в G, но сама группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathrm{w}^*\mathfrak{N}^3 \neq \mathfrak{N}^3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glaubermann G. Prime-power factor groups of finite groups II // Math. Z. 1970. № 117. P. 46–56.

2. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. — Dordrecht: Springer-Verl., 2006. 385 p.

3. Васильев А. Ф. О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы // Вопросы алгебры. 1995. Вып. 8. С. 31–39.

4. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2011. N 4(9). С. 86–91.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.

6. Bianchi M. G., Gillio Berta Mayri A., Hauck P. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch. Math. 1986. V. 47. P. 193–197.

7. D'Aniello A., Kazarin L. S., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D. A Survey on Sylow Normalizers and Classes of groups // Appl. Math. Sci. 2014. V. 8, № 134. P. 6745–6752.

8. Kniahina V. N., Monakhov V. S. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Internat. J. of Group Theory. 2013. V.2, № 4. P. 21–29.

9. Васильев В. А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. 2016. № 2(91). С. 17–21.

10. Васильев А. Ф. Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 66–71.

УДК 511.32

Об определяемости факторно делимых групп их группами автоморфизмов

В. К. Вильданов (Россия, г. Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail:kadirovi4@gmail.com

On the definability of quotient divisible groups by their automorphism groups

V. K. Vildanov (Russia, Nizhny Novgorod)
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
e-mail:kadirovi4@gmail.com

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

Смешанные факторно делимые группы конечного ранга определили А. А. Фомин и У. Уиклесс в работе [1]. Группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F – периодическая делимая группа.

Вопрос определяемости факторно делимой группы ранга 1 своей группой автоморфизмов в классе всех таких групп рассмотрен в работе [4]. Определяемость факторно делимых групп своими полугруппами эндоморфизмов рассматривались в работах [2],[3].

Класс всех факторно делимых групп ранга 1 обозначим $\mathcal{QD}_1$. Кроме того, нам потребуется следующее

Определение 1. *Будем говорить, что конечная циклическая группа A* слабо определяется своей группой автоморфизмов*, если для любой конечной циклической группы $B \ncong A$ из условия* $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$ *следует, что число ненулевых компонент B_p группы B больше, чем число ненулевых компонент A_p группы A.*

Предложение 1. [4, Теорема 3] *Группа $A \in \mathcal{QD}_1$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_1$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{t}(A)$ *— циклическая группа (возможно, нулевая), слабо определяющаяся своей группой автоморфизмов, и $pA \neq A$ для всех $p \in \mathbb{P}$ таких, что $A_p = 0$.*

Назовем группу G вполне разложимой факторно делимой группой, если $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $A_i \in \mathcal{QD}_1$. Класс всех таких групп обозначим $\mathcal{QD}_{cd}$. Группу G из $\mathcal{QD}_{cd}$ назовем однородной, если $G = \bigoplus_n A$, где $A \in \mathcal{QD}_1$, класс всех таких групп обозначим $\mathcal{QD}^*$.

Предложение 2. *Группа $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}^*$, если группа A определяется в классе $\mathcal{QD}_1$ своей группой автоморфизмов.*

Теорема 1. *Группа* $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$ *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $2-$*делимых групп из* $\mathcal{QD}^*$, *если* $2A = A$ *и* $n > 2$.

Для $n > 3$ требование $2-$делимости в теореме можно опустить.

Факторно делимые группы без кручения являются в точности вполне разложимыми группами без кручения с идемпотентными типами прямых слагаемых ранга 1. В этом подклассе факторно делимых групп разложение группы G на прямые слагаемые ранга 1 определяется однозначно с точностью до порядка слагаемых, следовательно можно определить Ω_G – множество характеристик прямых слагаемых ранга 1 группы G и A^χ – однородное прямое слагаемое соответствующее характеристике $\chi \in \Omega_G$. Даже в этом хорошо изученном классе групп, необходимые и достаточные условия определяемости группы ее группой автоморфизмов найти пока не удается, в отличии от класса вполне разложимых абелевых групп без кручения.

Теорема 2. *Пусть* $G \in \mathcal{QD}_{cd}$ $2-$*делимая группа без кручения и* Ω_G – *множество характеристик прямых слагаемых ранга 1 группы* G. *Группа* G *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $2-$*делимых групп из* $\mathcal{QD}_{cd}$, *если для всякой максимальной характеристики* $\chi \in \Omega_G$ *в группе* G *найдется прямое слагаемое* A^χ *такое, что* $r(A^\chi) > 1$.

Следующий пример показывает, что полученные достаточные условия не являются необходимыми.

Пример 1. *Рассмотрим факторно делимые группы* A_1, A_2, A_3 *ранга 1 и соответствующие им характеристики:*

$$\chi_1 = (0, 0, \infty, \infty, \dots),$$
$$\chi_2 = (0, \infty, \infty, \infty, \dots),$$
$$\chi_3 = (0, \infty, 0, \infty, \dots).$$

Тогда группа $G = A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_3$ *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathcal{QD}_{cd}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fomin A. A., Wickless W., *Quotient divisible abelian groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126. – №1. – P. 45–52.

2. Вильданов В. К., Любимцев О. В., Чистяков Д. С., *Об определяемости смешанных абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов* // Математические заметки. – 2018. – Т. 103. – №3. – С. 364–371.

3. Любимцев О. В., *Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов* // Известия вузов. Математика. – 2017. – №10. – С. 75–82.

4. Timoshenko E. A., Vildanov V. K. *On determinability of a quotient divisible Abelian group of rank 1 by its automorphism group* // Алгебра и логика: теория и приложения : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В. М. Левчука. Красноярск, 24–29 июля 2016 г. – С. 120–122.

УДК 512.54

Инволюции группы GL_2 над подкольцом поля рациональных чисел[1]

В. А. Гайдак (Россия, г. Томск)
Томский государственный университет
e-mail: gaidakvioletta@gmail.com
Е. А. Тимошенко (Россия, г. Томск)
Томский государственный университет
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

Involutions of the group GL_2 over a subring of the field of rationals

V. A. Gaidak (Russia, Tomsk)
Tomsk State University
e-mail: gaidakvioletta@gmail.com
E. A. Timoshenko (Russia, Tomsk)
Tomsk State University
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

Одним из важных классов абелевых групп без кручения являются вполне разложимые группы. Себельдиным [1] был решён вопрос об определяемости вполне разложимой группы её кольцом эндоморфизмов. Впоследствии появился цикл работ Вильданова [2, 3, 4], посвящённый вопросам определяемости вполне разложимой группы конечного ранга её группой автоморфизмов. Большинство полученных в этом цикле результатов было доказано в предположении, что все рассматриваемые вполне разложимые группы 2-делимы. Первым шагом к снятию требования 2-делимости вполне разложимой группы является получение критерия сопряжённости инволюций полной линейной группы GL_2 над произвольным подкольцом поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Для коммутативного кольца с единицей R через $GL_2(R)$, как обычно, обозначим группу обратимых (2×2)-матриц с элементами из R; эта группа состоит из тех матриц, определители которых обратимы в R. Нетрудно заметить, что множество $ML_2(R) \subset GL_2(R)$ всех матриц с определителем ±1 является подгруппой в $GL_2(R)$.

Всюду далее будем считать, что R — подкольцо (с единицей) поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Нас будут интересовать *инволюции* группы $GL_2(R)$, т. е. матрицы A, для которых A^2 совпадает с единичной матрицей E. Следующие два предложения проверяются непосредственно.

Предложение 1. *Для матрицы A эквивалентны условия*:
1) A — *инволюция группы* $GL_2(R)$;
2) A — *инволюция группы* $ML_2(R)$;
3) *либо* $A = E$, *либо* $A = -E$, *либо*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b, c \in R \text{ и } a^2 + bc = 1. \tag{1}$$

Предложение 2. а) *Центр группы $GL_2(R)$ состоит из диагональных матриц, у которых на главной диагонали стоит один и тот же обратимый элемент кольца R.*

б) *Центр группы $ML_2(R)$ состоит из матриц E и $-E$.*

[1]Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

Из предложений 1 и 2 следует, что множество всех нецентральных инволюций каждой из групп $GL_2(R)$ и $ML_2(R)$ совпадает с множеством инволюций вида (1).

Лемма 1. *Пусть A — инволюция вида* (1). *Тогда*:

а) *если $c \in \{0, 2\}$ и $b \in 2R$, то инволюции A и $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ сопряжены в $ML_2(R)$*;

б) *если $c = 1$, то инволюции A и $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ сопряжены в $ML_2(R)$.*

Ключевым результатом, с помощью которого доказаны теоремы 2 и 3, является

Теорема 1. *Пусть p равно -1 или простому числу, $a, m, n \in R$ и*

$$\begin{pmatrix} a & m \\ pn & -a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & pm \\ n & -a \end{pmatrix} \tag{2}$$

— нецентральные инволюции. Пусть, далее, выполнено одно из следующих условий:

1) $p \neq 2$;

2) $p = 2$ *и* $m, n \in 2R$.

Тогда матрицы (2) *сопряжены между собой в $ML_2(R)$.*

Теорема 2. *Всякая инволюция A вида* (1), *для которой выполнено $b, c \in 2R$, сопряжена с J в $ML_2(R)$.*

В работе Вильданова [2] отмечался следующий факт: если R — подкольцо поля $\mathbb{Q}$ такое, что $2R = R$, то все инволюции группы $GL_2(R)$, не равные $\pm E$, сопряжены в этой группе с J (а значит, и между собой). Из теоремы 2 следует, что данный факт остаётся верным и в том случае, когда речь идёт о сопряжённости инволюций в группе $ML_2(R)$.

Справедливо также

Следствие 1. *Пусть $2R \neq R$. Для инволюции A вида* (1) *эквивалентны условия*:

1) *матрицы A и J сопряжены в $GL_2(R)$*;

2) *матрицы A и J сопряжены в $ML_2(R)$*;

3) $b, c \in 2R$.

Теорема 3. *Всякая инволюция A вида* (1), *для которой $b \notin 2R$ или $c \notin 2R$, сопряжена с I в $ML_2(R)$.*

Следствие 2. *Пусть $2R \neq R$. Для инволюции A вида* (1) *эквивалентны условия*:

1) *матрицы A и I сопряжены в $GL_2(R)$*;

2) *матрицы A и I сопряжены в $ML_2(R)$*;

3) $b \notin 2R$ *или* $c \notin 2R$.

Таким образом, если $2R \neq R \subset \mathbb{Q}$, то всякая нецентральная инволюция с элементами из R сопряжена в $GL_2(R)$ и в $ML_2(R)$ ровно с одной из инволюций J и I. Близкие результаты, касающиеся возможности приводить нецентральные инволюции к некоторому «каноническому» виду, были получены ранее Коном в предположении, что R — квазисвободная область целостности (подробнее см. [5]). Прямое применение этих результатов к ситуации $R \subset \mathbb{Q}$, к сожалению, невозможно: в работе [6] было показано, что из всех подколец поля $\mathbb{Q}$ квазисвободными будут только само $\mathbb{Q}$ и кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$.

В статье [5] был также установлен тот факт, что при некоторых ограничениях на R (более жёстких, чем свойство квазисвободы) для любых двух антикоммутирующих инволюций группы $GL_2(R)$ существует внутренний автоморфизм этой группы, переводящий рассматриваемые инволюции в пару $\{J, I\}$. Указанный факт справедлив и для подколец поля $\mathbb{Q}$:

Предложение 3. *Если R — подкольцо в $\mathbb{Q}$, то для любых инволюций C и D группы $GL_2(R)$ таких, что $CD = -DC$, найдётся внутренний автоморфизм этой группы, переводящий двухэлементное множество $\{C, D\}$ в множество $\{J, I\}$.*

Утверждение предложения 3 перестанет быть верным, если заменить в нём группу $GL_2(R)$ её подгруппой $ML_2(R)$: можно указать подкольцо R поля $\mathbb{Q}$ и антикоммутирующие инволюции C и D из $ML_2(R)$, для которых не существует внутреннего автоморфизма группы $ML_2(R)$, переводящего $\{C, D\}$ в множество $\{J, I\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Мат. заметки. 1972. Том 11, № 4. С. 403-408.

2. Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174-177.

3. Vildanov V. K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. Vol. 197, No. 5. P. 590-594.

4. Vildanov V. K. On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. Vol. 230, No. 3. P. 372-376.

5. Cohn P. M. On the structure of the GL_2 of a ring // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 1966. Vol. 30. P. 5-53.

6. Зонов М. Н., Тимошенко Е. А. О стандартной форме матриц второго порядка // Вестн. Томского государственного ун-та. Математика и механика. 2019. № 59. С. 5-10.

УДК 511.32

О централизаторе элемента в обобщённых древесных структурах групп Артина[1]

И. В. Добрынина (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: dobrynirina@yandex.ru
А. С. Угаров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: ugarandrey@gmail.com

On the centralizer of an element in generalized tree structures of Artin groups

I. V. Dobrynina (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 19-41-710002 р_а)

A. S. Ugarov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ugarandrey@gmail.com

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_n; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$.

Группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Аппелем и П. Шуппом [1].

Для всякой группы Артина G можно построить граф Г такой, что образующим a_i соответствуют вершины графа Г, а каждому определяющему соотношению $< a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}$ — ребро, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф Г, то группа Артина G называется группой Артина с древесной структурой.

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Г группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$.

Класс групп Артина с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [2].

Далее рассмотрим группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} * G_s; a_{i_m} = a_{j_l}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1, t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s, где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_l}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle$, $\langle a_{j_l} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_l} — некоторый образующий группы G_j. Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина.

Известно, что в группах Артина экстрабольшого типа разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов [1], а также доказана конечная порожденность централизатора элемента, что следует из [2].

В группах Артина с древесной структурой алгоритмическая разрешимость проблем равенства и сопряженности слов показана в [4], изучение централизатора элемента проводилось О. Ю. Платоновой [5]. Доказано, что централизатор элемента единичной слоговой длины есть прямое произведение циклической и свободной групп, а для слова слоговой длиной больше 1 — либо бесконечная циклическая подгруппа, либо свободная абелевая группа ранга 2.

Используя диаграммы сопряженности слов над обобщенной древесной структурой групп Артина G, представляющие собой последовательность поддиаграмм, каждая из которых является диаграммой над одним из сомножителей G, объединенных между собой по ребру с меткой из объединяемой подгруппы, а также методы работ [3], [5] авторами получены следующие результаты:

Лемма 1. *[6] В обобщенной древесной структуре групп Артина G разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Теорема 1. *В обобщенной древесной структуре групп Артина G централизатор элемента конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного централизатора.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Appel, P. Schupp, Artins groups and infinite Coxter groups. // Ivent. Math. 1983. № 72. C. 201-220.

2. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения».: тезисы докладов международной конференции — Тула, 2003. С. 33-34.

3. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная матемаматика. 1999. Т. 5, № 1. С. 1-38.

4. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С. 67–82.

5. Платонова О. Ю. Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой. // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук — Ярославль, 2013.

6. Добрынина И. В., Угаров А. С. О проблеме сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ — МГУ, 2019. С. 28-29.

———————————————————————————

УДК 512.542

Об одном классе композиционных формаций конечных групп

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.ru

One one class of composition formations of finite groups

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Напомним, что подгруппа U группы G называется $\mathfrak{X}$-*максимальной* в G, если выполняются следующие два условия: (a) $U \in \mathfrak{X}$, и (b) если $U \leq V \leq G$ и $V \in \mathfrak{X}$, то $U = V$. Символом $\mathrm{Int}_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается пересечение всех $\mathfrak{X}$-максимальных подгрупп группы G. Главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{X}$-*центральным* в G, если

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$$

(см., например, [1, с. 6]). Символом $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается $\mathfrak{X}$-*гиперцентр* группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что всякий главный фактор H/K группы G ниже нее является $\mathfrak{X}$-центральным.

Известно, что пересечение максимальных абелевых подгрупп совпадает с центром группы. Согласно Р. Бэру [2], пересечение максимальных нильпотентных подгрупп группы совпадает с её гиперцентром. Тем не менее, существуют примеры групп, у которых пересечение максимальных сверхразрешимых подгрупп не совпадает со сверхразрешимым гиперцентром (см., например, [3, пример 5.17]). Л. А. Шеметков поставил следующую задачу на Гомельском алгебраическом семинаре в 1995:

Задача 1. *Для каких непустых нормально наследственных композиционных (разрешимо-насыщенных) формаций $\mathfrak{X}$ равенство $\mathrm{Int}_{\mathfrak{X}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ верно для любой группы G?*

Решение этой задачи в случае наследственных насыщенных (локальных) формаций было получено А. Н. Скибой в [3] (в разрешимом случае также Бейдлеманом и Хайнекеном в [4]). Нами в работе [5] эта задача была решена для класса формаций квази-$\mathfrak{F}$-групп, где $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, в частности, для формации квазинильпотентных групп. Заметим что методы работ [3, 4] не работают ни в случае ненаследственных, ни в случае ненасыщенных формаций.

Напомним, что *минимальной не-$\mathfrak{X}$-группой* называется, группа G, не принадлежащая классу групп $\mathfrak{X}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{X}$. *Группой Шмидта* называется минимальна ненильпотентная группа. Формация $\mathfrak{F}$ называется *формацией с условием Шеметкова*, если всякая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является или группой Шмидта или группой простого порядка. Результаты об таких формациях можно найти, например, в [6, глава 6.4]. Существуют примеры наследственных ненасыщенных формаций с условием Шеметкова [7, 8, 9]. Согласно [8], всякая наследственная формация с условием Шеметкова является композиционной (разрешимо насыщенной).

А. Ф. Васильев и автор [10] разработали графовый метод для работы с произвольными наследственным формациями с условием Шеметкова. Напомним, что порядок группы Шмидта имеет ровно 2 различных простых делителя и всякая такая группа имеет ровно одну нормальную силовскую подгруппу. Ввиду этого, (p, q)-группой Шмидта называется группа Шмидта, такая, что множество простых делителей ее порядка есть $\{p, q\}$, и имеющая нормальную силовскую p-подгруппу.

Определение 1 ([10, Определение 1.3]). *N-критическим графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G называется ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с множеством простых делителей $\pi(G)$ порядка группы G, такой, что (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$ тогда и только тогда, когда группа G имеет (p, q)-подгруппу Шмидта.*

Определение 2 ([10, Определение 3.1]). *N-критическим графом $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X})$ класса групп $\mathfrak{X}$ называется ориентированный граф на множестве вершин $\pi(\mathfrak{X}) = \cup_{G\in\mathfrak{X}}\pi(G)$ такой, что*

$$\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{X}} \Gamma_{Nc}(G).$$

Как было показано в [10, теоремы 3.5 и 4.4], существует биекция между множествами наследственных формаций с условием Шеметкова и ориентированными графами, множества вершин которых являются подмножествами множества всех простых чисел $\mathbb{P}$.

Пусть $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ — разбиение $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества. Заметим, что из [6, теорема 6.4.14] следует, что класс групп

$$\times_{i\in I}\mathfrak{G}_{\pi_i} = (G \mid \mathrm{O}_{\pi_i}(G) \text{ — холлова } \pi_i\text{-подгруппа } G \text{ для всех } i \in I)$$

является наследственной насыщенной формацией с условием Шеметкова.

Хорошо известно, что класс групп $\mathfrak{F}^S$, все подгруппы которых принадлежат заданной формации $\mathfrak{F}$, является формацией.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F} \neq (1)$ — *формация с условием Шеметкова. Предположим, что равенство* $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ *верно для любой группы* G. *Тогда существует разбиение* $\sigma = \{\pi_i \,|\, i \in I\}$ *множества* $\mathbb{P}$ *на попарно непересекающиеся подмножества такое, что* $\mathfrak{F}^S = \times_{i \in I}\mathfrak{G}_{\pi_i}$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{F} \neq (1)$ — *наследственная формация с условием Шеметкова. Тогда и только тогда равенство* $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ *верно для любой группы* G, *когда существует разбиение* $\sigma = \{\pi_i \,|\, i \in I\}$ *множества* $\mathbb{P}$ *на попарно непересекающиеся подмножества такое, что* $\mathfrak{F} = \times_{i \in I}\mathfrak{G}_{\pi_i}$.

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *формация такая, что* $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{N}$. *Тогда* $\mathfrak{F}^S = \mathfrak{N}$. *В частности,* $\mathfrak{F}$ — *формация с условием Шеметкова.*

Из этого предложения следует, что классы всех квазинильпотентных групп $\mathfrak{N}^*$ и групп, абелевые главные факторы которых центральны а оставшиеся являются простыми группами, $\mathfrak{N}_{ca}$ — формации с условием Шеметкова. Как было доказано в [5] равенство $\mathrm{Int}_{\mathfrak{N}^*}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{N}^*}(G)$ верно для любой группы G и существует группа H такая, что $\mathrm{Int}_{\mathfrak{N}_{ca}}(H) \neq \mathrm{Z}_{\mathfrak{N}_{ca}}(H)$. Таким образом обратное утверждение к представленной теореме неверно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo W. Structure theory for canonical classes of finite groups. — Heidelberg — New-York — Dordrecht — London: Springer, 2015.

2. Baer R. Group Elements of Prime Power Index // Trans. Amer. Math Soc. 1953. Vol. 75, № 1. P. 20-47.

3. Skiba A. N. On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group // J. Pure Appl. Algebra. 2012. № 216(4). P. 789-799.

4. Beidleman J. C., Heineken H. A note of intersections of maximal $\mathfrak{F}$-subgroups // J. Algebra. 2010. № 333. P. 120-127.

5. Murashka V. I. On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group // J. Group Theory. 2018. Vol. 23, № 3. P. 463-473.

6. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. — Dordrecht: Springer, 2006.

7. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. Two questions of L. A. Shemetkov on critical groups // J. Algebra. 1996. № 179. P. 905-917.

8. Kamornikov S. F. On two problems by L. A. Shemetkov // Sib. Math. J. 1994. Vol. 35, № 4. P. 713-721.

9. Васильев А. Ф. Об одном вопросе теории формаций конечных групп // Изв. Акад. Наук Беларуси. 1994. № 3. С. 121-122.

10. Vasil'ev A. F., Murashka V. I. Arithmetic graphs and classes of finite groups // Sib. Math. J. 2019. Vol. 60, № 1. P. 41-55.

УДК 511.32

О разрешимости конечных групп

С. В. Путилов (Россия, Брянск)
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского (БГУ)
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

On the solvability of finite groups

S. V. Putilov (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after academician I.G. Petrovsky (BGU)
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

По О. Кегелю [1] подгруппу H группы G называют квазисубнормальной, если $H \cap G_p = H_p$ для любого $p \in \pi(G)$ и каждой силовской p-подгруппы G_p из G.

Теорема. Пусть q – простое число. Если в конечной группе все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы q-нильпотентны, имеют индексы взаимно простые с q и q-замкнутые коммутанты, то группа разрешима или q-нильпотентна.

Следствие 1. Если в конечной группе все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы 2-нильпотентны, имеют нечетные индексы и 2-замкнутые коммутанты, то группа разрешима.

Следствие 2. Если в конечной группе все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы сверхразрешимы и имеют нечетные индексы, то группа разрешима.

Теорема и следствия усиливают соответственно теорему 1.1.8. и следствия 1.1.9, 1.1.10 из [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kegel O. Sylow Gruppen und Subnormalteiler endlichen Gruppen // Math. Z. 1962. Vol. 78. S. 205-221.

2. Путилов С.В. К теории конечных групп. Брянск. Группа компаний «Десяточка», 2009.

УДК 512.543

К вопросу об аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп[1]

Е. В. Соколов (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru
Е. А. Туманова (Россия, г. Иваново)
Ивановский государственный университет
e-mail: helenfog@bk.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

To the question of the root-class residuality of free constructions of groups

E. V. Sokolov (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: ev-sokolov@yandex.ru
E. A. Tumanova (Russia, Ivanovo)
Ivanovo State University
e-mail: helenfog@bk.ru

Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$ (или, короче, $\mathcal{C}$-*аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-группу), переводящий x в неединичный элемент. Содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{C}$ будем называть *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Изучая аппроксимируемость той или иной группы произвольным корневым классом, удается сэкономить усилия, получая сразу несколько «аппроксимационных» результатов с испольованием одной последовательности рассуждений. Особенно плодотворным этот подход оказывается при исследовании аппроксимируемости различных свободных конструкций групп (см., например, [1]–[8]). В настоящей работе изучается вопрос об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп произвольных графов групп. Если не оговорено иное, все рассматриваемые далее графы предполагаются непустыми, неориентированными и не обязательно связными. Количества вершин и ребер в них не обязаны быть конечными, допускаются кратные ребра и петли.

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — произвольный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Обозначая вершины графа Γ, являющиеся концами ребра $e \in E$, через $e(1)$, $e(-1)$ и сопоставляя каждой вершине $v \in V$ некоторую группу G_v, а каждому ребру $e \in E$ — группу H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$, получим *граф групп*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in E)),$$

соответствующий графу Γ. Группы G_v будем называть *вершинными*, подгруппы $H_{+e} = H_e\varphi_{+e}$ и $H_{-e} = H_e\varphi_{-e}$ — *реберными*.

Отметим, что в графе групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ ребру e соответствуют два, вообще говоря, различных гомоморфизма φ_{+e}, φ_{-e} даже в том случае, когда e является петлей, т. е. $e(1) = e(-1)$. Заметим также, что, в отличие от графа Γ, граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ можно при необходимости считать ориентированным, используя $e(1)$ и $e(-1)$ в качестве обозначений начала и конца ребра e.

Зафиксируем некоторый остовный лес $F = (V, E_F)$ графа Γ. *Фундаментальной группой графа групп* $\mathcal{G}(\Gamma)$ называется группа

$$\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) = \bigl\langle G_v\ (v \in V),\ t_e\ (e \in E \setminus E_F);$$
$$h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e}\ (e \in E_F,\ h \in H_e),\ t_e^{-1} h\varphi_{+e} t_e = h\varphi_{-e}\ (e \in E \setminus E_F,\ h \in H_e)\bigr\rangle,$$

образующими которой являются образующие групп G_v ($v \in V$) и буквы t_e ($e \in E \setminus E_F$), а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v ($v \in V$) и всевозможные соотношения вида $h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e}$ ($e \in E_F$, $h \in H_e$), $t_e^{-1} h\varphi_{+e} t_e = h\varphi_{-e}$ ($e \in E \setminus E_F$, $h \in H_e$), где $h\varphi_{\varepsilon e}$ ($\varepsilon = \pm 1$) — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$. Очевидно, что представление группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ зависит от выбора остовного леса F. Известно, однако, что все группы с представлениями описанного выше вида, соответствующими различным остовным лесам графа Γ, изоморфны [9, § 5.1], и это позволяет говорить о фундаментальной группе графа групп без упоминания конкретного остовного леса.

Отметим, что если граф Γ содержит лишь две вершины v, w и соединяющее их ребро e, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение групп G_v и G_w с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}, если же Γ имеет одну вершину v и петлю e в этой вершине, то $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ — HNN-расширение группы G_v с одной проходной буквой t_e и связанными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. В [1, 2] доказаны весьма полезные достаточные условия аппроксимируемости указанных конструкций корневым классом групп, которые могут быть сформулированы следующим образом.

Предложение 1. [1, теорема 3], [2, теорема 4.1]. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, G — свободное произведение $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп A и B с объединенными подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$ или HNN-расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы B со связанными подгруппами $H \leqslant B$ и $K \leqslant B$. Если существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на подгруппах H и K, то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

В данной работе предложение 1 обобщается следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, $\Gamma = (V, E)$ — граф с конечным числом ребер, $\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in E))$ — соответствующий ему граф групп и все группы G_v $(v \in V)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы. Если существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех подгруппах $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Целью настоящей работы является обсуждение вопроса о справедливости утверждения, обратного теореме 1 (в том числе в случае произвольного графа Γ). Отметим, что если гомоморфизм σ с указанными в этой теореме свойствами существует, то каждая подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ вкладывается в $\mathcal{C}$-группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\sigma$ и ввиду замкнутости корневого класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп сама принадлежит данному классу. Таким образом, интересующий нас вопрос имеет смысл сформулировать следующим образом.

Вопрос. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, $\Gamma = (V, E)$ — произвольный граф и*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in E))$$

— соответствующий ему граф групп. Пусть также все группы G_v $(v \in V)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ принадлежат классу $\mathcal{C}$. При каких условиях $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ влечет за собой существование гомоморфизма этой группы на группу из класса $\mathcal{C}$, действующего инъективно на всех подгруппах $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$?

Интерес к сформулированному вопросу объясняется следующим образом. Широко используемый подход к изучению $\mathcal{C}$-аппроксимируемости свободных конструкций групп, восходящий к работе [10], включает два основных шага. На шаге 1 исследуется $\mathcal{C}$-аппроксимируемость некоторой конструкции, составленной из групп, принадлежащих аппроксимирующему классу $\mathcal{C}$. На шаге 2 изучается $\mathcal{C}$-аппроксимируемость той же конструкции, но образованной уже из произвольных $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп, и задача состоит в отыскании условий, при которых данная конструкция аппроксимируется конструкциями, исследованными на шаге 1. Оказывается, однако, что на шаге 2 критерия $\mathcal{C}$-аппроксимируемости исследуемой конструкции, составленной из $\mathcal{C}$-групп, может быть недостаточно. Требуется знать, когда такая конструкция обладает гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-группу, инъективным на всех реберных подгруппах (см. [3, 4]). Приводимая далее теорема 2 описывает некоторые случаи, в которых указанный гомоморфизм существует. Предваряя ее формулировку, напомним, что группа имеет *конечный ранг Гирша–Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, все факторы которого являются периодическими или бесконечными циклическими группами.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, $\Gamma = (V, E)$ — граф с конечным числом ребер и $\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in E))$ — соответствующий ему граф групп. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ конечны и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

2) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ имеют конечный ранг Гирша–Зайцева и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения.*

Тогда существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех подгруппах $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$.

Из теоремы 2 следует, в частности, что если $\mathcal{C}$ — корневой класс, состоящий только из конечных групп, и все реберные подгруппы группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ содержатся в данном классе, то теорема 1 превращается в критерий. Этим объясняется тот факт, что, несмотря на многолетние исследования свойства финитной аппроксимируемости, сформулированный выше вопрос возник только сейчас, с началом систематического изучения аппроксимируемости свободных конструкций произвольными корневыми классами групп.

Основным результатом настоящей работы служит приводимая далее теорема 3, утверждающая, что для многих корневых классов групп аппроксимируемость фундаментальной группы графа групп является более слабым утверждением, нежели существование гомоморфизма этой группы, инъективного на всех реберных подгруппах.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну бесконечную группу и не содержащий некоторую (абсолютно) свободную группу конечного или счетного ранга. Тогда для любого графа $\Gamma = (V, E)$ существует соответствующий ему граф групп $\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in E))$ такой, что:*

1) *все группы G_v $(v \in V)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы;*

2) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ принадлежат классу $\mathcal{C}$;*

3) *группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

4) *для любого гомоморфизма σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$ и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ имеет место соотношение $\ker \sigma \cap H_{\varepsilon e} \neq 1$.*

Отметим, что условию теоремы 3 удовлетворяет, в частности, любой корневой класс, состоящий только из периодических групп и содержащий хотя бы одну бесконечную группу.

В основе доказательства теоремы 3 лежит утверждение об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов изоморфных групп, обобщающее ряд результатов из [1, 2] и представляющее самостоятельный интерес. Приведем необходимые определения.

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — произвольный граф и $\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in E))$ — соответствующий ему граф групп. Пусть также для любых $v, w \in V$ существует изоморфизм $\alpha_{v,w}\colon G_v \to G_w$ и множество $\{\alpha_{v,w} \mid v, w \in V\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall v \in V\ \alpha_{v,v} = \mathrm{id}_{G_v}$ (где id_{G_v} — тождественное отображение группы G_v в себя);

2) $\forall u, v, w \in V\ \alpha_{u,v}\alpha_{v,w} = \alpha_{u,w}$ (в частности, $\forall v, w \in V\ \alpha_{w,v} = \alpha_{v,w}^{-1}$);

3) $\forall e \in E\ \forall \varepsilon = \pm 1\ \alpha_{e(\varepsilon),e(-\varepsilon)}|_{H_{\varepsilon e}} = \varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$.

Тогда $\mathcal{G}(\Gamma)$ будем называть *графом изоморфных групп.*

Напомним также, что подгруппа Y группы X называется *отделимой* в этой группе *классом групп $\mathcal{C}$* (или, короче, *$\mathcal{C}$-отделимой*), если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, $\Gamma = (V, E)$ — произвольный граф и $\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in E))$ — соответствующий ему граф изоморфных групп. Группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все группы G_v $(v \in V)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Возвращаясь к обсуждению теоремы 3, отметим, что вершинные группы построенного в ходе ее доказательства графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ аппроксимируются классом $\mathcal{C}$, но не принадлежат данному классу. Авторам неизвестно, останется ли эта теорема верна, если заменить в ней условие 1 следующим образом: $G_v \in \mathcal{C}$ для всех $v \in V$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6–10.

2. Tieudjo D. On root-class residuality of some free constructions // JP Journal of Algebra, Number Theory and applications. 2010. Vol. 18, № 2. P. 125–143.

3. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

4. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

5. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43. P. 856–860.

6. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

7. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Матем. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

8. Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.

9. Serre J. P. Trees. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980. 142 p.

10. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193–209.

————————————————————————

УДК 512.542

О сверхразрешимости факторизуемой группы с добавляемо-перестановочными сомножителями

А. А. Трофимук (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

On the supersolvability of a factorizable group with supplement-permutable factors

A. A. Trofimuk (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1, 2]. Запись $H \leqslant G$ означает, что H — подгруппа группы G. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leq G$.

Хорошо известно, что прямое произведение сверхразрешимых подгрупп является сверхразрешимой подгруппой. Первые примеры несверхразрешимых групп, являющихся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп, привели Хупперт [3] и Бэр [4]. Полученные результаты стали источником для дальнейшего плодотворного исследования произведений подгрупп. Так Асаад и Шаалан [5] стали авторами ряда фундаментальных результатов, связанных с перестановочностью в факторизации группы. В частности, ими была установлена сверхразрешимость группы $G = AB$, у которой каждая подгруппа из сверхразрешимой подгруппы A перестановочна с каждой подгруппой из сверхразрешимой подгруппы B, см. [5, теорема 3.1]. Такую факторизацию Майер [6] предложил в дальнейшем называть *тотально перестановочным произведением* подгрупп A и B. Каросса [7] перенес данный результат на случай p-сверхразрешимых групп.

Как показывают работы [8]–[10] (см. также литературу из [10]) сверхразрешимость группы можно получать и при других обобщениях понятия тотально перестановочного произведения. Так, например, произведение $G = AB$ называется *tcc-перестановочным* [10], если для любых $X \leqslant A$ и $Y \leqslant B$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \leq G$. Сами подгруппы A и B в этом произведении называются *tcc-перестановочными*.

Относительно данного понятия можно сформулировать следующий результат Го, Шума и А.Н. Скибы [8, теорема A], который является естественным обобщением результата Асаада и Шаалана:

Пусть $G = AB$ — tcc-перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G сверхразрешима.

Введем следующее

Определение 1. *Подгруппа A группы G называется tcc-подгруппой в G, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$;*
2) *для любых $X \leqslant A$ и $Y \leqslant T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \leq G$.*

Как видно из условия 2 определения 1, $G = AT$ — tcc-перестановочное произведение подгрупп A и T. Подгруппу T в дальнейшем будем называть *tcc-добавлением* к подгруппе A в группе G.

Если $G = AB$ — tcc-перестановочное произведение подгрупп A и B, то A и B будут tcc-подгруппами в группе G. Обратное неверно.

Пример 2. *Диэдральная группа $G = [< a >] < c >$ порядка 24, $|a| = 12$, $|c| = 2$ ([11], IdGroup=[24,6]) является произведением tcc-подгрупп $A =< a^3c >\simeq Z_2$ и $B = [< a^{10} >] < c >\simeq D_{12}$. Однако A и B не tcc-перестановочны. Действительно, существуют в A и в B подгруппы $X = A$ и $Y =< c >$ соответственно, такие, что не существует элемента $u \in \langle X, Y\rangle = [< a^3 >] < c >\simeq D_8$ такого, что $XY^u \leq G$. Здесь Z_n — циклическая группа порядка n, $[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.*

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A и B — tcc-подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы, то G сверхразрешима.*

В качестве следствия получен p-аналог теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть A и B — tcc-подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B p-сверхразрешимы, то G p-сверхразрешима.*

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекают отмеченные выше результаты работ [5, 7, 8], представленных в следствии 2.

Следствие 2. (1) *Пусть $G = AB$ — тотально перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G сверхразрешима,* [5, теорема 3.1].

(2) *Пусть $G = AB$ — tcc-перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G сверхразрешима,* [8, теорема A].

(3) *Пусть $G = AB$ — тотально перестановочное произведение p-сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G p-сверхразрешима,* [7, лемма *].

(4) *Пусть $G = AB$ — tcc-перестановочное произведение p-сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда G p-сверхразрешима,* [5, теорема 4.1].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф19РМ-071).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.

2. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

3. Huppert B. Monomialle darstellung endlicher gruppen // Nagoya Math. J. 1953. V. 3. P. 93-94.

4. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115-187.

5. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53. P. 318-326.

6. Maier R. A completeness property of certain formations // Bull. Lond. Math. Soc. 1992. V. 24. P. 540-544.

7. Carocca A. p-supersolvability of factorized finite groups // Hokkaido J. Math. 1992. V. 21. P. 395-403.

8. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68 № 3-4. P. 433-449.

9. Arroyo-Jordá M., Arroyo-Jordá P., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M.D. On finite products of groups and supersolubility // J. Algebra. 2010. V. 323. P. 2922-2934.

10. Arroyo-Jordá M., Arroyo-Jordá P. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups // Journal of Algebra. 2017. V. 476. P. 395-414.

11. The GAP Group: GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.10.2 released on 19 June 2019. http://www.gap-system.org.

УДК 512.552

On Frattini theory for functor-closed partially composition formations of finite groups

Aleksandr Tsarev (Korea, Jeju)
Jeju National University, Korea
e-mail: alex_vitebsk@mail.ru

All classes considered are subclasses of the class $\mathfrak{G}$ of all finite groups. All unexplained notations and terminologies are standard. The reader is refereed to [[1],[2]] if necessary. A formation $\mathfrak{F}$ is a class of groups which is closed under homomorphic images and also every group G has smallest normal subgroup with quotient in $\mathfrak{F}$.

We consider only subgroup functors τ (in Skiba's sense) such that for any group G all subgroups of $\tau(G)$ are subnormal in G. In each group G, we select a system of subgroups $\tau(G)$. Recall that τ is a *subgroup functor* [[1],[2]] if

1. $G \in \tau(G)$ for every group G;

2. for every epimorphism $\varphi : A \mapsto B$ and any $H \in \tau(A)$ and $T \in \tau(B)$, we have $H^{\varphi} \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

If $\tau(G) = \{G\}$ then the functor τ is called *trivial.* For any collection of groups $\mathfrak{X}$ the symbol S_{τ} denotes the set of groups H such that $H \in \tau(G)$ for some group $G \in \mathfrak{X}$. A class of groups $\mathfrak{F}$ is called τ*-closed* if $\mathrm{S}_{\tau}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. In particular, a formation $\mathfrak{F}$ is called τ*-closed* if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for every group G of $\mathfrak{F}$.

Let $p \in \mathbb{P}$, and G be a group. Recall that the subgroup $C^p(G)$ is the intersection of the centralizers of all the abelian p-chief factors of G, with $C^p(G) = G$ if G has no abelian p-chief factors. For any set of groups $\mathfrak{X}$ we denote by $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ the class of all simple abelian groups A such that $A \cong H/K$ where H/K is a composition factor of $G \in \mathfrak{X}$. The symbols $\mathfrak{N}_p$ and $\mathfrak{G}_{\omega}$ denote the class of all p-groups and the class of all ω-groups. For every group class $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, by $G^{\mathfrak{F}}$ we denote the intersection of all normal subgroups N such that $G/N \in \mathfrak{F}$, and by $G_{\mathfrak{F}}$ we denote the product of all normal $\mathfrak{F}$-subgroups of the group G. The symbols $O_p(G)$ and $R_{\omega}(G)$ denote, respectively, the $\mathfrak{N}_p$-radical of G and the $\mathfrak{G}_{\omega}$-radical of G. Let f be a function of the form

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{formations of groups}\}. \qquad (1)$$

Consider the class of groups $CF_{\omega}(f) =$

$$(G \mid G/R_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ and } G/C^p(G) \in f(p) \text{ for all } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))).$$

If $\mathfrak{F}$ is a formation such that $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ for a function f of the form (1), then $\mathfrak{F}$ is said to be ω*-composition* and f is said to be an ω*-composition satellite* of $\mathfrak{F}$. Every formation is 0-multiply ω-composition by definition. For $n > 0$, a formation $\mathfrak{F}$ is called n*-multiply* ω*-composition* [[3]] if $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ and all non-empty values of f are $(n-1)$-multiply ω-composition formations.

Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be a τ-closed n-multiply ω-composition formations such that $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. We denote by $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{H}$ the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. If $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ and the lattice $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{M}$ consists of only two elements then $\mathfrak{M}$ is called a maximal τ-closed n-multiply ω-composition subformation of $\mathfrak{F}$. We describe the most common properties of the intersection of the maximal τ-closed n-multiply ω-composition subformations. Denote the intersection of all maximal τ-closed n-multiply ω-composition subformations of $\mathfrak{F}$ by $\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$, and call it the *Frattini subformation* of $\mathfrak{F}$ (we set $\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ if there are no such subformations). If $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\,(\mathfrak{X}\cup\{G\})$ always implies that $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ then we say that G is a $c^{\tau}_{\omega_n}$*-non-generator* of the formation $\mathfrak{F}$.

Theorem 1 ([5]). *Let $\mathfrak{F} \neq (1)$ be a non-empty τ-closed n-multiply ω-composition formation of finite groups, where n is a positive integer. Then the following holds:*

(1) $\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ *consists of all $c^{\tau}_{\omega_n}$-non-generators of $\mathfrak{F}$.*

(2) *Let $\mathfrak{Y}$ be a τ-closed n-multiply ω-composition formation of finite groups such that $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{F}$. Then $\Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{Y}) \subseteq \Phi^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$.*

REFERENCES

1. W. Guo, Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2015), 359 p.

2. A. N. Skiba, Algebra of Formations, Minsk: Bel. Navuka (1997), 240 p.

3. A. N. Skiba, L. A. Shemetkov, Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups, Ukr. Math. J. 52 (6) (2000), 898–913.

4. N. N. Vorob'ev, A. A. Tsarev, On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composite formations, Ukr. Math. J. 62 (4) (2010), 518–529.

5. A. Tsarev, On the maximal subformations of partially composition formations of finite groups, Bol. Soc. Mat. Mex., 2019 (in press) DOI: 10.1007/s40590-018-0205-y

———————————————————————————

Секция 2. Полугруппы и универсальные алгебры

УДК 512.548

Некоторые неравенства в полиадических группоидах специального вида

А. М. Гальмак (Беларусь, г. Могилев)
Могилёвский государственный университет продовольствия
e-mail:halm54@mail.ru
Н. А. Щучкин (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Some inequalities in polyadic groupoids of a special kind

A. M. Gal'mak (Belarus, Mogilev)
Mogilev State University of Food Technologies
e-mail: halm54@mail.ru
N. A. Shchuchkin (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Полиадическим группоидом специального вида мы называем универсальную алгебру $< A^k,\ \eta_{s,\ \sigma,\ k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\ \sigma,\ k}$, где $l = s(n-1)+1$, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $k \geq 2$, которая была определена в [1] на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $< A,\ \eta >$ с помощью подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ и n-арной операции η. Частными случаями этой операции являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил и изучал в [2]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы, вторую операцию он определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Если η – бинарная операция, то l-арная операция $\eta_{s,\ \sigma,\ k}$ совпадает с l-арной операцией $[\ ]_{l,\ \sigma,\ k}$ из [3], при этом $l = s+1$.

В следующей теореме доказана невозможность в l-арном группоиде $< A^k,\ \eta_{s,\ \sigma,\ k} >$ некоторых равенств, связанных с перестановочностью элементов.

Теорема 1. *Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает такими элементами $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, что $a \neq e_r$,*

$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a,$$
$$\eta(e_r e_1 \ldots e_{n-1}) = e_r, \qquad (1)$$
$$\eta(e_{n-1} e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}. \qquad (2)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и положим

$$\boldsymbol{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_r, a_j = a, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_r),$$
$$\boldsymbol{e}_1 = (\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{k}), \boldsymbol{e}_2 = (\underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{k}), \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \ldots, e_{n-1}}_{k}). \qquad (3)$$

Тогда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\boldsymbol{a}\underbrace{\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\ldots\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq$$
$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_1\ldots\boldsymbol{e}_{r-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_{r+1}\ldots\boldsymbol{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\ldots\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}).$$

Полагая в теореме 1 $r = 1$, получим следующий результат.

Теорема 2. *[4]. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает такими элементами $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, что*

$$a \neq e_1, \quad \eta(ae_1\ldots e_{n-1}) = a, \quad \eta(e_1e_1\ldots e_{n-1}) = e_1, \quad \eta(e_{n-1}e_1\ldots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \ldots, = a_{j-1} = e_1, a_j = a, a_{j+1} = e_1, \ldots, = a_k = e_1),$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ — *те же, что и в* (3). *Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\ldots\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq$$
$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2\ldots\mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\ldots\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}).$$

При $r = n - 1$ равенство (1) совпадает с равенством (2). Поэтому, полагая в теореме 1 $r = n - 1$, получим ещё один результат.

Теорема 3. *[5]. Пусть для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает такими элементами $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, что*

$$a \neq e_{n-1}, \quad \eta(ae_1\ldots e_{n-1}) = a, \quad \eta(e_{n-1}e_1\ldots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} \;=\; (a_1 = e_{n-1}, \ldots, = a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = a, a_{j+1} = e_{n-1}, \ldots, = a_k = e_{n-1}),$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ — *те же, что и в* (3). *Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\ldots\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq$$
$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-2}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}\ldots\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}).$$

Если в теореме 1 все $e_1, \ldots, e_{n-1}$ совпадают с некоторым идемпотентом e n-арного группоида $< A, \eta >$, то верны равенства (1) и (2). Поэтому справедлива

Теорема 4. *Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает такими элементом a и идемпотентом e, что*

$$a \neq e, \quad \eta(a\underbrace{e\ldots e}_{n-1}) = a. \tag{4}$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^r(j) \neq j$, *и положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e, a_j = a, a_{j+1} = \ldots = a_k = e), \quad \mathbf{e} = (\underbrace{e \ldots e}_{k}). \tag{5}$$

Тогда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{r}\mathbf{a}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)-r}).$$

Полагая в теореме 4 вначале $r = 1$, а затем $r = n - 1$, получим два следствия.

Следствие 1. *[4]. Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает элементом* a *и идемпотентом* e, *удовлетворяющими условию* (4). *Зафиксируем* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{e}$ *с помощью* (5). *Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{ea}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)-1}).$$

Следствие 2. *[5]. Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает элементом* a *и идемпотентом* e, *удовлетворяющими условию* (4). *Зафиксируем* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{e}$ *с помощью* (5). *Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{n-1}\mathbf{a}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{(s-1)(n-1)}).$$

Если η — бинарная операция ($n = 2$), то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с $(s+1)$-арной операцией $[\,]_{s+1,\sigma,k}$. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, группоид* $< A, \eta >$ *обладает элементом* a *и идемпотентом* e *такими, что*

$$a \neq e, \quad \eta(ae) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{e}$ *с помощью* (5). *Тогда*

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s}]_{s+1,\sigma,k} \neq [\mathbf{ea}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s-1}]_{s+1,\sigma,k}.$$

Теоремы 2 и 3 позволяют сформулировать большое число признаков неабелевости и не n-полуабелевости полиадических группоидов (полиадических полугрупп, полиадических групп) специального вида [4, 5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – №3. – С. 35–40.

2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P.208–350.

3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

4. Гальмак, А.М. О неабелевости полиадических группоидов специального вида / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2019. – №1. – С. 13–31.

5. Гальмак, А.М. О не n-полуабелевости полиадических группоидов специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – №1. – С. 31–39.

———————————————————————————

УДК 512+512.5+510.6+510.53

О позитивных формулах с ограниченными кванторами на свободных полугруппах

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
О. В. Зеткина (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
А. И. Зеткина (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

On positive formulas with limited quantifiers on free semigroups

V. G. Durnev (Russia, Yaroslavl)
Yaroslavl State Pavel Demidov University
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
O. V. Zetkina (Russia, Yaroslavl)
Yaroslavl State Pavel Demidov University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
A. I. Zetkina (Russia, Yaroslavl)
Yaroslavl State Pavel Demidov University
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Обозначим через S_m – свободную полугруппу ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно, а при $m = 3$ вместо a_1, a_2 и a_3 – a, b и c. Заметим, что S_1 – циклическая полугруппа. В дальнейшем речь будет идти только о нециклических (некоммутативных) полугруппах S_m, т.е. будем считать, что $m \geq 2$. Особый интерес по ряду причин представляют "пограничные" случаи – свободные полугруппы $S_2 = \langle a, b\rangle$ с двумя свободными образующими a и b и $S_3 = \langle a, b, c\rangle$ с тремя свободными образующими a, b и c.

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории нециклической свободной полугруппы*. Из результата В. Куайна легко следует *алгоритмическая неразрешимость позитивной теории свободной нециклической полугруппы* (этот факт в работе В. Куайна не отмечается).

В работе [2] был существенно усилен этот результат – доказана алгоритмическая неразрешимость для позитивных формул вида

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(y, z, x_1, x_2, x_3, a, b) \,=\, u_i(y, z, x_1, x_2, x_3, a, b)).$$

В ряде работ на полугруппе S_m рассматриваются два отношения частичного порядка $\leq$ и $\subseteq$, определяемые естественным образом

для произвольных элементов X и Y полугруппы S_m:

$$X \leq Y \iff \text{существует такой элемент } Z \text{ полугруппы } S_m, \text{ что } Y = XZ;$$
$$X \subseteq Y \iff \text{существуют такие элементы } U \text{ и } Z \text{ полугруппы } S_m, \text{ что } Y = UXZ.$$

Это позволяет рассматривать формулы с ограниченными кванторами вида $(Qz)_{z\leq t}$ и $(Qz)_{z\subseteq t}$, где Q – это $\forall$ или $\exists$, а t – слово от переменных и образующих полугруппы S_m, не содержащее переменной z.

По произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle\, a, b \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \,\rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу $\Phi'_S(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leq cXcx}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cXcxcYc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cXcxcYc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cXcxcYc}$$
$$(cXcxcYc = zax_1 \vee cXcxcYc = zbx_1 \vee$$
$$\vee \bigvee_{i=1}^{n} (cXcxcYc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3 \vee cXcxcYc = zcx_1B_ix_2cx_1A_ix_2cx_3))$$

Lemma 1. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S (равны в полугруппе S)
$\iff$ *на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A,B)$.*

Для удаления из формулы знака дизъюнкции $\vee$ воспользуемся обозначениями и результатами работы [3]. Следуя этой работе полагаем для произвольного слова w $\langle w\rangle = wawb$. В цитируемой работе доказана эквивалентность для произвольной полугруппы S_m $(m \geq 2)$

$$\bigvee_{i=1}^{n} W = W_i \iff (\exists Z)(\exists Z')U = ZVZ',$$
$$\text{где } v = WW_1\ldots W_n, \quad V = \langle v\rangle^2 W\langle v\rangle^2, \quad U = \langle v\rangle^2 W_1\langle v\rangle^2 W_2\langle v\rangle^2 \ldots \langle v\rangle^2 W_n\langle v\rangle^2.$$

Легко видеть, что $Z, Z' \subseteq U$. Это дает возможность по формуле $\Phi'_S(X,Y)$ построить формулу $\Phi_S(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leq t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2} w = v,$$
$$\text{где } t = cXcx,\ t_1 = cXcxcYc,\ t_2 = U$$

такую, что для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S (равны в полугруппе S)
$\iff$ на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi_S(A,B)$.

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, а в качестве формулы $\Phi_S(X)$ – формулу $\Phi_S(X,B)$, получим

Теорема 1. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул $\Phi_S(X)$ с параметром X вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leq t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2}$$
$$w(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c) = u(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на свободной полугруппе S_3 позитивная формула $\Phi_S(A)$.

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор и это квантор существования $\exists$, а вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе S_m формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограничены, и с произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic. // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.
2. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы. // ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.
3. Karhumaki J., Mignosi F., Plandowski W. On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables. // Bull. Belg. Math. Soc. 1993. P. 293-303.

УДК 512.579

Наименьшая обобщённо-дигрупповая конгруэнция на свободном димоноиде

А. В. Жучок (Украина, г. Старобельск)
Кафедра алгебры и системного анализа, Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко
e-mail: zhuchok.av@gmail.com

The least generalized digroup congruence on the free dimonoid

A. V. Zhuchok (Ukraine, Starobilsk)
Department of Algebra and System Analysis, Luhansk Taras Shevchenko National University
e-mail: zhuchok.av@gmail.com

The notion of a dimonoid was introduced by Loday in [1]. Recall that a *dimonoid* is a nonempty set D equipped with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ satisfying the axioms

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$$

for all $x, y, z \in D$. If operations of a dimonoid coincide, the dimonoid becomes a semigroup and therefore, dimonoids are a generalization of semigroups. The free dimonoid was first constructed in [1]. A dimonoid which is isomorphic to the free dimonoid is given in [2]. Recall this construction.

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. Let X be an arbitrary nonempty set, and let $F[X]$ be the free semigroup on X. We denote the length of a word $w \in F[X]$ by ℓ_w. Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on

$$\mathbb{F} = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid \ell_w \geqslant m\}$$

by

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1),$$

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2, \ell_{w_1} + m_2)$$

for all $(w_1, m_1),\ (w_2, m_2) \in \mathbb{F}$. The algebra $(\mathbb{F}, \dashv, \vdash)$ is denoted by $\breve{F}[X]$. By Lemmas 3.2 and 3.3 of [2], $\breve{F}[X]$ is the free dimonoid of rank $|X|$.

The notion of a digroup first appeared in Loday's work [1] as a dimonoid satisfying some additional identities. There exist two different definitions of a digroup (see also [3]). Following [4,5], a dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is called a *digroup* if

(D_1) there exists $e \in D$ such that for all $g \in D$,

$$e \vdash g = g = g \dashv e,$$

(D_2) for every $g \in D$ there exists a unique element $g^{-1} \in D$ such that

$$g \vdash g^{-1} = e = g^{-1} \dashv g.$$

An element e is called a *bar-unit* of $(D, \dashv, \vdash)$ and g^{-1} is said to be *inverse* to g. Following [6,7], a dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is called a *digroup* if (D_1) holds and

(D_3) for every $g \in D$ there exist two elements $\overset{\ell}{x}{}_e^{-1}$, $\overset{r}{x}{}_e^{-1}$ of D such that $x \vdash \overset{r}{x}{}_e^{-1} = e = \overset{\ell}{x}{}_e^{-1} \dashv x$.

Elements $\overset{\ell}{x}{}_e^{-1}$, $\overset{r}{x}{}_e^{-1}$ are said to be *left inverse* and, respectively, *right inverse* to x with respect to the bar-unit e. In [8], the latter digroups are called *generalized digroups*. Note that if in (D_3) $\overset{\ell}{x}{}_e^{-1} = \overset{r}{x}{}_e^{-1}$, we obtain the first definition of a digroup. If operations of a digroup coincide, the digroup becomes a group. So, digroups are a generalization of groups.

If ρ is a congruence on a dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ such that $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ is a generalized digroup, we say that ρ is a *generalized digroup congruence.*

We study the problem of describing the least generalized digroup congruence on the free dimonoid.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Loday J.-L. Dialgebras // In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. Vol. 1763, Berlin: Springer-Verlag. 2001. P. 7–66.

2. Zhuchok A. V. Structure of relatively free dimonoids // Commun. Algebra. 2017. Vol. 45, no. 4. P. 1639–1656. doi: 10.1080/00927872.2016.1222404.

3. Zhuchok A. V., Zhuchok Yu. V. On two classes of digroups // Sao Paulo J. Math. Sci. 2017. Vol. 11, no. 1. P. 240–252. doi: 10.1007/s40863-016-0038-4.

4. Kinyon M. K. Leibniz algebras, Lie racks, and digroups // J. Lie Theory. 2007. Vol 17, no. 1. P. 99–114.

5. Felipe R. Generalized Loday algebras and digroups // Comunicaciones del CIMAT, no. I-04-01/21-01-2004.

6. Liu K. Transformation digroups // Preprint available at arXiv: math.GR/0409265 (2004).

7. Liu K. The generalizations of groups // Res. Monogr. Math. Publ. Burnaby 1, 153 (2004).

8. Rodríguez-Nieto J. G., Salazar-Díaz O. P., Velásquez R. Augmented, free and tensor generalized digroups // Open Mathematics. 2019. 17(1). P. 71–88. doi: 10.1515/math-2019-0010.

УДК 512.579

Об NQ-критических коммутативных унарных алгебрах и их приложениях

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
А. В. Карташова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

On NQ-critical commutative unary algebras and their applications

V. K. Kartashov (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio- Pedagogical University
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
A. V. Kartashova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Хорошо известно ([1] – [4]), что квазикритические (или Q-критические) алгебры широко используются для исследования ключевых вопросов в квазиэквациональных теориях алгебраических систем.

Конечно порожденная алгебра называется *квазикритической* (или *Q-критической*), если она не принадлежит квазимногообразию, порожденному ее собственными подалгебрами (т. е. подалгебрами неизоморфными самой алгебре).

Однако, задача описания квазикритических алгебр, как правило, является весьма сложной задачей. Поэтому в некоторых случаях целесообразно использовать другие совокупности алгебр, порождающие данное квазимногообразие. В предлагаемом сообщении эта идея продемонстрирована в классе коммутативных унарных алгебр.

Напомним необходимые определения. Алгебра называется *унарной*, если в ее сигнатуре содержатся только унарные символы. Унарная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ называется *коммммутативной*, если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$ и $a \in A$.

Коммутативная унарная алгебра называется *связной*, если пересечение любых двух ее однопорожденных подалгебр непусто. Заметим, что любая коммутативная унарная алгебра представляется в виде объединения попарно непересекающихся связных подалгебр. Такое представление называется *прямой суммой* подалгебр.

Если связная коммутативная унарная алгебра $\mathbf{A}$ содержит наименьшую по включению подалгебру, то эта подалгебра называется *ядром* алгебры $\mathbf{A}$.

Связная алгебра называется *однолистной*, если она не представляется в виде объединения двух отличных от ядра подалгебр, пересечение которых равно ядру.

На классе всех конечных связных алгебр введем строгий порядок $\lhd$ по правилу: для любых двух конечно порожденных унарных алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ положим

$$\mathbf{A} \lhd \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}\varphi,$$

где $\varphi : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ – эпиморфизм, не являющийся изоморфизмом.

Определение 1. *Конечную коммутативную унарную алгебру $\mathbf{A}$ конечного типа назовем NQ-критической, если она либо двухэлементна, либо удовлетворяет следующим условиям:*

1. все сильно связные подалгебры алгебры $\mathbf{A}$ попарно неизоморфны;

2. все сильно связные компоненты алгебры $\mathbf{A}$, за исключением быть может одной сильно связны;

3. если связная компонента алгебры $\mathbf{A}$ не является сильно связной, то она однолистна;

4. если связные компоненты $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ алгебры $\mathbf{A}$ являются сильно связными, то они удовлетворяют условию: $\mathbf{X} \lhd \mathbf{U} \& \mathbf{Y} \lhd \mathbf{V} \to \mathbf{U} \equiv \mathbf{V}$;

5. если алгебра $\mathbf{A}$ содержит связную компоненту $\mathbf{H}$, которая не является сильно связной, то $\mathbf{X} \lhd \mathbf{Y} \to \mathbf{Y} \lhd \mathbf{H}$ для любых двух сильно связных подалгебр $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ алгебры $\mathbf{A}$.

Теорема 1. *Всякая конечная коммутативная унарная алгебра конечного типа аппорксимируется своими NQ-критическими подалгебрами.*

Из теоремы 1 естественным образом вытекает, что для некоторых квазимногообразий унарных алгебр совокупность всех NQ-критических подалгебр может служить порождающей совокупностью квазимногообразия. Это, в частности, относится к квазимногообразиям ssc-алгебр.

Коммутативная унарная алгебра назывется *ssc-алгеброй* (sum of strongly connected algebras), если каждая ее связная подалгебра является сильно связной.

Интерес к таким алгебрам объясняется тем, что прямая сумма ядер всех связных компонент произвольной коммутативной унарной алгебры является ssc-алгеброй.

В работе [5] изучались свойства решеток конгруэний ssc-алгебр.

С использованием свойств NQ-критических алгебр авторами [6] доказана конечность базиса квазитождеств любой конечной ssc-алгебры, найдено необходимое и достаточное условие конечности решетки квазимногообразий ssc-алгебр.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В. А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Том 16 № 5. С. 507-548.

2. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Математические заметки. 1980. Том 27 № 1. С. 7-20.

3. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Том 19 № 2. С. 173-193.

4. Casperson D., Hyndman J., Mason J., Nation J. B., Schaan B. Existence of finite bases for quasi-equations of unary algebras with 0 // Internat. J. Algebra Comput. 2015. Volume 25 № 6. P. 927-950.

5. Карташова А. В. О решетках конгруэнций прямых сумм сильно связных коммутативных унарных алгебр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Том 13 выпуск 4(2). С. 57-62.

6. Карташов В. К., Карташова А. В. О квазитождествах и решетках квазимногообразий некоторых унарных алгебр //XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза: тезисы докладов международной конференции (Тула, 13-18 мая 2019 г.) — Тула, 2019. С. 103-105.

УДК 512.567.5

О коммутативных унарных алгебрах с полудистрибутивными решетками топологий

А. В. Карташова (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

On commutative unary algebras with semidistributive topology lattices

A. V. Kartashova (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio- Pedagogical University
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Б. Йонссон [1] доказал, что произвольная свободная решетка *полудистрибутивна вверх*, т. е. удовлетворяет квазитождеству $SD_\vee : (\forall x, y, z)\ (x \vee y = x \vee z \to x \vee y = x \vee (y \wedge z))$.

В. А. Горбунов [2] показал, что решетка подквазимногообразий любого квазимногообразия также полудистрибутивна вверх.

В настоящем сообщении изучаются коммутативные унарные алгебры, решетки топологий которых обладают этим свойством.

Алгебра называется *унарной*, если в ее сигнатуре содержатся только унарные символы. Унарная алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является *коммутативной*, если $fg(a) = gf(a)$ для любых $f, g \in \Omega$ и $a \in A$.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная алгебра. Топология σ на множестве A называется *топологией на алгебре* $\mathfrak{A}$, если каждая операция из Ω непрерывна относительно σ. Топологии на алгебре $\mathfrak{A}$ образуют полную решетку по включению. Эту решетку будем называть *решеткой топологий* алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная коммутативная унарная алгебра, решетка топологий которой полудистрибутивна вверх. Тогда либо $|A| = 2$, либо любые две однопорожденные подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ сравнимы по включению.*

Далее приведено полное описание унаров (т. е. алгебр с одной унарной операцией), решетка топологий которых обладает свойством полудистрибутивности вверх.

Однопорожденный унар $\langle A, f \rangle$ с порождающим элементом a и определяющим соотношением $f^n(a) = f^{n+m}(a)$, где $n \geqslant 0$, $m > 0$, будем обозначать через C_m^n.

Объединение двух непересекающихся унаров $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ будем обозначать через $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.

Теорема 2. *Решетка топологий унара $\mathfrak{A}$ полудистрибутивна вверх тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ изоморфен одному из следующих унаров:*

1) $C_1^0 + C_1^0$;
2) C_m^n, *где* $m > 0$, $0 < n \leqslant 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jonsson B. Sublattices of a free lattice // Canadian Journal of Mathematics. 1961. Volume 13. P. 256-264.

2. Горбунов В. А. О решетках квазимногообразий // Алгебра и логика. 1976. Том 15, № 4. С. 438-457.

УДК 512.579

О решётках конгруэнций алгебр с одним оператором и симметрической основной операцией

В. Л. Усольцев (Россия, г. Волгоград)
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
e-mail: usl2004@mail.ru

On congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric basic operation

V. L. Usoltsev (Russia, Volgograd)
Volgograd State Socio-Pedagogical University
e-mail: usl2004@mail.ru

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочных с основными операциями. Решетки конгруэнций алгебр с операторами и близких к ним алгебр изучались в [1], [2].

В [3] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается тернарная операция $p(x,y,z)$, перестановочная с операцией f. Основные результаты, полученные при изучении свойств конгруэнций алгебр $\langle A,p,f\rangle$ с оператором f, приводятся в [4]. В [5] показано, что на любом унаре $\langle A,f\rangle$ можно так задать тернарную операцию $s(x,y,z)$, что алгебра $\langle A,s,f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. Предложенная там конструкция восходит к [3]. Пусть $\langle A,f\rangle$ — произвольный унар и $x,y\in A$. Для любого элемента z унара $\langle A,f\rangle$ через $f^n(z)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу z; при этом полагаем $f^0(z)=z$. Положим $M_{x,y}=\{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\mid f^n(x)=f^n(y)\}$, а также $k(x,y)=\min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y}\neq\emptyset$, и $k(x,y)=\infty$, если $M_{x,y}=\emptyset$. Положим далее

$$s(x,y,z)\stackrel{def}{=}\begin{cases} z, & \text{если } k(x,y)<k(y,z);\\ y, & \text{если } k(x,y)=k(y,z);\\ x, & \text{если } k(x,y)>k(y,z).\end{cases} \tag{1}$$

Из определения следует, что операция s удовлетворяет тождествам

$$s(y,x,x) = s(x,x,y) = s(x,y,x) = y,$$

то есть является операцией меньшинства (см., например, [6]) и мальцевской операцией. Как следствие, класс алгебр $\langle A, s, f\rangle$ является конгруэнц-модулярным.

Слабой функцией почти единогласия (WNU, weak near-unanimity function) (см., например, [7]) называется идемпотентная n-арная операция d, где $n > 1$, для которой выполняются тождества $d(y,x,\ldots,x) = d(x,y,\ldots,x) = \ldots = d(x,x,\ldots,y)$. Алгебры, имеющие термальную WNU-операцию находят применение в рамках алгебраического подхода к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях алгебры. Поскольку $s(x,x,x) = x$ и $s(x,x,y) = s(x,y,x) = s(y,x,x)$ для любых x, y, то операция s является тернарной слабой функцией почти единогласия. В духе работы [7] операция s была названа в [5] симметрической. В [8] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f\rangle$, в [9] — гамильтоновы алгебры данного класса. В [10] анонсировано описание атомов решеток конгруэнций алгебр $\langle A, s, f\rangle$, а также подпрямо неразложимых алгебр данного класса.

Для любых чисел $n > 0$, $m \geqslant 0$ положим $C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{n+m}(a)\rangle$. Унар C_n^0 называется циклом длины n. Элемент унара называется циклическим, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots$, где $n > 0$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots$. Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$, и непериодическим в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются множества всех периодических и непериодических элементов унара A соответственно. Унар A называется периодическим, если $A = T(A)$, и унаром без кручения, если $A = D(A)$. Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их суммой. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, s, f\rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x,y,z)$, определенной по правилу (1). Решетка конгрунций алгебры $\langle A, s, f\rangle$ является цепью тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:*
1) $\langle A, f\rangle$ — унар с инъективной операцией;
2) $\langle A, f\rangle$ изоморфен C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
3) $\langle A, f\rangle$ — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим;
4) $\langle A, f\rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент;
5) $\langle A, f\rangle$ является суммой одной компоненты связности вида 2)–4) и произвольного числа компонент вида 1).

Теорема 2. *Пусть $\langle A, s, f\rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x,y,z)$, определенной по правилу (1). Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f\rangle$ совпадает с решеткой конгруэнций ее унарного редукта $\langle A, f\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:*
1) C_p^0, где p — простое число;
2) $C_1^0 + C_1^0$;
3) C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hyndman J., Nation J. B., Nishida J. Congruence lattices of semilattices with operators // Studia Logica. 2016. Vol. 104. № 2. P. 305–316.
2. Garsia P., Esteva F. On Ockham algebras: Congruence lattices and subdirectly irreducible algebras // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 319–346.
3. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова. Волгоград, 1999. С. 31–32.
4. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201-202.
5. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 2(38). С. 127–134.
6. Szendrei A. Clones in universal algebra. Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.
7. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59. № 3–4. P. 463–489.
8. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Том 6(50), ч. 2. С. 229–236.
9. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сборник. 2014. Том 15, № 3(51). С. 100–113.
10. Усольцев В. Л. Подпрямо неразложимые алгебры в классе алгебр с оператором и симметрической основной операцией // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 115-118.

———————————————————————————

УДК 511.32

О предельных точках в алгебрах дискретных вероятностных распределений

А. Д. Яшунский (Россия, г. Москва)
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
e-mail: yashunsky@keldysh.ru

On limit points in discrete probability distribution algebras

A. D. Yashunsky (Russia, Moscow)
Keldysh institute of applied mathematics
e-mail: yashunsky@keldysh.ru

Основные проблемы и результаты классической теории вероятностей связаны со случайными величинами, значения которых — действительные числа. Даже в тех случаях, когда рассматриваемые случайные величины принимают лишь конечное множество значений (например, бернуллиевские случайные величины), эти значения все равно интерпретируются как действительные числа, а результаты зачастую формулируются как свойства сумм случайных величин.

Вместе с тем, рассматривались и задачи, в которых случайные величины принимают значения из некоторого множества, отличного от $\mathbb{R}$. Так, например, в книге У. Гренандера [1] собраны результаты о предельных законах на некоторых непрерывных алгебраических структурах (в первую очередь, — различных группах), а в работе Н. Н. Воробьева [2] исследуются предельные законы для суммирования случайных величин на конечных абелевых группах.

Исследование предельных законов в конечных алгебраических системах связано с исследованием алгебраических преобразований случайных величин на конечных множествах. Эта задача достаточно давно рассматриваемой в математической кибернетике. Примечательно, что для весьма простых систем операций зачастую оказывается, что никаких предельных теорем доказать нельзя: так, например, в работе Р. Л. Схиртладзе [3] показано, что специальным образом подобранные формулы из конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний, в которые подставляются независимые бернуллиевские случайные величины, позволяют сколь угодно точно приблизить *любое* бернуллиевское распределение. То есть, вычисления со случайными величинами по мере роста их сложности не сходятся к какому-то одному предельному закону, а наоборот — образуют всюду плотное множество в множестве бернуллиевских распределений.

В действительности, как будет показано далее, само наличие некоторого предельного закона для вычислений в конечной алгебраической структуре, часто накладывает достаточно жесткие ограничения как на операции этой структуры, так и на предельный закон.

Сформулируем основные определения. Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ — конечное множество, в котором принимают значения дискретные случайные величины. Тогда распределение случайной величины — вектор $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{k-1})$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \geqslant 0$, $i \in E_k$, $\sum\limits_{i \in E_k} p_i = 1$. Эти условия задают в пространстве $\mathbb{R}^k$ симплекс всевозможных векторов распределений, который будем обозначать $\mathbf{S}^{(k)}$. Распределение, у которого i-я компонента равна единице будем обозначать $\mathbf{e}^{(i)}$. Для распределения $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(k)}$ *носителем* назовем множество $\mu(\mathbf{p}) = \{i \in E_k \mid p_i > 0\}$.

Если вместо переменных некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_n)\colon E_k^n \to E_k$ подставить независимые в совокупности случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ с распределениями $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)} \in \mathbf{S}^{(k)}$, то значение $f(X_1, \ldots, X_n)$ также будет случайной величиной со значениями в E_k, обозначим ее распределение через $\mathbf{q}$. Тогда для компонент распределения $\mathbf{q}$ выполнено:

$$q_i = \sum_{\substack{\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in E_k \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = i}} p^{(1)}_{\sigma_1} \cdots p^{(n)}_{\sigma_n}.$$

Таким образом $\mathbf{q}$ является функцией от распределений $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)}$, которая однозначно определяется по функции f, будем обозначать ее $\widehat{f}$ и называть *индуцированной функцией*. Очевидно, что $\widehat{f}\colon (\mathbf{S}^{(k)})^n \to \mathbf{S}^{(k)}$. Если B — некоторое множество функций на E_k, то соответствующее множество индуцированных функций будем обозначать через $\widehat{B}$.

Если для любых распределений $\mathbf{h}^{(1)}, \ldots, \mathbf{h}^{(n)}$ из некоторого заданного множества $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{S}^{(k)}$ выполнено $\widehat{f}(\mathbf{h}^{(1)}, \ldots, \mathbf{h}^{(n)}) \in \mathbf{H}$, то множество $\mathbf{H}$ замкнуто относительно операции $\widehat{f}$. Если для заданного множества функций B множество распределений $\mathbf{H}$ замкнуто относительно каждой из функций, принадлежащих $\widehat{B}$, то $\langle \mathbf{H}, \widehat{B} \rangle$ — *алгебра распределений*, индуцированная множеством B. Наименьшую по включению алгебру распределений, индуцированную множеством B и содержащую заданное множество распределений $\mathbf{G}$, будем обозначать $V_B(\mathbf{G})$ и называть алгеброй, *порожденной* множеством $\mathbf{G}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$, и, как следствие на множестве $\mathbf{S}^{(k)}$ можно определить метрику ρ, для определенности можно считать, что используется «манхэттенская» метрика

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i \in E_k} |p_i - q_i|.$$

Распределение $\mathbf{q}$ называется *предельной точкой* множества распределений $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{S}^{(k)}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое распределение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$, что $0 < \rho(\mathbf{h}, \mathbf{q}) < \varepsilon$.

Наличие предельного закона при алгебраических преобразованиях случайных величин на конечном множестве может быть описано в терминах алгебр распределений и их предельных точек. Подстановка случайных величин с распределениями из некоторого конечного множества $\mathbf{G}$ в формулы, составленные из операций, принадлежащих множеству B, имеет предельный закон распределения тогда, и только тогда, когда множество $V_B(\mathbf{G})$ имеет единственную предельную точку. В представленных ниже теоремах рассматривается несколько более общая ситуация — исследуются произвольные (а не только конечно порожденные) алгебры распределений с единственной предельной точкой. Как будет показано далее, уже это сильно ограничивает класс возможных операций в множестве B.

Результаты данной работы обобщают утверждения из работы [4], касающихся предельных точек в алгебрах бернуллиевских распределений, индуцированных системами булевых функций, на случай случайных величин на произвольном конечном множестве.

Ключевой для дальнейшего изложения является следующая теорема, описывающая «поглощающие» свойства предельного распределения. Она доказывается только для алгебр, основное множество которых, в некотором смысле, находится в «общем положении». Для того, чтобы описать эти множества формально, введем два дополнительных определения. Множество $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}^{(k)}$ называется *существенно плоским*, если найдется такое конечное подмножество $\mathbf{H}' \subset \mathbf{S}^{(k)}$, что аффинная оболочка $\mathbf{H} \setminus \mathbf{H}'$ не содержит $\mathbf{S}^{(k)}$. Множество $\mathbf{H}$ является *X-множеством*, если его можно представить в виде объединения ровно двух множеств, у каждого из которых аффинная оболочка не содержит $\mathbf{S}^{(k)}$.

Напомним также, что переменная x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n) \colon E_k^n \to E_k$ называется *существенной*, если найдутся такие значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta, \gamma \in E_k$, $\beta \neq \gamma$, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \gamma, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Теорема 1. *Пусть множество $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}^{(k)}$ не является существенно плоским или X-множеством и имеет единственную предельную точку $\mathbf{q}$. Если у функции $f \colon E_k^n \to E_k$ все n переменных существенные и $V_{\{f\}}(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, то для любых $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)} \in \mathbf{S}^{(k)}$ таких, что $\{\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)}\} \ni \mathbf{q}$ выполнено равенство $\widehat{f}(\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)}) = \mathbf{q}$.*

Отметим, что имеются примеры алгебраических систем, у которых алгебры распределений имеют единственную предельную точку, и при этом являются существенно плоскими или X-множествами. Дальнейшие результаты, естественно, не распространяются на такие системы, и они требуют дополнительного исследования. Вместе с тем, есть основания полагать, что среди алгебр распределений с единственной предельной точкой чаще встречаются именно алгебры в «общем положении».

Для дальнейшего изложения введем также следующие понятия. Операция f называется *существенно не унарной*, если число существенных переменных у f более одной. Операция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *квазигрупповой*, если для любой существенной переменной x_i и любого набора констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1})$ является перестановкой на множестве E_k.

Следующая теорема обобщает результат из работы [5] со случая бинарных квазигрупповых операций на случай квазигрупповых операций произвольной арности.

Теорема 2. *Пусть $B = \{f_1, \dots, f_s\}$ — набор квазигрупповых операций на E_k, среди которых есть хотя бы одна существенно не унарная операция, а $\mathbf{G} \subset \mathbf{S}^{(k)}$ — конечное множество распределений, такое что для любого $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ выполнено $|\mu(\mathbf{g})| > \frac{k}{2}$. Тогда единственной предельной точкой множества $V_B(\mathbf{G})$ является $\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right) \in \mathbf{S}^{(k)}$.*

Как видно из формулировки теоремы, при достаточно общих условиях система с квазигрупповыми операциями имеет своим предельным законом равномерное распределение, фактически, независимо от того, какие именно распределения входят в множество $\mathbf{G}$. Теорема 1 позволяет в определенном смысле обратить формулировку Теоремы 2 в классе алгебр в «общем положении».

Теорема 3. *Пусть множество $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}^{(k)}$ не является существенно плоским или X-множеством и имеет единственную предельную точку $\mathbf{q}$. Если $\mu(\mathbf{q}) = E_k$, B — некоторое множество операций на E_k, содержащее хотя бы одну существенно не унарную операцию, и $V_B(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, то $\mathbf{q} = \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)$, а все операции из множества B — квазигрупповые.*

Таким образом, среди алгебр в «общем положении», наличие предельного закона возможно только у алгебр, индуцированных квазигрупповыми операциями, и этот предельный закон обязательно является равномерным распределением. Если допускать наличие у предельного распределения нулевых компонент, ограничения на индуцирующие операции становятся менее жесткими, однако и в этом случае о них можно достаточно много сказать. Проще всего описать системы, у которых предельная точка имеет только одну ненулевую компоненту.

Теорема 4. *Пусть множество $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}^{(k)}$ не является существенно плоским или X-множеством и имеет единственную предельную точку $\mathbf{e}^{(i)}$. Если B — некоторое множество операций на E_k и $V_B(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, то для любой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in B$ и любого набора $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E_k$ такого, что $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \ni i$ выполнено равенство $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = i$.*

Теорема 1 позволяет получить описание и тех алгебраические системы, у которых размер носителя предельного распределения заключен строго между 1 и k, однако оно менее информативно. В частности, компоненты предельного распределения, хотя и зависят от индуцирующей системы B, могут быть сделаны произвольными за счет подбора подходящей системы B. (Отметим, что произвольные предельные распределения также возможны, если система B содержит только существенно унарные операции, однако этот случай не представляет особого интереса.) Связь предельного распределения со свойствами системы B описывается, в частности, следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть множество $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}^{(k)}$ не является существенно плоским или X-множеством и имеет единственную предельную точку $\mathbf{q}$. Если B — некоторое множество операций на E_k и $V_B(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, то $\mu(\mathbf{q}) \subset E_k$ является подалгеброй в алгебре $\langle E_k, B \rangle$.*

Можно предположить, что дополнительное требование конечной порожденности алгебры распределений позволит несколько сузить класс рассматриваемых алгебр, что, в свою очередь может снять необходимость в дополнительных условиях на множество $\mathbf{H}$ (не существенно плоское и не X-множество). Результатом может стать полная характеризация конечных алгебраических систем с предельными законами.

Автор выражает благодарность О. М. Касим-Заде за внимание к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. — М.: Мир, 1965. 276 с.

2. Воробьев Н. Н. Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах // Математический сборник. 1954. Том 34(76), № 1. С. 89-126.

3. Схиртладзе Р. Л. О методе построения булевой величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. Вып. 7. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. С. 71-80.

4. Яшунский А. Д. Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 135. 16 с. doi:10.20948/prepr-2018-135 Режим доступа: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-135

5. Яшунский А. Д. О преобразованиях распределений вероятностей бесповторными квазигрупповыми формулами // Дискретная математика. 2013. Том 25, вып. 2. С. 149-159.

———————————————————————

Секция 3. Кольца и модули

УДК 512.54

Локально нильпотентный радикал и радикал Джекобсона в специальных алгебрах Ли

А. А. Горелик (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: anna_gmn3@rambler.ru

Locally nilpotent radical and Jacobson radical in special Lie algebras

A. A. Gorelik (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail:anna_gmn3@rambler.ru

В работе изучается возможность гомологического описания локально нильпотентного радикала и радикала Джекбсона в специальных алгебрах Ли и их свойства.

Проведено исследование возможности гомологического описания радикала Джекобсона и локально нильпотентного радикала для алгебр Ли, их связь с $PI-$ неприводимо представленным радикалом, а также изучены некоторые свойства примитивных алгебр Ли.

Получены следующие результаты.

1. Доказан аналог теоремы Ф. Кубо. Показано, что радикл Джекобсона специальной почти локально разрешимой алгебры Ли L над полем F характеристики нуль равен нулю тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \bigoplus Z(L)$, где $Z(L)$ центр алгебры L, S конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$.

2. Для произвольной специальной алгебры Ли L показано включение $IrrPI(L) \subset J(L)$, которое в общем случае является строгим. Построен пример алгебры Ли L, для которой выполенено строгое включение $J(L) \subset IrrPI(L)$.

3. Показано, что для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо включение $N(L) \subset IrrPI(L)$, которое в общем случае является строгим. Построен пример не специальной алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является локально разрешимым.

4. Показано, что большинство алгебр Ли над полем являются примитивными. Приведен пример абелевой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем не являющийся примитивным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю.А. О строении PI-оболочки конечномерной алгебры Ли // Изв. вузов. сер. Матем. 1985. № 11. С. 60-62.

2. Бейдар К.И., Пихтильков С.А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // Успехи матем. наук. 1994. № 1. С. 233.

3. Бейдар К.И., Пихтильков С.А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика.- 2000. Т. 6. № 3. С. 643-648.

4. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика.- 2002. Т. 8. Вып. 3. С. 769-782.

5. Размыслов Ю. П. Об энгелевых алгебрах Ли // Алгебра и логика. 1971. Т. 10.№ 10. С. 33-44.

6. Размыслов Ю.П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 3. С. 337-360.

7. Kubo F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.

8. Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra. J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.

9. Togo S. Radicals of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1972. V. 2, P. 179-203.

10. Togo S., Kavamoto N. Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1972. V. 2. P. 253-261.

———————————————————————

УДК 512.522

Аннуляторы в пространстве радиальных функций

Н. И. Дубровин ((Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет
e-mail: ndubrovin81@gmail.com

Annihilators in the space of radial functions

N. I. Dubrovin (Russia, Vladimir)
Vladimir state University
e-mail: ndubrovin81@gmail.com

1. Введение

Алгебраистам хорошо известна проблема делителей нуля для групповых алгебр: пусть $(G,\cdot,e)$ – группа без кручения, а K – поле; будет ли групповая алгебра KG областью целостности, т.е. не содержать делителей нуля? В полном объеме проблема делителей нуля не решена до сих пор. Естественное обобщение этой проблемы состоит в следующем. Обозначим $L^p(G)$ банахово пространство формальных сумм $\gamma = \sum_{g\in G} gc_g$ с комплексными коэффициентами $c_g \in \mathbb{C}$, для которых семейство $\{|c_g|^p \mid g \in G\}$ суммируемо. Здесь $p \geqslant 1$ или $p = +\infty$, и в этом крайнем случае требуется ограниченность семейства $\{|c_g| \mid g \in G\}$.

Пространство $L^p(G)$ превращается в $\mathbb{C}G$-бимодуль относительно левого и правого умножения на элементы из группового кольца $\mathbb{C}G$ и таким образом групповую алгебру $\mathbb{C}G$ можно рассматривать как подкольцо банаховой алгебры ограниченных операторов любого из пространств $L^p(G)$.

ПРОБЛЕМА (см. [1, 2]) Пусть G – группа без кручения, $0 \neq b \in \mathbb{C}G$ и $0 \neq \gamma \in L^p(G)$; будет ли верно неравенство $b\gamma \neq 0$?

Как видно, проблема зависит от параметра p, и, как оказалось, – сильно зависит. В случае $p = 2$ имеется ряд положительных результатов, самый общий из них следующий: если $E \lhd H \lhd G$ – субнормальный ряд групп такой, что E – свободная группа, H/E – элементарно аменабельная группа, а G/H – левоупорядоченная группа, то $b \in \mathbb{C}G$ не имеет делителей нуля в $L^2(G)$ ([1, Proposition 1.4]). Напротив, если параметр p достаточно велик, то b может иметь делители нуля в $L^p(G)$ даже в случае свободной абелевой группы конечного ранга, см. [2, Theorem 2.3]. Кроме того, в статье [3] указан критерий для радиальной формальной суммы $b \in L^1(G)$ (определение см. ниже) свободной группы G быть делителем нуля в пересечении $\bigcap_{p>2} L^p(G)$, т.е. $b\gamma = 0$ и $0 \neq \gamma$ принадлежит любому из пространств $L^p(G)$, $p > 2$.

Пусть G – свободная группа. Функция $f\colon G \mapsto \mathbb{C}$ называется радиальной, если ее значения зависят только от длины слова в свободных образующих группы G. Цель настоящей работы – элементарными средствами вычислить аннулятор радиальной функции, принадлежащей групповой алгебре $\mathbb{C}G$, в том числе для элемента $k + x + y + x^{-1} + y^{-1}$ ($k \in \mathbb{C}$) свободной группы $\langle x, y\rangle$.

2. Радиальные функции на свободной группе

Обозначим E_k – множество элементов группы $\langle x, y\rangle$, имеющих длину k, а e_k – число элементов этого множества. Известно (см. [4]), что $e_1 = 4$ и $e_k = 4 \cdot 3^{k-1}$ для $k \geqslant 1$.

Обозначим $\chi_k = \sum_{g\in E_k} g \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Радиальную функцию запишем как формальную сумму $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$. Алгебра этих функций такова:

$$\chi_1^2 = \chi_2 + 4; \quad \chi_1\chi_k = \chi_{k+1} + 3\chi_{k-1}. \tag{1}$$

Обозначим $L^p_r\langle x, y\rangle$ пространство радиальных функций, принадлежащих пространству $L^p\langle x, y\rangle$.

Назовем формальную сумму $0 \neq b \in L^1(G)$ *p-делителем нуля*, если найдется ненулевая формальная сумма $\gamma \in L^p(G)$ для которой $b \cdot \gamma = 0$. При этом аннулятор суммы b в пространстве $L^p_r(G)$ обозначаем $\mathrm{Ann}_p\, b$. Заметим, что если аннулятор формальной суммы $b \in L^1\langle x, y\rangle$ в пространстве $L^p\langle x, y\rangle$ ненулевой, то он ненулевой и в $L^p_r\langle x, y\rangle$ (см. [2, Lemma 6.2]).

Выясним условия на коэффициенты $a_j \in \mathbb{C}$, при которых формальная сумма

$$\gamma := \sum_{m=0}^{\infty} a_m\chi_m$$

принадлежит $L^p\langle x, y\rangle$. Будем писать $c_m \sim l_m$ для двух последовательностей, если $\lim \frac{c_m}{l_m} \neq 0$. Заметим, что $e_m \sim 3^m$. По определению банахова пространства $L^p(G)$:

$$\gamma \in L^p\langle x, y\rangle \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^p\, e_m < \infty \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} 3^m\, |a_m|^p < \infty.$$

Сравнение с рядом $\sum_{m=1}^{\infty} m^n\mu^m$, который сходится в том и только том случае, когда $|\mu| < 1$, приводит к следующему результату

Предложение 1. *Если $|a_m| \sim P(m)\lambda^m$ для формальной суммы $\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\chi_m$, где P – многочлен, то $\gamma \in L^p\langle x, y\rangle$ в том и только том случае, когда $3 \cdot \lambda^p < 1$.*

Приведем два частных, но показательных примера (первый из них, см. в [3]). Вычислим

$$\chi_1\left(1 - \frac{1}{3}\chi_2 + \frac{1}{9}\chi_4 - \cdots + (-1)^k\frac{1}{3^k}\chi_{2k} + \cdots\right) =$$

$$= \chi_1 - \frac{1}{3}(\chi_3 + 3\chi_1) + \frac{1}{9}(\chi_5 + 3\chi_3) - \frac{1}{27}(\chi_7 + 3\chi_5) \dots = 0$$

Итак, $\chi_1 = x + y + x^{-1} + y^{-1}$ – делитель нуля в пространстве $L^p\langle x, y\rangle$. Узнаем каково может быть p. Применим предложение 1 к последовательности $\frac{e_{2m}}{3^m} = \frac{4\cdot 3^{2m-1}}{3^m} \sim 3^{-m}$, и вычисляя $\lambda = 1/\sqrt{3}$, получим $p > 2$. Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\chi_{2m}}{3^m} \in \bigcap_{p>2} L^p\langle x, y\rangle \setminus L^2\langle x, y\rangle.$$

С другой стороны,

$$\chi_1 \left(\chi_1 - \frac{1}{3}\chi_3 + \frac{1}{9}\chi_5 - \dots + (-1)^k \frac{1}{3^k}\chi_{2k+1} + \dots \right) =$$

$$= \chi_2 + 4 - \frac{1}{3}(\chi_4 + 3\chi_4) + \frac{1}{9}(\chi_6 + 3\chi_4) - \frac{1}{27}(\chi_8 + 3\chi_6) \dots = 4,$$

при этом $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{3^m}\chi_{2m+1} \in L^p\langle x, y\rangle$ для любого $p > 2$.

Найдем $\mathrm{Ann}_p\, b$, где $b = k + \chi_1 \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$ ($k \in \mathbb{C}$). Составим уравнение

$$b(a_0 + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 + \dots) = 0 \qquad (2)$$

относительно коэффициентов $a_j \in \mathbb{C}$. Перепишем (2):

$$ka_0 + ka_1\chi_1 + ka_2\chi_2 + ka_3\chi_3 + \dots +$$

$$+ a_0\chi_1 + a_1(\chi_2 + 4) + a_2(\chi_3 + 3\chi_1) + a_3(\chi_4 + 3\chi_2) + \dots = 0$$

Приравнивая коэффициенты, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$ka_0 + 4a_1 = 0; \quad 3a_{m+1} + ka_m + a_{m-1} = 0. \qquad (3)$$

Так как $a_0 \neq 0$, то можно считать $a_0 = 1$. Тогда, решая первые уравнения системы (3), находим

$$a_1 = -\frac{k}{4}; \quad a_2 = -\frac{1}{3}(ka_1 + a_0) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{k^2}{4} + 1\right) = \frac{k^2}{12} - \frac{1}{3}. \qquad (4)$$

Составим и решим для рекуррентного соотношения $3a_{m+1} + ka_m + a_{m-1} = 0$ характеристическое уравнение:

$$3\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 12}}{6} \qquad (5)$$

Тогда $a_m = \lambda_1^m \cdot C_1 + \lambda_2^m \cdot C_2$ или $a_m = \lambda_1^m(C_1 + m \cdot C_2)$ в случае совпадения $\lambda_1 = \lambda_2$. Находить константы C_1, C_2 необязательно, следует лишь соблюсти условие предложения 1. Так как $|\lambda_1|\,|\lambda_2| = 1/3$, то для большего по модулю корня $|\lambda_1| \geqslant 1/\sqrt{3}$, а для меньшего по модулю корня $|\lambda_2| \leqslant 1/\sqrt{3}$.

Найдем значения k при которых существует $p > 1$ такое, что $\gamma \in L^p\langle x, y\rangle$ и $b \cdot \gamma = 0$, пользуясь предложением 1.

$$(\exists p)\ 3 \cdot \left| \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 12}}{6} \right|^p < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 12}}{6} \right| < 1 \Leftrightarrow |\lambda_{1,2}| < 1.$$

Решим это неравенство, заменяя сначала неравенство на равенство. Если $|\lambda_1| = 1$, то во-первых, $\lambda_1 = e^{i\varphi}$, а во-вторых $|\lambda_2| = 1/3$ – меньший по модулю корень. Тогда

$$3\lambda_1^2 + k\lambda_1 + 1 = 0 \Rightarrow k = -3\lambda_1 - \lambda_1^{-1} = -3e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = -4\cos\varphi - 2i\sin\varphi.$$

Если φ пробегает отрезок $[0; 2\pi]$, то получаем, что k пробегает эллипс с полуосями 4 и 2. Ясно, что именно внутренность этого эллипса будет решением неравенства $|\lambda_{1,2}| < 1$. Подводим итог

Теорема 1. *Элемент $k+x+y+x^{-1}+y^{-1}$, где $k=u+iv\in\mathbb{C}$, $u,v\in\mathbb{R}$ будет иметь ненулевой правый аннулятор среди радиальных функций банахова пространства $L^p\langle x,y\rangle$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{u^2}{16}+\frac{v^2}{4}<1. \tag{6}$$

При заданном $k=u+iv$ и удовлетворяющим неравенству (6), величина p такая, что $\gamma\in L^p\langle x,y\rangle$ должна удовлетворять неравенству

$$\left|\frac{-k\pm\sqrt{k^2-12}}{6}\right|^p<\frac{1}{3} \tag{7}$$

Как найти правый аннулятор для элемента $b=q+p\chi_1+\chi_2$? Воспользуемся тем, что $\chi_2=\chi_1^2-4$. Тогда $b=q-4+p\chi_1+\chi_1^2$ раскладывается над полем комплексных чисел в произведение линейных множителей: $b=(k+\chi_1)(k'+\chi_1)$. Обозначим $\gamma(k)$ радиальную функцию – правый аннулятор элемента $k+\chi_1$ построенный выше. Выше доказано, что $\mathrm{Ann}_r(k+\chi_1)=\gamma(k)\mathbb{C}$. Если $k\neq k'$, то $\gamma(k)\mathbb{C}+\gamma(k')\mathbb{C}=\mathrm{Ann}_r\, b$. Каков правый аннулятор элемента $(k+\chi_1)^2$? Понадобиться теорема

Теорема 2. *Для любого $k\in\mathbb{C}$ найдется радиальная функция $\beta(k)$ такая, что $(k+\chi_1)\beta(k)=1$. Аффинное пространство всех таких функций одномерно и совпадает с $\beta(k)+\gamma(k)\mathbb{C}$.*

Уравнение $(k+\chi_1)(b_0+b_1\chi_1+b_2\chi_2+\cdots)=\gamma(k)$ имеет решение и поэтому результат снова принадлежит $L^p\langle x,y\rangle$ для того же p. Тем самым $\dim\mathrm{Ann}_r(k+\chi_1)^2=2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Linnell P.A.. Division rings ang group von Neumann algebras. Forum Math. 5(1993), 561-576
2. Linnell P.A., Puls M.J. Zero divisiors and $L^p(G)$, II, arXiv:math/0003191v1, 28 Mar 2000. P. 1-9.
3. Puls M. J. Zero divisors and $L^p(G)$// Proc. Amer. Math. Soc. 2014., V6., No8., P. 230-241.
4. Pytlik T. Radial functions on free groups and a decomposition of the regular representation into irreducible components// J. Reine Angew. Math. 1981. 326. P. 124-135.
5. Linnell P.A. Zero divisors and group von Neumann algebras. Pacific Journal of Mathematics. Vol. 149, No. 2, 1991, p. 349-363

УДК 512.541

Абсолютные идеалы факторно делимых абелевых групп

Е. И. Компанцева (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет;
Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва.
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Т. К. Ч. Нгуен (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Absolute ideals of quotient divisible abelian groups

E. I. Kompantseva (Russia, Moscow)
Moscow state pedagogical University;
Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow.
e-mail: kompantseva@yandex.ru
T. Q. T. Nguyen (Russia, Moscow)
Moscow state pedagogical University
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Кольцом на абелевой группе G называется любое кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G. Подгруппу группы G, являющуюся идеалом в любом кольце на G, называют абсолютным идеалом группы G. Изучению абсолютных идеалов абелевых групп посвящены работы Е. Фрида [1, 2], Л. Фукса [3], К. МакЛина [4], Е. Компанцевой и А. Фомина [5] и др. Главным абсолютным идеалом, порожденным элементом $g \in G$, называется наименьший абсолютный идеал $\langle g\rangle_{AI}$, содержащий g.

Ясно, что любая вполне характеристическая подгруппа абелевой группы G является ее абсолютным идеалом, однако обратное утверждение неверно. В [1] сформулирована проблема изучения абелевых групп, в которых нет абсолютных идеалов кроме вполне характеристических подгрупп. Такие группы называют afi-группами.

При изучении колец на абелевых группах без кручения в [6] для описания групп, допускающих кольцевую структуру, которая вкладывается в полупростую сепарабельную алгебру, было введено понятие факторно делимой группы. В [7] это понятие распространено на случай смешанных групп, в той же работе показано, что смешанные факторно делимые группы двойственны абелевым группам без кручения конечного ранга. Абелева группа G называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что G/F – делимая периодическая группа.

В настоящей работе изучаются afi-группы в классе редуцированных факторно делимых групп ранга без кручения 1. Для этого сначала описаны главные абсолютные идеалы таких групп.

Пусть G – группа, $g \in G$. Как обычно, $h_p(g)$ – p-высота элемента g,
$\chi(g) = (h_{p_1}(g), h_{p_2}(g), \cdots)$ – характеристика элемента g в группе G, где $p_1, p_2, \cdots$ – последовательность всех простых чисел.

Теорема 1. *Пусть G – редуцированная факторно делимая абелева группа ранга без кручения 1, $a \in G$, $\chi(a) = \chi$. Тогда $\langle a\rangle_{AI} = G(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) \geq \chi\}$.*

Описание главных абсолютных идеалов позволяет сделать вывод о факторно делимых afi-группах ранга 1.

Теорема 2. *Любая редуцированная факторно делимая группа ранга без кручения 1 является afi-группой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fried E. On the subgroups of an abelian group that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian groups, Budapest. 1964. P. 51-55.

2. Fried E. Preideals in modules // Periodica Math. Hungarica. 1971. Vol. 1. №3. P. 163–169.

3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Том 2, М.: Мир. 1977. 335с.

4. McLean K. R. p-ring whose only right ideals are the fully invariant subgroups // Proc. London Math. Soc. 1975. Vol. 3. P. 445–458.

5. Компанцева Е. И., Фомин А. А. Абсолютные идеалы почти вполне разложимых абелевых групп // Чебышевский сб. 2015 Vol. 16. №4. С. 200–211.

6. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math. 5 (1961). P. 61–98.

7. A.A. Fomin, W. Wickless Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126. №1. P. 45–52.

УДК 512.572

О конструкциях некоторых линейных алгебр с тождествами

С. М. Рацеев (Россия, г. Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
e-mail: ratseevsm@mail.ru
О. И. Череватенко (Россия, г. Ульяновск)
Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова
e-mail: choi2008@mail.ru

On constructions of some linear algebras with identities

S. M. Ratseev (Russia, Ulyanovsk)
Ulyanovsk state University
e-mail: ratseevsm@mail.ru
O. I. Cherevatenko (Russia, Ulyanovsk)
Ulyanovsk state pedagogical University named after I. N. Ulyanov
e-mail: choi2008@mail.ru

Все рассматриваемые ниже конструкции линейных алгебр использовались для построения алгебр с новыми тождественными соотношениями на основе некоторых исходных алгебр, при этом (экстремальные) свойства исходных алгебр сохранялись в новых конструкциях.

Алгебры Лейбница. Напомним, что алгебра называется алгеброй Лейбница, если оператор правого умножения на любой элемент данной алгебры является дифференцированием. Соответствующее определяющее тождество Лейбница имеет вид

$$[[x, y], z] \equiv [[x, z], y] + [x, [y, z]].$$

Если в алгебре Лейбница с операцией умножения $[,]$ выполнено тождество $[x, x] \equiv 0$, то она будет являться алгеброй Ли. Хорошо известно, что любая ассоциативная алгебра с операцией коммутирования является алгеброй Ли. Алгебру Ли из ассоциативной алгебры можно также построить следующим образом.

Предложение 2. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. В векторном пространстве $L = A \oplus A$ над полем K определим операцию умножения $[,]$ элементов множества L следующим образом:*

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], x_1 \wedge y_2 - y_1 \wedge x_2),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $\alpha \in K$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L$. Тогда полученная алгебра L будет являться алгеброй Ли.

С помощью следующих конструкций из любой ассоциативной или лиевой алгебры можно построить алгебру Лейбница.

Предложение 3. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. В векторном пространстве $B = A \oplus A$ над полем K определим операцию умножения $[,]$ следующим образом:*

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$. Тогда полученная алгебра B будет являться алгеброй Лейбница.

Предложение 4. *Пусть L — некоторая алгебра Ли с операцией умножения $[,]$ над произвольным полем K. Распространим операцию умножения $[,]$ в векторном пространстве $B = L \oplus L$ следующим образом:*

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_1]),$$

где $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$. Тогда полученная алгебра B будет являться алгеброй Лейбница.

Алгебры Пуассона. Алгебра $A = A(+, \cdot, \{,\}, K)$ над полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{,\}, K)$ — алгебра Ли с операцией умножения $\{,\}$, которая называется скобкой Пуассона, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \qquad a, b, c \in A.$$

Обзор по PI-алгебрам Пуассона можно найти в работе [1]. Пусть A_L — некоторая алгебра Ли над полем K с лиевым умножением $[,]$. Пусть $v_1, v_2, ...$ — линейный базис пространства A_L над K. Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов $K[v_1, v_2, ...]$. Скобки Пуассона $\{,\}$ для элементов v_i определим как умножение в A_L: $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки Пуассона $\{,\}$ на все $K[v_1, v_2, ...]$, используя линейность и правило Лейбница. Таким образом получается алгебра Пуассона $PS(A_L)$.

Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с единицей над полем K нулевой характеристики и умножением $\wedge$, в которой выполнено тождество $[[x_1, x_2], x_3] = 0$ (см. [2]). Определим в A операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in A.$$

Полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{,\}, K)$ будет алгеброй Пуассона.

Предложение 5. *Пусть A_L — некоторая ненулевая алгебра Ли с лиевым умножением $[,]$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = A_L \oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:*

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$
$$\{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \quad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K. \tag{1}$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{,\}, K)$ будет являться алгеброй Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} \equiv 0$.

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра с умножением $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим алгебру Ли $[A]$ с операцией коммутирования $[x, y] = x \wedge y - y \wedge x$, $x, y \in A$. Из алгебры $[A]$ также можно построить алгебру Пуассона $[A] \oplus K$ с операциями (1).

Алгебры Лейбница-Пуассона. Рассмотрим алгебры Пуассона с неантикоммутативной операцией $\{,\}$, которые будем называть алгебрами Лейбница-Пуассона. Более точно, векторное пространство A над полем K с двумя K-биллинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница-Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad \{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где $a, b, c \in A$. Обзор по PI-алгебрам Лейбница-Пуассона можно найти в работе [3].

Предложение 6. *Пусть A_L — некоторая ненулевая алгебра Лейбница с умножением $[,]$ над бесконечным полем K. В векторном пространстве $A = A_L \oplus K$ определим операции умножения* (1)*. Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{,\}, K)$ будет являться алгеброй Лейбница-Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} \equiv 0$.*

Предложение 7. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. В векторном пространстве $C = A \oplus A \oplus K$ определим две операции умножения $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:*

$$(x_1, x_2, \alpha) \cdot (y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta),$$

$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1, 0),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in C$. Тогда полученная алгебра C будет алгеброй Лейбница-Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} \equiv 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рацеев С. М. Числовые характеристики многообразий алгебр Пуассона // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 2. С. 217-242.

2. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 2007. Vol. 359, № 10. P. 4669-4694.

3. Рацеев С. М., Череватенко О. И. Числовые характеристики алгебр Лейбница–Пуассона // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1. С. 143-159.

Секция 4. Прикладная и компьютерная алгебра, криптография и дискретная математика

УДК 511.9

О решении задач многомерной оптимизации в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений[1]

Ю. А. Басалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

On solving multidimensional optimization problems within the problem of estimating the constant of joint diophantine approximations

Yu. A. Basalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

В работе [2] предложен новый подход у оценке константы совместных диофантовых приближений C_n. Теоретические основы этого подхода заложены Г. Дэвенпортом и Дж. В. С. Касселсом. Г. Дэвенпорт [8] обнаружил связь между значением критического определителя звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс [6] перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s}\prod_{i=1}^{s}|x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n}|x_i| < 1.$$

Описанные выше результаты сводят задачу оценки константы совместных диофантовых приближений к оценке объема наибольшего параллелепипеда $V_{n,s}$. Ранее оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса [1, 6, 7]. В работе [2] предложен подход сведения задачи оценки константы совместных диофантовых приближений к решению некоторого класса оптимизационных задач. Опишем особенности решения данных задач подробнее.

Нас будут интересовать задачи вида

$$\begin{gathered} f_{n,s} = \prod_{i=1}^{s}\left(\alpha_i x_i^2 + \alpha_{s+i}x_{s+i}^2\right)\prod_{i=2s+1}^{n}(\alpha_i x_i) \to \max, \\ |y_i| \le 1, \quad i = \overline{1,n} \\ x_i = y_i, \quad i = \overline{1, n-2k} \\ x_{n-2i+1} = y_{n-2i+1} + y_{n-2i+2}, \quad x_{n-2i+2} = y_{n-2i+1} + y_{n-2i+2}, \quad i = \overline{1,k} \end{gathered} \tag{1}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ: (грант 16-41-710194_р_центр_а).

Эти задачи решались нами численно, с помощью системы компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica`, и аналитически. В процессе численных решений задачи было выявлено, что встроенные в математический пакет `Wolfram Mathematica` метод `NMaximize` со стандартными настройками не всегда может корректно решить задачу (1). Поэтому мы провели исследование зависимости результата оптимизации от параметра `Method`. Например, для задачи

$$f = -\frac{1}{4}c\left(-y_4 + y_5\right)\left(a^2 y_1^2 + b^2\left(-y_2 + y_3\right)^2\right)\left(b^2\left(y_2 + y_3\right)^2 + c^2\left(y_4 + y_5\right)^2\right),$$

$$\text{где } a = 0.657,\ b = 1.138,\ c = 0.893,$$

$$-1 \le y1 \le 1,\ -1 \le y2 \le 1,\ -1 \le y3 \le 1,\ -1 \le y4 \le 1,\ -1 \le y5 \le 1$$

результаты имеют следующий вид

Метод	Значение	Точка
`DifferentialEvolution`	1.18409	$(-1, -1, -1, 0.3333, 1)$
`NelderMead`	1.04968	$(1, -0.2113, -1, -1, 1)$
`SimulatedAnnealing`	1.18409	$(1, 1, -1, -1, -0.3333)$
`RandomSearch`	1	$(-1, -1, -1, -1, 1)$

Это привело нас к следующим выводам:

- при решении задач вида (1) отказаться от использования методов `NelderMead` и `RandomSearch`,
- производить предварительную проверку значений оптимизируемой функции f в вершинах, на ребрах и диагоналях. Это позволяет, во-первых отсечь значительную часть некорректных значений, даже не решая оптимизационную задачу, а во-вторых это может нивелировать ошибки возможные при работе функции `NMaximize`.

При аналитическом решении задач вида (1) использовался следующий подход. Так как ограничения имеют линейный вид, последовательно выражая переменные через другие, можно преобразовать исходную задачу к задаче многомерной оптимизации без ограничений. Эта задача в свою очередь сводится к решению системы алгебраических уравнений. Этот вопрос хорошо исследован [4]. Для больших размерностей решение задач такого вида может представлять техническую сложность. В этом случае, для проведение промежуточных вычислений значительную помощь также может оказать использование системы компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica`.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басалов Ю.А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений. // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388-405.

2. Ю. А. Басалов. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 66–81.

3. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.

4. Прасолов В. В. Многочлены. — 2-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2001. – 336 с., ил.

5. Basalov Yu. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation, Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1804.05385

6. Cassels J. W. S., Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 119-121.

7. Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory (1980) p. 543-556.

8. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 30 (1955). p. 186-195.

УДК 519.115.1

On a class of permutations of a multiset

T. Goy (Ukraine, Ivano-Frankivsk)
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine
e-mail: tarasgoy@yahoo.com
R. Zatorsky (Ukraine, Ivano-Frankivsk)
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine
e-mail: romazatorsky@gmail.com

Об одном классе перестановок мультимножества

Т. Гой (Украина, г. Ивано-Франковск)
Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаныка, Украина
e-mail: tarasgoy@yahoo.com
Р. Заторский (Украина, г. Ивано-Франковск)
Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаныка, Украина
e-mail: romazatorsky@gmail.com

In combinatorial mathematics, a Stirling permutation of order m is a permutation of the multiset $\{1, 1, 2, 2, \ldots, m, m\}$ such that for each i, $1 \le i \le m$, the elements between the two occurrences of i are larger than i (the name comes from relations with the Stirling numbers, see [2]). E.g., 1122, 1221 and 2211 are Stirling permutations, whereas the permutations 1212 and 2112 of $\{1, 1, 2, 2\}$ aren't.

A natural generalization of Stirling permutations is to consider permutations of the multiset $\{1^n, 2^n, \ldots, m^n\}$. We call a permutation of the multiset $\{1^n, 2^n, \ldots, m^n\}$ a n-Stirling permutation if for each i, $1 \le i \le m$, the elements between two consecutive occurrences of i are larger than i. Let $E_m(n)$ denote the number of n-Stirling permutation. It is well known that $E_m(2) = (2m-1)!!$, $E_m(n) = \prod_{i=1}^{m} (n(i-1)+1)$. See [1, 2, 3, 4] for more details.

We have obtained the next results:

Theorem 1. *The following formula hold*

$$E_{m+1}(n) = \sum_{\substack{0\lambda_0+1\lambda_1+\cdots+m\lambda_m=m \\ \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_m=n+1}} \frac{(n+1)! \cdot C(m, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\lambda_0! \lambda_1! \cdots \lambda_m!} \prod_{j=0}^{m} E_j(n)^{\lambda_j},$$

where $E_0(n) := 1$,

$$C(m, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i_j=0}^{\lambda_j - 1} \binom{m - (0\lambda_0 + 1\lambda_1 + \cdots + (j-1)\lambda_{j-1}) - j \cdot i_j}{j} = \frac{m!}{0!^{\lambda_0} 1!^{\lambda_1} \cdots m!^{\lambda_m}}.$$

Theorem 2. *The following recurrence hold*

$$E_{m+1}(n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m-1}{i-1} n + \binom{m-1}{i-1} - \binom{m-1}{i-2} \right) E_{m+1-i}(n) E_i(n),$$

where $E_1(n) = 1$.

REFERENCES

1. Dzhumadil'daev A., Yeliussizov D. Stirling permutations on multisets // European Journal of Combinatorics. 2014. Vol. 36. P. 377–392.
2. Gessel I., Stanley R. P. Stirling polynomials // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1978. Vol. 24(1). P. 24-33.
3. Kuba M., Panholzer A. Analysis of statistics for generalized Stirling permutations // Combinatorics, Probability and Computing. 2011. Vol. 20(6). P. 875-910.
4. Park S. K. The r-multipermutations // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1994. Vol. 67(1). P. 44-71.

УДК 515.16+519.17

Исправление формулы Палмера для числа помеченных Эйлеровых графов

В. А. Воблый (Россия, г. Москва)
Всероссийский институт научной и технической информации РАН
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Correction of Palmer's formula for the number of labeled Eulerian graphs

V. A. Voblyi (Russia, Moscow)
All-Russian Institute of scientific and technical information RAS
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Пусть $U(p,q)$ – число помеченных эйлеровых графов с p вершинами и q ребрами. Палмер по аналогии с помеченными связными графами без доказательства дает формулу [1, p. 394]:

$$U(p,q) = \binom{\binom{p}{2}}{q} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k} \sum_{m=0}^{q} \binom{\binom{p-k}{2}}{m} U(k, q-m) \, .$$

По формуле Палмера имеем $U(4,4) = 15$, хотя должно быть $U(4,4) = 3$. Отметим, что эта же неверная формула приводится в обзоре [2].

Пусть $W(p,q)$ – число помеченных четных графов с p вершинами и q ребрами, а $P_q(x,n)$ – многочлен Кравчука. Этот многочлен может быть определен с помощью производящей функции [3].

$$(1-z)^x (1+z)^{n-x} = \sum_{q=0}^{n} P_q(x,n) z^q \, .$$

Из производящей функции, полученной Ридом [4], в [5] найдена формула

$$W(p,q) = \frac{1}{2^p}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}P_q(i(p-i), p(p-1)/2)\ .$$

Теорема. Число $U(p,q)$ помеченных эйлеровых графов с n вершинами и q ребрами при $q \geqslant p \geqslant 3$ равно

$$U(p,q) = W(p,q) - \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k-1}\sum_{j=0}^{q}U(k,j)W(p-k,q-j)\ .$$

Доказательство. [Доказательство] Положим $W(0,0)=1, U(0,0)=0, W(0,q)=U(0,q)=0$ при $q>0$ и введем производящие функции

$$w(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}W(p,q)\frac{x^p y^q}{p!}, u(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}U(p,q)\frac{x^p y^q}{p!}\ ,$$

Дифференцируя по x соотношение между производящими функциями помеченных связных и несвязных графов, найдем

$$w(x,y) = \exp(u(x,y)), \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = w(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\ .$$

Перемножая ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, y в правой и левой частях последнего равенства, имеем

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}W(p+1,q)\frac{x^p y^q}{p!}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}U(p+1,q)\frac{x^p y^q}{p!}\ .$$

$$W(p+1,q)\frac{1}{p!} = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}U(i+1,j)\frac{1}{i!}W(p-i,q-j)\frac{1}{(p-i)!}\ ,$$

$$W(p+1,q) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\binom{p}{i}U(i+1,j)W(p-i,q-j)\ .$$

Выделяя слагаемое в двойной сумме при $i=p$, получим

$$W(p+1,q) = \sum_{j=0}^{q}U(p+1,j)W(0,q-j) + \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q}\binom{p}{i}U(i+1,j)W(p-i,q-j)\ .$$

$$U(p+1,q) = W(p+1,q) - \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q}\binom{p}{i}U(i+1,j)W(p-i,q-j)\ .$$

После сдвига индекса p на 1 и замены индекса $k=i+1$, найдем

$$U(p,q) = W(p,q) - \sum_{i=0}^{p-2}\sum_{j=0}^{q}\binom{p-1}{i}U(i+1,j)W(p-i-1,q-j)\ .$$

$$U(p,q) = W(p,q) - \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{q}\binom{p-1}{k-1}U(k,j)W(p-k,q-j)\ .$$

Доказательство закончено. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Palmer E. M. The enumeration of graphs. Selected topics in graph theory, London a.o., Academic Press, 1978, pp. 385-415.
2. Lesniak L., Oellemann O. R. An Eulerian exposition // J. Graph Theory. — Vol.10, No.3,(1986), 277-297.
3. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.
4. Read R. C. Euler graphs on labelled nodes, Canad. J. Math. // 14(1962), 482-486.
5. Воблый В. А. Об одном тождестве для многочленов Кравчука // Материалы XX Международного семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (13-14 апреля 2018 г.) , Кропивницкий, 2018, — с. 25–28.

_ _

УДК 517.538

Девятая проблема Гильберта и следствия из неё

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)
кафедра алгебры и теории чисел, Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com
Р. П. Востокова (Россия, г. Санкт-Петербург)
Балтийский государственный технический университет "Военмех"
e-mail: rvostokova@yandex.ru

Hilbert's ninth problem and its consequences

S. V. Vostokov (Russia, St.Petersburg)
Department of algebra and number theory of St. Petersburg state University
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com
R. P. Vostokova (Russia, St.Petersburg)
Baltic State Technical University "Voenmech"
e-mail: rvostokova@yandex.ru

В 1900 году на первом международном математическом конгрессе в Париже Д.Гильберт опубликовал свои знаменитые гипотезы, про одну из которых, а именно 9-ю проблему, будет рассказ в докладе на конференции. Эта проблема связана с давно, а именно с конца 18 века, стоящей проблемы закона взаимности в поле алгебраических чисел. Гильберт воспользовался знаменитой идеей Л. Кронекера о глубокой аналогии между алгебраическими числами и алгебраическими функциями.

Воспользовавшись этой идеей он перевёл в своей гипотезе вычисление произведения символов Лежандра к вычислению локальных символов норменного вычета (так называемого символа Гильберта).

В докладе будет рассказ о истории вычисления этого символа в явном виде на протяжении прошлого века, и обобщение символа, а также его нахождение явной формулы для него в формальных модулях разных типов формальных групп – групп Любина-Тейта, формальных групп Хонды и т.д..

Будет дано обобщение символа на многомерные локальные поля и использование его явная конструкция основной теоремы теории полей классов как для классического локального поля, так и для многомерного локального поля.

Будут высказаны дальнейшие гипотезы по применению явных формул, например для эллиптических кривых.

––

УДК 519.[172-178]

О формальной корректности атрибутного алгоритма реконструкции деревьев процессов Linux

Н. Н. Ефанов (Россия, г. Долгопрудный)
Московский физико-технический интститут (государственный университет)
e-mail: nefanov90@gmail.com

On the formal correctness of Linux process tree reconstruction algorithm.

N. N. Efanov (Russia, Dolgoprudnyy)
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
e-mail: nefanov90@gmail.com

Задача сохранения и восстановления по контрольным точкам крайне актуальна для современного системного и высоконагруженного программирования [1]. Реконструкция дерева процессов, полученного при сохранении состояния исполнения в Unix-подобных операционных системах - процесса, контейнера, виртуальной машины, - является важнейшей подзадачей для возобновления работы сохранённого объекта [2]. В работе рассматривается метод восстановления дерева процессов Linux построением промежуточного графа реконструкции с зависимостями. Вводятся поправки к предложенному ранее алгоритму атрибутной реконструкции [3], заключающиеся в дополнении получаемых частично упорядоченных множеств до верхних полурешёток, на которых реконструкция корректна [4]. Также производится оценка роста числа состояний, реализуемых при восстановлении. Оценка позволяет заключить останов алгоритма на любых корректных входных деревьях, а также определяет класс временной сложности алгоритма с уточнением.

1. Граф реконструкции и поправки к атрибутному алгоритму [3]

Будем использовать определения, введённые в работе [4] – дерево процессов

$$T = (V, E) \tag{1}$$

и граф его восстановления - промежуточное представление:

$$G(T) = (V^+, E^+) \tag{2}$$

где $V^+ = V \cup V^{int}$ - конечные вершины, дополненные промежуточными V^{int}, соответствуют состояниям процессов в ходе выполнения реконструкции системными вызовами, описываемыми E^+ как переходами между состояниями и иерархическими зависимостями [2, 3]. Вершины содержат словари атрибутов: $\forall v \in V^+ \exists v.attr : v.key = val(v.attr[key])|'None', \forall key \in K$, где K

- список ключей атрибутов процесса, $val(v.attr[key]) : K \to type(key)$ - отображение ключей на типизированные значения атрибутов.

Зависимости между вершинами вводятся как бинарное отношение (u, v) с семантикой "для реализации u требуется предварительно реализовать v"и определяют частичный порядок на V^+. Уточним, что зависимость происходит по атрибуту $attr$, если v либо создаёт атрибут $attr$, либо в его контексте происходит системный вызов, выставляющий данный атрибут в v, либо атрибут $attr$ изменяется в ходе выполнения какого-либо вызова над v. Математически, такие зависимости можно описать соответствующими операторами предзамыкания.

Определение 1. *Графом реконструкции с зависимостями $G^{dep}(T)$ называется мультиорграф:*

$$G^{dep}(T) = (V^+, E^+ \cup E^{dep}) \tag{3}$$

где E^{dep} - множество зависимостей между вершинами.

Атрибуты объединяются в иерархии, на которых можно ввести отношение доминирования, из которого для каждого атрибута $attr_1$ можно получить минимальное по мощности множество, в которое включается множество состояний с различными значениями атрибута $attr_1$, но с идентичными значениями доминирующих атрибутов $attr_2$, и его замыкание.Остальные свойства, отмеченные в [4], также справедливы и в текущей работе. Следующее утверждение является центральным для получения замыканий по атрибутам:

Утверждение 1. *V^+ с отношением зависимости образует конечную верхнюю полурешетку.*

Доказательство данного свойства приведено в [4]. Следовательно, получение промежуточного представления можно представить как задачу вложения входного дерева в граф некоторой полурешётки. Для построения такой полурешётки был разработан алгоритм атрибутной реконструкции [3], восстанавливающий граф реконструкции за $O(|V^+|^3)$, а для малого числа атрибутов за $O(|V^+|^2)$ по времени. Алгоритм позволяет относительно эффективно работать с реальными деревьями процессов. Тем не менее, существуют примеры [5], на которых алгоритм возвращает нерабочие конструкции с нарушением полурешёточных свойств. В работе вводится и обосновывается поправка к алгоритму дополнением получаемых конструкций до полурешёток (Рис.2) на базе перевода в SSA представление [6] по переменным, содержащим атрибуты.

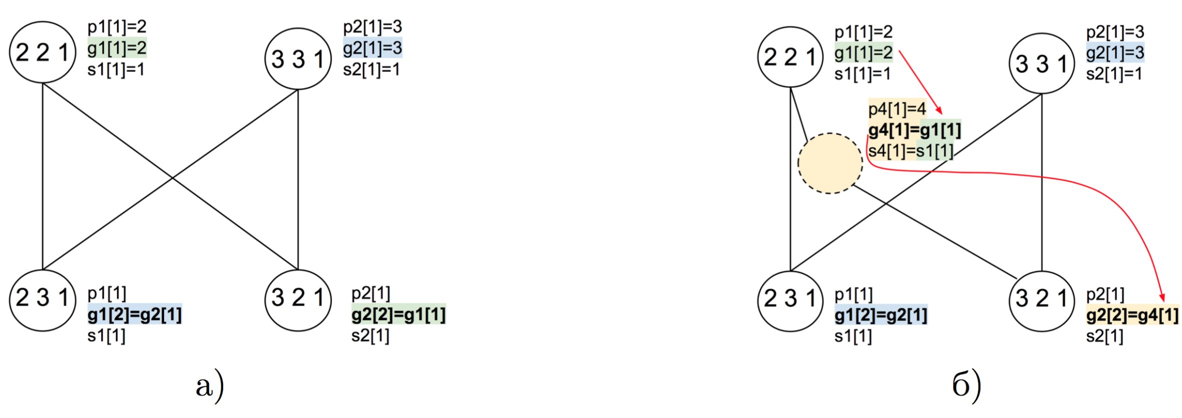


Рис. 1: Внесение поправки, исправляющей аномалию (а) в графе реконструкции введением промежуточной вершины (б)

2. Корректность исправленного алгоритма реконструкции

Для формального доказательства корректности представленного алгоритма в работе производится обоснование удовлетворения получаемых промежуточных представлений формальному критерию корректности, сформулированному ранее [5], то есть выполняются условия теорем:

Теорема 1. *Если T - корректное дерево процессов, то множество его вершин V дополнимо до верхне полурешёточно упорядоченного по зависимостям V^+ : $\big(\forall x, y \in V^+$ $\exists k : \forall n > k, n \leq |K| : attr_k, attr_n \in K, depth(attr_n) < |K| - k\big)$ & $\big(x.attr_n = y.attr_n\big) \Rightarrow \big(x \sqcup y = PCL(x.attr_k)|PCL(y.attr_k)|CL(x.attr_k)\big)$ & $\big(CL(x.attr_k) = CL(y.attr_k)\big)$, где CL, PCL - введённые выше операторы замыкания и предзамыкания на V^+, и единственной неподвижной точкой CL является создатель минимально доминирующего атрибута для $attr_k$.*

Теорема 2. *Дерево процессов T корректно $\iff$ $(\forall u \in V^+ \setminus v_{init}$, V^+ такое, что выполнены условия теоремы о необходимости, и $\forall attr_i \in K \Rightarrow \exists Gen(u.attr_i) : Gen(u.attr_i) \subseteq V^+)$.*

3. Обобщённая оценка роста числа состояний $|V^+|$

Следующим важным моментом исследования являются временные оценки сложности от количества вершин $|V|$ во входном дереве процессов. Покажем, что $|V^+|$ для любых корректных входных деревьев с группами процессов и сессиями - той же степени, что и $|V|$, то есть по размеру входного множества оценка также квадратична, а затем обобщим данный результат на произвольное число атрибутов некоторых типов.

Теорема 3. $\forall G(T) = (V^+, E^+) : T = (V, E)$ *- корректное дерево процессов с атрибутами* $K = \{pid, sid, pgid\} \rightarrow \frac{|V^+|}{|V|} \leq O(1)$.

Для обобщения рассматриваются 4 типа атрибутных зависимостей (Рис. 2):

1. Жестко наследуемые (Hardly Inherited, HI) – в G^{dep} существует цепь от создателя атрибута к наследующему потомку строго по E^+.
2. Устанавливаемые в подобласти (Subset Inherited, SI) -– носитель выставляемого значения, предшествующее состояние процесса и состояние, из контекста которого выполняется системный вызов, лежат в замыкании, определяемом некоторым оператором CL.
3. Мягко наследуемые (Mildly Inherited, MI) – усиление SI.
4. Свободно устанавливаемые в рамках текущего пространства имён.

Сформулируем более общую теорему:

Теорема 4. $\forall G(T) = (V^+, E^+) : T = (V, E)$ *- корректное дерево процессов с атрибутами K:K не содержит MI-атрибутов, а* $|K| \ll |V| \rightarrow \frac{|V^+|}{|V|} \leq O(1)$.

Доказательства данных теорем также приводятся в предложенной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Checkpoint-Restore In Userspace (CRIU) usage scenarios. 2019. https://criu.org/Usage_scenarios

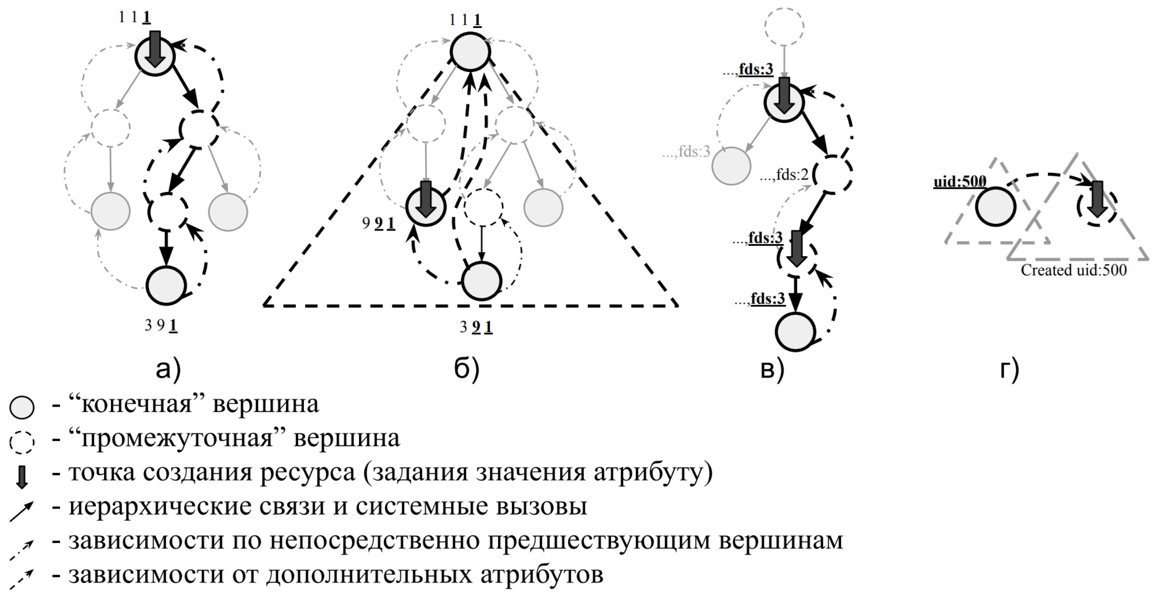


Рис. 2: Типы атрибутных зависимостей: а)строго наследуемые; б)выставляемые в подобласти; в)нестрого наследуемые; г)свободные.

2. Ефанов Н. Н. О некоторых комбинаторных свойствах деревьев процессов LINUX. Чебышевский сборник. 2018;19(2):151-162.

3. Efanov N. N., Emelyanov P. V. Linux Process Tree Reconstruction Using The Attributed Grammar-Based Tree Transformation Model // In Proceedings of the 14th Central & Eastern European Software Engineering Conference in Russia (CEE-SECR’18). 2018. ACM, NY, USA, Article 2, 7 pages.

4. Ефанов Н. Н. О некоторых полурешеточных свойствах состояний процессов Linux // Материалы XVI Международной конференции ’Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории’.2019. С. 165–168.

5. Ефанов Н. Н. Об одном особом случае дерева процессов. Электронный ресурс "Telegra.ph". 2019.
`https://telegra.ph/Ob-odnom-osobom-sluchae-dereva-processov-06-29`

6. Andrew W. Appel. SSA is functional programming // SIGPLAN Not. —1998. — V. 33, N. 4. —P. 17-20.

УДК 51.091

История разработки и внедрения российских криптографических стандартов

А. Б. Лось (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А.Н.Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
e-mail: alos@hse.ru
П. А. Лебедев (Россия, г. Москва)

Московский институт электроники и математики им. А.Н.Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
e-mail: cygnus@michiru.ru
А. Ю. Нестеренко (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А.Н.Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
e-mail: nesterenko_a_y@mail.ru
А. М. Семенов (Россия, г. Москва)
Московский институт электроники и математики им. А.Н.Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
e-mail: semenov_am@tc26.ru

The history of the development and integration of russian cryptographic standards

A. B. Loss (Russian Federation, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE)
e-mail: alos@hse.ru
P. A. Lebedev (Russian Federation, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE)
e-mail: cygnus@michiru.ru
A. Yu. Nesterenko (Russian Federation, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE)
e-mail: nesterenko_a_y@mail.ru
A. M. Semenov (Russian Federation, Moscow)
HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE)
e-mail: semenov_am@tc26.ru

В докладе рассматривается ряд прикладных задач в области алгебры, теории чисел и дискретной математики, возникающих при практической реализации приложений в области криптографической защиты информации. Изложение ведется через призму исторического обзора национальных стандартов и методических рекомендаций Росстандарта России, начиная с момента принятия первого советского стандарта ГОСТ 28147-89, см. [1], и по настоящее время. В заключение приводится сравнительный анализ средств криптографической защиты информации, реализующих национальные стандарты на практике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 28147-89. Государственный стандарт Союза ССР. Системы обработки информации. Защита криптографическая. Алгоритм криптографического преобразования. — Москва: ИПК Изд-во стандартов, 1996. 28 с.

———————————————————————————

УДК 512.552

Обобщения алгоритма RSA на кольца с коммутирующими идеалами

М. Ф. Насрутдинов (Россия, г. Казань)
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета
e-mail: Marat.Nasrutdinov@kpfu.ru
С. Н. Тронин (Россия, г. Казань)
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета
e-mail: Serge.Tronin@kpfu.ru

EXTENSION OF RSA CRYPTOSYSTEMS TO RINGS WITH COMMUTING IDEALS

M. F. Nasrutdinov (Russia, Kazan)
Institute of mathematics and mechanics. N. I. Lobachevsky Kazan (Volga region) Federal University
e-mail: Marat.Nasrutdinov@kpfu.ru
S. N. Tronin (Russia, Kazan)
Institute of mathematics and mechanics. N. I. Lobachevsky Kazan (Volga region) Federal University
e-mail: Serge.Tronin@kpfu.ru

В работе [1] было показано, что можно осуществить известный криптографический протокол RSA, заменив целые числа на достаточно хорошее коммутативное дедекиндово кольцо, а используемые в алгоритме натуральные числа — на идеалы этого кольца. Криптостойкость (безопасность) такого протокола будет зависеть от сложности задачи о разложения идеала дедекиндова кольца в произведение максимальных идеалов. К числу достаточно хороших относятся, в частности, кольца целых алгебраических чисел, и кольца регулярных функций на неприводимых алгебраических кривых над конечными полями. В [1] было показано, что квадратичные кольца целых алгебраических чисел не дают выигрыша в криптостойкости по сравнению в обычным протоколом RSA. Поиск обобщений RSA мотивирован тем, что с появлением квантового компьютера и алгоритма Шора, теоретически позволяющего раскладывать большие натуральные числа на множители за полиномиальное время, классический протокол RSA перестанет быть безопасным. Если же вместо натуральных чисел взять идеалы, которые могут и не быть главными (в дедекиндовых кольцах идеалы порождаются либо одним, либо двумя элементами), то появляется надежда на то, что перенос алгоритм Шора на эту ситуацию окажется достаточно проблематичным.

Пока продолжаются поиски подходящих для приложений примеров коммутативных дедекиндовых колец, имеет смысл разобраться с некоммутативной ситуацией, где проблематичность переноса алгоритма Шора должна быть гораздо выше.

Рассмотрим некоторое кольцо R. Не предполагается ни коммутативности, ни отсутствия делителей нуля. Но, чтобы сузить круг поисков пригодных для приложений примеров, будем предполагать, что R — кольцо с коммутирующими идеалами (см., например, [2, Глава 4]). Таким свойством обладают, в частности, все кольца с односторонними главными идеалами. Для того, чтобы в кольце R можно было осуществить аналог протокола шифрования RSA, необходим следующий набор данных.

1) Идеал I, такой, что группа обратимых элементов факторкольца R/I была конечной. Ее порядок обозначим через $\varphi(I)$. Дополнительно надо предположить, что $\varphi(I) > 2$.

2) Множество $W \subset R$ различных представителей смежных классов R по I. Для каждого $x \in R$ существует ровно один $w \in W$, такой, что $x - w \in I$. Элемент w будем обозначать через $x \pmod I$. Элементы W выступают и как шифруемые, и как зашифрованные сообщения.

На практике должен существовать способ кодирования битовых строк определенной длины элементами W.

3) Выбирается натуральное e, взаимно простое с $\varphi(I)$, так что $ed = 1+\varphi(I)t$, $1 < e, d < \varphi(I)$. Число e известно тому, кто шифрует (открытый ключ), число d известно только тому, кто расшифровывает (секретный ключ).

Теперь шифрование $m \in W$ заключается в вычислении $c = m^e \pmod I$, а расшифрование — в вычислении $c^d \pmod I$.

Для того, чтобы эти операции имели смысл, необходимо выполнение равенства $m^{ed} = m \pmod I$ для каждого $m \in W$, а фактически и для каждого $m \in R$. Далеко не все идеалы обладают таким свойством.

Назовем I RSA-*идеалом*, если группа обратимых элементов R/I конечна, имеет порядок больше двух, и существуют такие e, d, описанные выше, что для каждого $x \in R$ выполнено включение $x^{ed} - x \in I$. Отметим, что из этого условия следует коммутативность R/I.

Нахождение секретного ключа d по остальным данным (которые не являются секретными) должно быть вычислительно сложной задачей. Это означает, что сложной задачей должно быть нахождение порядка группы обратимых элементов R/I.

Теорема. *Идеал I в кольце R с коммутирующими идеалами является RSA-идеалом в том случае, если он представим в виде произведения попарно взаимно-простых идеалов $I = I_0 I_1 \dots I_k$, где I_0 может отсутствовать, а если присутствует, то R/I_0 — булево кольцо , а идеалы $I_1, \dots, I_k$ являются максимальными, и факторкольца R/I_j есть конечные поля.*

Обратно, если I есть RSA-идеал, и R/I — конечное кольцо, то I можно представить в указанном выше виде, но R/I_0 должно быть кольцом с единственным обратимым элементом.

Следствие. *В определении RSA-идеала при конечном R/I допустимо любое число e, взаимно простое с $\varphi(I)$.*

Из приведенного в теореме описания RSA-идеалов следует, что криптостойкость гипотетического протокола шифрования, в котором используется кольцо с вышеописанными характеристиками, и RSA-идеал I, будет зависеть как от сложности вычисления $\varphi(I)$, так и от сложности задачи о разложении этого идеала в произведение идеалов указанного типа. Однозначность такого разложения не предполагается. RSA-идеал I будет играть роль одного из открытых ключей.

Данный результат служит указанием на то, в каком направлении можно искать некоммутативные кольца, пригодные для применения в практической криптографии (если такие кольца, помимо $\mathbb{Z}$, вообще существуют). Кольцо гурвицевых кватернионов, если исходить из замены натуральных чисел на идеалы, не дает никаких выгод по сравнению с $\mathbb{Z}$. Это следует из описания идеалов этого кольца [3, Теорема 211, с. 353]. Однако в данном случае имеется достаточно содержательное описание простых элементов, не связанное напрямую со строением идеалов [4, Глава 5], так что полностью исключать из рассмотрения гурвицевы кватернионы пока не стоит. Другим достаточно изученным классом колец с коммутирующими идеалами являются кольца косых многочленов [5]. Наконец, представляет интерес выяснить, какие из конечных некоммутативных колец могут оказаться пригодными для использования в кольцевых аналогах криптосистемы RSA. Для начала можно поставить вопрос о характеризации конечных некоммутативных колец с коммутирующими идеалами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petukhova K. A., Tronin S. N. RSA Cryptosystem for Dedekind Rings // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. Vol. 37. № 3. P. 284–287.

2. Туганбаев А. А. Мультипликационные модули и идеалы: монография. М.: ФЛИНТА, 2012. 157 с.
3. Redei L. Algebra. Vol. 1. Pergamon Press Ltd., Oxford, 1967. xviii+823 pp.
4. Конвей Д. Х., Смит Д. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. М.: МЦНМО, 2009. 184 с.
5. Goodearl K. R., Letzter E. S. Prime Ideals in Skew and q-Skew Polynomoal Rings. Memoirs of the AMS, 521, 1994. 103 pp.

УДК 519.14+512.542

Об автоморфизмах простого порядка сильно регулярного графа с параметрами (176, 25, 0, 4)

В. В. Носов (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государствнный университет
e-mail: puncker1978@mail.ru

On automorphisms of prime order of strongly regular graph with parametrs (176, 25, 0, 4)

V. V. Nosov (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: puncker1978@mail.ru

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

В данной работе изучаются автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(176, 25, 0, 4)$. Кроме обычных теоретико-графовых методов, применявшихся в работах [1], [3] — [6] в данной статье используется метод Дональда Хигмена, позволяющий уточнить возможные порядки автоморфизмов и строение подграфов их неподвижных точек с помощью теории характеров конечных групп.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(176, 25, 0, 4)$, $G = Aut(\Gamma)$, g – *элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Delta = Fix(G)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 2$ *и либо* Δ – *пустой граф, либо ребро;*
(2) $p = 5$ *и* Δ – *одновершинный граф;*
(3) $p = 3$ *или* $p = 7$ *и* Δ – *полный двудольный граф на 8 вершинах;*
(4) $p = 11$ *и* Δ – *пустой граф.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Махнев А.А., Падучих Д.В. Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика 2001, т. 40, №2, 125–134.

2. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

3. Махнев А.А., Носов В.В. Об автоморфизмах графов с $\lambda = 0, \mu = 2$.//Математический сборник. Том 195, №3, 2004, С. 47-68.

4. Носов В.В. Об автоморфизмах графа с параметрами $(704, 37, 0, 2)$ //Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 36-й Регион. молод. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С. 55-60.

5. А. А. Махнев, В. В. Носов, Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 0$ и $\mu = 3$// Алгебра и анализ, 2009, том 21, выпуск 5, 138–154.

6. Носов В. В. Об Автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (1276,50,0,2)// Чебышевский сборник. 2016. Том 17, №3. С. 178-185.

————————————————————————————

Geometrical and Randomized-Algorithms Optimization for Cryptographic Applications

Romil Rawat (INDIA)
Samrat Ashok Technological Institute
e-mail: rawat.romil@gmail.com

Abstract

In the infancy of Cryptography Mono-alphabetic Substitution Ciphers were considered good enough to baffle any potential attackers but with the advancements in technology & the upsurge of computing power those methods have become trivial. Even the very complex methods of encryption are vulnerable to the brute force attacks of contemporary computers and with Quantum computing on the horizon even the current state of the art cryptosystems are at risk. Lots of research is being done and every possible field is being explored in order to create that elusive unbreakable cipher. Among other subjects, Geometry is also being applied and various ciphers based on the properties of different geometrical figures have been developed. This paper ventures to investigate the recent research applying the concept of geometry to boost the caliber of pre-existing cryptosystems enhance the understanding of the subject.

————————————————————————————

УДК 519.719.2+004.056.55

Линейный и разностный криптоанализ AES-подобных шифров

В. А. Федченко (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: vladislav.a.fedchenko@gmail.com

Linear and differential cryptanalysis of AES-like ciphers

V. A. Fedchenko (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: vladislav.a.fedchenko@gmail.com

Блочный алгоритм шифрования AES [8], разработанный около 20 лет назад, является одним из наиболее распространенных способов обеспечения конфиденциальности информации в современных телекоммуникационных сетях. Под его влиянием за прошедшее время были созданы многие близкие по структуре блочные алгоритмы шифрования, называемые AES-подобными. Эти алгоритмы реализуют параметризированные дискретные биективные шифрпреобразования специального вида, действующие на булевых векторах (блоках) фиксированного размера.

Для определения AES-подобных алгоритмов шифрования можно использовать понятие XSLP-схемы [2]. Пусть V_n — векторное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ над полем GF(2), элементы которого будем называть n-векторами. Шифрпреобразование $F : V_n \to V_n$, задаваемое XSLP-схемой с размером блока $n = mk^2$, $m, k \in \mathbb{N}$, представляет собой суперпозицию $r \in \mathbb{N}$ однотипных преобразований (итераций) $R_i : V_n \to V_n$, $i = 1, 2, \dots, r$. Для удобства определения итераций преобразуемый блок может логически разбиваться на подряд идущие m-векторы в количестве k^2 или на mk-векторы в количестве k. В ходе каждой итерации R_i последовательно применяются биективные преобразования X_i, S_i, L_i и $\widehat{P}_i$, а именно покоординатное сложение входного блока с ключом $z_i \in V_n$, замена m-векторов с помощью локальных биективных преобразований (подстановок) $\pi_{i,j} : V_m \to V_m$, умножение mk-векторов на обратимые матрицы $B_{i,j_1} \in \mathrm{GL}(mk, 2)$, перестановка m-векторов в соответствии с подстановкой $P_i \in S_{k^2}$, где $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 0, 1, \dots, k^2 - 1$, $j_1 = 0, 1, \dots, k - 1$. Типичными значениями являются $m = 8$ и $k = 4$. Набор векторов $z_1, z_2, \dots, z_r$ обычно выступает в качестве ключа, то есть изменяемого параметра шифрпреобразования.

Линейный [10] и разностный [6] статистические методы криптографического анализа утвердились в качестве универсальных и математически развитых инструментов для исследования свойств алгоритмов шифрования, поэтому являются необходимыми в процессе оценки стойкости. Известная двойственность [1] позволяет изучать оба метода с единых позиций. Так, основной проблемой линейного метода, в частности, применительно к шифрпреобразованиям (или их частям) вида $F : V_n \to V_n$ является нахождение линейного вероятностного соотношения $x \cdot L' \simeq F(x) \cdot L''$, задаваемого парой вектор-столбцов $L', L'' \in V_n^*$, которое для значительной доли ключей имеет достаточно большое значение модуля преобладания $\delta^F_{L',L''} = 2\,\mathsf{P}\{x \cdot L' = F(x) \cdot L''\} - 1 \in [-1, 1]$, где x выбирается из V_n случайно и равновероятно. При наличии такого соотношения появляется возможность статистическими методами отличить выборку пар n-векторов, являющихся аргументами и значениями шифрпреобразования (или его части), даже при неизвестном ключе. Это свойство можно эксплуатировать для восстановления ключа шифрперобразования.

Для нахождения линейных (разностных) вероятностных соотношений на практике используют системы согласованных локальных линейных (разностных) вероятностных соотношений [1], составленных для относительно небольших нелинейных узлов (S-блоков) шифрпреобразования. Для XSLP-схемы в качестве таковых естественно рассматривать локальные подстановки на V_m. В ходе криптографического анализа на первом этапе решается задача минимизации количества S-блоков, участвующих в системе, с учетом требований согласованности, но без привязки к конкретному заданию этих узлов. Указанное минимальное количество «активных» S-блоков называется линейным (разностным) показателем рассеивания линейной среды шифрпреобразования. Несмотря на имеющиеся недостатки [3], показатели рассеивания линейной среды и связанные с ними характеристики широко используются в криптографическом синтезе для обоснования стойкости алгоритмов шифрования.

Нахождение показателей рассеивания линейной среды представляет интерес для классов XSLP-схем (и их представителей) с различными локальными матрицами, перестановками, количеством итераций. Для решения этой задачи можно применять алгоритмические методы, основанные на опробовании [7, 9]. Однако подобные методы часто имеют неприемлемо высокие требования по времени и памяти. Поэтому предпочтительно получать теоретические оценки, выражающие зависимость показателей рассеивания линейной среды от параметров XSLP-схемы. Такие оценки были получены в работе [2], а затем обобщены в работе [4]. Для этого была определена теоретико-графовая модель согласованных систем локальных линейных (разностных) вероятностных соотношений (см. рис. 1). Вершины графов соответствуют локальным матрицам, а ребра — «активным» S-блокам. Принципиальное ограничение состоит в том, что степень вершины не может быть меньше линейного (разностного) коэффициента рассеивания [2] соответствующей локальной матрицы.

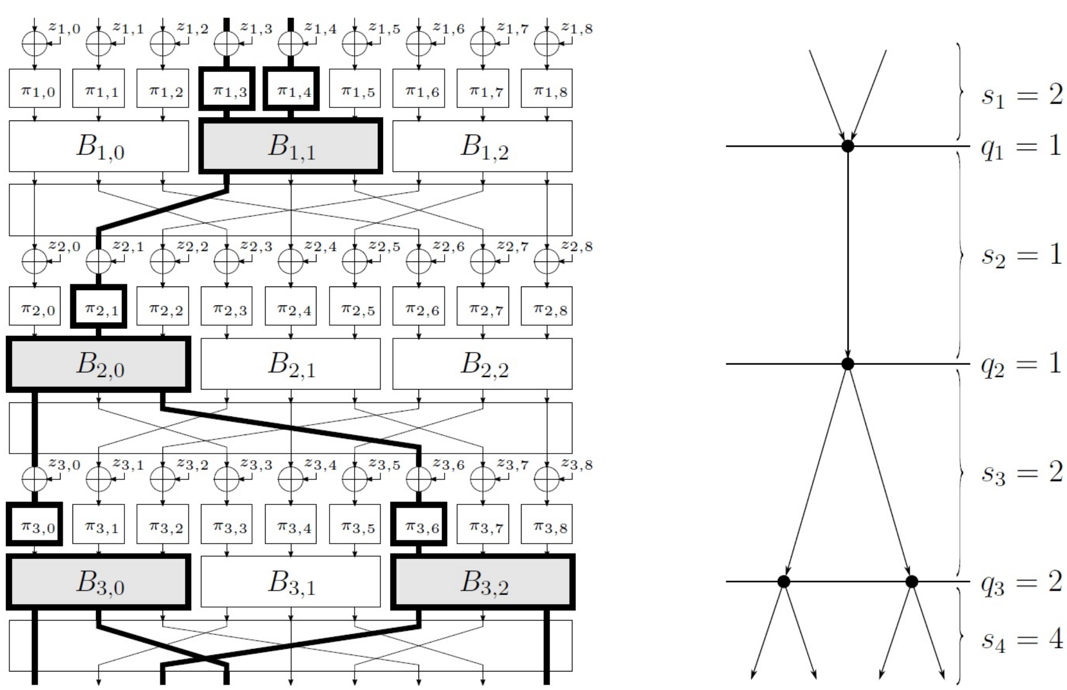


Рис. 1: Усеченное предсталение и граф одной согласованной системы локальных линейных (разностных) вероятностных соотношений для $r = 3$ итераций XSLP-схемы [5].

Теорема 1. *Пусть в $r \in \mathbb{N}$ итерациях XSLP-схемы подстановки P_i являются равномерно рассеивающими (см. [2]), а локальные матрицы B_{i,j_1} имеют фиксированные линейный и разностный коэффициенты рассеивания ρ_L и ρ_D соответственно, $i = 1, 2, \ldots, r$,*

$j_1 = 0, 1, \ldots, k-1$. *Тогда для линейного* θ_L *и разностного* θ_D *показателей рассеивания линейно среды справедливы оценки снизу*

$$\theta_L \geqslant S_{\min}(\rho_L, r) \quad \textit{и} \quad \theta_D \geqslant S_{\min}(\rho_D, r), \tag{1}$$

где

$$S_{\min}(\rho, r) = \begin{cases} 1, & \textit{если } r = 1, \\ \rho, & \textit{если } r = 2, \\ 2\rho - 1, & \textit{если } r = 3, \\ \rho^2, & \textit{если } r = 4, \\ S_{\min}(\rho, r-4) + \rho^2, & \textit{если } r > 4. \end{cases} \tag{2}$$

В докладе также будут представлены последние результаты по перечислению согласованных систем локальных линейных (разностных) вероятностных соотношений с минимальным количеством «активных» S-блоков [5], алгоритмы нахождения коэффициентов рассеивания матриц и уточнения показателей рассеивания линейной среды, предложены новые рассеивающие характеристики для преобразований общего вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев Ф. М. Двойственность разностного и линейного методов в криптографии // Математические вопросы криптографии. 2014. Том 5 № 3. С. 35-47.

2. Малышев Ф. М., Трифонов Д. И. Рассеивающие свойства XSLP-шифров // Математические вопросы криптографии. 2016. Том 7 № 3. С. 47-60.

3. Малышев Ф. М., Тришин А. Е. Линейный и разностный методы в криптографии (другой взгляд) // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 42-45.

4. Федченко В. А. Показатели рассеивания линейной среды AES-подобных алгоритмов шифрования // Математические вопросы криптографии. 2017. Том 8 № 3. С. 109-126.

5. Федченко В. А. Минимальные согласованные системы локальных вероятностных соотношений в AES-подобных алгоритмах шифрования // Математические вопросы криптографии. 2018. Том 9 № 3. С. 127-142.

6. Biham E., Shamir A. Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems // Lecture Notes in Computer Science. 1991. Vol. 537. P. 2-21.

7. Biryukov A., Nikolic I. Automatic search for related-key differential characteristics in byte-oriented block ciphers: applications to AES, Camellia, Khazad and Others // Lecture Notes in Computer Science. 2010. Vol. 6110. P. 322-344.

8. Daemen J., Rijmen V. The Design of Rijndael: AES — The Advanced Encryption Standard. — Heidelberg etc.: Springer, 2002. 238 p.

9. Fouque P.-A., Jean J., Peyrin T. Structural evaluation of AES and chosen-key distinguisher of 9-round AES-128 // Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8042. P. 183-203.

10. Matsui M. Linear cryptanalysis method for DES cipher // Lecture Notes in Computer Science. 1994. Vol. 765. P. 386-397.

—————————————————————————————————

Секция 5. Аналитическая теория чисел

УДК 511.3

Об исключительном множестве суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: iallakov@mail.ru

On the exceptional set of the sum of two primes from an arithmetic progression

I. Allakov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: iallakov@mail.ru

Пусть X – достаточно большое вещественное число, p – простое число, ν-натуральное число, $E_D(X)$ – число четных чисел $n \leq X$, которые «возможно» непредставимы в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии с разностью D.

В [1] автором доказано, что если $D = p^v$ и $D << ln^A X$, тогда все чётные числа $n \leq X$, за исключением не более чем $E_D(X) << \frac{1}{\varphi(D)} X exp(-c_1\sqrt{lnX})$ значений из них, представимые в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии $p_1 \equiv l_1(modD)$, $p_2 \equiv l_2(modD)$ где $(l_1, D) = 1$ и $(l_2, D) = 1$.

В настоящей работе доказывается, если $D << X_1^\delta$, тогда все чётные числа $n \leq X$, за исключением не более чем $E_D(X) << \frac{1}{\varphi(D)} X^{1-\delta}$, значений из них, представимые в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии $p_1 \equiv l_1(modD)$, $p_2 \equiv l_2(modD)$ где $(l_1, D) = 1$ и $(l_2, D) = 1$. Здесь $0 < \delta_1 < \delta < 1-$ достаточно малые действительные числа, $\varphi-$ функция Эйлера.

Полученный результат является обобщением результата Г. Монтгомери и Р. Вона [2] в арифметическую прогрессию, а также улучшением соответствующего результата автора [1].

В доказательстве используется комбинированная схема работ [1]-[4]. Приведем схему доказательство основного результата. Для этого сначала введем обозначения: Пусть χ_m- характер Дирихле по модулю m и $\psi(x, \chi) = \sum\limits_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n)$; δ_χ равен 1 или 0, смотря тому $\chi_m = \chi_m^\circ-$ главный характер или $\chi_m \neq \chi_m^\circ$.

Положим $P = X^{25\delta}$, $Q = XP^{-1}$ и сегмент $[Q^{-1}, 1 + Q^{-1}]$ делим на основные и дополнительные интервалы. При $a \leq q \leq P$ и $(a, q) = 1$ через $M(q, a)$ обозначим закрытий интервал $[aq^{-1} - (qQ)^{-1}, aq^{-1} + (qQ)^{-1}]$. Ясно, что основные интервалы не пересекаются и содержатся в $[Q_{-1}, 1 + Q^{-1}]$. Через $\Re-$ обозначим множество тех точек α, $Q^{-1} < \alpha < 1 + Q^{-1}$, которые не содержатся ни в каком $M(q, a)$. В дальнейшем объединение всех $M(q, a)$ назовем большой дугой и обозначим $\mathfrak{M}$, а $\Re$ малой дугой.

Введем функции

$$S_i(X, \alpha) = \sum_{\chi_D} \overline{\chi}_D(l_i) \sum_{2 < p_i \leq X} \chi_D(p_i) lnp_i e(p_i\alpha), \quad i = 1, 2;$$

$$g_u^{(i)}(X, \alpha) = \sum_{2 < n \leq X} n_i^{u-1} e(n_i\alpha), \quad i = 1, 2;$$

$$V_i(X,\alpha,q,a)=R(q)\frac{\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}e(\frac{a}{q}N_1l_i)g_1^{(i)}(X,\eta),\quad i=1,2,$$

где $\alpha=aq^{-1}+\eta$, $d=(q,D)$, $N_1=gqd^{-1}(modq)$ (N_1- наименьший положительный вычет числа gqd^{-1} по $modq$), g - по $modd$ определяется из $gqd^{-1}\equiv 1(modd)$; $R(q)=1$, если $(qd^{-1},D)=1$ и $R(q)=0$ в противном случае.

Для удобства обозначим

$$S=S(X,\alpha)=S_1(X,\alpha)\cdot S_2(X,\alpha),$$

$$V=V(X,\alpha,q,a)=V_1(X,\alpha,q,a)\cdot V_2(X,\alpha,q,a).$$

Тогда имеем

$$S(X,\alpha)=\varphi^2(D)\sum_{2<n\leq 2X}R(X,n)e(\alpha n),$$

где

$$R(X,n)=\sum_{\substack{n=p_1+p_2,P<p_1,p_2\leq X\\ p_1\equiv l_1,p_2\equiv l_2(modD)}}lnp_1lnp_2,$$

и

$$V=R(q)\frac{\mu^2(\frac{q}{d})}{\varphi^2(\frac{q}{d})}\sum_{P<n\leq 2X}J(X,n)e(\frac{a}{q}(N_1(l_1+l_2-n)))e(\alpha n),$$

где

$$J(X,n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2,\\ P<n_1,n_2\leq X}}1.$$

Очевидно, что, если $2<n\leq X$, то $\frac{n}{2}<J(X,n)<<X$. Если $\frac{1}{2}\leq n\leq 1$, то суммирование по частям дает

$$g_u^{(i)}(X,\alpha)<<min(\parallel\alpha\parallel^{-u};X^u),$$

где $\parallel\alpha\parallel$ $-$расстояние от до ближайшего целого числа.

$R(X,n)$ представим в виде суммы двух интегралов соответствие на разбиению сегмента $[Q^{-1},1+Q^{-1}]$, то есть

$$R(X,n)=R_1(X,n)+R_2(X,n),$$

где

$$R_1(X,n)=\int\limits_{\mathfrak{M}}S(X,\alpha)e(-n\alpha)d\alpha,$$

$$R_2(X,n)=\int\limits_{\mathfrak{R}}S(X,\alpha)e(-n\alpha)d\alpha.$$

Далее, используя свойство суммы Рамануджана [2], [5] доказывается, что

$$R_1(X,n)>\mid R_2(X,n)\mid$$

для всех чётных чисел $n\leq X$, за исключением не более чем

$$E_D(X)<<\frac{1}{\varphi(D)}X^{1-\delta}$$

значений из них. Отсюда следует выше сформулированный основной результат работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков И. О представление чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". - 2000.- № 8(459). -с.3-15.

2. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta arithm. - 1975 v.27. p. 353-370.

3. Vaughan R.C. On Goldbach's problem // Acta arithm. -1972. -№1(22). - p.21-48.

4. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова // Вестник ЛГУ. - 1961. - №13. - с. 11-27.

5. Montgomery H.L., Vaughan R.C. Multiplicative number theory I: Classical theory. Cambridge University Press. 2006, 571 p.

____

УДК 511.32

Теоремы о простых геодезических

О. Г. Балканова(Швеция, Гётеборг)
Университет Гётеборга
e-mail: olgabalkanova@gmail.com

Prime geodesic theorems

Olga Balkanova (Sweden, Gothenburg)
University of Gothenburg
e-mail: olgabalkanova@gmail.com

Prime geodesic theorem for a hyperbolic manifold M provides an asymptotic formula for the number of primitive closed geodesics on M of length at most X as X grows. Similarly to the prime number theorem, the major open problem is to prove the best possible estimate for the error term. I will describe the most recent results in this direction for M being the modular surface and the Picard manifold.

____

УДК 511.3

Распределение значений мультипликативных функций в классах вычетов

Л. А. Громаковская (Россия, г. Петрозаводск)
Петрозаводский государственный университет
e-mail: gromak_la@mail.ru
Б. М. Широков (Россия, г. Петрозаводск)
Петрозаводский государственный университет
e-mail: bmshir@mail.ru

Distribution of values of multiplicative functions in residue classes

L. A. Gromakovskay (Russia, Petrozavodsk)
Petrozavodsk state University
e-mail: gromak_la@mail.ru
B. M. Shirokov (Russia, Petrozavodsk)
Petrozavodsk state University
e-mail: bmshir@mail.ru

Обозначения. N, m, n, k, r — натуральные числа; p — простое число; $(m_1, \dots, m_k)$ — наибольший общий делитель указанных чисел или элемент прямого произведения; $G(N)$ — группа вычетов, взаимно простых с N; $\varphi(n)$ — функция Эйлера; $J(n)$ — функция Жордана, равная количеству несравнимых по модулю n примитивных по этому же модудю пар (k,m); пара (k,m) называется примитивной по модулю n, если $(k,m,n)=1$; $S(f,x,r)$ — количество чисел n, не превосходящих действительного числа x, для которых целочисленная арифметическая функция $f(n) \equiv r \pmod N$; χ, χ_0 — характер и главный характер Дирихле по модулю N.

Изучение равномерного распределения целочисленных последовательностей в классах вычетов берет начало в работе И. Нивена [1]. Для мультипликативных целочисленных функций В. Наркевич в работе [2] рассмотрел равномерное распределние их значений в классах вычетов, взаимно простых с модулем. Такое распределение он назвал слабо равномерным распределением. Ряд работ различных авторов былb посвященs слабо равномерному распределению для различных мультипликативных функций $f(n)$, в которых приводятся критерии такого распределения и асимптотичесие формулы для $S(f,x,r)$. В этих работах асимптотические формулы содержат только главные члены асимптотики.

Например, в работе В. Наркевича [2] для функции Эйлера $\varphi(n)$ приводится следующий результат.

Теорема. (В. Наркевич) *Функция $\varphi(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда когда $(N,6)=1$. Если N удовлетворяет этому условию, то с некоторой постоянной C при $x \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$S(\varphi,x,r) \sim C\frac{x}{(\ln x)^{1-\alpha}}, \qquad \alpha = \prod_{p|N}\frac{p-2}{p-1}. \tag{1}$$

В нашем докладе приводятся условия слабо равномерного распределения функции Жордана $J(n)$ и асимптотический ряд для $S(J(n),x,r)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $J(n)$ была слабо равномерно распределена по модулю натурального числа N необходимо и достаточно, чтобы $(N,6)=1$.*

Теорема 2. *Если $(N,6)=1$, то для любого действительного числа $x>3$ и для любого натурального числа n справедливо равенство*

$$S(J(n),x,r) = \frac{x}{(\ln x)^{1-\lambda}}P_n\Big(\frac{1}{\ln x}\Big) + \sum_{\chi\neq\chi_0}\frac{x}{(\ln x)^{1-\mu(\chi)}}Q_n\Big(\chi,\frac{1}{\ln x}\Big) + O\Big(\frac{x\ln^\lambda x}{x^{n+1}}\Big),$$

где

$$\lambda = \prod_{p|M}\frac{p-3}{p-1}, \quad -1<\mu(\chi)<\lambda,$$

$P_n(t)$ и $Q_n(\chi,t)$ — многочлены степени $n-1$.

Аналогичная формула получена и для функции $\varphi(n)$ с показателем α вместо λ, которая усиливает результат (1) В. Наркевича.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Niven I. Uniform distribution of sequences of integers // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 98. P. 52 – 61.

2. Narkievicz W. On distribution of values of multiplicative functions in residue classes // Acta Arithm. 1967. V.12. No 3. P. 269 – 279.

УДК 511.3

О преобразованиях Фурье в арифметических функциях

Гияси Азар (Иран, г. Тегеран)
Кафедра математики, факультет математики и информатики, Университет Алламеха Табатабаи
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

On the Fourier transformations of arithmetical functions

Ghyasi Azar (Iran, Tehran)
Department of Mathematics, Faculty of mathematics and Computer Science, Allameh Tabataba'i University
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Аннотация

Найдено преобразование Фурье одного разрывного множителя с остатком и для последнего получена оценка его преобразования Фурье.

The Fourier transformation of a discontinuous factor with the remainder is found and for the last one the estimation of its Fourier transformation is obtained.

Рассмотрим интеграл Дирихле вида

$$D(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi xy)}{y}dy = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

В настоящей работе будет дано еще одно применение этого интеграла $D(x)$ (см., например, [1]). Найденные ниже теоремы 1 и 2 являются полезным инструментом в диофантовом анализе.

Пусть $\Delta > 0$ — вещественное число, и пусть $h_\Delta(x)$ — индикаторная функция промежутка $[-\Delta, \Delta]$, т.е.

$$h_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \Delta, \\ 1/2, & |x| = \Delta, \\ 0, & |x| > \Delta. \end{cases}$$

Тогда находим

$$h_\Delta(x) = \frac{1}{2}(D(x+\Delta) - D(x-\Delta)).$$

Воспользовавшись формулой для интеграла Дирихле $D(x)$, получим

$$h_\Delta(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\Delta y)}{y}\cos(2\pi xy)dy.$$

Теорема 1. ПусТь $T\Delta \geq 1$. Тог да имеет

$$h_\Delta(x) = A(x,T) + R(x,T),$$

где

$$A(x,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(2\pi\Delta y)}{y}\cos(2\pi ixy)dy = \frac{1}{2}(D_T(x+\Delta) - D_T(x-\Delta)),$$

$$D_T(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(2\pi uy)}{y}dy, \qquad |R(x,T)| \leq \sigma(x,T) = \frac{8}{\sqrt{1+T^2(\Delta-|x|)^2}}$$

Теорема 2. При $T\Delta \geq 1$ имеет место формула

$$\sigma(x,T) = \frac{8}{\sqrt{1+T^2(\Delta-|x|)^2}} = \int_0^\infty f(y)\cos(2\pi xy)dy,$$

причем для $y \geq 0$ справедливо неравенство

$$|f(y)| \leq \frac{1+\ln T}{T}e^{-y/T}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Г. И., Садовничий, В. А., Чубариков, В. Н. Лекции по математическому ана лизу, 6-е изд. – М.: Дрофа, 2008, 640 с.

———————————————————————————

УДК 511.32

Об одной задаче, связанной с функцией Чебышёва

Е. И. Деза (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Л. В. Варухина (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: lidadgemma@mail.ru

On a problem connected with the Chebushev function

E. I. Deza (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
L. V. Varukhina (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: lidadgemma@mail.ru

Исследование поведения рядов Дирихле $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ и их сумматорных функций $\Phi(x) = \sum_{n\leq x} a_n$ является центральной задачей многих проблем аналитической теории чисел. Наиболее известным рядом Дирихле является дзета-функция Римана, при $\Re s > 1$ определяемая равенством $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

Ее логарифмическая производная $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ при $\Re s > 1$ представима в виде $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$. Здесь $\Lambda(n)$ - функция Мангольдта: $\Lambda(n) = \log p$, если $n = p^k$, где $p \in P$, $k \in N$, и $\Lambda(n) = 0$ в остальных случаях.

Функция Чебышева $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$ представляет собой сумматорную функцию коэффициентов ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, соответствующего логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции. Она связана со многими классическими задачами теории чисел, например, с асимптотическим законом распределения простых чисел. [1]

В частности, хорошо известно([1]) представление функции $\psi(x)$ по нулям дзета-функции:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im \rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \le T \le x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ - *нетривиальные нули* дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \Re s < 1$.

Аналогичные представления, связанные с нетривиальными нулями дзета-функции Римана, можно получить и для арифметических функций, родственных функции Чебышева. [2] Нами рассмотрены новые представления такого рода. В частности, уточнен остаточный член в представлении по нулям дзета-функции Римана функции $\psi_1(x) = \sum_{n \le x}(x - n)\Lambda(n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А.А. Введение в аналитическую теорию чисел. Москва: Наука, 1983.

2. Деза Е.И., Варухина Л.В. Вопросы суммирования арифметических функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, вып. 2. С. 319 - 333.

УДК 511

О среднем числе шагов в k-арном алгоритме Сорренсона с правым сдвигом

Д. А. Долгов (Россия, г. Казань)
Казанский федеральный университет
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

The Mean Number of Steps in the Sorenson's right shift k-ary gcd

D. A. Dolgov (Russia, Kazan)
Kazan Federal University
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

К-арный алгоритм - один из наиболее быстрых алгоритмов вычисления НОД натуральных чисел [1]. Пусть u, v - два нечетных натуральных числа, $\gcd(u, v) = 1$. Необходимо найти ненулевые коэффициенты x, y, такие что выполняется $xu + yv \;= 0 \mod k$ для некоторого фиксированного целого k, $gcd(u, k) = gcd(v, k) = 1$. Основной шаг любого к-арного алгоритма это $\alpha \gcd(u, v) = \gcd(\min(u, v), (xu + yv)/k)$. Будем считать, что алгоритм не накапливает побочных множителей, т.е выбираются такие коэффициенты x, y, что $\alpha = 1$.

Классическому алгоритму Евклида соответствует разложение числа $\frac{u}{v}$ в стандартную цепную дробь

$$\frac{u}{v} = t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{t_h}}} = (t_1; t_2, t_3, \cdots t_h) \tag{1}$$

длины $h = h(u/v)$, в которой t_1, ..., t_h – натуральные числа и $t_i \geqslant 2$ при $i \geqslant 1$.

К-арный алгоритм ведет к разложению числа $\frac{u}{v}$ в к-арную цепную дробь

$$a_1 + \cfrac{2^{b_1}k^{c_1}}{a_2 + \cfrac{2^{b_2}k^{c_2}}{\ddots + \cfrac{2^{b_{n-1}}k^{c_{n-1}}}{a_n}}} = \langle (a_1, b_1, c_1); (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \cdots (a_n, b_n, c_n) \rangle \tag{2}$$

длины n, в которой a_2, ..., a_n – ненулевые рациональные числа (a_1 — рациональное число), $b_i \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, $c_i \in \mathbb{Z}^{>0}$, $i \geqslant 1$. Если на каждом шаге фиксировать один и тот же коэффициент к-арной редукции в качестве ± 1, то a_1, ..., a_n будут целыми числами. Обозначим числитель к-арной цепной дроби (континуант) как $\left[(\frac{y_1}{x_1}, b_1, c_1), (\frac{y_2}{x_2}, b_2, c_2), \cdots (\frac{y_n}{x_n}, b_n, c_n) \right]$ или $[g_1, ..., g_n]$, где $g_n = \left(\frac{y_n}{x_n}, b_n, c_n \right)$. Конкретной дроби могут удовлетворять несколько различных к-арных цепных дробей. Согласно лемме Соренсона, существуют коэффициенты x, y: $1 \leqslant |x|$, $|y| \leqslant \left[\sqrt{k} \right]$. Определим множество S:

$$S(u, v, k) = \left\{ [g_{1n}, ..., g_{mn}] : [g_{1n}, ..., g_{mn}] = u, g_{ij} = \left(\frac{y_{ij}}{x_{ij}}, b_{ij}, c_{ij} \right), 1 \leqslant |x_{ij}|, |y_{ij}| \leqslant \lfloor \sqrt{k} \rfloor \right\}$$

Множество XY определяет множество коэффициентов x, y, которые участвуют в разложении в конкретную к-арную цепную дробь:

$$XY(u, v, k) = \left\{ \{ (x_{ij}, y_{ij}) \} : [g_{1n}, ..., g_{mn}] \in S(u, v, k), g_{ij} = \left(\frac{y_{ij}}{x_{ij}}, b_{ij}, c_{ij} \right) \right\}$$

Для к-арных цепных дробей справедливы аналогичные свойства (предложение 1), как и для обычных цепных дробей [2]: $[\ ] = 1$, $[g_1] = y_1$, $[g_1, g_2] = y_1 y_2 + 2^{b_1} k^{c_1} x_1 x_2$.

Предложение 1. *Пусть* $\frac{u}{v} = \langle g_1; g_2, g_3, \cdots g_n \rangle$, $n \geqslant 3$, $m \geqslant 1$, *тогда*

1. $[g_1, g_2, \cdots g_n] = y_1 [g_2, \cdots g_n] + 2^{b_1} k^{c_1} x_1 x_2 [g_3, \cdots g_n]$.
2. *Если* $\frac{u}{v} \geqslant 1$, *то* $\langle g_1; g_2, g_3, \cdots g_n \rangle = \frac{[g_1; g_2, g_3, \cdots g_n]}{x_1 [g_2, g_3, \cdots g_n]}$, *иначе* $\langle g_1; g_2, g_3, \cdots g_n \rangle = \frac{x_1 [g_2, g_3, \cdots g_n]}{[g_1; g_2, g_3, \cdots g_n]}$.
3. $[g_1, ..., g_n] = [g_1, ..., g_m] [g_{m+1}, ..., g_n] + 2^{b_m} k^{c_m} x_m x_{m+1} [g_1, ..., g_{m-1}] [g_{m+2}, ..., g_n]$.
4. $[g_1, ..., g_n] = [g_n, ..., g_1]$, *если* $b_i = b_j$, $c_i = c_j$ *при* $i \neq j$.

Можно смотреть на к-арные цепные дроби с точки зрения матриц. Произведения соответствующих матриц дадут нам к-арные цепные дроби $n - 1$ и n порядка в качестве результата.

Лемма 1. *Пусть* $\frac{u}{v} = \langle g_1, g_2, \cdots g_n \rangle$, $\frac{u}{v} < 1$, $u_i x_i = v_i y_i + k v_{i+1}$, $u_1 = u$, $v_1 = v$, $u_{i+1} = v_i x_i$, $M = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2^{b_i} k^{c_i} & y_i / x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$, x_i, $y_i \in \mathbb{Z}^{\neq 0}$, u, v, k, n, $c_i \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathbb{Z}^{>0}$. *Тогда,* $\frac{P}{Q} = \langle g_1, g_2, \cdots g_{n-1} \rangle$, $\frac{P'}{Q'} = \langle g_1, g_2, \cdots g_n \rangle$, $\det(M) = \pm \prod_{i=1}^{n} 2^{b_i} k^{c_i}$, $0 < P \leqslant Q$, $1 \leqslant P' \leqslant Q'$, $1 \leqslant Q \leqslant Q'$.

Впервые оценки среднего числа шагов для классического алгоритма Евклида были введены в [2]. Как и у Хейльбронна обозначим $r(v)$ как число решений уравнения $v = f \cdot f' + g \cdot g'$ с условиями из [2]. Данную систему можно привести к виду $u = f \cdot f' + 2^r \cdot q \cdot g \cdot g'$, позволяющему ее соотнести с тожеством №3 из предложения 1. Получается следующее соотношение для $r(v)$ и длины к-арной цепной дроби $n(u, xy)$:

$$r(v) = \sum_{\substack{1<u<\frac{v}{2} \\ (u,v)=1}} \sum_{xy \in XY} (n(u, xy) - 1) \tag{3}$$

$\sum_{\substack{\frac{v}{2}<u<v \\ (u,v)=1}} \sum_{xy \in XY} n(u, xy)$ можно выразить через сумму $\sum_{\substack{1<u<\frac{v}{2} \\ (u,v)=1}} \sum_{xy \in XY} n(u, xy)$. Отсюда получается следующая теорема:

Теорема 1.

$$\sum_{\substack{1<u<v \\ (u,v)=1}} \sum_{xy \in XY} n(u, xy) = 2r(v) + 3 \sum_{\substack{1<u<v \\ (u,v)=1}} \sum_{xy \in XY} 1 \tag{4}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sorenson J. Two fast GCD Algorithms // Journal of Algorithms. 1994. Том 16, № 1. С. 110-144.
2. Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions // Number Theory and Analysis. 1969. С. 87-96.

УДК 511.32

Неотрицательность длинных сумм характеров

А. Б. Калмынин (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, факультет математики
e-mail: alkalb1995cd@mail.ru
A. B. Kalmynin (Russia, Moscow)
National Research University Higher School of Economics, Math Department
e-mail: alkalb1995cd@mail.ru

Nonnegativity of long character sums

Let p be arbitrary prime number and $\left(\frac{n}{p}\right)$ be Legendre symbol modulo p. Well-known result of Dirichlet states that the quantity

$$E(p) = \sum_{n \leq p/2} \left(\frac{n}{p}\right)$$

is always nonnegative. The sums over initial intervals of length $p/3, p/4$ and $p/6$ are also nonnegative for every p. It is interesting to generalize these results to all sums of length αp, where α is any real number. Let us define $L(\alpha, p)$ by the formula

$$L(\alpha, p) = \sum_{n \le \alpha p} \left(\frac{n}{p}\right).$$

Numerical evidence shows that for any $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ the sum $L(\alpha, p)$ tends to be nonnegative more often than negative. For example, among first 100000 there are 87868 primes p with $L(\frac{1}{12}, p) \ge 0$. This leads to the following conjecture:

Conjecture 1. *For any $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ we have*

$$c(\alpha) = \liminf_{x \to +\infty} \frac{\#\{p \le x : L(\alpha, p) \ge 0\}}{\pi(x)} > \frac{1}{2}.$$

In other words, majority of primes satisfy $L(\alpha, p) \ge 0$.

It turns out that in our case it is possible to replace Legendre symbol by a truly random multiplicative function, which allows us to prove

THEOREM 1. *Conjecture 1 is true if $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ is rational and its denominator lies inside the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12\}$ or if α is real and lies in 10^{-6}-neighbourhood of $\frac{1}{3}$.*

———————————————————————————

УДК 511.32

Об универсальности L-функций Дирихле

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюсский университет
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt
Ю. Петушкинайте (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюсский университет
e-mail: jurgita.petuskinaite@mif.vu.lt

On the universality of Dirichlet L-functions [1]

A. Laurinčikas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius university
e-mail:antanas.laurincikas@mif.vu.lt
J. Petuškinaitė (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius university
e-mail: jurgita.petuskinaite@mif.vu.lt

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}\ , \ \sigma > 1,$$

[1]The research of the first author is funded by the European Social Fund according to the activity "Improvement of researcher' qualification by implementing world-class R and D projects"of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

denote the Dirichlet L - function. S. M. Voronin considered in [8] the functional independence of Dirichlet L - functions, and, for this, as an auxiliary result, obtained the joint universality for a collection $L(s,\chi_1),...,L(s,\chi_r)$, see also [1], [4]. We recall a modern version of the Voronin theorem. Let $D=\left\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\right\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H_0(K)$ with $K\in\mathcal{K}$ the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Moreover, $measA$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbb{R}$. Then the Voronin joint universality theorem is the following statement.

Theorem 1. *Suppose that $\chi_1,...,\chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For $j=1,...,r$, let $K_j\in\mathcal{K}$ and $f_j(s)\in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+i\tau,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

The inequality of the theorem shows that there are infinitely many shifts

$$(L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r))$$

approximating a given collection $(f_1(s),...,f_r(s))$ of analytic functions. It is clear that the functions $L(s,\chi_1),...,L(s,\chi_r)$ must be in a certain sense independent. This independence is ensured by the pairwise non-equivalence of the characters $\chi_1,...,\chi_r$.
Theorem 1 has a discrete version. Let $h>0$ be a fixed number, and $\#A$ denote the cardinality of a set $A\subset\mathbb{Z}$. Then the following theorem is true.

Theorem 2. *Suppose that $\chi_1,...,\chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For $j=1,...,r$, let $K_j\in\mathcal{K}$ and $f_j(s)\in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\le k\le N:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+ikh,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Here N runs over the set of all non-negative integers. Theorem 2 in a slightly weaker form was obtained in [1].

Theorems 1 and 2 have some generalizations. The first of them was obtained in [2]. Define the set

$$L(\mathbb{P};h_1,...,h_r;\pi)=\{(h_1\log p:p\in\mathbb{P}),...,(h_r\log p:p\in\mathbb{P}),2\pi\},$$

where $\mathbb{P}$ is the set of all prime members, and $h_1,...,h_r$ are positive members.

Theorem 3. *Suppose that the set $L(\mathbb{P};h_1,...,h_r;\pi)$ is linearly independent over the field of rational members $\mathbb{Q}$. For $j=1,...,r$, let $K_j\in\mathcal{K}$ and $f_j(s)\in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\le k\le N:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+ikh_j,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

A certain modification of Theorem 3 was given in [5]. In [6], the properties of sequences uniformly distributed modulo 1 were applied, and the following modification of Theorem 2 was obtained.

Theorem 4. *Suppose that the set $\{(h_1\log p:p\in\mathbb{P}),...,(h_r\log p:p\in\mathbb{P}),2\pi\}$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, $\chi_1,...,\chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, and α, $0<\alpha<1$, is a fixed number. For $j=1,...,r$, let $K_j\in\mathcal{K}$ and $f_j(s)\in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon>0$ and $h>0$,*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\le k\le N:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+ik^\alpha h,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Ł. Pańkowski generalized [7] Theorems 1 and 2 by using more general shifts.

Theorem 5. *Let $\chi_1, ..., \chi_r$ be arbitrary Dirichlet characters, $h_1, ..., h_r \in \mathbb{R}$, $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}^+$, and $b_1, ..., b_r$ be such that*

$$b_j \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{if } a_j \notin \mathbb{Z}, \\ (-\infty, 0] \bigcup (1, \infty), & \text{if } a_j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

and $a_j = a_k$ or $b_j \neq b_k$ for $k \neq j$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f_1(s), ..., f_r(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N-1} \#\bigl\{2 \le k \le N : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} |L(s + ik_j k^{a_j} \log^{b_j} k, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\bigr\} > 0.$$

Now, let $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < ... \le \gamma_n \le ...$ be the sequence of imaginary parts of non-trivial zeros of the Riemann zeta function $\zeta(s)$. It is known that the sequence $\{a\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$ with every real $a \neq 0$ is uniformly distributed modulo 1. However, this is not sufficient to use, for example, the shifts $\zeta(s + i\gamma_k h)$ for the approximation of analytic functions. In [3], the following condition was applied: for a certain $c > 0$,

$$\sum_{\substack{0\le\gamma_k,\gamma_l\le T \\ |\gamma_k-\gamma_l|<\frac{c}{\log T}}} 1 \ll T \log T,\ T \to \infty. \tag{1}$$

The latter estimate is a weak form of the well-known Montgomery pair correlation conjecture that

$$\sum_{\substack{0\le\gamma_k-\gamma_l\le T \\ \frac{2\pi\alpha_1}{\log T}<\gamma_k-\gamma_l<\frac{2\pi\alpha_2}{\log T}}} 1 \sim \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right) du + \delta(\alpha_1, \alpha_2)\right) \frac{T}{2\pi} \log T,\ T \to \infty,$$

where $\alpha_1 < \alpha_2$ are fixed numbers, and $\delta(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \in [\alpha_1, \alpha_2], \\ 0 & \text{if } 0 \notin [\alpha_1, \alpha_2] \end{cases}.$
We apply condition (1) for the joint universality of Dirichlet L - functions.

Theorem 6. *Suppose that $\chi_1, ..., \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, and the estimate (1) is valid. For $j = 1, ..., r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $h > 0$ and $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\bigl\{1 \le k \le N : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\gamma_k h, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\bigr\} > 0.$$

Theorem 6 has the following modification.

Theorem 7. *Suppose that $\chi_1, ..., \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, and the estimate (1) is valid. For $j = 1, ..., r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $h > 0$, the limit*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\bigl\{1 \le k \le N : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\gamma_k h, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\bigr\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

For the proofs of Theorem 6 and 7, probabilistic limit theorems for probability measures in the space of analytic functions are applied.

REFERENCES

1. Bagchi B., *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

2. Dubickas A., Laurinčikas A., *Joint discrete universality of Dirichlet L - functions*// Arch. Math. (Basel). 2015. Vol. 104, 25-35.

3. Garunkštis R., Laurinčikas A., Macaitienė R., *Zeros of the Riemann zeta - function and its universality*// Acta Arith. 2017. Vol. 181 (2), 127-142.

4. Laurinčikas A., *On joint universality of Dirichlet L – functions*, Chebysh. sb. 2011. Vol. 12 (1), 124 - 139.

5. Laurinčikas A., Korsakienė D., Šiaučiūnas D., *Joint discrete universality of Dirichlet L – functions*// Chebysh. sb. 2015. Vol. 16 (1), 205 - 218.

6. Laurinčikas A., Macaitienė R., Šiaučiūnas D., *Uniform distribution modulo 1 and the universality of Dirichlet L - functions*, Lith. Math. J. 2016. Vol. 56, 529-539.

7. Pańkowski Ł., *Joint universality for dependent L - functions*// Ramanujan J. 2018. Vol. 45, 181-195.

8. Voronin S. M., *On the functional independence of Dirichlet L - functions*// Acta Arith. 1975. Vol. 27, 493 - 503.

———————————————————————————————

УДК 511.32

О совместном приближении L-функциями Дирихле [1]

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюсский университет
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt
Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)
Институт регионального развития, Шяуляйский университет
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

On joint approximation of Dirichlet L-functions

A. Laurinčikas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt
D. Šiaučiūnas (Lithuania, Šiauliai)
Institute of Regional Development, Šiauliai University
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

Let χ be a Dirichlet character, and $L(s, \chi)$, $s = \sigma + it$, denote the corresponding Dirichlet L-function. S. M. Voronin discovered the universality of the function $L(s, \chi)$ on the approximation

[1] The research of the first author is funded by the European Social Fund according to the activity "Improvement of researchers' qualification by implementing world-class R&D projects" of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

of analytic functions defined in the strip $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. He proved [5] that if $f(s)$ is a continuous non-vanishing function on the disc $|s| \leqslant r$, $0 < r < 1/4$, and analytic in the interior of this disc, then, for every $\varepsilon > 0$, there exists a real number $\tau = \tau(\varepsilon)$ such that

$$\max_{|s|\leqslant r} |L(s + 3/4 + i\tau, \chi) - f(s)| < \varepsilon.$$

Also, Voronin obtained [6] a joint universality theorem for a collection of Dirichlet L-functions $L(s, \chi_1), \dots, L(s, \chi_r)$ with pairwise non-equivalent Dirichlet characters $\chi_1, \dots, \chi_r$. For the last version of a joint universality theorem , we use the following notation. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H_0(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. Then the following statement is true, see, for example, [2].

Theorem 1. *Let $\chi_1, \dots, \chi_r$ be pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$, and let $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

It is possible to consider the approximation of the collection $(f_1(s), \dots, f_r(s))$ by more general shifts $(L(s + i\gamma_1(\tau), \chi_1), \dots, L(s + i\gamma_r(\tau), \chi_r))$. Let $K_1 = \dots = K_r = K$. Then it follows from [1] that, under hypotheses of Theorem 1, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K} |L(s + i\gamma_j(\tau), \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0,$$

where $\gamma_j(\tau) = \tau + \lambda_j$, with K satisfying $\hat{K}_k \cap \hat{K}_l = \varnothing$, $k \neq l$, where $\hat{K}_j = \{s + i\lambda_j : s \in K\}$, $j = 1, \dots, r$. T. Nakamura obtained [2] the inequality

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K} |L(s + i\gamma_j(\tau), \chi) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0,$$

where $\gamma_j(\tau) = a_j\tau$ with algebraic numbers $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ linearly independent over $\mathbb{Q}$.

Very general result belongs to Ł. Pańkowski. He proved the following theorem [4].

Theorem 2. *Suppose that $\chi_1, \dots, \chi_r$ are Dirichlet characters, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^+$, and $b_1, \dots, b_r$ are such that*

$$b_j \in \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{if} \quad a_j \notin \mathbb{N}, \\ (-\infty, 0] \cup (1 + \infty) & \textit{if} \quad a_j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

and $a_j \neq a_k$ or $b_j \neq b_k$ if $k \neq j$. Moreover, let $K \in \mathcal{K}$, $f_1, \dots, f_r \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [2, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K} |L(s + i\alpha_j\tau^{a_j} \log^{b_j} \tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

The proof of Theorem 2 is based on the uniform distribution modulo 1.

We propose a joint universality theorem for Dirichlet L-functions with other functions $\gamma_j(\tau)$ without using the uniform distribution theory.

Suppose that, for $j = 1, \dots, r$, $\gamma_j(\tau)$ is an increasing to infinity real continuously differentiable function on $[T_0, \infty)$, $T_0 > 0$, with derivative

$$\gamma_j'(\tau) = \hat{\gamma}_j(\tau)(1 + o(1)),$$

where $\hat{\gamma}_j(\tau)$ is monotonic such that

$$\hat{\gamma}_1(\tau) = o(\hat{\gamma}_2(\tau)), \cdots, \hat{\gamma}_{r-1}(\tau) = o(\hat{\gamma}_r(\tau))$$

and

$$\gamma_j(2\tau) \max_{\tau \leqslant u \leqslant 2\tau} \frac{1}{\gamma_j'(u)} \ll \tau$$

as $\tau \to \infty$. Denote the class of collections $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ satisfying the above hypotheses by U_r. Then the following joint universality theorem for Dirichlet L-functions is valid.

Theorem 3. *Suppose that $\chi_1, \ldots, \chi_r$ are arbitrary Dirichlet characters, and $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in U_r$. Let, for $j = 1, \ldots, r$, $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j \in H_0(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T-T_0} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [T_0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\gamma_j(\tau), \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-T_0} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [T_0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\gamma_j(\tau), \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

For example, the collection $(\tau \log \tau, \ldots, \tau^r \log \tau) \in U_r$, however, it does not satisfy the hypotheses of Theorem 2.

Theorem 3 can be generalized for compositions $F(L(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_r))$, where

$$F : H^r(D) \to H(D)$$

is a certain operator, and $H(D)$ denotes the space of analytic functions on D.

Also, Theorem 3 has the following corollaries.

Corollary 2. *Suppose that $\chi_1, \ldots, \chi_r$ are arbitrary Dirichlet characters, and $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in U_r$. Then, for every fixed σ, $1/2 < \sigma < 1$, the set*

$$\Big\{\Big(L(\sigma+i\gamma_1(t), \chi_1), L'(\sigma+i\gamma_1(t), \chi_1), \ldots, L^{(n-1)}(\sigma+i\gamma_1(t), \chi_1), \ldots,$$
$$L(\sigma+i\gamma_r(t), \chi_r), L'(\sigma+i\gamma_r(t), \chi_r), \ldots, L^{(n-1)}(\sigma+i\gamma_r(t), \chi_r)\Big) : t \geqslant T_0\Big\}$$

is everywhere dense in $\mathbb{C}^{r\times n}$.

Corollary 3. *Suppose that $\chi_1, \ldots, \chi_r$ are arbitrary Dirichlet characters, $\Phi : \mathbb{C}^{r\times n} \to \mathbb{C}$ is a continuous function, and*

$$\Phi\left(L(s, \chi_1), L'(s, \chi_1), \ldots, L^{(n-1)}(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_r), L'(s, \chi_r), \ldots, L^{(n-1)}(s, \chi_r)\right) = 0$$

identically for s. Then $\Phi \equiv 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kaczorowski J., Laurinčikas A., Steuding J. On the value distribution of shifts of universal Dirichlet series // Monats. Math. 2006. V. 147, № 4. P. 309-317.

2. Laurinčikas A. On joint universality of Dirichlet L-functions // Chebysh. sb. 2011. V. 12, № 1. P. 124-139.

3. Nakamura T. The joint universality and the generalized strong recurrence for Dirichlet L-functions // Acta Arith. 2009. V. 138. P. 357-362.

4. Pańkowski Ł. Joint universality for dependent L-functions // Ramanujan J. 2018. V. 45. P. 181-195.

5. Voronin S. M. Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 1975. V. 39. P. 475-486 (in Russian).

6. Voronin S. M. On the functional independence of Dirichlet L-functions // Acta Arith. 1975. V. 27. P. 493-503 (in Russian).

УДК 511.32

Универсальность периодической дзета-функции Гурвица

В. Францкевич (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюсский университет
e-mail: violeta.franckevic@mif.vu.lt
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюсский университет
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Universality of the periodic Hurwitz zeta-function [1]

V. Franckevič (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius university
e-mail: violeta.franckevic@mif.vu.lt
A. Laurinčikas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius university
e-mail:antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Let α, $0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter, and $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup 0\}$ a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. The periodic Hurwitz zeta - function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$, $s = \sigma + it$, is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

[1]The research of the second author is funded by the European Social Fund according to the activity "Improvement of researcher' qualification by implementing world-class R & D projects"of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

Thus, the function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ is a generalization of the classical Hurwitz zeta - function

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \ \sigma > 1.$$

In view of periodicity of the sequence $\mathfrak{a}$, we have that, for $\sigma > 1$,

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{k=0}^{q-1} a_k \zeta\left(s, \frac{k+\alpha}{q}\right).$$

Since the function $\zeta(s, \alpha)$ is analytic in the whole complex plane, except for the point $s = 1$ which is a simple pole with residue 1, the latter equality gives analytic continuation for $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$.

The function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$, as the majority of zeta - functions, is universal in the Voronin sense for some classes of the parameter α, i. e., a wide class of analytic functions is approximated by shifts $\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}), \tau \in \mathbb{R}$. The first result in this direction has been obtained in [2]. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. Then the result of [2] is the following theorem.

Theorem 1. *Suppose that α is a transcendental number. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Here $measA$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.

In [3], the transcendence of the parameter α was replaced by a weaker hypothesis on the linear independence over the field of rational members $\mathbb{Q}$ for the set $L(\alpha) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$.

The case of rational α has been studied in [4]. We recall that $rad(m)$ denotes the product of all distinct prime divisors of a positive integer m, i.e.,

$$rad(m) = \prod_{p/m} p.$$

The condition $rad(q)$ divides b means that every prime divisor of q divides b. We observe that the latter condition is equivalent to the requirement that $(bl + a, bq) = 1$ for all $l = 0, ..., q - 1$.

Theorem 2. *[4]. Suppose that $\alpha = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, $(a, b) = 1$, $b \neq 2$ and that $rad(q)$ divides b. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} \left|\zeta\left(s + i\tau, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\right) - f(s)\right| < \varepsilon\} > 0.$$

The universality of $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ with algebraic irrational α is an open problem. We propose the following "approximation"to the universality of $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ with algebraic irrational α. Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compacta.

Theorem 3. *Suppose that the parameter α, $0 < \alpha < 1$, and the periodic sequence $\mathfrak{a}$ are arbitrary. Then there exists a non-empty closed set $F_{\alpha,\mathfrak{a}} \subset H(D)$ such that, for every compact subset $K \subset D$, $f(s) \in F_{\alpha,\mathfrak{a}}$ and $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} \left|\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)\right| < \varepsilon\} > 0.$$

In the case of transcendental or rational α, the set $F_{\alpha,\mathfrak{a}}$ coinsides with $H(D)$.
Theorem 3 has the following modification.

Theorem 4. *Suppose that the parameter α, $0 < \alpha < 1$, and the periodic sequence $\mathfrak{a}$ are arbitrary. Then there exists a non-empty closed set $F_{\alpha,\mathfrak{a}} \subset H(D)$ such that, for every compact subset $K \subset D$ and $f(s) \in F_{\alpha,\mathfrak{a}}$, the limit*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} \big|\zeta\left(s+i\tau, \alpha; \mathfrak{a}\right) - f(s)\big| < \varepsilon\big\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Unfortunately, the set $F_{\alpha,\mathfrak{a}}$ is not explicity given. It is proved that this set is the support of a certain probability measure.
Theorems 3 and 4 can be generated for certain compositions.
We present only one example.

Theorem 5. *Suppose that the parameter α, $0 < \alpha < 1$, and the periodic sequence $\mathfrak{a}$ are arbitrary. Then there exists a non-empty closed set $F_{\alpha,\mathfrak{a}} \subset H(D)$ such that if $\Phi : H(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that, for every polynomial $p = p(s)$, the set $\left(\Phi^{-1}\{p\}\right) \bigcap F_{\alpha,\mathfrak{a}}$ is non-empty, then, for every compact subset $K \subset D$, $f(s) \in \Phi(F_{\alpha,\mathfrak{a}})$ and $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} \big|\Phi\left(\zeta\left(s+i\tau, \alpha; \mathfrak{a}\right)\right) - f(s)\big| < \varepsilon\big\} > 0.$$

Theorem 5, as Theorem 3, has the following modification.

Theorem 6. *Suppose that the parameter α, $0 < \alpha < 1$, and the periodic sequence $\mathfrak{a}$ are arbitrary. Then there exists a non-empty closed set $F_{\alpha,\mathfrak{a}} \subset H(D)$ such that if $\Phi : H(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that, for every polynomial $p = p(s)$, the set $\left(\Phi^{-1}\{p\}\right) \bigcap F_{\alpha,\mathfrak{a}}$ is non-empty, then, for every compact subset $K \subset D$ and $f(s) \in \Phi(F_{\alpha,\mathfrak{a}})$, the limit*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} \big|\Phi\left(\zeta\left(s+i\tau, \alpha; \mathfrak{a}\right)\right) - f(s)\big| < \varepsilon\big\} > 0.$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Proofs of the above theorems are based on probabilistic limit theorems for weakly convergent probability measures in the space $H(D)$. They can be found in [1].

REFERENCES

1. Franckevič V., Laurinčikas A., Šiaučiūnas D., *On approximation of analytic functions by periodic Hurwitz zeta - functions*// Math. Modell. Analysis. 2019. Vol. 24 (1). P. 20-33.

2. Javtokas A., Laurinčikas A., *Universality of the periodic Hurwitz zeta - function*// Integral Transforms Spec. Funct. 2006. Vol. 17. P. 711-722.

3. Laurinčikas A, Macaitienė R., Mochov D., Šiaučiūnas D., *On universality of certain zeta - functions*// Izv. Saratov Univ., Ser. Math., Mech., Inform. 2013. Vol. 13. P. 67-72.

4. Laurinčikas A, Macaitienė R., Mochov D., Šiaučiūnas D., *Universality of the periodic Hurwitz zeta - function with rational parameter*// Sib. Math. J. 2018. Vol. 59 (5). P. 894-900.

УДК 511.32

О третьем моменте автоморфных L-функций в аспекте веса[1]

Д. А. Фроленков(Россия, Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: frolenkov@mi-ras.ru

The cubic moment of automorphic L-functions in the weight aspect

Dmitry. Frolenkov (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
e-mail: frolenkov@mi-ras.ru

We prove an explicit formula for the cubic moment of central values of automorphic L-functions associated to primitive cusp forms of level one and large weight. The resulting explicit formula contains the main term predicted by the random matrix theory conjectures, while the error term is expressed as the fourth moment of the Riemann zeta function weighted by the ${}_3F_2$ hypergeometric function. As a corollary, we derive a new upper bound for the cubic moment improving the previous result of Peng. Furthermore, we obtain a new subconvexity estimate for automorphic L-functions in the weight aspect.

УДК 511.325

Об оценке кратной тригонометрической суммы

Ш. А. Хайруллоев (Таджикистан, г. Душанбе)
Институт математики имени А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан
e-mail: shamsullo@rambler.ru

About the assessment of multiple trigonometric sums

Sh. A. Khayrulloev (Tajikistan, Dushanbe)
A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan
e-mail: shamsullo@rambler.ru

При изучение нулей функция Дэвенпорта-Хейлброна в коротких промежутках критической прямой, основным моментом является оценки тригонометрических сумм вида

$$W = W(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)\overline{a}(\lambda_2)\overline{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ грант 19-11-00065

где

$$P=\sqrt{\frac{5T}{2\pi}},\quad T\geqslant T_0(\varepsilon)>0,\quad 0<\varepsilon<0,01,\quad 0<H<T^{\frac{1}{3}},\quad X=T^{0,01\varepsilon},$$

$$a(\lambda)=\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2},\quad d(\lambda)=\int\limits_{-h_1}^{h_1}e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du,$$

$$r(n)=\frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n)+\frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n),\quad h(\nu)=\beta(\nu)\chi(\nu)=\beta(\nu)\bar{\chi}(\nu).$$

Эту сумму и близких к ним сумм ранее изучал А.А. Карацуба [1]–[2]. Он доказал что: *при* $H=T^{27/82+\varepsilon}$, $0<\varepsilon<1$, *для суммы* $W(T)$ *спарведлива следующая оценка* $W(T)\ll h^2T^{-\varepsilon}$.

В настоящей работе применяя метода экспоненциальных пар [3] получена новая оценка суммы $W(T)$, которое улучшает оценки А.А.Карацубы, когда промежутка $(T,T+H)$ имеют более короткую длину.

Определение 1. *Если* $B\geq 1$, $0<h\leq B$, $F(u)\in C^\infty(B,2B)$, $A\geq 1$,

$$AB^{1-r}\ll|F^{(r)}(u)|\ll AB^{1-r},\ r=1,2,3,\ldots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ *зависит только от* r, *и имеет место оценка*

$$\sum_{B\leq n\leq B+h}e(F(n))\ll A^\kappa B^\lambda,\quad 0\leq\kappa\leq 0,5\quad 0,5\leq\lambda\leq 1,$$

то пара $(\kappa;\lambda)$ *называется экспоненциальной парой.*

Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть* (κ,λ) — *произвольная экспоненциальная пара,* ε — *произвольное малое фиксированное положительное число не превосходящее* $0,01$, $\mathscr{L}=\ln P$,

$$\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},\quad \sigma(\kappa)=\frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Тогда при $H=T^{\theta(\kappa,\lambda)+\varepsilon+\sigma(\kappa)}$ *справедлива оценка:*

$$W(T)\ll h^2T^{-0,98\varepsilon}.$$

Из теоремы 1 вытекает следующие

Следствие 1. *Пусть* ε *произвольное малое фиксированное положительное число не превосходящее* $0,01$. *Тогда при* $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon}$ *справедлива оценка:*

$$W(T)\ll h^2T^{-0,98\varepsilon}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т.40, № 5 (245). С. 19-70.
2. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5. С. 3 – 14.

3. Graham S. W., Kolesnik G. Van Der Corput's Method of Exponential Sums // Cambridge University Press: Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney. 1991. 119 p.

УДК 511.12

О примитивных неассоциированных целочисленных матрицах третьего порядка заданного определителя

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино—Балкарский государственный университет
e-mail: urusbi@rambler.ru
Р. А. Дохов (Россия, г. Нальчик)
Кабардино—Балкарский государственный университет
e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

On primitive unassociated integer third-order matrices of a given determinant

U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino–Balkarian State University
e-mail: urusbi@rambler.ru
R. A. Dokhov (Russia, Nalchik)
Kabardino–Balkarian State University
e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

При изучении ассимптотического распределения целых точек на гиперболоидах а также целочисленных матриц третьего порядка по областям важную роль играют неассоциированые матрицы второго и третьего порядков заданного определителя (см. [1, 2]). Чтобы обеспечить в рассматриваемых вопросах конечность числа целых матриц заданной нормы на них накладывается условие неассоциированности справа или слева.

В [3] получен исчерпывающий результат о числе примитивных неассоциированных матриц второго порядка заданного определителя, делящихся на заданную матрицу. Отдельный более сложный в вычислительном плане результат о числе неассоциированных примитивных матриц $n^{\text{го}}$ порядка, получен также в [4].

Мы рассматриваем указанный вопрос для кольца целочисленных матриц третьего порядка заданного определителя.

Арифметика кольца матриц третьего порядка $M_3(\mathbb{Z})$ сходна с арифметикой матриц второго порядка $M_2(\mathbb{Z})$.

Итак, мы рассматриваем кольцо целых матриц третьего порядка $M_3(\mathbb{Z})$.

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называем целой, если $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$. Говорим, что целая матрица A примитивна, если наибольший общий делитель всех её элементов равен 1. Наибольший общий делитель всех элементов матрицы A, обозначаемый $t(A)$ называется числовым делителем матрицы A. Если для некоторого целого числа $g > 0$ числовой делитель $t(A)$ взаимно прост с числом g, то матрица A называется примитивной по модулю g. Целая матрица $U \in M_3(\mathbb{Z})$ называется единицей, если $U^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$. Нормой матрицы $A \in M_3(\mathbb{Z})$ называется число $\mathrm{N}(A) = \det A$. Единицами в кольце $M_3(\mathbb{Z})$ будут те и только те матрицы для которых $\mathrm{N}(U) = \pm 1$, т. е. $\det U = \pm 1$.

Матрицы $A,\ A' \in M_3(\mathbb{Z})$ называются ассоциированными справа, если найдётся обратимая матрица $U \in M_3(\mathbb{Z})$, для которой $A' = A\,U$ (аналогично определяется ассоциированность матриц слева). Ассоциированность матриц справа есть отношение эквивалентности, разбивающее кольцо $M_3(\mathbb{Z})$ на классы ассоциированных справа матриц. В каждом классе ассоциированных справа матриц можно выбрать единственную каноническую треугольную матрицу.

Лемма 1 (о каноническом виде матриц). *Для всякой невырожденной матрицы $A \in M_3(\mathbb{Z})$ найдётся единственная ассоциированная ей справа матрица вида*

$$T = \begin{pmatrix} \delta_1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ 0 & \delta_2 & \varepsilon_{23} \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix},$$

где $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3 > 0$; $0 \leqslant \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{13} < \delta_1$; $0 \leqslant \varepsilon_{23} < \delta_2$.

Это есть частный случай общего утверждения для произвольных целочисленных матриц любого порядка, доказываемого с помощью элементарных преобразований столбцов матрицы (см., например, [5, гл. II]).

Лемма 2. *При данном Δ все целочисленные матрицы нормы Δ из $M_3(\mathbb{Z})$ распадаются на конечное число классов ассоциированных матриц и число это равно*

$$\sum_{\Delta = \delta_1\,\delta_2\,\delta_3} \delta_2\,\delta_3^2,$$

где сумма берётся по всем представлениям числа Δ в виде $\Delta = \delta_1\,\delta_2\,\delta_3$, δ_i — целое положительное.

Доказывается с помощью леммы 1.

Лемма 2 есть частный случай более общего утверждения, относящегося к целым матрицам $n^{\text{го}}$ порядка (см. [6]).

Опираясь на леммы 1 и 2, можем получить ещё следующий результат о числе неассоциированных матриц определителя p^α, где p — простое число.

Лемма 3. *Для числа $\sigma\,(3,\,p^\alpha)$ неассоциированных справа (или слева) матриц третьего порядка определителя p^α, где p — простое число, справедлива формула*

$$\sigma\,(3,\,p^\alpha) = \frac{\left(p^{\alpha+2}-1\right)\left(p^{\alpha+1}-1\right)}{(p^2-1)(p-1)}.$$

Из леммы 3 в силу мультипликативности функции $\sigma\,(3,\,N)$ получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $N = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа N. Тогда для числа $\sigma_0\,(3,\,N)$ примитивных неассоциированных матриц третьего порядка определителя N справедлива формула*

$$\sigma_0\,(3,\,N) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\left(p_i^{\alpha_i+2}-1\right)\left(p_i^{\alpha_i+1}-1\right) - \left(p_i^{\alpha_i-1}-1\right)\left(p_i^{\alpha_i-2}-1\right)}{(p_i^2-1)(p_i-1)}.$$

при этом, если в $i^{\text{ом}}$ сомножителе $\alpha_i = 1$, то такой сомножитель в правой части берётся равным $p_i^2 + p_i + 1$.

Теорема 1 позволяет найти число $\sigma_0\,(3,\,N;\,A)$ примитивных неассоциированных матриц $M \in M_3(\mathbb{Z})$ определителя N и делящихся на матрицу $A \in M_3(\mathbb{Z})$.

Теорема 2. *Для числа $\sigma_0\,(3,\,N;\,A)$ справедливо соотношение*

$$\sigma_0\,(3,\,N;\,A) = \begin{cases} \sigma_0\left(3,\,\frac{N}{\det A}\right), & \text{если } t(A) = 1; \\ 0, & \text{если } t(A) > 1. \end{cases}$$

Замечание 1. *Нижнее равенство равенство следует из того, что примитивная матрица не может делиться на непримитивную.*

Замечание 2. *Результат аналогичный теореме 2 но с соответствующей корректировкой имеет место и для числа $\sigma\,(3,\,N;\,A)$ неассоциированных матриц определителя N делящихся на матрицу A.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1967.

2. Пачев У. М. О числе приведённых целочисленных неопределённых бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Чебышевский сб., **4**:3 (2003), 92–105.

3. Пачев У. М. О числе примитивных неассоциированых матриц второго порядка определителя n, делящихся на заданную матрицу // Владикавк. матем. журн. **17**:2 (2015), 62–67.

4. Пачев У. М. Об арифметике кольца целых матриц $n^{\text{го}}$ порядка // Владикавк. матем. журн. **10**:1 (2008), 75–78.

5. Newmann M. Integral matrices. N. Y. L. : AP, 1972. 224 p.

6. Венков Б. А. Об интегральном инварианте группы унимодулярных линейных подстановок // Учён. зап. Ленингр. ун-та. **144**:23 (1952), 3–25.

УДК 511.12

О группе кватеринонных единиц неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
Кабардино—Балкарский государственный университет
e-mail: urusbi@rambler.ru
Т. А. Шакова (Россия, г. Нальчик)
Кабардино—Балкарский государственный университет
e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

On a group of quaternion units of an indefinite anisotropic ternary quadratic form

U. M. Pachev (Russia, Nalchik)
Kabardino–Balkarian State University
e-mail: urusbi@rambler.ru
T. A. Shakova (Russia, Nalchik)
Kabardino–Balkarian State University
e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

В связи с применениями дискретного эргодического метода (см. [1, 2]) к вопросу представления целых чисел тернарными квадратичными формами важную роль играют группа единиц и понятие ассоциированности в кватернионных порядках.

Мы рассматриваем анизотропную неопределённую тернарную квадратичную форму

$$f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - b\,x_2^2 - c\,x_3^2$$

над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, где $b,\ c \in \mathbb{Q}$, $b > 0,\ c > 0$ при этом число c не является нормой из квадратичного расширения $\mathbb{Q}\left(\sqrt{b}\right)$.

С такой тернарной квадратичной формой f мы сопоставляем алгебру U_f обобщённых кватернионов с базисной формой f над полем $\mathbb{Q}$, при этом, кватернионные базисные единицы $i_1,\ i_2,\ i_3$ задаются следующими соотношениями (таблица умножения)

1) $i_1^2 = -b\,c$, $i_2^2 = c$, $i_3^2 = b$;

2) $i_1\,i_2 = -c\,i_3$, $i_2\,i_1 = c\,i_3$;

3) $i_1\,i_3 = b\,i_2$, $i_3\,i_1 = -b\,i_2$;

4) $i_2\,i_3 = i_1$, $i_3\,i_2 = -i_1$.

Элементы алгебры U_f обобщённых кватернионов имеют вид

$$X = x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3,$$

где $x_k \in \mathbb{Q}$.

Кватернион $\overline{X} = x_0 - x_1\,i_1 - x_2\,i_2 - x_3\,i_3$ называется сопряжённым кватерниону X. Элемент $N(X) = X\,\overline{X} = \overline{X}\,X = x_0^2 + \overline{f}(x_1,\ x_2,\ x_3)$ называется нормой кватерниона X, где $\overline{f}$ — квадратичная форма, взаимная форме f.

Скалярной частью $\mathrm{Sc}(X)$ кватерниона $X = x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3$ называется число x_0 и значит, $2\ \mathrm{Sc}(X) = X + \overline{X}$.

В связи с приложениями кватернионной алгебры U_f к вопросам представления целых чисел тернарными квадратичными формами используется следующее представление

$$X = \mathrm{Sc}(X) + \mathrm{Ve}(X),$$

где $\mathrm{Ve}(X) = x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3$.

Число $N(X) = X\,\overline{X} = \overline{X}\,X = x_0^2 + \overline{f}(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{Q}$ называется нормой кватерниона X.

Норма кватерниона обладает свойством мультипликативности $\mathrm{N}(X\,Y) = \mathrm{N}(X) \cdot \mathrm{N}(Y)$ для любых $X,\ Y \in U_f$.

Из определения следует, что если $X = x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3 \in U_f$, то

$$\mathrm{N}(X) = x_0^2 + b\,c\,x_1 - c\,x_2 - b\,x_3^2.$$

Необходимые сведения из алгебры обобщённых кватернионов можно найти в [2, 3].

В алгебре неопределённых анизотропных кватернионов U_f выделяем множество O_f элементов, называемых целыми кватернионами, а именно

$$O_f = \{x_0 + x_1\,i_1 + x_2\,i_2 + x_3\,i_3 \mid x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Ясно, что множество O_f обладает свойствами:

1) O_f является кольцом (некоммутативным);

2) $1,\ i_1,\ i_2,\ i_3 \in O_f$;

3) любой кватернион $X \in O_f$ удовлетворяет уравнению $X^2 - (2\,\mathrm{Sc}\,X)\,X + \mathrm{N}(X) = 0$ с целыми коэффициентами.

Множество O_f, удовлетворяющее условиям 1)–3) называется порядком целых кватернионов из U_f. Ненулевой кватернион $\varepsilon \in O_f$ называется кватеринонной единицей, если $\varepsilon^{-1} \in O_f$. Ясно, что базисныеединицы $i_1,\ i_2,\ i_3$ из алгебры U_f не являются единицами порядка O_f. Кватернион $X \in O_f$ является единицей тогда и только тогда, когда $\mathrm{N}(X) = \pm 1$. Относительно группы единиц O_f^* порядка O_f нами получен следующий результат.

Теорема 1. *Группа единиц O_f^* кватернионного порядка O_f, соответствующего неопределённой анизотропной тернарной квадратичной форме $f = x^2 - b\,y^2 - c\,z^2$ является бесконечной некоммутативной группой, содержащей бесконечную 2-порождённую подгруппу.*

В доказательстве используется группа единиц Пелля.

Вопросу о строении группы единиц алгебры с делением относится работа Эйхлера [4], а уравнению Пелля более общего вида, также используемому нами, посвящена работа [5].

С единицами тесно связан вопрос об ассоциированности элементов в порядке O_f. Два кватерниона $\alpha,\ \beta \in O_f$ называются ассоциированными справа, если $\alpha = \beta\,\varepsilon$, где ε — некоторая единица из O_f^* (аналогично определяется ассоциированность слева).

Обозначим через $\sigma\,(O_f,\ m)$ число классов ассоциированных справа (или слева) кватернионов нормы m из порядка O_f.

Ввиду анизотропности и неопределённости базисной тернарной квадратичной формы f мы получаем только оценки для $\sigma\,(O_f,\ m)$. При этом для нижней оценки этой величины используется понятие главного представления числа m неопределённой бинарной квадратичной формой (см. [6]). В нашем случае это понятие используется по отношению к квадратичной форме $x^2 - d\,y^2$ при $d > 0$.

Представление $(x,\ y)$ целого числа m формой $x^2 - d\,y^2$ называется главным, если оно удовлетворяет двум условиям:

$$1 \leqslant \frac{x + \sqrt{d}\,y}{x - \sqrt{d}\,y} < \varepsilon^2,$$

$$x - \sqrt{d}\,y > 0,$$

где ε — основная единица квадратичного поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.

Оказывается, что число главных представлений натурального числа m формой $x^2 - d\,y^2$ будет конечным, в то время, как число всех представлений бесконечно. Теперь сформулируем следующий основной результат о числе классов ассоциированных кватернионов нормы m из порядка O_f.

Теорема 2. *Для величины $\sigma\,(O_f,\ m)$ справедливы оценки*

$$\max\{\mathrm{R}_b(m),\ \mathrm{R}_c(m)\} < \sigma\,(O_f,\ m) < m^4,$$

где $\mathrm{R}_b(m),\ \mathrm{R}_c(m)$ — количества главных представлений числа m соответственно формами $x^2 - b\,y^2$ и $x^2 - c\,y^2$; $f = x_1^2 - b\,x_2^2 - c\,x_3^2$.

Доказательство нижней оценки использует свойство попарной неассоциированности главных представлений числа m, а верхняя оценка в точности получается как в случае ассоциированности в алгебраических полях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1967.

2. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического ин-та АН СССР. Т. 65 (1962), 212 с.

3. Пачев У. М., Шакова Т. А. Об алгебре обобщённых кватеринонов // Сборник материалов Международной научно—практической конференции «Актуальные проблемы развития науки и современного образования». Белгород. 2017. С. 64–66.

4. Eichler M. Über die Einheiten der Dividionalgebren // Math. Ann. 1937. S. 635–364.

5. Basilla J. M., Wada H. On solution of $x^2 - dy^2 = \pm m$ // Proc. Japan Acad., 81. Ser A (2005), pp. 137–140.

6. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М. : Наука, 1971.

———————————————————————————————

УДК 511.3

О количестве представлений четного числа в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии

А. Ш. Сафаров (Узбекистан, г. Термез)
Термезский государственный университет
e-mail: asafarov1977@mail.ru

O number representing an even number as the sum of two prime numbers from an arithmetic progression

A. Sh. Safarov (Uzbekistan, Termez)
Termez State University
e-mail: asafarov1977@mail.ru

Пусть X – достаточно большое вещественное число, p, p_1, p_2 – простые числа, ν – натуральное число, $M_D(X)$ – множество четных чисел $n \leq X$, которые «возможно» непредставимы в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии с разностью D. Пусть $E_D(X)$ – количество элементов в $M_D(X)$, то есть $E_D(X) = cardM_D(X)$.

И.Аллаковым доказано, что, если $D << X^{\delta_1}$, тогда все чётные числа $n \leq X$, за исключением не более чем $E_D(X) << \frac{1}{\varphi(D)} X^{1-\delta}$ значений из них, представимые в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии $p_1 \equiv l_1(modD)$, $p_2 \equiv l_2(modD)$, где $(l_1, D) = 1$ и $(l_2, D) = 1$. Здесь $0 < \delta_1 < \delta < 1$ – достаточно малые действительные числа, φ – функция Эйлера.

Рассмотрим те, n для которых $n \notin M_D(X)$, $n \leq X$. Пусть $R_D(n)$ – количества представлении такого n в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии $p_1 \equiv l_1(modD)$, $p_2 \equiv l_2(modD)$, где $(l_1, D) = 1$ и $(l_2, D) = 1$.

В настоящей работе доказано, что если $n \notin M_D(X)$, $n \leq X$, тогда

$$R_D(n) > \frac{1}{\varphi(D)}(n^{\varepsilon} - 1)\frac{n^{1-\varepsilon_1}}{ln^2 n},$$

где $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 < 1$. Полученный результат является обобщением соответствующих результатов И. Аллакова [1, 2]

В доказательстве используется комбинированная схема работ [2] - [5]. Приведем схему доказательство основного результата. Для этого сначала введем обозначения: Пусть χ_m- характер Дирихле по модулю m и $\psi(x, \chi) = \sum\limits_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n)$; δ_χ равен 1 или 0, смотря тому $\chi_m = \chi_m^\circ-$ главный характер или $\chi_m \neq \chi_m^\circ$.

Положим $P = X^{25\delta}$, $Q = XP^{-1}$ и сегмент $[Q^{-1}, 1 + Q^{-1}]$ делим на основные и дополнительные интервалы. При $a \leq q \leq P$ и $(a, q) = 1$ через $M(q, a)$ обозначим закрытий интервал $[aq^{-1} - (qQ)^{-1}, aq^{-1} + (qQ)^{-1}]$. Ясно, что основные интервалы не пересекаются и содержатся в $[Q_{-1}, 1 + Q^{-1}]$. Через $\Re-$ обозначим множество тех точек α, $Q^{-1} < \alpha < 1 + Q^{-1}$, которые не содержатся ни в каком $M(q, a)$. В дальнейшем объединение всех $M(q, a)$ назовем большой дугой и обозначим $\mathfrak{M}$, а $\Re$ малой дугой.

Введем функции

$$S_i(X, \alpha) = \sum_{\chi_D} \overline{\chi}_D(l_i) \sum_{2 < p_i \leq X} \chi_D(p_i) lnp_i e(p_i \alpha), \quad i = 1, 2;$$

$$g_u^{(i)}(X, \alpha) = \sum_{2 < n \leq X} n_i^{u-1} e(n_i \alpha), \quad i = 1, 2;$$

$$V_i(X, \alpha, q, a) = R(q)\frac{\mu(q/d)}{\varphi(q/d)} e(\frac{a}{q} N_1 l_i) g_1^{(i)}(X, \eta), \quad i = 1, 2,$$

где $\alpha = aq^{-1} + \eta$, $d = (q, D)$, $N_1 = gqd^{-1}(modq)$ (N_1 – наименьший положительный вычет числа gqd^{-1} по $modq$), g - по $modd$ определяется из $gqd^{-1} \equiv 1(modd)$; $R(q) = 1$, если $(qd^{-1}, D) = 1$ и $R(q) = 0$ в противном случае.

Для удобства обозначим

$$S = S(X, \alpha) = S_1(X, \alpha) \cdot S_2(X, \alpha),$$

$$V = V(X, \alpha, q, a) = V_1(X, \alpha, q, a) \cdot V_2(X, \alpha, q, a).$$

Тогда имеем

$$S(X, \alpha) = \varphi^2(D) \sum_{2 < n \leq 2X} R(X, n) e(\alpha n),$$

где

$$R(X, n) = \sum_{\substack{n = p_1 + p_2, P < p_1, p_2 \leq X \\ p_1 \equiv l_1, p_2 \equiv l_2 (modD)}} lnp_1 lnp_2,$$

и

$$V = R(q)\frac{\mu^2(\frac{q}{d})}{\varphi^2(\frac{q}{d})} \sum_{P < n \leq 2X} J(X, n) e(\frac{a}{q}(N_1(l_1 + l_2 - n))) e(\alpha n),$$

где

$$J(X,n) = \sum_{\substack{n=n_1+n_2,\\ P<n_1,n_2\le X}} 1.$$

Очевидно, что если $2 < n \le X$, то $\frac{n}{2} < J(X,n) << X$. Если $\frac{1}{2} \le n \le 1$, то суммирование по частям дает

$$g_u^{(i)}(X,\alpha) << min(\| \alpha \|^{-u}; X^u),$$

где $\| \alpha \|$ −расстояние от до ближайшего целого числа.

$R(X,n)$ представим в виде суммы двух интегралов соответствие на разбиению сегмента $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$, то есть

$$R(X,n) = R_1(X,n) + R_2(X,n),$$

где

$$R_1(X,n) = \int\limits_{\mathfrak{M}} S(X,\alpha)e(-n\alpha)d\alpha,$$

$$R_2(X,n) = \int\limits_{\mathfrak{R}} S(X,\alpha)e(-n\alpha)d\alpha.$$

Далее, доказывается, что

$$R(X,n) \ge R_1(X,n) - |R_2(X,n)| \ge \frac{1}{\varphi(D)}(n^{\varepsilon-1})n^{1-\varepsilon_1} \tag{1}$$

для всех чётные числа $n \le X$, за исключением не более чем $E_D(X) << \frac{1}{\varphi(D)}X^{1-\delta}$ значений из них. Так как

$$R(X,n) = \sum_{\substack{n=p_1+p_2, P<p_1,p_2\le X\\ p_1\equiv l_1, p_2\equiv l_2(modD)}} lnp_1lnp_2 \le (ln^2 n)R_D(n) \tag{2}$$

то из (1) и (2) получим выше сформулированный результат

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков И. Некоторые оценки в бинарной проблеме Гольдбаха. Тезисы докладов международной конференции «Теория трансцендентных чисел и её приложения». Изд. МГУ, 1983 г. с. 4.

2. Аллаков И. О представление чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". - 2000.- № 8(459). -с. 3–15.

3. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta arithm. - 1975 v. 27. p. 353–370.

4. Vaughan R.C. On Goldbach's problem // Acta arithm. -1972. -№ 1(22). - p. 21–48.

5. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова // Вестник ЛГУ. - 1961. - № 13. - с. 11–27.

––

УДК 511.3

Распределение простых чисел. Бинарная проблема Гольдбаха – Эйлера на основе специальных чисел

С. И. Чермидов (Греция, г. Салоник)
e-mail: Chermidov.Sergei@mail.ru

Distribution of Primes. Binary problem of Goldbakh – Euler on the basis of special type numbers

S. I. Chermidov (Greece, Thessaloniki)
e-mail: Chermidov.Sergei@mail.ru

Интерес к распределению простых чисел и к бинарной проблеме Гольдбаха—Эйлера в математике, а также их применение в смежных науках и технологиях актуальны и значимы в криптографии [1; 2]. За последние 10 лет были достигнуты значительные успехи в области теории аддитивных чисел, например в 2013, Харальд Хельфготт доказал слабую проблему Гольдбаха. Бинарную проблему многие считают, что это недоказуемо. Это объясняется тем, что закон распределения простых чисел во множестве натуральных чисел еще не было найдено.

Первым, кто заметил правильность расстановки простых чисел, был К. Гаусс, который показал, что появления простых чисел в диапазоне $1 \div x$, равна $\frac{x}{\ln x}$, затем А. Лежандр $\Lambda(x) = \frac{x}{\ln x - 1.08366}$. Существенный вклад в изучение простых чисел был внесен Л.Эйлером с его $\zeta(s)$ - функцией (см. [1]) с реальными переменными s. В 1859, Б.Риманн предложил рассмотреть изменение переменной s функции Эйлера в комплексной плоскости и связал распределение простых чисел с нетривиальными нулями $\zeta(s)$ – функции. Б. Риман сформулировал проблему, известную, теперь, как гипотеза Римана, а именно, что все нетривиальные нули $\zeta\ (s)$ - функции находятся в критической полосе $0 \leqslant Re\ s\ \leqslant 1$ и симметричны относительно линии $1/2+\mathbf{i}\cdot\mathbf{x}$. И тут - то, вспомнился жест моего учителя по математике, а может существует более простой подход к получению простых чисел в интервале $1 \div x$. Т. к. в 1960 – 1970 гг на обложках школьных тетрадей печатали табл. простых чисел еще тогда было замечено мною, что простые $p\ \geqslant 5$ имеют вид чисел $6? \pm 1$.
В Февр-Март 2011 г опубликовал статью "О факторизации натуральных чисел" [4] в основе, которого лежал принцип, если параметр λ чисел вида $n = 6? \pm 1$ представим в виде хотя б одной из форм $6xy \pm x \pm y$, то число $\mathbf{n}$ – составное, если ж ни одно, то $\mathbf{n}$ - простое. В работе Dr. Минаева В.А была сделана попытка описать законы натуральных чисел на основе элементов множества с введением понятий фундаментальных отрицательных и положительных составных и простых чисел. Но ничего не сказано было о методах и определениях, то есть при каких значениях ?- параметров числа вида $6?\pm1$ являются составными и при каких простыми. Заметив о том, что числа вида $6?\pm1$ образуют полугруппу относительно операции умножения $(?\ ^*) = \{\ 6? \pm\ 1\ /\ ? \in \mathbb{N}\}$, довелось мне впервые получить закон распределения составных чисел и алгоритмы получения простых чисел видов $6?-1$ и $6?+1$ в множестве $\boldsymbol{\Theta}$. Для полной ясности и дальнейшего понимания контеста было введенно след-ее определение параметров простых и составных чисел в множ-ве Θ.
Определение 1. *Для числа* $\mathbf{n}$, *знач. числовых функций* $?(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 6xy \pm\ x\ \pm\ y$, $\forall\ x, y \in \mathbb{N}$ *представленные в виде* $n = (6x \pm 1)(6y \pm 1) = 6 \cdot (6xy \pm x \pm y) \pm 1$, *назовём* ***параметрами*** *числа* $\mathbf{n} \in ?$

На основе решения Диофантовых уравнений $6xy \pm x \pm y-? = 0$ были сформулированны следующие и очень важные и нужные теоремы и следствия.

Теорема 1. **Диофантовые уравнения P $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, ?)$: $\mathbf{6x}y\pm\mathbf{x}\pm\mathbf{y}-?=\mathbf{0}$ имеют решения, тогда и только тогда, когда числа вида $\mathbf{6}?\pm\mathbf{1}$ являются составными числами.**

Совершенно очевидно, что из этой теоремы 1, следуют два замечательных следствия:

1. $\forall\ \lambda$, простого числа вида $6\lambda+1$ не существует тройки чисел $(\lambda, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{N}$, которые были бы решениями Диофан. ур-й $\mathrm{P}_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \lambda)$: $6\mathrm{xy}-\mathrm{x}-\mathrm{y}-? = 0$ и $\mathrm{P}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \lambda)$: $6\mathrm{xy}+\mathrm{x}+\mathrm{y}-? = 0$

2. $\forall\ \lambda$, простого числа вида $6\lambda-1$ не существует тройки чисел $(\lambda, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{N}$, которые были бы решениями Диоф. ур-ий $\mathrm{P}_3(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \lambda)$: $6\mathrm{xy}-\mathrm{x}+\mathrm{y}-? = 0$ и $\mathrm{P}_4(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \lambda)$: $6\mathrm{xy}+\mathrm{x}-\mathrm{y}-? = 0$

Теорема 2. *Для того, чтобы* $\mathbb{N}$ *был параметром близнецов простых чисел необходимо и достаточно, чтобы ни одно Диофант.уравнение* $6xy \pm x \pm y-? = 0$*не имело решений в* $\mathbf{Z}$.

Ознакомившись с работой Dr. Franchesko Balesteri (Oxvord) –“En equivalent problem to the Prime Conjecture”, 21 Май 2011, которая сводит гипотезу близнецов аналогично к решениям таких же Диофантовых уравнений, как и полученные мною в теореме 2. Ссылаясь на какие-то работы по алгебраической геометрии президента американского математического общества (1969-1970 гг), Ошера Зарийского, уехавшего из Белоруссии в США в годы ВОВ. Расстроился, но понял, что нахожусь на правильном пути. В 2015, опубликовал алгоритм получения близнецов простых чисел [5] . В 2017, в статье “Распределение простых чисел и их алгоритмические приложения”, [3] дополнил иследования по простым и составным числам и в ходе иследований были обнаружены новые виды чисел близнецы составных чисел ***(TwCN)***.

В силу распределения параметров простых и составных чисел из множ. $\mathbf{\Theta}$ во множестве натуральных чисел [3, Табл.2] и программой [3, PrNb], натуральный ряд чисел разбивается на подмножества: 1. Мн - тв близнецов составных чисел ***TwCN*** 2. Мн- тв уникальных составных ***UC*** чисел 3. Мн-тв уникальных простых чисел ***PN*** , 4. Мн - тв близнецов простых чисел ***Tw*** и 5. Мн - тв уникальных transition (переходных) чисел ***UPC*** при одном и том же параметре ? числа с изменением форм $6?-1$ на $6?+1$ или наоборот переходят из простого $\leftrightarrows$ составное. Напр., λ= 4, при $6 \cdot 4\ -1 = 23$ - простое, $6 \cdot 4 + 1 = 25$ - составное.

В последние 50 лет интерес к законам распределения простых чисел [1] с теоретической точки зрения больше смещается в сторону практической. Особенно важным примером является их использование в криптографии [2], поэтому любые результаты, которые проясняют некоторые особенности законов распределения простых чисел, сразу становятся предметом изучения специалистов в области криптографии. Особый интерес в области криптографии в системе с открытыми ключами (в частности, в системе шифрования RSA) поднимает вопрос о том, является ли это конкретное (большое) число простым или нет. На случай определения порядкового номера простых чисел в табл.$\mathbf{P}_{\geqslant 5}$ и наоборот получены алгоритмы на базе распределения простых чисел. Например, к порядковому номеру $n = 10$ в Табл.$\mathbf{P}_{\geqslant 5}$ соответствует простое $\mathbf{P_{10}}$=$6 \cdot \mathrm{id} + (-1)^{\psi(n)} = 6 \cdot 6 + (-1)^2$=$\mathbf{37}$

n=10 $\to p$=37	id	$S_1 = S_1 + (\mathbf{0}{:}F_1 = \text{'-'}, \mathbf{1}{:}F_1 = \text{'+'})$	$S_1 + S_2 = n$?	$\psi(n)$	$S_2 = S_2 + (\mathbf{0}{:}F_2 = \text{'-'}, \mathbf{1}{:}F_2 = \text{'+'})$	$S_1 + S_2 = n$?	$\psi(n)$
	1	0+1=1	1+0=1	0	0+1=1	1+1=2	0
	2	1+1=2	2+1=3	0	1+1=2	2+2=4	0
	3	2+1=3	3+2=5	0	2+1=3	3+3=6	0
	4	3+1=4	4+3=7	0	3+0=3	4+3=7	0
	5	4+1=5	5+3=8	0	3+1=4	5+4=9	0
	6	5+0=5	5+4=9	0	4+1=5	5+5=**10**	**2**

Поскольку Б. Риман был великим специалистом по комплексному анализу и всех математиков он с ориентировал на аналитическую теорию чисел. Методы и способы исследования для которых многим еще не понятны. А задача на самом деле простая, определить в инт. $1 \div x$ число простых чисел, где $x \in \mathbb{N}$. Из распределения простых чисел следует простая формула:

$\pi(x) = 2 + \sum_{\lambda=1}^{m}(S_1 + S_2)$, где $m = \left[\frac{x}{6}\right]$ с погрешностью ±1 для π (x) от реального количества простых чисел в заданном интервале. Например,

1. $1 \div x = 100 \to 1 \div m = \left[\frac{x}{6}\right] = 16,\ \sum_{\lambda=1}^{\leqslant m} S_1{=}12, \sum_{\lambda=1}^{\leqslant m} S_2{=}11$, then $\pi(x) = 2 + 12 + 11 = 25$

2. $1 \div x = 558 \to 1 \div m = \left[\frac{x}{6}\right] = 93,\ \sum_{\lambda=1}^{\leqslant m} S_1{=}51, \sum_{\lambda=1}^{\leqslant m} S_2{=}47$, then $\pi(x) = 2 + 51 + 47 = 100$

Известно, что в интервале. $1 \div x = 558$ значение $\pi(x) = 100$. Однако, в том же интервале число простых чисел по закону распределения Гаусса $\pi(x) = \frac{x}{\ln x} = \frac{558}{6.32435896} \approx 90$. Преимущество формулы в том, что здесь могут быть погрешность лишь только на ±1.

Велика роль распределения простых чисел во многих приложениях, например, рассмотрим бинарную проблему Гольдбаха– Эйлера. Из свойств представления четных чисел $\zeta > 8$, $\zeta \equiv m \ (mod\ 6)$, где $\mathbf{m} = (0, \ \ 2, -2)$ четные числа $\zeta > 8$ равны сумме 2-х чисел вида $\theta_1 = 6\lambda_1 \pm 1$, $\theta_2 = 6\lambda_2 \pm 1$. Соответственно по остаткам m, четные числа $\forall\zeta > 8$ делятся на 3 типа и на сегменте $[1 \div \nu]$, где $\nu{=}(\zeta - m) \setminus 6$ параметр четного числа всегда существует такая пара чисел $(\lambda_1, \ \lambda_2)$ таких, что $\lambda_1 \in \Lambda_1 = [1 \ \div \left[\frac{\nu}{2}\right] \ ]$ и $\lambda_2 \in \Lambda_2 = \left[\left[\frac{\nu}{2}\right] \ \div \nu\right]$, где $\lambda_2 = \nu - \lambda_1$ лежат на объединениях множеств параметров: близнецов простых чисел $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{Tw}}$ и transition (переходных) чисел $\mathbf{\Pi}_{UPC}$.

Определение 2. Параметры (λ_1, λ_2) для чисел вида $\theta_1 = 6\lambda_1 \pm 1$, $\theta_2 = 6\lambda_2 \pm 1$, назовём *соответствующими параметрами* четных чисел $\zeta{>}8$, если $\lambda_1 \in \Lambda_1{=}\left[1; \ \left[\frac{\nu}{2}\right] \ \right]$ и $\lambda_2 \in \Lambda_2{=}\left[\left[\frac{\nu}{2}\right] \ +1; \ \nu\right]$, $\zeta{=}\theta_1 + \theta_2$.

Например, найдем соответствующие параметры четному числу $\zeta = 30$. Поскольку, число $30 \equiv 0(mod\ 6)$, тогда параметр четного числа 30 будет $\nu = (30 - 0)/6 = 5$, следовательно, параметры $\lambda_1 \in \Lambda_1 = [1, \ 2]$ и $\lambda_2 \in \Lambda_2 = [3, \ 4, \ 5]$.

1. Пусть $\lambda_1 = 1$, имеем $\lambda_2 = \nu - \lambda_1 = 5 - 1 = 4$, тогда $\theta_1 = 6 \cdot 1 - 1 = 5$, $\theta_2 = 6 \cdot 4 + 1 = 25$ или $\theta_1 = 6 \cdot 1 + 1 = 7$, $\theta_2 = 6 \cdot 4 - 1 = 23$. Так как $5 + 25 = 7 + 23 = 30$, тогда имеем соответствующие пары параметров $(\lambda_1, \lambda_2\ ) = (1; 4)$.

2. Пусть $\lambda_1 = 2$, имеем $\lambda_2 = \nu - \lambda_1 = 5 - 2 = 3$, $\theta_1 = 6 \cdot 2 - 1 = 11$, $\theta_2 = 6 \cdot 3 + 1 = 19$ или $\theta_1 = 6 \cdot 2 + 1 = 13$ и $\theta_2 = 6 \cdot 3 - 1 = 17$. Т.к. $11 + 19 = 13 + 17 = 30$, тогда имеем соответствующие пары параметров $(\lambda_1, \lambda_2) = (2; 3)$. Итак, четное число $\zeta = 30$ имеет 2 соответствующих наборов параметров: $(\lambda_1, \lambda_2) = \{(1; 4), (2; 3)\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prashar K. Primzahlverteilung. Springer, Berlin, 1957. 527 p. (Russ. ed.: Prakhar K. Raspredelenie prostykh chisel. Moscow, Mir Publ., 1967. 511 p.).

2. Crandall R., Pomerance C. Prime Numbers: A Computational Perspective. New York: Springer-Ver lag, 2001. 545 p. (Russ. ed.: Krendall R., Pomerans K. Prime numbers. Криптографические аспекты. Moscow, URSS: Knizhnyi dom «Librokom», 2011. 664 p.)

3. Chermidov S. I. Distribution primes and composite numbers and their algorithmic appendices 2017, Vestnik Astraxan State Texnical University, management, computer engineering, computer science

4. Чермидов С.И О факторизации натуральных чисел ж-л , Диалоги о науке, 2011, №2, с. 68-69.

5. Чермидов С. И. Распредел-е простых чисел. Алгоритм чисел близнецов и их бесконечность // Политематический сетевой электронный научный ж-л Кубанского гос. аграр-го ун-та (Научный ж-л КубГАУ) электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. №06(110). С.414–436.– IDA [article ID]:1101506028.:„ 438 у.п.л. http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/28.pdf

6. Francesca Balestrieri An Equivalent Problem To The Twin Prime Coonjecture, July 1, 2011

7. Hardy G H ,Wright E M An Introduction to the Theory of Num/s, 1988 Clarendon Press Oxford, 5^{th} ed

8. Sobol I. M.. Method Monte - Carlo, M., «Nauka», 1968. 64 s.

9. Deza E. I. Специальные числа натурального ряда. Уч.пособие. URSS. М., ЛИБРОКОМ», 2010

10. Бухштаб А.А. Теория чисел – М., Просвещение, 1966.-384 стр.

11. Виноградов И.М. Основы теории чисел. –М. Наука 1981-176 стр.

12. Боревич З.И. Шафаревич И.Р. Теория чисел М. Наука 1972. 496 стр.

13. Шнирельман Л. Г. Простые числа М.-Л. Гостехиздат 1940, 59 стр.

———————————————————————————————

УДК 511.325

Короткие двойные суммы значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел

Д. Дж. Хокиев (Таджикистан, г. Душанбе)
Таджикский национальный университет
e-mail: khdj.91@mail.ru

Short double the sum of values of the Dirichlet character of shifted products of two numbers

D. Dj. Khokiev (Tajikistan, Dushanbe)
Tajik national University
e-mail: khdj.91@mail.ru

При изучении закона распределения значений χ_q в последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида

$$S_y(x,l)=\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x\\ (n,q)=1,}}\chi(n-l),\quad (l,q)=1;$$

то есть *сумм значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел*, исследованных в первой главе, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм вида

$$W=\sum_{M<m\leqslant 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l(\mathrm{mod}\ \nu)}}b_n\chi_q(mn-l),\quad (l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\leqslant\tau^c(m)$ и $|b_n|\leqslant\tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма W называется *двойной суммой значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел*, а при $x<q$ – *короткой суммой.*

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму W, для простого q получил её нетривиальную оценку при $x\geqslant q^{1+\varepsilon}$ а затем нетривиальную оценку короткой суммы W при $x\geqslant q^{0{,}75+\varepsilon}$

[1,2]. Наилучшая нетривиальная оценка для простого q при $x \geqslant q^{0,5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [3].

З.Х. Рахмонов изучил сумму W для составного q и получил нетривиальную оценку при $x \geqslant q^{1+\varepsilon}$ [8, 9, 10]. Нетривиальную оценку короткой суммы W для составного q при $x \geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [11]. З.Х. Рахмонов для составного q доказал нетривиальную оценку W при $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ [12, 13, 14].

Во этой работе при $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, получены нетривиальные оценки короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих соответственно

сумму для длины – N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{4}+\theta}$ и $0 < \theta < \frac{1}{4}$ (теорема 1);

сумму для длины – N, которой выполняется неравенство $q^{\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{6}}$ (теорема 2).

Теорема 1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leqslant U < 2N$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} |a_m|^{\alpha} \ll M \ln c^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$W = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l (\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l) \ll B\left(M^{\frac{3}{4}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{4}}Nq^{\frac{1}{8}+\frac{\delta}{4}}\right)\ln c^{\frac{2c_1+c_2+1}{4}}.$$

Следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leqslant U < 2N$, $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{4}+\theta}$, $D^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant D$, $\nu \leqslant \exp\sqrt{2\ln c}$, a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leqslant \tau_5(m)$, $|b_n| \leqslant 1$. Тогда при $x \geqslant q^{\frac{3}{4}+\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка*

$$W = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l (\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l) \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\ln c}\right).$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом работы А.А. Карацубы [3, 4, 5, 6] об оценках коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел W. В нашем случае сумму для длины – N, которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{4}-\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{4}+\theta}$ и $0 < \theta < \frac{1}{4}$, применяется также метод работы З. Х. Рахмонова [14] с учётом оценки Берджесса [15].

Теорема 2. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leqslant U < 2N \leqslant q^{\frac{1}{6}}$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\leqslant 2M} |a_m|^{\alpha} \ll M \ln c^{c_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \qquad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$W = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1,\, mn\equiv l (\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n \chi_q(mn-l) \ll BM^{\frac{5}{6}}N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\delta}\ln c^{\frac{4c_1+c_2+1}{6}}.$$

Следует утверждение теоремы.

Следствие 2. *Пусть M, N, U — целые числа, $N \leqslant U < 2N$, $q^{\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{6}}$, $D^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant D$, $\nu \leqslant \exp\sqrt{2\ln c}$, a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leqslant \tau_5(m)$, $|b_n| \leqslant 1$. Тогда при $x \geqslant q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка*

$$W = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1,\, mn\equiv l(\mathrm{mod}\ \nu)}} b_n\chi_q(mn-l) \ll \frac{x}{\nu}\exp\left(-0,7\sqrt{\ln c}\right).$$

Доказательство теоремы 2 проводится также методом работ А.А. Карацубы [3,5,7] об оценке коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W. В нашем случае сумму для длины – N, которой выполняется неравенство $q^{\theta} \leqslant N \leqslant q^{\frac{1}{6}}$, в сочетании с методом работы З.Х. Рахмонова [14] и опирается на оценку Берджесса [15]

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.,М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.

2. Виноградов И.,М. Особые варианты метода тригонометрических сумм // М.: Наука. 1976.

3. Карацуба А.А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // Успехи математических наук. 2008, том 63, вы- пуск 4(382). С. 43 — 92.

4. Карацуба А.А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1287 – 1289.

5. Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

6. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

7. Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами // Доклады АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 517 – 518.

8. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами. – ДАН Тадж ССР, 1986, т. 29, № 1, с. 16–20.

9. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения. – Труды Математического института РАН, 1994, т. 207, с. 286–296.

10. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 19 94. Т. 207. С. 286 – 296.

11. Фридландер Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах. – Матем. заметки, 2010, т. 88, в. 4, с. 605–619.

12. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5 – 9.

13. Рахмонов З.Х .Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. Вып. 4(2). С. 113–117.

14. Рахмонов З.Х.Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15 . В. 2(50). С. 73 – 100

15. Burgess D.A. On character sums and L – series II // Proc. London Math. Soc. 1963, v. 13, № 3, pp. 524 – 536.

———————————————————————————————

Секция 6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

УДК 511.2

О возможном подходе к доказательству гипотезы Била математикой эпохи Ферма–Эйлера

В. В. Агафонцев (Россия, г. Псков)
Псковский государственный университет
e-mail: fon-valery-ag@yandex.ru

On a possible approach to proving Beal's conjecture by the matematics of the Fermat's–Euler's epoch

V. V. Agafontsev (Russia, Pskov)
Pskov State University
e-mail: fon-valery-ag@yandex.ru

Напомним формулировку гипотезы, выдвинутой в 1993 году американским любителем математики Эндрю Билом (Andrew Beal): *If* $A^x + B^y = C^z$, *where* A, B, C, x, y *and* z *are positive integers and* $x, y,$ *and* z *are all greater than 2, then* A, B, C *must have a common prime factor*. В переводе на русский: *Если* $A^x + B^y = C^z$, *где* A, B, C, x, y, z *- натуральные числа;* $x, y, z > 2$, *то* A, B, C *имеют общий простой делитель*. В настоящее время гипотеза Била зарегистрирована в Американском математическом обществе (American Mathematical Society) как ***Beal's conjecture***.

В работе [1] рассмотрен возможный подход к доказательству гипотезы Била со ссылкой на инструментарий Эндрю Уайлса (Andrew Wiles) и, в частности, на его косвенное доказательство Последней (Великой) теоремы Ферма, выполненное математическим инструментарием XX века [2].

Представим возможный подход к доказательству гипотезы Била инструментарием эпохи Ферма-Эйлера, то есть математическим инструментарием XVII-XVIII веков. Такое доказательство включает следующие этапы.

Этап 1. Доказательство леммы 1.

Лемма 1. *Число* C^z, *где* $C, z \in \mathbb{N}$, *в* C*-ричной позиционной нумерации представимо равенством* $C^z = (10...0)_C$, *в правой части которого точно* z *нулей.*

Этап 2. Доказательство леммы "ABC".

Лемма "ABC". *Необходимое и достаточное условие выполнения равенства* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $z \geq 2$; $(A, B, C) = 1$, *представимо триадой равенств*:

$$\mathbf{1)} A^x = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i; \qquad \mathbf{2)} B^y = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i; \tag{1}$$

$$\mathbf{3)} C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \tag{2}$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

Здесь и далее символом $\mathbb{N}$ обозначены натуральные, то есть положительные целые числа *без нуля*. Символом $\mathbb{N}_0$ обозначены натуральные числа *с нулём*.

Лемма "ABC" имеет два следствия.

Следствие 1. *Необходимое условие выполнения равенства* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $z \geq 2$; $(A, B, C) = 1$, *представимо равенством*

$$A^x + B^y = (C-1) \cdot C^{z-1} + C^{z-1}$$

Следствие 2. *Равенство*

$$a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} (a_i + b_i) \cdot C^i = C^z, \tag{3}$$

в котором числа $a_0, b_0, C \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$ *образуют величины* $a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i$ *и* $b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i$, *являющиеся точными* x *и* y *степенями* $(x, y \in \mathbb{N})$ *некоторых натуральных чисел* A *и* B, *причём* $(A, B, C) = 1$— *не зависит от значений* x *и* y *для любых* $x \geq 1, y \geq 1$ *и определяется* ***только*** *значением* $\boldsymbol{z}$.

Можно убедиться в истинности леммы "ABC" и её следствий на примере таких случаев:

1) $x = y = z = 2$; $3^2 + 4^2 = 5^2$; $8^2 + 15^2 = 17^2$; $20^2 + 21^2 = 29^2$;

2) $x = y = 2, z > 2$; $2^2 + 11^2 = 5^3$; $7^2 + 24^2 = 5^4$; $29^2 + 278^2 = 5^7$;

3) $x(y) = 2, y(x) > 2; z = 2$; $13^2 + 3^3 = 14^2$; $2^6 + 15^2 = 17^2$; $5^4 + 312^2 = 313^2$;

4) $x(y) = 2, y(x) > 2; z > 2$; $46^2 + 3^4 = 13^3$; $2^5 + 7^2 = 3^4$; $127^3 + 654^2 = 19^5$;

5) $x > 2, y > 2; z = 2$; $2^7 + 17^3 = 71^2$; $3^5 + 11^4 = 122^2$; $17^4 + 42^3 = 397^2$.

Доказательство леммы "ABC" и её следствия 1 достаточно полно дано в работах [3], [4]. В работах [5], [6] в развёрнутом виде доказано следствие 2 леммы "ABC".

Покажем на одном примере истинность следствия 2 леммы "ABC". Рассмотрим случай выполнения равенства

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1 \cdot C + a_0 + b_0 = C^3,$$

полученного из равенства (3) при $z = 3$. В нём величины

$a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$ и $b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$:

1) при $a_2 = 4$, $a_1 = 6$, $a_0 = 5$, $C = 7$ и

$b_2 = 2$, $b_1 = 0$, $b_0 = 2$, $C = 7$

являются точными x и y степенями $(x = 5, y = 2)$ натуральных чисел $A = 3$ и $B = 10$ соответственно; (A,B,C)=1;

2) при $a_2 = 12$, $a_1 = 6$, $a_0 = 10$, $C = 13$ и

$b_2 = 0$, $b_1 = 6$, $b_0 = 3$, $C = 13$

являются точными x и y степенями $(x = 2, y = 4)$ натуральных чисел $A = 46$ и $B = 3$ соответственно; (A,B,C)=1;

3) при $a_2 = 2$, $a_1 = 29$, $a_0 = 26$, $C = 71$ и

$b_2 = 68$, $b_1 = 41$, $b_0 = 45$, $C = 71$

являются точными x и y степенями $(x = 3, y = 2)$ натуральных чисел $A = 23$ и $B = 588$ соответственно; (A,B,C)=1.

Очевидно, что для равенств $3^5 + 10^2 = 7^3$, $46^2 + 3^4 = 13^3$, $23^3 + 588^2 = 71^3$ *вид* величин $a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$ и $b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$ является *общим*, не зависящим от значений x и y, определяемым ***только*** значением **z**.

Этап 3. Доказательство теоремы 1.

Теорема 1. *Равенство*

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3, \tag{4}$$

невыполнимо *для любых наборов чисел* $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$, *с которыми выполнялись бы равенства* $A^x = a_0 + \sum_{i=1}^{z-1} a_i \cdot C^i$, $B^y = b_0 + \sum_{i=1}^{z-1} b_i \cdot C^i$, $A^x + B^y = C^z$ *при условиях:* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2, y > 2, z > 2$.

Этап 4. Доказательство теоремы 2.

Теорема 2. *Равенство* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2, y > 2, z > 2$ ***невыполнимо*** *для любых натуральных чисел* $(A, B, C) = 1$.

Этап 5. Доказательство теоремы 3.

Теорема 3. *Равенство* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2, y > 2, z > 2$ ***выполнимо*** *для составных натуральных чисел* A, B, C, *имеющих общий делитель.*

Этап 6. Доказательство теоремы 4.

Теорема 4. *Равенство* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2, y > 2, z > 2$ ***выполнимо*** **только** *для составных натуральных чисел* A, B, C, *имеющих общий делитель.*

Остановимся на принципиально важном этапе доказательства, в частности, на доказательстве теоремы 1.

Доказательство. Прежде всего, покажем, что равенство (4) вытекает из равенства $A^x + B^y = C^z$ при *любом* натуральном $z > 2$. Действительно, необходимое и достаточное условие выполнения этого равенства в соответствии с леммой "ABC" представляется триадой равенств (1), (2). Из равенств (2) следует *необходимость* выполнения такой цепочки равенств для *любого* натурального $z > 2$: $C = a_2 + b_2 + 1$; $C = a_1 + b_1 + 1$; $C = a_0 + b_0$. Подставляя эти равенства в тождество $(C-1) \cdot C^2 + (C-1) \cdot C + C = C^3$, получим равенство (4). Отметим, что в соответствии со следствием 2 леммы "ABC" равенство (4) при $z > 2$ не зависит от значений x и y равенства $A^x + B^y = C^z$ для *любых* $x \geq 1, y \geq 1$. Следовательно, при $z > 2$ равенство (4) является ***общим*** как для равенства $A^z + B^z = C^z$, так и для равенств вида $A^x + B^y = C^z$, в которых $x > 2, y > 2$. Поэтому *из доказательства невыполнимости равенства* (4) для *любых* наборов чисел $C, a_i, b_i (i = 0, 1, 2)$ *хотя бы для одного гипотетического равенства* $A^z + B^z = C^z$ *при* $z > 2$ *следует невыполнимость равенства* (4) *и для равенств вида* $A^x + B^y = C^z$, в которых $x > 2, y > 2$.

Итак, предположим, что равенство (4), вытекающее из равенства $A^x + B^y = C^z$, при заданных условиях $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; (A, B, C) = 1; x > 2, y > 2, z > 2$ выполнимо хотя бы для одного набора чисел C, a_i, b_i, где $i = 0, 1, 2$. Выполняя условие данной теоремы ($x > 2, y > 2, z > 2$ и учитывая следствие 2 леммы "ABC"), положим $x = 3, y = 3, z = 3$. Получим гипотетическое равенство

$$A^3 + B^3 = C^3. \quad (5)$$

В соответствии с леммой "ABC" необходимое и достаточное условие выполнения равенства (5) требует выполнения такой триады равенств:

$$\mathbf{1)} A^3 = a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0; \qquad \mathbf{2)} B^3 = b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0; \quad (6)$$

$$\mathbf{3)} C = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0 \quad (7)$$

Если бы выполнялись равенства (7), то, исходя из тождества $(C-1) \cdot C^2 + (C-1) \cdot C + C = C^3$, выполнялось бы и равенство (4). Если бы выполнялись равенства (6), (7), то было бы выполнимо и равенство (5). И наоборот: если бы существовали ненулевые положительные целые числа $(A, B, C) = 1$, удовлетворяющие равенству (5), то выполнялись бы равенства (6), (7). Исходя из этих равенств число C должно представляться числами $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C-1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$. Число A^3 должно представляться числами $a_i (i = 0, 1, 2), C^2$ и C. Число B^3 должно представляться числами $b_i (i = 0, 1, 2), C^2$ и C. Следовательно, если бы существовали ненулевые положительные целые числа A, B, C, удовлетворяющие равенству (5), то в силу необходимого и достаточного условия его выполнения эти числа должны представляться набором чисел $a_i, b_i (i = 0, 1, 2)$. Но, как доказал Л. Эйлер, не существует ненулевых положительных целых чисел A, B, C, с которыми равество (5) было бы выполнимо. В наличие такого доказательства сошлёмся на [7; §3], [8; гл.2, пп.2.1, 2.2] и [9]. Так как не существует натуральных чисел A, B, C, удовлетворяющих равенству (5), то не существует и таких наборов чисел $a_i, b_i (i = 0, 1, 2)$, которыми числа A, B, C в соответствии с необходимым и достаточным условием выполнения равенства (5) должны представляться. Следовательно, *при любых наборах чисел* $C, a_i, b_i (i = 0, 1, 2)$ *триада равенств* (6), (7) *будет невыполнимой*. Невыполнимость равенств (7) означает выполнимость неравенств $C \neq a_2 + b_2 + 1$; $C \neq a_1 + b_1 + 1$; $C \neq a_0 + b_0$ при *любых* наборах чисел $C, a_i, b_i (i = 0, 1, 2)$. Исходя из тождества $(C - 1) \cdot C^2 + (C - 1) \cdot C + C = C^3$ и включая в него подстановки из этих неравенств, получим:

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq C^3 \quad (8)$$

Таким образом, исходное утверждение, основанное на предположении о выполнимости равенства (4), вытекающего из равенства $A^x + B^y = C^z$ при заданных условиях $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2, y > 2, z > 2$ хотя бы для одного набора чисел C, a_i, b_i, где $i = 0, 1, 2$, ***при тех же условиях*** *через последовательность импликаций привело к противоположному утверждению*. В силу фундаментального закона логики- закона противоречия, сформулированного Аристотелем: "невозможно, чтобы противоречащие утверждения были истинными по отношению к одному и тому же"[10, глава III, раздел "Учение об истине и законах мышления"], приходим к выводу о том, что исходное утверждение, основанное на предположении, является *ложным*. Следовательно, равенство (4), вытекающее из равенства $A^x + B^y = C^z$ при условиях $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2, y > 2, z > 2$ **невыполнимо** для *любых наборов чисел* $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Теоремы 1, 2, 3, 4 представлены в работе [6].

Напомним формулировку гипотезы Била: *Если $A^x + B^y = C^z$, где A, B, C, x, y, z - натуральные числа; $x, y, z > 2$, то A, B, C имеют общий простой делитель*. Следовательно, на основании теорем 2, 3, 4 можно утверждать, что гипотеза Била (***Beal's conjecture***) **доказана** и уточнена, так как общий делитель чисел A, B, C может быть не только простым, но и *составным* натуральным числом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонцев В. В. О возможном подходе к доказательству гипотезы Била // XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённая 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.: Тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 13-18 мая 2019 г.) — Тула, 2019. С. 223-227. [Электронный ресурс– https://poivs.tsput.ru/conf/international/XVI/files/Conference2019M.pdf]

2. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem //Annals of Mathematics, 141:3 (1995), pp. 443-551.

3. Агафонцев В. В. Лемма «ABC» в исследовании диофантовых равенств // Международная конференция «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России».: Тезисы докладов. Международная конференция (Казань, 18-22 октября 2017 г.) —Казань, 2017. Т.2, С. 12-18.

4. Агафонцев В. В. Лемма «ABC» и Последняя теорема Ферма // III Международная конференция «Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2017)».: Тезисы докладов. Международная конференция (Орёл, 23-26 ноября 2017 г.) — Орёл, 2017. С. 113 -119. [Электронный ресурс–https://elibrary.ru/item.asp?id=35260995].

5. Агафонцев В. В. От позиционных систем счисления к диофантовым равенствам // Инновации в науке: научный журнал —№8(84).—Новосибирск, Изд. АНС «СибАК», 2018. С. 12-17. [Электронный ресурс–https://sibac.info/journal/innovation/84].

6. Агафонцев В. В. Позиционные нумерации в диофантовых равенствах // IV Всероссийская конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук (СПФМН-2018)».: Тезисы докладов, часть I. Всероссийская конференция с международным участием (Орёл, 22-25 ноября 2018 г.) — Орёл, 2018. С. 93-100. [Электронный ресурс–https://elibrary.ru/item.asp?id=36844659].

7. Постников М. М. Введение в теорию алгебраических чисел. М.: Наука, 1982.

8. Эдвардс Г.[Edwards H.] Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел /пер. с англ. В.Л. Калинина и А.И. Скопина /под ред. Б.Ф. Скубенко. М.: Мир, 1980.

9. Мачис Ю.Ю. О предполагаемом доказательстве Эйлера //Матем. заметки. 2007. N**82**:3. С. 395-400.

10. Маковельский А.О. История логики. М.: Изд-во Кучково поле, 2004, ISBN 5-86090-081-3.

———————————————————————

УДК 511.42

О сумме мер областей малых значений неприводимых целочисленных полиномов[1]

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
Д. В. Васильев (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси

Summing the measures of small value areas over irreducible integer polynomials

V. I. Bernik (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
D. V. Vasilyev (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
A. S. Kudin (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: knxd@yandex.ru

Проблема Малера и ее обобщения стали основой для многих современных задач метрической теории диофантовых приближений.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф19М-088

Для целочисленного многочлена $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ обозначим как $H(P) = \max\limits_{0\le j\le n} |a_j|$ его высоту и как $\deg P = n$ его степень. Множества целочисленных многочленов ограниченной степени и высоты обозначим как

$$\mathcal{P}_n := \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \le n\},$$
$$\mathcal{P}_n(Q) := \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}.$$

Аналогичные множества, состоящие только из неприводимых многочленов, обозначим соответственно как $\mathcal{P}_n^*$ и $\mathcal{P}_n^*(Q)$.

Пусть $\Psi(q) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — положительная монотонно убывающая функция, а $J \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал. Обозначим как $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in J$, для которых найдется бесконечное число полиномов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих неравенству

$$|P(x)| < H(P)^{-n+1}\Psi(H(P)).$$

При $\Psi(H(P)) = H^{-1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, нетрудно доказать с помощью принципа ящиков Дирихле, что $\mathcal{L}_n = J$. Малер в своей работе 1932 г. [4] предположил, что мера Лебега $\mu\mathcal{L}_n$ равна нулю при $\Psi(H(P)) = H^{-1-\varepsilon}$. Проблема Малера была полностью решена Спринджуком в пространствах действительных, комплексных, и $p-$адических чисел [5]. В 1966 году А. Бейкер [1] высказал гипотезу, что в данном случае справедлив аналог теоремы Хинчина:

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1(J), & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Эта гипотеза в случае сходимости была доказана В. И. Берником [3], а в случае расходимости — В. В. Бересневичем [2].

Для фиксированного полиномах $P \in \mathcal{P}$ из некоторого класса $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_n(Q)$ обозначим как $I(P)$ множество $x \in J$, удовлетворяющих неравенству

$$|P(x)| < Q^{-n-\varepsilon}.$$

При решении проблемы Малера и других зачастую возникает задача получения эффективных оценок сумм вида $\sum_{P\in\mathcal{P}} \mu I(P)$ для различных классов полиномов $\mathcal{P}$. Спринджук [5] предположил, что для класса неприводимых полиномов ограниченной степени и высоты сумма мер $I(P)$ стремится к нулю:

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_n^*(Q)} \mu I(P) \xrightarrow[Q\to\infty]{} 0. \qquad (1)$$

Доказана теорема, подтверждающая справедливость (1).

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, что для всех $Q > Q_0(n, \varepsilon)$ выполняется*

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_n^*(Q)} \mu I(P) < Q^{-\varepsilon_1}. \qquad (2)$$

Нетрудно показать, что теорема 1 неверна, если в классе $\mathcal{P}$ рассматривать также и приводимые полиномы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baker, A. On a Theorem of Sprindzuk / A. Baker // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1966. — Vol. 292, No. 1428. — pp. 92–104.
2. Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. — 1999. — Vol. 90, No. 2. — pp. 97–112.
3. Берник, В.И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arith. — 1989. — Vol. 53, No. 1. — pp. 17–28.
4. Mahler, K. Über das Mass der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. — 1932. — Vol. 106. — pp. 131-139.
5. Sprindzhuk, V. G. Mahler's Problem in Metric Number Theory / V. G. Sprindzhuk. — Minsk: Nauka i Tehnika. — 1967.

УДК 511.36

Оценка линейной формы от значений q-базисных рядов

А. Х. Муньос Васкес (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

The evaluation of the linear form based in the values of the q-basic series

A. Kh. Munos Vaskes (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

В статье продолжаются исследования начатые в работах [1] – [3]. Рассматриваются количественные оценки линейной формы от q – базисных гипергеометрических рядов, сформулирована теорема и следствие из неё.

Теорема 1. *Пусть p - простое число, $q = p^m, m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$, причём числа a, b отличны от 0 и 1. Пусть $\xi = cp^t$, где $c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$, $t \in \mathbb{N}$,*

$$t > m + \log_p |2abc|.$$

Тогда для любой линейной формы $L(\xi) = AR_0(\xi) + BR_1(\xi)$, $A, B \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ удовлетворяющих условию $\max(|A|, |B|) \leqslant H, H \geqslant H_0$, где H_0 – эффективно вычисляемая постоянная, зависимая от a, b, q, ξ. Выполнено неравенство

$$|L(\xi)|_p > C_0 H^{C_1 \log_p H + C_2} \tag{1}$$

здесь C_0, C_1, C_2 – эффективно вычисляемые постоянные.

Следствие 1. *Если $\tilde{\xi}$ имеет вид $\tilde{\xi} = \xi + \varepsilon_H$, где ε_H – любое целое p – адическое число, норма которого меньше, чем правая часть неравенства (1), то неравенство (1) сохраняется при замене ξ на $\tilde{\xi}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита – Паде обобщенных гипергеометрических функций // Математический сборник. 1994. Том 185, № 10. С. 39–72.

2. Чирский В. Г. Линейная независимость p – адических значений некоторых q – базисных гипергеометрических рядов // Фундамент. и прикл. математика. 1999. Том 5, № 2, С. 619–625.

3. Чирский В. Г. Приближения Эрмита – Паде для некоторых q – базисных гипергеометрических рядов // Вестн. Моск. Ун–та. 2000. Сер. 1, Математика. Механика., № 2, С. 7–11.

УДК 511.46

Проблемы теории трансцендентных чисел, возникающие в интегральной геометрии

В. В. Волчков (Донецкая народная республика, г. Донецк)
Донецкий национальный университет
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
Вит. В. Волчков (Донецкая народная республика, г. Донецк)
Донецкий национальный университет, Донецк
e-mail: vvolna936@gmail.com

Problems of transcendental number theory arising in integral geometry

V. V. Volchkov (Donetsk people's Republic, Donetsk)
Donetsk national University
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com
Vit. V. Volchkov (Donetsk people's Republic, Donetsk)
Donetsk national University
e-mail: vvolna936@gmail.com

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $J_{\frac{n}{2}}$ – функция Бесселя первого рода с индексом $n/2$. Обозначим через $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность всех нулей функции $J_{\frac{n}{2}}$ на $(0, +\infty)$, перенумерованных в порядке возрастания. Из теоремы Зигеля следует, что все числа ν_m являются трансцендентными. Вопрос об их алгебраической независимости является чрезвычайно трудным, и в настоящее время к его решению пока не видно подходов. Сформулируем следующее более слабое предположение.

Гипотеза. *Пусть $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ и $i \neq j$. Тогда равенство $\nu_i/\nu_j = \nu_k/\nu_l$ выполнено лишь при $k = i$, $l = j$.*

Данная гипотеза возникла в результате исследования следующей задачи интегральной геометрии. Пусть r_1 и r_2 – фиксированные положительные числа и функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ имеет нулевые интегралы по всем шарам в $\mathbb{R}^n$ с радиусами r_1 и r_2. При каких r_1 и r_2 отсюда следует, что f – нулевая функция?

Известная теорема о двух радиусах (см., например, [1, часть 2, гл. 1]) утверждает, что $f = 0$, если r_1/r_2 не равно отношению двух нулей функции $J_{\frac{n}{2}}$. Более того, в противном случае существуют ненулевые функции с указанным условием, и возникает вопрос об описании этого множества функций. Этот вопрос непосредственно связан со сформулированной выше гипотезой. Можно показать, что в случае справедливости гипотезы выполнено следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $r_1, r_2 > 0$ *и* $r_1/r_2 = \nu_i/\nu_j$ *при некоторых* $i, j \in \mathbb{N}$. *Пусть также* $\lambda = \nu_i/r_1 = \nu_j/r_2$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Функция* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *имеет нулевые интегралы по всем шарам в* $\mathbb{R}^n$ *с радиусами* r_1 *и* r_2.

2. $\Delta f + \lambda^2 f = 0$, *где* Δ – *оператор Лапласа в* $\mathbb{R}^n$ *и равенство понимается в смысле теории распределений.*

Таким образом, множество функций с указанными нулевыми интегралами совпадает с множеством собственных функций оператора Лапласа с соответствующим собственным значением. Отметим также, что подобный результат будет неверным, если сформулированная выше гипотеза неверна. Аналогичные проблемы и результаты можно сформулировать и для неевклидовых пространств (см. [2], [3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht. 2003. 454 p.
2. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer. 2009. 672 p.
3. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser. 2013. 592 p.

———————————————————————————————

УДК 511.361

О значениях гипергеометрических функций

П. Л. Иванков (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ivankovpl@mail.ru

On the values of hypergeometric functions

P. L. Ivankov (Russia, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Пусть $\mathbb{I}$ – мнимое квадратичное поле, $\alpha \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$, $m > 1$ – натуральное число,

$$a(x) = x + (m-1)\alpha, \ \ b(x) = x \prod_{q=1}^{m-1} \Big(x + m\alpha + \frac{q}{m-1} \Big).$$

Рассмотрим при $j = 1, \ldots, m$ функции

$$F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_j(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \, ,$$

где
$$\chi_1(\nu) = 1,\ \chi_2(\nu) = \nu,\ \chi_j(\nu) = \chi_{j-1}(\nu)\Big(\nu + m\alpha + \frac{j-2}{m-1}\Big),\ j = 3, \ldots, m.$$

Пусть $\xi \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ и для любого нетривиального набора h_j, $j = 1, \ldots, m$, – целых чисел из поля $\mathbb{I}$ – выполняется неравенство
$$\Big|\sum_{j=1}^{m} h_j F_j(\xi)\Big| > H^{1-2m-\epsilon},$$
где $H = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} |h_j| \geqslant H_0$; H_0 зависит от ϵ.

———————————————————————————

УДК 511.36

Экстремальность и усиленная экстремальность многообразий в метрической теории диофантовых приближений

Э. И. Ковалевская (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный аграрный технический университет (БГАТУ)
e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Extremality and strongly extremality manifolds in metric theory of Diophantine approximation

E. I. Kavaleuskaya (Belarus, Minsk)
Belarusian state agrarian technical University
e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Размышляя над темой тезиса для настоящей конференции, мы нашли в списке литературы [13], с. 169, работу А. И. Виноградова в соавторстве с Г. В. Чудновским "Доказательство экстремальности определенных многообразий"(1984 г.) и решили дополнить тезисы [2], [3] обсуждением еще одного аспекта данной теории.

Напомним, что в [2] сформулированы две фундаментальные теоремы метрической теории диофантовых приближений на многобразиях. Одну из них [9, с. 78-87, 90-93] доказал В. Г. Спринджук. Другую получили Д. Я. Клейнбок и Г. А. Маргулис [15]. Первая теорема (1977 г.) была доказана методом *тригонометрических сумм.* Вторая теорема (1998 г.) - *методами эргодической теории.* Для ее доказательства авторы нашли связь между диофантовыми приближениями и однородными динамическими системами. В [2] также указаны и другие методы, применяемые в рассматриваемой теории. В [3] приведены некоторые классы экстремальных многообразий, определяемых их геометрическими или арифметическими свойствами.

Понятия *экстремального* и *сильно экстремального* многообразия были введены Спринджуком (см. [9], с. 64-65 и с. 136). Пусть $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ и $||x||$ означает расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого. Обозначим через $w(\overline{\gamma})$ точную верхнюю грань таких $w > 0$, для которых неравенство
$$||\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_n a_n|| < (a_1' \cdots a_n')^{-w}, \quad a = \max(1, |a_i|) \tag{1}$$
имеет бесконечно много решений в наборах целых чисел $(a_1, \ldots, a_n)$. Соответственно, обозначим через $v(\overline{\gamma})$ точную верхнюю грань таких $v > 0$, для которых неравенство
$$\prod_{1\leqslant j\leqslant n} ||\gamma_j q|| < q^{-v} \tag{2}$$

имеет бесконечно много целых решений $q > 0$. Из "принципа ящиков" Дирихле следует, что $v(\overline{\gamma}) \geqslant 1$. Возникла следующая проблема: *каким условиям должно удовлетворять многообразие* Γ, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \Gamma < n$, *чтобы для почти всех* $\overline{\gamma} \in \Gamma$ *(в смысле меры Лебега на* Γ*) выполнялось* $v(\overline{\gamma}) = 1$?

"Принцип переноса" [9], с. 65, устанавливает соотношение между неравенствами (1), (2) и величинами w, v, из которого следует, что равенства

$$v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 1, \quad w(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 1$$

равносильны. Впервые такая задача была рассмотрена в [8]. Следуя Спринджуку, эти многообразия Γ стали называть *сильно экстремальными*.

Заметим, что для точек $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *сильно экстремального* многообразия Γ можно получать не только сильную равномерную распределенность дробей $(\{\gamma_1 q\}, \ldots, \{\gamma_n q\})$ с остатком вида $O(Q^\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ как угодно мало, при $q \leqslant Q$, но также выводить асимптотику числа решений систем диофантовых неравенств

$$\max(||\gamma_1 q||, \ldots, ||\gamma_n q||) < \psi(q), \quad q \leqslant Q \tag{3}$$

для определенного класса монотонно убывающих функций $\psi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ (см. [1], [7]).

В 1962-1965 гг. П. Галлагер (P. Gallagher) стал изучать более общие, чем в неравенстве (2) диофантовы приближения. Именно, в правой части (2) величина q^{-v} была заменена на невозрастающую аппроксимирующую функцию ψ. Такие точки $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ стали называть *мультипликативно* ψ*-аппроксимируемыми* [14]. Современные достижения в этом направлении, которое называют теперь *мультипликативной теорией* на многообразиях, см. в [11], [12].

Сформулируем несколько результатов, относящихся к *сильно экстремальным* многообразиям.

Теорема 1. ([6]). *Пусть поверхность* Γ *задана уравнением* $z = f(x, y)$, *где* $f(x, y)$ — $C^{(3)}$-*функция в* $\mathbb{R}^2$. *Пусть полная (гауссова) кривизна* Γ *отлична от нуля почти всюду (в смысле меры Лебега) в* $\mathbb{R}^2$. *Тогда поверхность* Γ — *сильно экстремальна.*

Эта теорема обобщает и усиливает теорему В. М. Шмидта (1964 г.).

Теорема 2. ([5]). *Пусть* $n \geqslant 3$, $m \geqslant n + 1$ — *целые числа, функции* $u_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$ $(1 \leqslant j \leqslant m + n)$ *таковы, что многообразие* $\Gamma = (f_1, \ldots, f_{m+n})$ *является вещественным аналитическим многообразием в* $\mathbb{R}^{m+n}$, $\dim \Gamma = m$. *Тогда* Γ — *сильно экстремально.*

Эта теорема дает пример сильно экстремального многообразия для достаточно широкого класса многообразий.

Теорема 3. ([4]). *Для любого данного* $\delta > 0$ *неравенство*

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} ||t_i q|| \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} ||t_i t_j q|| < q^{-1-\delta}$$

имеет только конечное число решений в целых числах $q > 0$ *для почти всех* $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

Здесь многообразие задается квадратичными многочленами. Отметим, что теоремы 1-3 доказаны с использованием метода *тригонометрических сумм.*

Далее приведем три теоремы из *мультипликативной теории* на многообразиях. Здесь рассматриваются *невырожденные* подмногообразия в $\mathbb{R}^n$. Геометрическая интерпретация понятия *невырожденности* означает, что многообразие достаточно искривлено, чтобы не совпадать с любой гиперплоскостью. *Невырожденность* не является слишком ограничительным условием, и большой класс многообразий удовлетворяет ему. В частности, — вещественные аналитические подмногообразия. Точное определение *невырожденности* было введено в [15].

Теорема 4. ([14]). *Пусть $\Gamma = (f_1, \ldots, f_n)$ — невырожденная $C^{(n)}$-кривая в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\psi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ — невозрастающая функция. Тогда почти все точки на Γ (в смысле меры Лебега на Γ) являются мультипликативно ψ-аппроксимируемыми при условии, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\log k)^{n-1} \psi(k) < \infty.$$

Доказательство теоремы состоит из рассмотрения двух случаев: (1) при фиксированном векторе $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\overline{a} \neq \overline{0}$, абсолютная величина *производной* линейной комбинации $a_1 f_1'(x) + \cdots + a_n f_n'(x)$ — велика, (2) эта величина не очень велика. В каждом из этих случаев используются разные рассуждения. В первом случае применяется аналитический метод, разработанный В. Спринджуком, В. Берником, Г. Диккинсон и М. Додсоном (1998 г.). Во втором случае авторы используют модификацию метода [15], включая геометрию решеток в евклидовом пространстве.

В метрической мультипликативной теории на многообразиях так же как и в классическом случае совместных экстремальных многообразий, расссматриваются задачи с точки зрения теории *меры Лебега* и теории *s-меры Хаусдорфа* $\mathcal{H}^s$ $(0 < s \leqslant 1)$.

Для формулировки следующих теорем введем обозначения. Пусть I — открытый интервал в $\mathbb{R}$ и функция $f \in C^3(I)$ такая, что для всех $x \in I$ имеем: (1) существуют константы $c_1 > c_2 > 0 : c_1 > f'(x) > c_2$; (2) $f'' \neq 0$. Положим

$$C_f = \{(x, f(x) : x \in I)\},$$

т. е. C_f — невырожденная кривая в смысле определения *невырожденности* в [15]. Обозначим через $S_2^*(\psi)$ множество всех *мультипликативно ψ-аппроксимируемых* точек $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 5. ([11]). *Пусть ψ — аппроксимирующая функция и $0 < s \leqslant 1$. Тогда*

$$\mathcal{H}^s(C_f \bigcap S_2^*(\psi)) = 0, \quad \textit{если} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-s} (\log^s k) \psi^s(k) < \infty.$$

Теорема 6. ([12]). *Пусть ψ — монотонная аппроксимирующая функция, $0 < s \leqslant 1$. Пусть $\mathcal{K}$ — $C^{(3)}$-кривая в $\mathbb{R}^2$ с ненулевой кривизной почти всюду, кроме множества нулевой s-меры Хаусдорфа. Тогда*

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{K} \bigcap S_2^*(\psi)) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-s} \psi^s(k) < \infty, \\ \infty, & \textit{если} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-s} \psi^s(k) = \infty. \end{cases}$$

В заключении отметим, что история развития метрической теории диофантовых приближений кратко представлена в [2], [8]-[15]. Сведения о приложениях новейших результатов рассматриваемой теории можно найти в [2], [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник В. И. Асимптотика числа решений некоторых систем диофантовых неравенств // Матем. заметки. 1972. Том 11, № 6. С. 619-623.

2. Ковалевская Э. И. Тригонометрические суммы и метрическая теория диофантовых приближений на многобразиях. Материалы конференции // XV Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Коробова Николая Михайловича: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28-31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 257-260.

3. Ковалевская Э.И. Геометрическое и арифметическое описание экстремальных многобразий в метрической теории диофантовых приближений. Материалы конференции // XVI Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения и проблемы истории посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 13-18 мая 2019 г.) — Тула, 2019. С. 239-241.

4. Ковалевская Э. И. Диофантовы приближения с квадратичными многочленами // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н. 1975, № 4. С. 5-14.

5. Ковалевская Э. И. "Гиперболические" диофантовы приближения на аналитических многобразиях // ДАН БССР. 1975. Том. 19, № 3. С. 200-203.

6. Ковалевская Э. И. Одно геометрическое свойство экстремальной поверхности // Матем. заметки. 1978. Том 23, № 2. С. 177-181.

7. Спринджук В. Г. Асимптотика числа решений некоторых систем диофантовых неравенств // ДАН СССР. 1967. Том 173, № 4. С. 770-772.

8. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.

9. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. – Москва: Изд-во Наука, 1977. 144 с.

10. Спринджук В. Г. Достижения и проблемы в теории диофантовых приближений // Успехи матем. наук. 1980. Том 35. С. 3-68.

11. Badziahin D., Levesley J. A note on simultaneous and multiplicative Diophantine approximation on planar curves // Glasgow Math. J. 2007. Vol. 49, № 2. P. 367-375.

12. Beresnevich V., Ramirez F., Velani S. Metric Diophantine approximation: aspects on recent work. In Dynamics and Analytic Number Theory // LMS Lecture Notes Ser. 2016. Vol. 437. (eds. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Reyerimhoff). – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2016. P. 1-95.

13. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine Approximation of Manifolds. Cambridge Tracts in Math. Vol. 137. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 172 c.

14. Bernik V., Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Khintchin-nype theorems on manifolds: convergence case for standart and multiplicative versions. – Preprint 99-092. Sonderforschungsbereich 343. Diskrete Structiren in der Math. Univ. Bielefeld. 1999. 27 c.

15. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. 1998. Vol. 148. P. 339-360.

УДК 511.35, 511.48, 511.75

О распределении дискриминантов целочисленных многочленов

Д. В. Коледа (Беларусь, г. Минск)
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: koledad@rambler.ru

On the distribution of the discriminants of integer polynomials

D. V. Koleda (Belarus, Minsk)
Institute of Mathematics of NAS of Belarus
e-mail: koledad@rambler.ru

Доклад посвящён оценкам количества многочленов с целыми коэффициентами, у которых дискриминант ограничен некоторой величиной. В частности, рассматривается вопрос, насколько часто у многочленов, имеющих только вещественные корни, бывают дискриминанты, малые относительно максимального возможного значения.

Дискриминант $D(P)$ многочлена

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j).$$

определяется как

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \tag{1}$$

Поскольку многочленов, имеющих одинаковое значение дискриминанта, бесконечно много, удобно ввести некоторую “меру сложности” многочленов, которая бы ограничивала их количество своим значением. В качестве такой меры возьмём высоту $H[P]$ многочлена P, определяемую как

$$H[P] = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|. \tag{2}$$

Для заданных $n \in \mathbb{N}$ и $Q > 1$ обозначим через $\mathcal{P}_n(Q)$ множество всех целочисленных многочленов степени n и высоты $H[P] \leqslant Q$.

Для $X \geqslant 0$ и $0 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2}$ определим считающие функции

$$N_n(Q, X) := \#\{P \in \mathcal{P}_n(Q) : |D(P)| \leqslant X\},$$
$$N_{n,s}(Q, X) := \#\{P \in \mathcal{P}_n(Q) : |D(P)| \leqslant X, \text{ и } P \text{ имеет ровно } 2s \text{ корней в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\},$$

где $\#S$ обозначает мощность конечного множества S. Очевидно, что

$$N_n(Q, X) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2}} N_{n,s}(Q, X).$$

Степень $n \geqslant 2$ многочленов мы полагаем везде фиксированной; параметр Q, ограничивающий высоты многочленов сверху, стремится к бесконечности.

Для асимптотических соотношений между функциями используются следующие обозначения. Запись $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ означает, что $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 1$. Выражение

$f(x) \ll_n g(x)$ при $x \to x_0$ следует понимать как неравенство $|f(x)| \leqslant c_n|g(x)|$, справедливое для всех x в окрестности точки x_0 при некоторой положительной постоянной c_n, зависящей только от n. Соотношение $f(x) \asymp_n g(x)$ есть краткая форма двойного неравенства $g(x) \ll_n f(x) \ll_n g(x)$.

Как видно из определения (1), дискриминант многочлена характеризует в целом расстояния между корнями многочлена. Поэтому знание поведения дискриминанта и его свойств бывает полезно в различных задачах, в том числе в теории диофантовых приближений. Так, например, доказательство Б. Фолькмана для кубического случая проблемы К. Малера основано на оценке количества целочисленных кубических многочленов, полученной Х. Дэвенпортом.

Одно из направлений исследований — поиск как можно более точных оценок вида

$$Q^{f_*(v)} \ll_n N_n(Q, Q^{2n-2-2v}) \ll_n Q^{f^*(v)}, \tag{3}$$

где $f_*(v)$ и $f^*(v)$ — убывающие функции параметра v, лежащего в диапазоне $0 \leqslant v \leqslant n-1$. Ограничение вида $Q^{2n-2-2v}$ на дискриминант удобно тем, что если многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ имеет старший коэффициент $|a_n| \gg Q$ и дискриминант $|D(P)| < Q^{2n-2-2v}$, тогда согласно (1) его корни α_j удовлетворяют неравенству $\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n} |\alpha_j - \alpha_k| \ll Q^{-v}$.

Упомянём несколько результатов, ключевых в контексте теоремы 1 (сформулированной ниже). Для степеней $n = 2$ в [2] и $n = 3$ в [3] были получены асимптотики

$$N_2(Q, Q^{2-2v}) \sim \kappa_2\, Q^{3-2v} \qquad \text{при} \quad 0 < v < 3/4,$$
$$N_3(Q, Q^{4-2v}) \sim \kappa_3\, Q^{4-\frac{5}{3}v} \qquad \text{при} \quad 0 < v < 3/5.$$

Здесь $\kappa_2 = 4(\ln 2 + 1) = 6{,}77\ldots$ и $\kappa_3 = 26{,}95\ldots$ — абсолютные постоянные (точное выражение для κ_3 приведено в формуле (1.6) в [3]).

Для произвольных $n \geqslant 2$ наилучшая на данный момент нижняя оценка величины $N_n(Q, Q^{2n-2-2v})$ получена В.В. Бересневичем, В.И. Берником и Ф. Гётце [1], которые доказали, что

$$N_n(Q, Q^{2n-2-2v}) \gg_n Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v} \quad \text{для } 0 < v < n-1. \tag{4}$$

Асимптотика, т. е. оценка вида (3) с одинаковыми $f_*(v)$ и $f^*(v)$ и явным значением постоянной, получена в [4] для многочленов произвольной степени $n \geqslant 2$, у которых все корни вещественны, т. е. для величины $N_{n,0}(Q, Q^{2n-2-2v})$ при $Q \to \infty$. Работа [4] развивает идеи [5], где нижняя оценка (4) была доказана для $0 < v < \frac{n}{n+2}$. Результат выражается следующей теоремой.

Теорема 1 ([4]). *Пусть $n \geqslant 2$. Зафиксируем произвольное ϵ такое, что $0 < \epsilon < \frac{n}{2n+2}$. Тогда для всех v с условием $\epsilon \leqslant v \leqslant (1-\epsilon)\frac{n}{n+2}$ верна асимптотика*

$$N_{n,0}(Q, Q^{2n-2-2v}) \sim \kappa_{n,0}\, Q^{n+1-\frac{n+2}{n}v}, \quad \text{при} \quad Q \to \infty,$$

где постоянная $\kappa_{n,0}$ зависит только от n и высотной функции H и может быть вычислена по формуле

$$\kappa_{n,0} = \frac{8n(n+1)}{(n+2)!} \int_{-1}^{1} \widetilde{K}(\tau)^{2/n} d\tau \int_{[-1,1]^{n-2}} \Delta(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, 0, 1)^{-1/n} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-2},$$

где

$$\widetilde{K}(\tau) := H\big[(x-\tau)^n\big]^{-1}, \qquad \Delta(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) := \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\xi_i - \xi_j)^2.$$

В теореме 1 фиксированный малый параметр ϵ обеспечивает равномерную верхнюю оценку погрешности асимптотики для всех v из указанного диапазона.

Для $n = 2$ и $n = 3$ постоянная $\kappa_{n,0}$ принимает вид:

$$\kappa_{2,0} = 2\int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\max\{1, 2|\tau|\}} = 2(1 + \ln 2) = 3{,}386\ldots,$$

$$\kappa_{3,0} = \frac{4}{5}\int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\max\{1, 3|\tau|\}^{2/3}} \int_{-1}^{1} (\xi_1(1-\xi_1))^{-2/3}\, d\xi_1 = \frac{4}{5}\left(3^{4/3} - 2\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = 9{,}865\ldots.$$

Отметим, что утверждение теоремы 1 останется верным, если вместо обычной высоты (2) в роли $H[P]$ взять меру Малера $M[P] = a_n \prod_{j=1}^{n} \max(1, |\alpha_j|)$ либо длину $L[P] = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. При этом значение $\kappa_{n,0}$ зависит от вида высоты H только через множитель $\int_{-1}^{1} \widetilde{K}(\tau)^{2/n} d\tau$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Adv. Math. 2016. Vol. 298. P. 393–412.

2. Götze F., Kaliada D., Korolev M., On the number of integral quadratic polynomials with bounded heights and discriminants [arXiv.org],
Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1308.2091.

3. Kaliada D., Götze F., Kukso O. The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants // Lith. Math. J. 2014. Vol. 54, № 2. P. 150–165.

4. Koleda D. V. On the distribution of polynomial discriminants: totally real case // Lith. Math. J. 2019. Vol. 59, № 1. P. 67–80.

5. Коледа Д. В. О частоте целочисленных многочленов с заданным числом близких корней // Тр. Ин-та матем. 2012. Том 20, № 2. С. 51–63.

УДК 511.36

Арифметические свойства рядов некоторых классов

Е. С. Крупицын (Россия, г. Москва)
Кафедра теории чисел, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет
e-mail: krupitsin@gmail.com

Arithmetic properties of series of some classes

E. S. Krupitsyn (Moscow)
Department of Number Theory, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow State Pedagogical University
e-mail: krupitsin@gmail.com

Рассматриваются свойства лиувиллевых чисел в p-адической, g-адической и полиадической областях. Получены оценоки снизу норм в соответствующих областях от значений ненулевых многочленов с целыми коэффициентами, вычисленных при подстановке вместо переменных рассматриваемых совокупностей, соответственно, p-адических, g-адических и полиадических лиувиллевых чисел.

Тем самым, в случае полиадических чисел, доказана их глобальная трансцендентность и глобальная алгебраическая независимость.

Известная теорема П. Эрдёша о представлении действительного числа суммой двух лиувиллевых чисел переносится на случаи p-адических, g-адических и полиадических чисел.

———————————————————————————————

УДК 511.36

Свойства элементов прямых произведений полей

В. Ю. Матвеев (Россия, г. Москва)
ООО "НИИ Транснефть"
e-mail: salomaa@mail.ru

Properties of elements of direct products of fields

V. Yu. Matveev (Moscow)
OOO "NII Transneft"
e-mail: salomaa@mail.ru

Доказана бесконечная алгебраическая независимость некоторых полиадических и почти полиадических чисел. Указаны приложения к практическим задачам.

———————————————————————————————

УДК 511.464

Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей

А. С. Самсонов (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет, кафедра теории чисел
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements

A. S. Samsonov (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University, department of number theory
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости элементов прямых произведений p-адических полей, получены обобщения некоторых теорем из работ [1], [2], [3], [4] про p-адические числа.

Используются следующие обозначения: p — простое число, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — p-адическая норма; $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме; Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$; $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца K, например $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1,\dots,x_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над кольцом K.

Для g-адических чисел используются следующие обозначения: $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел, $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма; $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме; построено кольцо Ω_g — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, и изоморфизм $\varphi:\ \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, $\psi = \varphi^{-1}$.

Для полиадических чисел используются следующие обозначения: все простые числа пронумерованы $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \dots$; $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел; $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$.

Определение 1. *Обозначим* $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$. *Обозначим*

$$U_g := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1,\dots,n\},\ |\beta_k|_{p_k} = 1\}.$$

Определение 2. *Обозначим* $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1,\dots,n\},\ \beta_k \neq 0\}$, $\widehat{\mathbb{Z}}^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{N},\ \beta_k \neq 0\}$.

Определение 3. *Обозначим* $0_{p_k} := \{G = \psi(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1,\dots,x_m] : P_k \equiv 0\}$, $0_g := \bigcup\limits_{k=1}^{n} 0_k$, $\widehat{0}_{p_k} := \{G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_m] : P_k \equiv 0\}$, $\widehat{0} := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{0}_{p_k}$.

Определение 4. *Пусть* $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$ *элементом* Ω_g, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \backslash 0_g$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 5. *Пусть* $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,n})$, $i = 1,\dots,m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$ *элементами* Ω_g, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1,\dots,x_m] \backslash 0_g$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \dots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Определение 6. *Пусть* $\alpha \in \widehat{\Omega}$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементом* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 7. *Пусть* $\alpha_i \in \widehat{\Omega}$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,n}, \dots)$, $i = 1,\dots,m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементами* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \dots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть* $g = p_1 \dots p_n$ *— произведение* n *различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}},\ \text{где}\ a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*,\ i = 1,\dots,m,\ j = 0,1,2\dots.$$

Пусть

1) для любого $i = 1,\dots,m$ *неотрицательные рациональные числа* $r_{i,j}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $i = 1,\dots,m$ *существует бесконечное множество номеров* j *таких, что число* $r_{i,j+1}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{i,0}, \dots, r_{i,j}$ *и чисел* $r_{l,k}$, *где* $l \neq i$, $l = 1,\dots,m$, $k = 0,1,2,\dots$.

3) не существует номеров i, j_1, j_2 *таких, что разница* $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ *является целым числом.*

Тогда числа α_i *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* Ω_g.

Теорема 2. *Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j}, \text{ где } a_{i,j} \in Z_g,\ i = 1, \dots, m,\ j = 0, 1, 2 \dots .$$

Пусть
1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) $\varphi(a_{i,j}) = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \dots, b_{i,j,n})$, для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и для любого n_0, существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\dots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\dots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \dots & b_{1,n_m,k} \\ \dots & & \dots \\ b_{m,n_1,k} & \dots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (1)$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует возрастающая функция $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_n - c_k(n) \to +\infty, \text{ при } n \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ удовлетворяющих неравенству (1), выполняется неравенство

$$ord_{p_k} \delta_{n_1,\dots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \dots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Теорема 3. *Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}},\ \alpha_i \in \Omega_g,\ a_{i,j} \in U_g,\ i = 1, \dots, m.$$

Пусть
1) для любого $i = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $d \in \mathbb{N}$ существует $N_1 = N_1(d) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого целого $N \geqslant N_1$, не могут одновременно выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad D_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant 2d, \quad \sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| > 0;$$

3) $r_j = \max\{r_{1,j}, \dots, r_{m,j}\}$, для любых натуральных чисел d и h существует $N_2 = N_2(d, h) \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство

$$r_{i,N+1} > h + dr_N$$

выполняется для любого $i = 1, \dots, m$ и для любого натурального $N \geqslant N_2$;

Если многочлен $G = \psi(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{Z}_g[x_1, \dots, x_m] \backslash \{0\}$, а при некотором $k_0 \in \{1, \dots, n\}$, $\deg G = \deg P_{k_0}$ и любой коэффициент B_{k_0} многочлена P_{k_0} таков, что либо $B_{k_0} = 0$, либо $ord_{p_{k_0}} B_{k_0} \leqslant h$. Тогда неравенство

$$|G(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_g \geqslant g^{-h-dr_N}$$

выполняется при $N \geqslant \max(N_1, N_2)$.

Теорема 4. *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть
1) для любого $i = 1, \ldots, m$ *неотрицательные рациональные числа* $r_{i,j}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*
2) для любого $i = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* j *таких, что число* $r_{i,j+1}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ *и чисел* $r_{l,k}$*, где* $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$*;*
3) не существует номеров i, j_1, j_2 *таких, что разница* $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ *является целым числом.*

Тогда числа α_i *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$.

Теорема 5. *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

Пусть
1) неотрицательные рациональные числа r_j *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*
2) $a_{i,j} = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n}, \ldots)$*, для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *и для любого* n_0*, существуют натуральные числа* $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ *такие, что* $n_1 > n_0$ *и*

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{2}$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$ *существует возрастающая функция* $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$r_n - c_k(n) \to +\infty, \text{ при } n \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ *удовлетворяющих неравенству (2), выполняется неравенство*

$$ord_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j *число* r_{j+1} *не является суммой линейной комбинации чисел* $r_0, \ldots, r_j$ *с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.*

Тогда числа α_i *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math. 2002. V. 79. P. 345-352.

2. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm. 2004. V. 113, № 4. P. 309-326.

3. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th. 2015. V. 5, iss. 1-2. P. 14-20.

4. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов в полях с неархимедовыми нормированиями. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2000. 95 с.

——

УДК 511.4

Об арифметических свойствах значений целых решений алгебраических дифференциальных уравнений

А. Я. Янченко (Россия, г. Москва)
Национальный исследовательский университет "МЭИ"
e-mail: YanchenkoAY@mpei.ru

On arithmetic properties of the values of entire solutions of algebraic differential equations

A. Ya. Yanchenko (Russia, Moscow)
National research University "MPEI"
e-mail: YanchenkoAY@mpei.ru

Через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, как обычно, обозначаем множества целых и комплексных чисел; через $K[t_1, \ldots, t_n]$ — кольцо многочленов от $t_1, \ldots, t_n$ над K. Если $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая функция, то при всяком $R > 0$ положим $M_f(R) = \max\limits_{|z| \leqslant R} |f(z)|$.

Целая функция $f(z)$ является функцией конечного порядка, если $\overline{\lim\limits_{R \to +\infty}} \dfrac{\ln \ln M_f(R)}{\ln R} < +\infty$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть ненулевой многочлен $P \in \mathbb{Z}[\omega_0, \ldots, \omega_n]$ (где $n \geqslant 2$). Пусть $f(z)$ — целая периодическая функция конечного порядка с периодом d ($d > 0$). При этом $y = f(z)$ является решением дифференциального уравнения $P(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, такое, что*

$$\mathrm{Res}_{\omega_n} \left(P, \frac{\partial P}{\partial \omega_0} \right) (f(z_0), f'(z_0), \ldots, f^{(n-1)}(z_0)) \neq 0.$$

Тогда среди чисел d, $f(z_0)$, $f'(z_0)$, …, $f^{(n-1)}(z_0)$ есть хотя бы одно трансцендентное.

Доказательство теоремы проводится методом Гельфонда ([1]) с применением некоторой техники работы с целыми функциями конечного порядка ([2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. — М.: Гостехиздат, 1952. 224 с.

2. Янченко А. Я., Подкопаева В. А., О целых функциях — решениях одного класса алгебраических дифференциальных уравнений [Электронный ресурс], Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru/v15/p1284-1291.pdf.

——

Секция 7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

УДК 517.957+514.752

Null Curves on the Lightlike Cone in Minkowski Space $\mathbb{R}_2^4$

Nemat Abazari (Iran, Ardabil)
Department of Mathematics and applications, University of Mohaghegh Ardabili
e-mail: abazari@uma.ac.ir
Martin Bohner (USA, Rolla, Missouri)
Department of Mathematics and Statistics, Missouri University of Science and Technology
e-mail: bohner@mst.edu
Ilgin Sağer (USA, St. Louis, Missouri)
Department of Mathematics and Computer Science, University of Missouri-St. Louis
e-mail: sageri@umsl.edu
Alireza Sedaghatdoost (Iran, Ardabil)
Department of Mathematics and applications, University of Mohaghegh Ardabili
e-mail: alirezasedaghatdoost@gmail.com
Yusuf Yayli (Turkey, Ankara)
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ankara University
e-mail: yayli@science.ankara.edu.tr

Abstract

In this paper, we investigate to represent any curves on the lightlike cone $\mathbb{Q}_2^3$ in Minkowski space $\mathbf{R}_2^4$ by structure functions. In addition, with this representation we classified all of the null curves on the lightlike cone $\mathbb{Q}_2^3$ in four types, and we obtained a Natural Frenet frame for these null curves. Furthermore for this Natural Frenet frame we calculated curvature functions of a null curve, specially the curvature function $\kappa_2 = 0$ and we show that any null curve on the lightlike cone is a helix. Finally we found all of the curves with constant curvature functions.

1. Introduction

To study of semi-Riemannian manifolds play important role in differential geometry and physics, specially in the theory of relativity. In a semi-Riemannian manifold, induced metric on a lightlike submanifolds is degenerate. In general relativity, lightlike submanifolds usually appear to be some smooth parts of the achronal boundaries. for example, event horizon of Kruskal and Kerr black holes and the compact Cauchy horizons in Taub-NUT spacetime.([8], [12]) One of the simplest examples of the lightlike submanifolds is lightlike cone $\mathbb{Q}_q^n$ in Minkowski space $\mathbf{R}_q^n$.

In differential geometry, one of the most important and applicable tools for to analysis a curve is orthonormal frame. For a regular curve in Euclidean space $\mathbf{R}^n$ we can use 1st, 2ed, ..., n'th derivative vectors to construct Frenet frame, also there exists such Frenet frame for a spacelike and timelike curve in Minkowski space $\mathbf{R}_q^n$. [9].

W. B. Bonnor [3] introduces Cartan frame as the most useful frame and he uses this frame to study a null curve. A. Bejancu [2] gives a method for consideration of a null curve in semi-Riemannian manifold. A. Ferrández, A. Giménez and P. Lucas [4] generalize the Cartan frame to Lorentzian space form. N. Abazri, M. Bohner, I. Sağer and A. Sedaghatdoost [1] studied some properties for spacelike curves in lightlike cones of index 1.

H. Liu [5] studies curves in the lightlike cone and gave an asymptotic frame field along the curve and defined cone curvature functions for this frame field. To study behavior of a curve in two and three-dimensional lightlike cone, H. Liu and Q. Meng [6] defined structure functions for a spacelike curve and by these structure functions they obtained representation formulas of the spacelike curves in the lightlike cone $\mathbb{Q}^2_1$ and $\mathbb{Q}^3_1$ of Lorentzian space $\mathbf{R}^3_1$ and $\mathbf{R}^4_1$ respectively. Also M. Külahci, M. Bektaş and M. Ergüt [11] consider AW(k)-type curves in the 3-dimensional lightlike cone, recently M. Külahci [10] has considered spacelike normal curves on the lightlike cone $\mathbb{Q}^2_1$ and $\mathbb{Q}^3_1$.

Since for a null curve that lays on the lightlike cone, any order derivative vectors are null vector [13], thus for a null curve $x(s)$ on the lightlike cone $\mathbb{Q}^3_2$ there exist a Natural Frenet frame $\{x(s), x'(s), N(s), W(s)\}$ ([7], [13]). J. Sun and D. Pei [13] consider null curves on the lightlike cone and unit semi-Euclidean 3-sphere of Minkowski space $\mathbf{R}^4_2$ and they obtained some results on the AW(k)-type curves and null Bertrand curves on lightlike cone $\mathbb{Q}^3_2$.

In this paper, we obtain representation formulas for any curve on the lightlike cone $\mathbb{Q}^3_2$ by structure functions and by this representation we classify all of the null curves on the lightlike cone. Furthermore for a null curve on the lightlike cone we construct a Natural Frenet frame and calculate its curvature functions. Also we will show that the structure functions and the curvature functions of a null curve on the lightlike cone $\mathbb{Q}^3_2$ satisfy in special second order differential equation, and by this Natural Frenet frame we conclude that any null curve on the lightlike cone is a helix.

Acknowledgment

The first and fourth authors thank the University of Mohaghegh Ardabili for supporting this research.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Abazri, M. Bohner, I. Sağer, A. Sedaghatdoost *Spacelike curves in the lightlike cone*, Apll. Math. Inf. Sci. **12**(2018), No. 6, 1227-1236.

2. A. Bejancu, *Lightlike curves in Lorentz manifolds*, Publ. Math. Debrecen 44 (1994), 145-155.

3. W. B. Bonnor, *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor N.S. 20 (1969), 229-242.

4. A. Ferrández, A. Giménez, P. Lucas, *Null helices in Lorentzian space forms*, Int. J. Mod. Phys. A 16 (2001), 4845-4863.

5. H. Liu, *Curves in the lightlike cone*, Contrib. Algebr. Geom. **45** (2004), 291-303.

6. H. Liu, Q. Meng, *Represeentation formulas of curves in a two- and three-Dimensional lightlike cone*, Results in Math. **59** (2011), 437-451.

7. K. L. Duggal, D. H. Jin, *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Scientific, (2007).

8. K. L. Duggal, A. Bejancu, *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic, 364, 1996.

9. W. Kuhnel, *Differential Geometry: Curves- Surfaces- Manifolds*, AMS, 2nd Edition, 2005.

10. M. Külahci, *Investigation of a curve using Frenet frame in the lightlike cone*, Open phys. 15 (2017), 175-181.

11. M. Külahci, M. Bektaş, M. Ergüt, *Curves of AW(k)-type in 3-dimensional null cone*, Phys. Lett. A, 371 (2007), 275-277.

12. B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, NewYork 1983.

13. J. Sun, D. Pei, *Some new properties of null curves on 3-null cone and unit semi-Euclidean 3-spheres*, J. Nonlinear Sci. Appl. 8 (2015) 275-284.

УДК 51 M34

Прямая $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + t$ и шахматная раскраска

М. М. Галламов (Россия, г. Москва)
Участник семинара С. М. Никольского, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: gallamovj@gmail.com

Straight line $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + t$ and chess coloring

M. M. Gallamov (Russia, Moscow)
Participant of the seminar S. M. Nikolsky, Mathematical Institute. V. A. Steklov of the RAS
e-mail: gallamovj@gmail.com

Формулировка основного результата

В декартовой системе координат OXY с целочисленной решеткой I_{OXY} задано семейство параллельных прямых

$$f_s: \ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + s. \tag{1}$$

Модуль обратной величины угловым коэффициентом $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, равен золотому сечению $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пусть единичные квадраты из первого квадранта I_{OXY} целочисленной решетки раскрашены в шахматном порядке так, что кварта прилегающий к O белого цвета, — $\Delta OA(s)B(s)$ прямоугольный треугольник, отсекаемый прямой f_s от I_{OXY}, где $A(s) = OX \cap f_s$, $B(s) = OY \cap f_s$, и m_{l_s} и n_{l_s} — количество соответственно белых и черных квадратов из $\Delta OA(s)B(s)$, тогда через

$$u(s) = m(s) - n(s) \tag{2}$$

обозначим разность между белыми и черными клетками $\Delta OA(s)B(s)$ при каждом фиксированном s.

Теорема 1. *Разность $u(s)$ неограничена ни снизу, ни сверху при $s \to +\infty$.*

Найдены такие значения параметров $s = p_{2t}^- = 2(F_{6t+1} + F_{6t-5} + \dots + F_7) + F_1$ и $s = p_{2t}^+ = p_{2t}^- + 1$, при которых $u(p_{2t}^\pm) = \pm(t+2)$, а поэтому $\lim_{k\to\infty} u(p_{2t}^\pm) = \pm\infty$, где F_k — k-ый член последовательности Фибоначчи, $F_1 = F_2 = 1$.

Аналогичная теорема была доказана, когда угловой коэффициент семейства параллельных прямых равен $-e$, где e — константа Эйлера, см. [1]. Метод решения этой задачи в обоих случаях основан на алгоритме "*вытягивания носов*", см. [2], только при построении процедуры отыскания значений параметра s, для которых разность (2) неограничена ни снизу, ни сверху для углового коэффициента $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, возникают дополнительные сложности.

Общую постановку задачи см. в.[1].

Идея метода решения поставленной задачи при $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Метод решения данной задачи основан на геометрическом представлении цепной дроби золотого сечения, посредством алгоритме “вытягивания носов”.

Посредством такой интерпретации при целом положительном p в $\Delta OA(p)B(p)$ гипотенуза $A(p)B(p)$ может быть заменена ломанной $\mathtt{L}(p)$, звенья которой образованы сторонами единичных квадратов целочисленной решетки. Эта ломанная не используется в статье, а вместо её строится другая ломанная $L'(p)$ с теми же концевыми точками. Звенья ломанной $L'(p)$ определяются с помощью алгоритма “вытягивания носов” и они представляют собой более удобные объекты с технической точки зрения. Ломанная $\mathtt{L}(p)$ с началом в точке $B(p)$, концом в $B^*_{2q} = ([p/\varphi]; 0)$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа) и с целочисленными вершинами напоминает лестницу, у которой ширина ступенек равно либо одному, либо двум, а высота единице, а звенья другой ломанной $L'(p)$ есть отрезки (доски), закрывающие несколько ступенек, причем концы этих отрезков есть вершины ломанной $\mathtt{L}(p)$. Внутренности частей треугольника $\Delta OA(p)B(p)$, расположенных между гипотенузой $A(p)B(p)$ и как ломанной $\mathtt{L}(p)$, так ломанной $L'(p)$ не содержат целочисленных точек. На основании этого факта треугольник $\Delta OA(p)B(p)$ заменяется клетчатой областью $\mathtt{E}(p)$ в виде многоугольника $B^*_{2q}OB(p)\mathtt{L}(p)$, состоящим из единичных квадратов, раскрашенных в шахматном порядке. Разность между белыми и чёрными единичными квадратами области $\mathtt{E}(p)$ совпадает с разностью $u(p)$ для $\Delta OA(p)B(p)$.

Клетчатая область $\mathtt{E}(p)$ с помощью звеньев ломанная $L'(p)$ разбивается на непересекающиеся клетчатые подобласти, для которых получены вычислительные формулы для разностей между их белыми и черными клетками. На основании этих формул и получаем, что $u(p^{\pm}_{2t}) = \pm(t+2)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галламов М. М. *Прямые $y = -e \cdot x + t$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13–18 мая 2019 г. С. 247–250.

2. Арнольд В. И. Цепные дроби. — М: МЦНМО, 2001. 40 с.

———————————————————————————

УДК 514.8,531.1,531.8

О понятии шарнирного механизма и связанных с ним задачах геометрии

М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

On the notion of linkage and relaited geometrical problems

M. D. Kovalev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

О понятии шарнирного механизма

Предмет моего доклада Давид Гильберт [1] определил так: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости шарнирами, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости".

П.Л.Чебышев до конца своих дней интересовался шарнирными механизмами как с практической так и с теоретической стороны, написал ряд работ о них, но не давал определения шарнирного механизма. Зато из этой темы он извлёк постановку задач о наилучшем приближении функций на множествах, и заложил основы этого направления теории функций. Хочется напомнить слова Чебышева: "Сближение теории с практикою дает самые благотворные результаты, и не только одна практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследований или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы существенно новые для науки и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых методов. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике."

К сожалению, большинство современных чистых математиков вовсе не склонны прислушиваться к практике и даже инженерным наукам. Здесь речь пойдёт об одном таком случае. Недавно абстрактные математики ввели понятие шарнирного механизма [2, 3, 4, 5] разительно отличающееся от того, как его понимают инженеры, и как его понимал Гильберт. Это привело их к ложному выводу о недоказанности теоремы о возможности построения ограниченной части произвольной плоской алгебраической кривой с помощью шарнирного механизма её автором А.Кемпе.

Здесь я предлагаю своё определение шарнирного механизма, согласующееся с его классическим пониманием. Как показывает анализ, при таком определении претензии современных авторов к рассуждениям Кемпе отпадают. Надеюсь, это определение будет полезно и инженерам, которых введённые абстрактными математиками "шарнирные механизмы", вероятно способны разочаровать в математике.

Дадим это определение[6, 7]. Считаем наши механизмы составленными из стержней, несущих на своих концах шарниры. Структуру механизма задаём графом $G(V,E)$ без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра —- рычагам (стержням). Граф $G(V,E)$ обладает вершинами двух видов: крестиками мы обозначаем вершины, отвечающие шарнирам, неподвижным в механизме (закреплённым), кружочками —- подвижным в механизме (свободным) шарнирам. Абстрактные математики на этот граф не накладывают каких-либо ограничений, кроме разве лишь конечности. Я же накладываю такие требования: а) $G(V,E)$ связен, б) вершины крестики смежны лишь вершинам кружочкам, в) подграф графа $G(V,E)$ на вершинах кружочках связен, г) условие, вытекающее из подвижности в механизме всех свободных шарниров. Из него следует, например, что каждый кружочек смежен не более чем одному крестику. Граф $G(V,E)$, для которого выполнены все эти условия, я называю *шарнирной структурной схемой* (ШСС) механизма. Условия а), в) выделяют индивидуальный механизм, без них мы получаем несколько механизмов, движущихся независимо один от другого. Условие б) вводится из-за того, что нет нужды задавать расстояния между закреплёнными шарнирами. Условие г) введено, чтобы исключить неподвижные шарниры из числа свободных.

Закреплённой шарнирной схемой (ЗШС) называю ШСС, для которой заданы положения закреплённых шарниров в плоскости. Положения закреплённых шарниров я считаю попар-

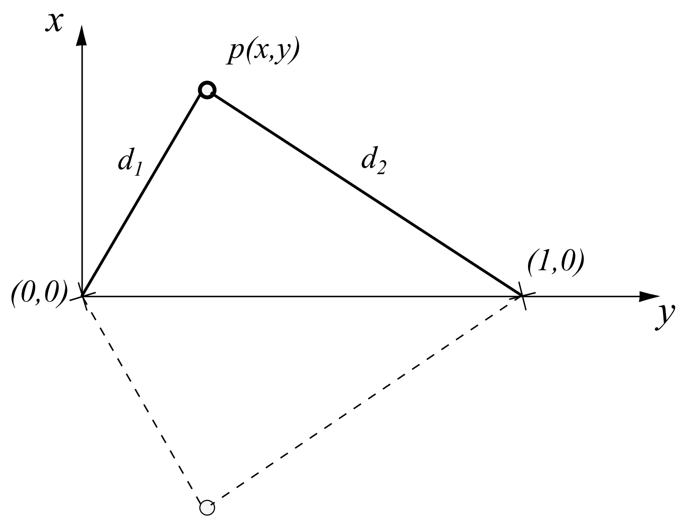


Рис. 1: Две шарнирных фермы, отвечающие одной кинематической схеме.

но несовпадающими. Пусть ЗШС имеет $n \geq 1$ закреплённых и $m \geq 1$ свободных шарниров, и $r \geq 1$ рычагов. Тогда ЗШС отвечают евклидовы пространства параметров: R^{2m} — пространство положений свободных шарниров, и $\mathcal{R}^r$ — пространство квадратов длин рычагов. Пусть p_i — радиус вектор i-го шарнира в плоскости, d_{ij} —- квадрат длины рычага, соединяющего смежные в графе $G(V, E)$ i-й и j-й шарниры. Ключевым для геометрии шарнирных конструкций является так называемое *рычажное отображение*: $F : R^{2m} \to \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2, \ \{ij\} \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным* (в англоязычной литературе —"rigidity mapping" или „edge function"[4, 8]). Точку $\mathbf{d} = \{d_{ij}\} \in \mathcal{R}^r$ я называю, придавая вполне определённый смысл термину и понятию кинематической схемы из теории механизмов, *кинематической шарнирной схемой* (КШС), а точку $\mathbf{p} = \{p_i\} \in R^{2m}$ —- *шарнирником.* С инженерной точки зрения шарнирник есть либо определённое положение шарнирного механизма, либо шарнирная ферма. Фермой инженеры называют конструкцию, не допускающую непрерывного движения с сохранением связей. Механизмы, в отличии от ферм, допускают непрерывное движение, и это основное их инженерное свойство! Неодноточечная компонента $K \subset R^{2m}$ связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ КШС $\mathbf{d}$ представляет собой множество всех положений или *конфигурационное пространство шарнирного механизма.* Таким образом, я отождествляю *шарнирный механизм* с его связным конфигурационным пространством.

Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки при рычажном отображении я называю *конфигурационным пространством КШС* $\mathbf{d}$. При таком подходе каждой компоненте связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое шарнирное устройство. Если компонента связности одноточечна, — то это устройство представляет собой *шарнирную ферму.*

Авторы же работ [3, 4] и вслед за ними другие математики называют конфигурационным пространством шарнирного механизма то, что я называю конфигурационным пространством его КШС, то есть множество $F^{-1}(\mathbf{d})$. С точки зрения математики это естественнее и удобнее, поскольку $F^{-1}(\mathbf{d})$ в отличии от его связной компоненты всегда является алгебраическим множеством[1]. Но такая терминология и такое пренебрежение смыслом слов создаёт математические "механизмы", нужные разве лишь абстрактным математикам. Поясню сказанное примером. На рисунке 1 изображена простейшая плоская шарнирная ферма. Рычажное отображение здесь выглядит так: $F : R^2 \to \mathcal{R}^2, \ F(x, y) = \big(x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\big) = (d_1, d_2) = \mathbf{d}$.

[1]Алгебраическим множеством называют множество общих нулей совокупности многочленов от декартовых координат точки.

Конфигурационное пространство $F^{-1}(\mathbf{d})$ её КШС состоит из двух точек, им отвечают сама ферма, и ферма ей зеркально симметричная. Абстрактные математики называют эти две фермы одним шарнирным "механизмом"!

Новые геометрические вопросы.

Подход абстрактных математиков, вдохновлённый построениями алгебраической геометрии, приводит разве лишь к развитию известной задачи. Подход же, продиктованный исследованием природы, ведёт к постановке новых задач. Приведу некоторые из них.

Понятие КШС порождает простой, но пока нерешённый вопрос об устойчивости однократных схем. КШС $\mathbf{d}$ *однократна*, если $F^{-1}(\mathbf{d})$ состоит из одной точки (являющейся шарнирной фермой). КШС $\mathbf{d}$ *геометрически устойчива*, если $\mathbf{d}$ есть внутренняя точка образа рычажного отображения, в противном случае, КШС — *геометрически неустойчива.*

ВОПРОС 1. *Возможна ли однократная и геометрически устойчивая КШС?*

Иными словами, существует ли шарнирная ферма, которую можно собрать при заданном закреплении соединяя в заданном порядке рычаги заданных длин, лишь единственным способом; и вдобавок такая, что при произвольно малой ошибке в длинах рычагов можно будет собрать какую-то конструкцию того же строения и с тем же закреплением?

Полуалгебраическим множеством евклидова пространства называют объединение решений конечного числа конечных систем полиномиальных уравнений и неравенств. В работе [9] доказано, что любое компактное полуалгебраическое множество плоскости есть множество положений одного шарнира всевозможных шарнирных устройств, отвечающих некоторой КШС. Несмотря на общность этой теоремы остаётся открытым следующий естественный вопрос.

ВОПРОС 2. *Является ли произвольное связное компактное полуалгебраическое подмножество плоскости множеством положений некоторого шарнира плоского шарнирного механизма?*

Рассмотрим класс $\mathcal{K}_1$ плоских шарнирных механизмов, у которых множество положений каждого из свободных шарниров одномерно. Хотя каждый подвижный шарнир таких механизмов движется с одной степенью свободы, размерность конфигурационного пространства может превосходить единицу. Что показывает пример шарнирного механизма с переменным числом степеней свободы [1], движущегося в некоторых положениях с одной, а в других — с двумя степенями свободы.

Шарнир p_i, движущийся в механизме по кривой (это верно для любого шарнира механизма класса $\mathcal{K}_1$), назовём *замерающим*, если возможно непрерывное движение механизма, когда шарнир p_i покоится. Переменность числа степеней свободы в нашем примере связана с наличием замерающего шарнира.

Конфигурационное пространство K шарнирного механизма, являясь компонентой связности алгебраического множества, само может не быть алгебраическим множеством. Однако, будем называть K *приводимым* либо *неприводимым*, в зависимости от того приводимо или нет наименьшее алгебраическое множество, содержащее K.

ТЕОРЕМА 1. *Если у механизма имеется замерающий шарнир, то его конфигурационное пространство K приводимо.*

При движении механизма в разные моменты времени замерать могут различные совокупности его шарниров.

ТЕОРЕМА 2. *Конфигурационное пространство механизма класса $\mathcal{K}_1$ одномерно в том и только том случае, когда у механизма либо нет замерающих шарниров, либо ни одна из совокупностей замерших шарниров не разбивает множества подвижных шарниров на несколько компонент связности.*

Теорема 3. *Для плоского шарнирного механизма с конфигурационным пространством размерности большей единицы, и без замерающих шарниров, имеется хотя бы один шарнир, заметающий при движении механизма двумерную область плоскости.*

Будут приведены необычные примеры шарнирных механизмов, один из них — пример механизма класса $\mathcal{K}_1$, имеющего в каждом своём положении более одной степени свободы. Это также механизм с переменным числом степеней свободы.

ВОПРОС 3.*Есть ли в классе $\mathcal{K}_1$ механизмы с постоянным и большим единицы числом степеней свободы?*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981, 344 С.
2. *Kapovich M., Millson J.J.* Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology. 2002. V.41, № 6, С. 1051 – 1107.
3. *King Henry C.* Planar Linkages and Algebraic Sets. arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 P.
4. *Demaine, Erik; O'Rourke, Joseph* Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra.— Cambridge University Press, 2007.
5. *Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И.* Курс наглядной геометрии и топологии. — М.: ЛЕНАНД, 2015, 351 С.
6. *Ковалёв М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, Т.58, № 1, С.45–70.
7. *Ковалёв М.Д.* Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ, Серия Машиностроение, 2001, №4, С. 33–51.
8. *Asimov L., Roth B.* The rigidity of Graphs. II// Journal of Math. analysis and appl, 1979, V.68, № 1,— С. 171–190.
9. *King Henry C.* Semiconfiguration spaces of planar linkages, arXiv.org:math/9810130.

УДК 514.113.5+548.1

О некоторых свойствах паркетогранника Иванова Q_1

Я. В. Кучериненко (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: yar_kuch@mail.ru
В. С. Макаров (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: vsmak@mail.ru

On some properties of Ivanov solide Q_1

Ya. V. Kucherinenko (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: yar_kuch@mail.ru
V. S. Makarov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: vsmak@mail.ru

Определение 1. *Многогранником Иванова Q_1 будем считать скошенную шестиугольную призму, в которой основаниями являются два правильных шестиугольника, пара противоположных боковых граней – квадраты, а остальные четыре – конгруэнтные ромбы, каждый из которых составлен из двух правильных треугольников (паркетные грани) (Рис.1а)*

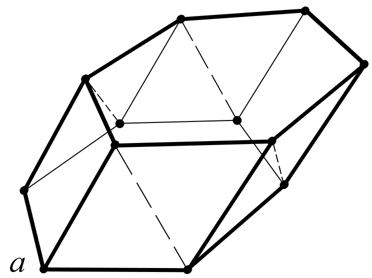


Рис. 1: Многогранник Иванова Q_1: а) комбинаторное устройство, пунктиром показаны условные рёбра; б) промежуточный этап построения многогранника Иванова Q_1 с единственным правильным треугольником

Многогранник Q_1 был обнаружен Б. А. Ивановым [1] и относится к классу обобщенных выпуклых правильногранных многогранников с допущением наличия у них паркетных граней и условных рёбер [2].

Предложение 1. *Предполагаемыми аналогами этого многогранника на сфере и в пространстве Лобачевского будем считать выпуклые многогранники, ограниченные соответствующими правильными многоугольниками, соединёнными в той же последовательности, как и в многограннике Q_1 в евклидовом пространстве.*

Интерес к многограннику Q_1, наряду с правильной шестиугольной призмой, возник в связи с геометрическим подходом к описанию трёхмерных сферических многообразий [3], с задачами описания двойников и сростков кристаллов [4], правильными разбиениями трёхмерной сферы [5] и четырёхмерными простыми формами [6]. Поскольку, при обсуждении работы [4] в группе $C_3^* \times C_2^*$, наряду с областью Дирихле в виде правильной шестиугольной призмы, нам встретился и многогранник, весьма похожий на Q_1, то естественным образом возникли следующие задачи:

Задача 1. *Проверить, возможны ли правильные разбиения 3-сферы на множество многогранников Q_1, на которых транзитивно действует группа $C_3^* \times C_2^*$? Более общая постановка задачи: возможны ли вообще многогранники Иванова Q_1 на 3-сфере, или в пространстве Лобачевского?*

Задача 2. *(тесно связанная предыдущей): Существует ли в четырёхмерном евклидовом пространстве в группе $C_3^* \times C_2^*$ простая форма (изоэдр) с трёхмерными гранями – многогранниками Иванова Q_1? Дать полное описание всех простых форм в группе $C_3^* \times C_2^*$.*

Решать поставленные задачи оказалось проще в обратном порядке. Результаты привели к следующим теоремам:

Теорема 1. *В группе $C_3^* \times C_2^*$ возможны три типа простых форм (изоэдров): 1) Четырёхмерный аналог бесконечной двенадцатигранной призмы с двенадцатью трёхмерными пинакоидами. При положении точек орбиты на винтовой оси 12/5, все 12 точек лежат на окружности большого круга, деля её на 12 частей (как циферблат часов). Касательные трёхмерные гиперплоскости, пересекаясь, образуют вышеупоупомянутую бесконечную прямую призму. 2) Четырёхмерный изоэдр с двенадцатью трёхмерными гранями – правильными шестиугольными призмами, образующими два многогранных полнотория, по шесть призм в каждом (при удалении исходной точки орбиты на расстояние $\pi/4$ от винтовой оси 12/5). 3) Четырёхмерные изоэдры с двенадцатью трёхмерными гранями – скошенными шестиугольными призмами (общая простая форма), среди которых существуют и многогранники Иванова Q_1, появляющиеся при удалении исходной точки орбиты от оси 12/5 на величину θ, такую, что $cos 2\theta = 1/\sqrt{3}$.*

Теорема 2. *На трёхмерной сфере и в пространстве Лобачевского невозможны многогранные поверхности из правильных конечных многоугольников с тем же комбинаторным строением, как в многограннике Иванова Q_1.*

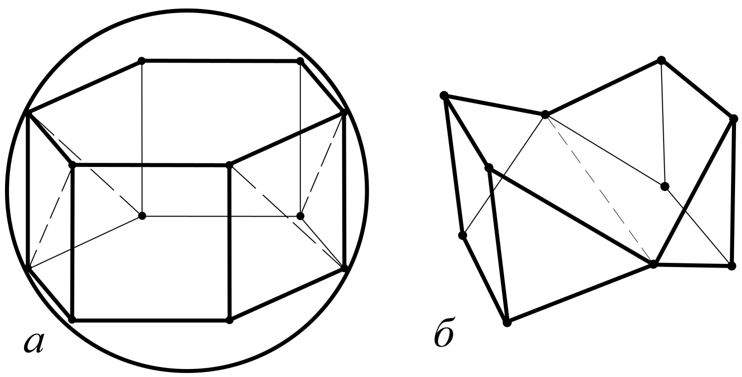


Рис. 2: а) Бесконечный многогранник Иванова Q_1 в пространстве Лобачевского с вершинами, лежащими на абсолюте, геометрически конгруэнтный бесконечной правильной шестиугольной призме. Условные рёбра разбивают четыре из шести правильных четырёхугольных граней, каждую на два бесконечных правильных треугольника (чертёж приведён в модели Клейна); б) Самопересекающийся правильногранник, возможный во всех трёх пространствах: евклидовом, сферическом и в пространстве Лобачевского, состоящий из двух пересекающихся шестиугольников (пунктиром показана линия их пересечения, не являющаяся ребром), двух четырёхугольников и четырёх треугольников. Многогранник возможен при всех длинах рёбер, при которых существуют составляющие его грани.

Замечание 1. *Ввиду последней теоремы нам представлялось, что многогранник Q_1 вообще невозможен в пространстве Лобачевского [7], однако выяснилось, что в некотором смысле он всё же возможен, если его вершины лежат на абсолюте (Рис.2а). При этом он геометрически конгруэнтен бесконечной правильной шестиугольной призме: если в четырёх правильных четырёхугольных гранях провести условные рёбра, как в многограннике Иванова Q_1, то каждая такая грань окажется состоящей из двух правильных треугольных граней с общим условным ребром – точно, как в многограннике Q_1. Таким образом, многогранник Иванова Q_1 можно собрать из двух правильных шестиугольников с бесконечноудалёнными вершинами, двух аналогичных четырёхугольников и восьми треугольников, соединив их в том же порядке, как и в евклидовом многограннике Иванова Q_1.*

Замечание 2. *При исследовании общего случая возможности правильногранной поверхности, состоящей из соответствующих многоугольников, соединённых, в той же последовательности, как и в многограннике Иванова Q_1, мы не предполагали изначального условия выпуклости конструируемой фигуры. При этом, наряду с поясом из двух четырёхугольников и двух шестиугольников, соединённых, как показано на Рис.1б, нам пришлось рассмотреть ту же последовательность этих фигур, соединённых общими рёбрами, но с самопересечением. Оказалось, что её можно достроить четырьмя правильными треугольниками до самопересекающегося правильногранника (Рис.2.б), который возможен во всех трёх пространствах: евклидовом, сферическом и в пространстве Лобачевского, причём для любой длины ребра (при которой возможны соответствующие выпуклые правильные многоугольники).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Украинский геометрический сборник. 1971. Вып. 10. С. 20–34.

2. Тимофеенко А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 2. С. 118–126.

3. Постников М. М. Трехмерные сферические формы // Труды МИАН СССР. 1991. Том 196. С. 114–146.

4. Кучериненко Я. В., Макаров В. С. Геометрия бикристаллов и трёхмерные сферические многообразия // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 20-25 июня 2016 г.) — М.: МГУ, 2016. С. 360-362.

5. Долбилин Н. П. О правильных разбиениях Дирихле сферы. — Москва, 1972. 89 с.

6. Долбилин Н. П. О трёхмерных и четырёхмерных простых формах // сб. «Проблемы кристаллологии», посвящённый 80-летию академика Н. В. Белова. — М.: МГУ, 1971. С. 315-324.

7. Кучериненко Я. В., Макаров В. С. Об одном четырёхмерном изоэдре, огранённом многогранниками Иванова Q_1 // Материалы XIII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 17-22 июня 2019 г.) — М.: МГУ, 2019. (в печати).

УДК 514.17

Задача о нижней границе числа гиперграней 2-смежностного многогранника[1]

А. Н. Максименко (Россия, г. Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

[1]Исследование выполнено в рамках программы стажировок работников российских образовательных и научных организаций в НИУ ВШЭ

The lower bound problem for the number of facets of a 2-neighborly polytope

A. N. Maksimenko (Russia, Yaroslavl)
P. G. Demidov Yaroslavl State University,
National Research University Higher School of Economics
e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

1. Введение

Обсуждаемые далее проблемы лежат в области комбинаторной теории выпуклых многогранников, современное состояние которой хорошо изложено в монографиях [1, 2]. Выпуклый d-мерный многогранник будем называть *d-многогранником,* а его k-мерную грань — *k-гранью.* Многогранник называется *2-смежностным*, если любые две его вершины образуют 1-грань (*ребро*) многогранника. Среди 3-многогранников только тетраэдр является 2-смежностным. Тем не менее, уже в четвертой размерности существует бесконечное множество комбинаторных типов 2-смежностных многогранников, классическим примером которых могут служить циклические многогранники:

$$C_{d,n} = \operatorname{conv}\bigl\{(i, i^2, \dots, i^d) \in \mathbb{R}^d \bigm| i \in \{1, 2, \dots, n\}\bigr\},$$

где d — размерность многогранника, n — число его вершин, $n > d$. Вообще, оказалось, что 2-смежностные многогранники довольно часто встречаются как среди случайных 0/1-многогранников [3], так и среди специальных многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами комбинаторной оптимизации [4, 5].

Одной из классических проблем комбинаторной теории выпуклых многогранников является задача оценки числа гиперграней выпуклого многогранника при фиксированных размерности и числе вершин. В частности, эта задача полностью решена для симплициальных многогранников [1, гл. 10]. Максимальное число гиперграней для 2-смежностного d-многогранника с фиксированным числом вершин n достигается, как известно [1], на циклическом многограннике $C_{d,n}$. В настоящей работе рассматривается задача оценки снизу числа гиперграней произвольного 2-смежностного многогранника.

2. Задачи и результаты

Обозначим через $\mu_{\mathrm{2n}}(d,n)$ минимальное число гиперграней 2-смежностного d-многогранника на n вершинах. Очевидно, $\mu_{\mathrm{2n}}(d,d+1) = d+1$ и $\mu_{\mathrm{2n}}(d,n)$ ограничено сверху числом гиперграней циклического многогранника $C_{d,n}$. В настоящее время о функции $\mu_{\mathrm{2n}}(d,n)$ известно очень мало [6, 7] — все оценки (за исключением очевидных) собраны в таблице 2.

Особый интерес представляют следующие задачи:

1. Найти асимптотические оценки для $\mu_{\mathrm{2n}}(d,n)$ при фиксированном d и при фиксированной разности $n-d$. (Как следует из таблицы 2, точные значения известны для трех случаев: $d=4$, $n-d=2$ и $n-d=3$. Ниже, в теореме 1, найдено точное значение для $n-d=4$.)

2. Описать примеры 2-смежностных многогранников с как можно меньшим числом гиперграней при фиксированных d и n.

3. Существуют ли, кроме симплексов, 2-смежностные многогранники, двойственные к которым были бы тоже 2-смежностны [1, p. 129b]?

На основе результатов, описанных в [6, 7], доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *$\mu_{2n}(d,d+4) = d+8$ при $d \geqslant 6$.*

Теорема 2. *Для любого $k \geqslant 6$ найдется $d_k > k$, что $\mu_{2n}(d,d+1+k) < d+2k$ при $d \geqslant d_k$.*

Таблица 2: Значения разности $\mu_{2\mathrm{n}}(d,n) - n$.

<table>
<tr><th>$d \backslash n$</th><th>$d+2$</th><th>$d+3$</th><th>$d+4$</th><th>$d+5$</th><th>$d+6$</th><th>$d+7$</th><th>$d+8$</th><th>$\dots$</th></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="5">3</td><td colspan="7">$n(n-5)/2$</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="4">4</td><td>7</td><td>$[5,12]$</td><td colspan="4">$\Omega(n^{4/3})$</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="3">$[3,4]$</td><td>$[2,6]$</td><td>$[1,9]$</td><td>$[0,13]$</td><td colspan="2">$\geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$[2,6]$</td><td>$[1,7]$</td><td>$[0,\mathbf{2}]$</td><td>$[-1,24]$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grünbaum B. Convex Polytopes, 2nd edition / Ed. by V. Kaibel, V. Klee, G.M. Ziegler. — Springer, 2003. — 560 c.

2. Циглер Г.М. Теория многогранников / Пер. с англ. под ред. Н.П. Долбилина. — М.: МЦНМО, 2014. — 568 с.

3. Bondarenko V.A., Brodskiy A.G. On random 2-adjacent 0/1-polyhedra // Discrete Mathematics and Applications. 2008, 18(2): 181–186.

4. Maksimenko A. The common face of some 0/1-polytopes with NP-complete nonadjacency relation // Journal of Mathematical Sciences. 2014, 203(6): 823–832.

5. Maksimenko A. Boolean quadric polytopes are faces of linear ordering polytopes // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017, 14: 640–646.

6. Maksimenko A. On the minimum number of facets of a 2-neighborly polytope [Электронный ресурс]. URL: `https://arxiv.org/abs/1808.09672`.

7. Maksimenko A. 2-neighborly 0/1-polytopes of dimension 7 [Электронный ресурс]. URL: `https://arxiv.org/abs/1904.03638`.

УДК 519

Анализ координационных последовательностей 2-однородных графов[1]

А. В. Малеев (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: andr_mal@mail.ru
А. А. Мокрова (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 17-02-00835 А и № 17-42-330787 р_а

e-mail: albina.mokrova@yandex.ru
А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: a1981@mail.ru

Analysis of coordination sequences of the 2-uniform graphs

A. V. Maleev (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
e-mail: andr_mal@mail.ru
A. A. Mokrova (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
e-mail: albina.mokrova@yandex.ru
A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
e-mail: a1981@mail.ru

Математическое изучение координационных чисел началось в работе [1], позднее в [2]. В их основе лежит модель, представляющая структуру в виде периодического графа, вершины которого соответствуют атомам или молекулам структуры, а ребра - связям между ними. В [3] можно найти подробную библиографию проблемы с описанием вклада каждой из работ. Авторы рассматривают новый подход к изучению координационных последовательностей 2-однородных графов.

Будем называть k-однородным графом периодический граф, для которого фундаментальная область относительно группы симметрий содержит ровно k вершин. В случае $k = 2$ на плоскости существует ровно 20 таких графов. Их полный список можно найти в [4]. В работе [3] поставлена задача строгого доказательства явных формул для координационных чисел 2-однородных графов.

Для произвольной вершины x некоторого графа G рассмотрим последовательность координационных окружений $eq(x, n)$, определенную индуктивно:
— координационное окружение $eq(x, 0)$ - сама вершина x;
— координационное окружение $eq(x, n+1)$ определяется как множество вершин графа, соседних с вершинами из координационного окружения $eq(x, n)$ и не входящих в координационные окружения $eq(x, k)$ с $0 \leqslant k \leqslant n$.

n-ое координационное число $e(x, n)$ вершины x - это число вершин графа G, входящих в координационное окружение $eq(x, n)$.

Координационной последовательностью назовем последовательность координационных чисел $e(x, n), n = 0, 1, \dots$ вершины x.

В [5] сформулирована следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — 2-однородный граф и x — его вершина. Тогда существуют числа $n_0 \in \mathbb{N}, k, \alpha_i, \beta_i$, где $0 \leqslant i < k$, такие, что для $n \geqslant n_0$ $e_G(x, n) = \alpha_i n + \beta_i$, если $n \equiv i (\mathrm{mod}\ k)$.*

Проиллюстрируем данную теорему на примере. Рассмотрим 2-однородный граф, имеющий двумерную пространственную группу симметрии $p6$. Код в базе RSCR [6]: kra. Имеет две симметрически независимые вершины v_1 — вершина степени 5 и v_2 — вершина степени 6, в нем 2 различных последовательности координационных чисел $e_{kra}(v_1, n)$ и $e_{kra}(v_2, n)$. Первые члены двух различных координационных последовательностей этого графа приведены в базе OEIS [7] под номерами A301726 и A301724, соответственно.

Цепь Γ в графе G будем называть лучом, если выполнены следующие условия:1) Γ является геодезической, 2) начальная и конечная вершины цепи Γ сравнимы по модулю решетки L, 3) никакие другие две вершины Γ несравнимы по модулю решетки L.

Непосредственная проверка показывает, что из каждой вершины графа kra выходят 12 лучей. Фрагмент графа kra, а также лучи для вершин v_1 и v_2 представлены на рисунке 1.

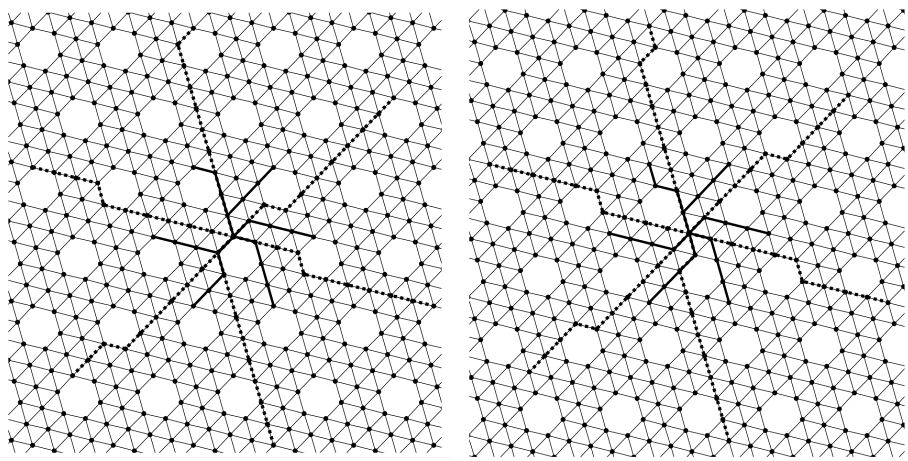


Рис. 1: Фрагменты графа kra с отмеченными лучами для вершин v_1 и v_2 соответственно.

Пусть Pol_G — многоугольник, представляющий собой выпуклую оболочку векторов вида $\frac{1}{d(\Gamma)}\mathbf{\Gamma}$, соответствующих всем лучам Γ графа G. Пусть pol_G — граница многоугольника Pol_G.

Все 12 лучей для каждой из вершин v_1 и v_2, изображенных на рисунке 1 соответствуют его многоугольнику роста выпуклому 12-угольнику (рис. 2).

В работе [8] доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Существует не зависящая от n постоянная C такая, что координационное окружение $eq(x,n)$ лежит в C-окрестности многоугольника $x+n\cdot pol_G$ (полученного из pol_G растяжением в n раз и сдвигом на вектор $\overrightarrow{0x}$). Многоугольник pol_G является центрально-симметричным.*

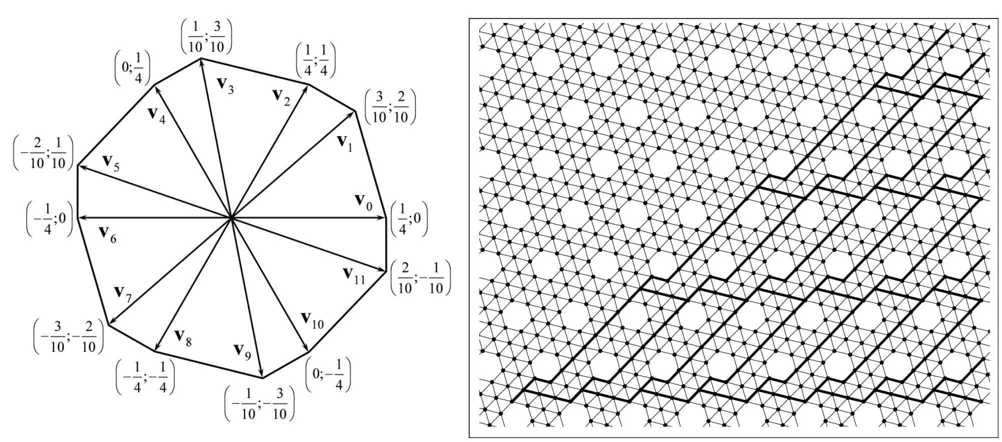


Рис. 2: Многоугольник роста и подграф для $i=0$ и $i=1$ графа kra соответственно.

Пусть $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_{i+1}$ — два вектора, выходящих из центра многоугольника роста pol_G в две его соседние вершины. Пусть $Sec_i(x)$ — сектор, порожденный векторами $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_{i+1}$, выходящими из вершины x. Пусть $e_i(x,n)$ — число вершин из $eq(x,n)$, лежащих в $Sec_i(x)$. Тогда

$e(x,n) = \sum_i e_i(x,n) - \sum_i b_i(x,n) + c(x,n)$. Здесь $b_i(x,n)$ - число вершин из $Sec_i(x)$, лежащих на луче, порожденном вектором $\mathbf{v}_i$, выходящим из вершины x. Для графа kra имеем $b_i(x,n) = \begin{cases} 1, n \equiv 0(\mathrm{mod} d(\Gamma_i)) \\ 0, n \equiv 1(\mathrm{mod} d(\Gamma_i)) \end{cases}$, $c(x,n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$, $d(\Gamma_i) = \begin{cases} 4, i \equiv 0(\mathrm{mod} 2) \\ 10, i \equiv 1(\mathrm{mod} 2) \end{cases}$.

Лучи Γ_i и Γ_{i+1} порождают геодезический подграф в секторе, порожденном векторами $\mathbf{\Gamma}_i$ и $\mathbf{\Gamma}_{i+1}$. Данные подграфы для $i = 0$ и $i = 1$ изображены на рисунке 2. Из существования данного подграфа следует, что существует каноническая геодезическая вида $x \to n_i\gamma_i \to n_{i+1}\Gamma_{i+1} \to \gamma \to y$, причем длина цепи γ ограничена абсолютной константой, а сама цепь γ зависит только от класса вершины y по модулю решетки L_i , порожденной векторами $\mathbf{\Gamma}_i$ и $\mathbf{\Gamma}_{i+1}$.

Найдем число цепей γ, заданной длины, соответствующих различным по модулю решетки L_i точкам. Пусть $\sigma_{i,k}$ — число вершин из $eq(x,k)$, лежащих в параллелограмме P_i с вершинами x, $x+\mathbf{\Gamma}_i$, $x+\mathbf{\Gamma}_{i+1}$, $x+\mathbf{\Gamma}_i+\mathbf{\Gamma}_{i+1}$ (рис. 3).

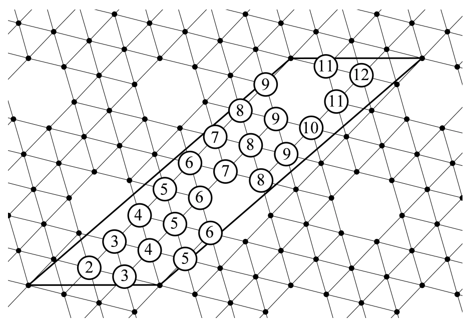


Рис. 3: Пример расчета $\sigma_{i,k}$ для графа kra.

Пусть $r(n,a,b)$ — число решений уравнения $an_1+bn_2 = n$ в целых неотрицательных числах n_1, n_2. Тогда $e_i(x,n) = \sum_\gamma r(n-d(\gamma); d(\Gamma_i), d(\Gamma_{i+1})) = \sum_k \sigma_{i,k} r(n-k; d(\Gamma_i), d(\Gamma_{i+1}))$.

Тогда для графа kra

$$\begin{aligned} e(v_1,n) =\ & 12r(n;4,10) + 5r(n-1;4,10)+ \\ & +10r(n-2;4,10) + 16r(n-3;4,10)+ \\ & +15r(n-4;4,10) + 22r(n-5;4,10)+ \\ & +22r(n-6;4,10) + 22r(n-7;4,10)+ \\ & +22r(n-8;4,10) + 22r(n-9;4,10)+ \\ & +15r(n-10;4,10)+16r(n-11;4,10)+ \\ & +11r(n-12;4,10)+5r(n-13;4,10)- \\ & -6b_0(v_1,n) - 6b_1(v_1,n) + c(v_1,n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(v_2,n) =\ & 12r(n;4,10) + 6r(n-1;4,10)+ \\ & +10r(n-2;4,10) + 16r(n-3;4,10)+ \\ & +17r(n-4;4,10) + 21r(n-5;4,10)+ \\ & +21r(n-6;4,10) + 22r(n-7;4,10)+ \\ & +21r(n-8;4,10) + 21r(n-9;4,10)+ \\ & +17r(n-10;4,10)+16r(n-11;4,10)+ \\ & +10r(n-12;4,10)+6r(n-13;4,10)- \\ & -6b_0(v_1,n) - 6b_1(v_1,n) + c(v_1,n). \end{aligned}$$

Вычисление функций $r(n,a,b)$, производится при помощи теорем 3 — 5 [9].

Теорема 3. *Пусть $K = НОК(a,b)$. Тогда существуют числа α_j и β_j, $0 \leqslant j \leqslant K-1$ такие, что $r(n,a,b) = \alpha_j n + \beta_j$ если $n \equiv j(\mathrm{mod} K)$.*

Теорема 4. *Пусть $d = НОД(a,b)$. Тогда $r(n,a,b) = \begin{cases} r(\frac{n}{d}; \frac{a}{d}; \frac{b}{d}), n \equiv 0(\mathrm{mod} d) \\ 0, n \neq 0(\mathrm{mod} d) \end{cases}$.*

Теорема 5. *Пусть $НОД(a,b) = 1$. Тогда $r(n,a,b) = \frac{n+aa'+bb'}{ab} - 1$, где $aa' \equiv -n(\mathrm{mod} b)$, $bb' \equiv -n(\mathrm{mod} a)$, $1 \leqslant a' \leqslant b$ и $1 \leqslant b' \leqslant a$.*

Теорема 6. *Пусть v_1 — вершина степени 5 и v_2 — вершина степени 6 графа kra . Тогда для $n \geqslant 1$*

$$e_{kra}(v_1,n)=\begin{cases}\frac{27n}{5}, n\equiv 0,5(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-2}{5}, n\equiv 1(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+1}{5}, n\equiv 2,7(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-1}{5}, n\equiv 3,8(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-3}{5}, n\equiv 4(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+3}{5}, n\equiv 6(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+2}{5}, n\equiv 9(\mathrm{mod}10)\end{cases}, \quad e_{kra}(v_2,n)=\begin{cases}\frac{27n}{5}, n\equiv 0,5(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+3}{5}, n\equiv 1(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-4}{5}, n\equiv 2(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-1}{5}, n\equiv 3(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+7}{5}, n\equiv 4(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-7}{5}, n\equiv 6(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+1}{5}, n\equiv 7(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n+4}{5}, n\equiv 8(\mathrm{mod}10)\\ \frac{27n-3}{5}, n\equiv 9(\mathrm{mod}10)\end{cases}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brunner G. O., Laves F. Zum Problem der Koordina-tionszahl // Wiss. 7.. Techn. Univers. Dresden 20. 1971. P. 387.

2. Fischer W. Existenzbedingungen homogener Kugelpackungen zu kubischen Gitterkomplexen mit weniger als drei Freiheitsgraden // Z. Kristallogr. 1973. P. 138-129.

3. Goodman-Strauss C., Sloane N. J. A. A coloring-book approach to finding coordination sequences // Acta Crystallographica. Section A. 2019. № 75. P. 121-134.

4. Grünbaum B., Shephard G.C. Tilings and Patterns. — New York: W. H. Freeman & Co., 1987.

5. Малеев А.В., Мокрова А.А., Шутов А.В. Координационные последовательности 2-однородных графов // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.– Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 263 - 265.

6. Reticular Chemistry Structure Resource (RCSR) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://rcsr.net/layers

7. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://oeis.org/

8. Журавлев В.Г. Рост случайных замощений и графов: между кристаллом и хаосом // Алгебра и анализ. 2002. Том 14. Вып. 6. С. 129–168.

9. Ramirez Alfonsin J. L. The Diophantine Frobenius Problem // Oxford University Press. 2005.

———————————————————————

УДК 514.172.4+514.177.2

Элементарное доказательство теоремы Брунна–Минковского

Ф. М. Малышев (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

An elementary proof of the Brunn– Minkowski theorem

F. M. Malyshev (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Теорема 1. *Пусть в двух параллельных гиперплоскостях L_0, L_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, содержатся выпуклые тела P_0, P_1 одинакового n-мерного объёма $V_n(P_0) = V_n(P_1) = v > 0$, и пусть P – сечение выпуклой оболочки их объединения гиперплоскостью L, параллельной L_0, L_1 и находящейся строго между ними. Тогда n-мерный объём тела P будет не меньше v, причём равен v только в случае, когда P_1 получается из P_0 параллельным переносом.*

У данной теоремы не простая история ([1], стр. 39): "*Сам Брунн доказал лишь первую часть этой теоремы* ([2], **1887**), *второй же, дополнительной части об условиях равенства площади промежуточного сечения площадям первых двух сечений ему сначала строго доказать не удалось, на что обратил внимание Минковский. Впоследствии были даны Минковским и Брунном доказательства и дополнительной части.* **Любопытно**, *что Минковский закончил свою известную книгу "Geometrie der Zahlen"* [3] *как раз на 56-м параграфе (***1896***), в котором надо было дать доказательство теоремы Брунна, так что "Geometrie der Zahlen" обрывается, так сказать, на полуслове. По смерти Минковского (***1909***) в его бумагах было найдено это доказательство и напечатано (***1910***) через 14 лет после появления "Geometrie der Zahlen" в виде последнего 57-го параграфа.*"

Б.Н. Делоне считал эту теорему "*хотя,* **быть может**, *и трудно доказуемой, но самой по себе довольно очевидной*" ([4], стр. 37). Ощутимое несоответствие между *очевидностью* теоремы и существенной неэлементарностью её доказательств (особенно в части строго неравенства) имело место до настоящего времени [5]. Теорема имеет много обобщений [6] и приложений [7], относится к основам теории выпуклых многогранников, поэтому естественно желание иметь её геометрическое конструктивное доказательство элементарными методами, максимально выпукло высвечивающее суть вопроса, доступное школьникам в размерностях $n = 2$, $n = 3$ и студентам младших курсов для всех размерностей $n \geqslant 2$.

Причина возникновения трудного случая равенства видится в том, что классики изначально теорему формулировали для выпуклых тел, сводя доказательство её первой части к параллелепипедам (см. п. 4). Подкупала простота обобщения с $n = 2$ на произвольные $n \geqslant 2$. Излагаемое далее доказательство начинается с рассмотрения многогранников P_0. Вместо традиционных семейств параллелепипедов (инициировавших трудный случай), только приближающих "снизу" многогранник P_0, используются симплексы, исчерпывающие объём P_0 полностью, что как раз и позволило избежать трудный случай. Новизна предлагаемого доказательства обусловлена ещё последовательностью вложенных тел (2), начинающейся с тела Q и заканчивающейся минимальным симплексом, содержащим Q. Папе Карлу, выстругивая многогранник Q из комля, удобно получать ряд из этих многогранников в обратной последовательности.

Используемые далее понятия, относящиеся к ограниченным выпуклым множествам, довольно поверхностны, первой главы монографии [8] для этих целей вполне достаточно. Подготовленному читателю и этого не потребуется, по крайней мере в случаях $n = 2$ и $n = 3$, доступных школьникам.

1. Приведём основной приём Брунна в доказательствах теоремы. Пусть M – гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, разбивающая тела P_0 и P_1 соответственно на части P_0', P_0'' и P_1', P_1'', $P_0 = P_0' \cup P_0''$, $P_1 = P_1' \cup P_1''$, причём $V_n(P_0') = V_n(P_1')$ и P_0', P_1' находятся по одну сторону от гиперплоскости M. Тогда $V_n(P_0'') = V_n(P_1'')$. Если ТЕОРЕМА верна для пар тел P_0', P_1' и P_0'', P_1'', то она будет верна и для тел P_0, P_1. Обозначая через $[X]$ выпуклую оболочку множества X, имеем

$$\begin{aligned} V_n(P) = V_n(L\cap[P_0\cup P_1]) \geqslant V_n(L\cap[P_0'\cup P_1']) + V_n(L\cap[P_0''\cup P_1'']) \geqslant \\ \geqslant V_n(P_0') + V_n(L\cap[P_0''\cup P_1'']) \geqslant V_n(P_0') + V_n(P_0'') = V_n(P_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Если P_1 не получается из P_0 параллельным переносом: $P_1 \nparallel P_0$, то либо $P_1' \nparallel P_0'$, либо $P_1'' \nparallel P_0''$. Иначе, при $P_1'\|P_0'$ и $P_1''\|P_0''$ соответствующие векторы сдвига будут одинаковы, они совпадают с вектором сдвига для $(P_1\cap M)\|(P_0\cap M)$. Таким образом, при $P_1 \nparallel P_0$ одно из двух последних неравенств в цепочке (1) является строгим.

2. Вначале теорему 1 докажем для многогранников P_0, при этом её утверждению: $P_1 \nparallel P_0 \Rightarrow V_n(P) > v$ предпошлём его ослабленный вариант: если $P_1 \nparallel P_0$, то найдётся другое тело $P_1' \subset L_1$, $V_n(P_1') = v$, такое, что $V_n(P) > V_n(P')$, $P' = L\cap[P_0\cup P_1']$. Тела и многогранники предполагаются выпуклыми, их i-мерные грани будем называть i-гранями, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Согласно (1) многогранник P_0 можно считать симплексом, поскольку в п. 1 каждую из частей P_0', P_0'' можно подвергать аналогичному дальнейшему разбиению до тех пор, пока все части не окажутся симплексами. Это возможно. Действительно, используя индукцию по n и выделяя в многограннике P_0 какую-либо вершину A, можно считать P_0 "пирамидой" с вершиной A и неровным "основанием", состоящим из нескольких его $(n-1)$-граней (несодержащих A). Гиперплоскость M п. 1, содержащая вершину A и одну из $(n-2)$-граней, общую для двух $(n-1)$-граней "основания", разбивает P_0 на 2 "пирамиды", в каждой из которых число граней по крайней мере на 1 меньше, чем в "основании" у P_0. Дальнейшие независимые разбиения частей P_0 гиперплоскостями $M \ni A$ оставят во всех "основаниях" по одной $(n-1)$-грани, которые по предположению индукции разбиваются на $(n-1)$-симплексы, а значит и P_0 разбивается на n-симплексы.

Далее обозначаем: $P_0 = \Delta_n = [A_1, \dots, A_{n+1}]$ – n-симплекс, $A_1, \dots, A_{n+1}$ – его вершины, $P_1 = Q$, $P = L\cap[\Delta_n\cup Q] = w(Q)$. Тело Q представляем пересечением полупространств всех опорных гиперплоскостей: $Q = \bigcap_{\mathbf{n}\in S^{n-1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$. Здесь: $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(Q)$ – опорная гиперплоскость Q с вектором нормали $\mathbf{n}$, направленным в сторону от Q, в сторону $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^+$, если $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- \cup \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^+$, $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^+$, S^{n-1} – единичная сфера. Рассмотрим ряд из n тел

$$Q = Q^{(1)} \subseteq Q^{(2)} \subseteq \dots \subseteq Q^{(n-1)} \subseteq Q^{(n)} = \widehat{\Delta}_n, \tag{2}$$

в котором $\widehat{\Delta}_n$ – минимальный симплекс, содержащий Q и гомотетичный Δ_n с положительным коэффициентом гомотетии, $Q^{(i)} = Q^{(i+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{n-i}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $i = n-1, \dots, 1$, где $\mathcal{N}_{n-i} \subset S^{n-1}$ состоит из нормалей всех опорных гиперплоскостей Q, параллельных соответствующим опорным гиперплоскостям $\widehat{\Delta}_n$, содержащим его $(i-1)$-грани и несодержащим грани больших размерностей. Тело Q относим к классу i, $i = 1, .., n$, если $Q = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$.

Считая для удобства Δ_n правильным симплексом и совмещая центр $\widehat{\Delta}_n$ с началом координат, множество $\mathcal{N}_{n-i} \subset S^{n-1}$, $i = 1, \dots, n-1$, будет представляться внутренностями $(n-i)$-мерных граней "двойственного" к $\widehat{\Delta}_n = [B_1, \dots, B_{n+1}]$ "симплекса" $\Delta_n^* = S^{n-1}$, точнее, центральной проекции на S^{n-1} границы $\partial\widehat{\Delta}_n^*$ двойственного к $\widehat{\Delta}_n$ симплекса $\widehat{\Delta}_n^*$. Если вершины B_i отвечают при гомотетии A_i, $i = 1, \dots, n+1$, и $\mathbf{n}_i$ – нормаль опорной гиперплоскости к $\widehat{\Delta}_n$, содержащей все вершины B_j, $j \in \{1, \dots, n+1\}\diagdown\{i\}$, то $\mathcal{N}_0 = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n+1}\}$, $\mathcal{N}_i = \bigsqcup_{\mathfrak{a}} \mathcal{N}_{\mathfrak{a}}$, $i = 1, \dots, n-1$, где объединение производится по всем подмножествам $\mathfrak{a} = \{\mathbf{n}_{j_1}, \dots, \mathbf{n}_{j_{i+1}}\} \subset \mathcal{N}_0$ мощности $i+1$, а $\mathcal{N}_{\mathfrak{a}} = [\mathfrak{a}]\diagdown\partial[\mathfrak{a}]$. Здесь под $[\mathfrak{a}]$ понимается "выпуклая оболочка" $\mathfrak{a}$ на сфере S^{n-1}. По определению $\mathcal{N}_{\{\mathbf{n}_j\}} = \{\mathbf{n}_j\}$, $j = 1, \dots, n+1$. Ясно, что $S^{n-1} = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{N}_i$.

3. Ослабленный вариант теоремы для $P_0 = \Delta_n$ можно переписать в виде: $Q \nparallel \Delta_n \Rightarrow V_n(w(Q)) > \inf_{Q':V_n(Q')=v} V_n(w(Q')) = cv$, где $c \in [t^n, 1]$ – некоторая константа, получающаяся при $v = 1$. Считаем, что расстояния от L до L_0 и L_1 относятся как t к $1-t$,

$t \in (0,1)$. Конкретная форма симплекса Δ_n непринципиальна, поскольку аффинным преобразованием, сохраняющим объём, его можно перевести в правильный. Рассуждая по индукции, вначале горизонтальное основание делается правильным, затем вершина передвижением по горизонтали располагается над центром основания, после чего останется растягивать (сжимать) основание и предвигать вершину по высоте. Наконец, если в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ выбран базис с началом координат и с первыми n координатными осями в гиперплоскости L_1, а α – аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющее $(n+1)$-ю координату неизменной, то $\alpha(L \cap [P_0 \cup P_1]) = L \cap [\alpha(P_0) \cup \alpha(P_1)]$.

3.1. Пусть вначале $Q = Q^{(1)} \subsetneq Q^{(2)}$. Тогда найдётся $\mathfrak{a}_0 \subset \mathcal{N}_0$ мощности n, для определённости $\mathfrak{a}_0 = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n\}$, для которого $Q^{(1)} \subsetneq Q^{(12)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1} \setminus \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}} \mathcal{L}^-_{\mathbf{n}}$. Множество $[\Delta_n \cup Q^{(12)}] \setminus [\Delta_n \cup Q^{(1)}]$ является пирамидой $\Lambda(A_{n+1}, Q^{(12)} \setminus Q^{(1)})$ с вершиной A_{n+1} и основанием $Q^{(12)} \setminus Q^{(1)}$. Это следует из того, что $Q^{(12)} \setminus Q^{(1)} = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}} R_{\mathbf{v}}$, $R_{\mathbf{v}} = \mathcal{L}^+_{\mathbf{v}} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \partial[\mathfrak{a}_0]} \mathcal{L}^-_{\mathbf{n}}$, и для всех $\mathbf{w} \in S^{n-1} \setminus [\mathfrak{a}_0]$, $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}$ справедливо $R_{\mathbf{v}} \subset \mathcal{L}^-_{\mathbf{w}}(Q^{(1)}) = \mathcal{L}^-_{\mathbf{w}}(Q^{(12)})$. Действительно, для $X \in [\Delta_n \cup Q^{(12)}] \setminus [\Delta_n \cup Q^{(1)}]$ прямая $A_{n+1}X$ пересекает L_1 в $R_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}$, так как боковые опорные гиперплоскости тела $[P_0 \cup P_1]$, обозначаемые как $L_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in S^{n-1}$, проходят через $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_0)$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_1)$, у $[\Delta_n \cup Q^{(12)}]$ и $[\Delta_n \cup Q^{(1)}]$ совпадают боковые опорные гиперплоскости $L_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in S^{n-1} \setminus \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}$, а для $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}$ имеем $L_{\mathbf{n}} \cap \Delta_n = \{A_{n+1}\}$. Таким образом, если $V_n(Q^{(12)}) = V_n(Q^{(1)}) + \delta$, $\delta > 0$, то $V_n(w(Q^{(12)})) = V_n(w(Q^{(1)})) + t^n\delta$. Пусть тело Q' получается из $Q^{(12)}$ отсечением гиперплоскостью $\mathcal{L} \subset L_1$, параллельной $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in S^{n-1} \setminus \mathcal{N}_{n-1}$, тела $\Omega \subset Q^{(12)}$ с $V_n(\Omega) = \delta$. Тогда $V_n(Q') = V_n(Q)$ и $[\Delta_n \cup Q^{(12)}] \setminus [\Delta_n \cup Q'] \supseteq [(\Delta_n \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\Delta_n)) \cup \Omega] = \Lambda$. Множество Λ содержит две пирамиды с общим основанием Ω и различными вершинами A_i, A_j симплекса Δ_n, поэтому $V_n(\Lambda) > t^n\delta$ и $V_n(w(Q')) > V_n(w(Q)) + t^n\delta - t^n\delta = V_n(w(Q))$.

3.2 Если $Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}$, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, то для некоторого $\mathfrak{a}_0 = \{\mathbf{n}_{i_1}, \dots, \mathbf{n}_{i_{n-j+1}}\}$ имеем $\bigcap_{i=0}^{n-j} \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_i} \mathcal{L}^-_{\mathbf{n}} = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j,j+1)} = Q^{(j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-j} \setminus \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}} \mathcal{L}^-_{\mathbf{n}}$, $Q^{(j)} = Q^{(j,j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}} \mathcal{L}^-_{\mathbf{n}}$. Пусть $x \in \partial Q^{(j)} \setminus \partial Q^{(j,j+1)}$ и $O(x,r)$ – замкнутый шар с центром x столь малого радиуса $r > 0$, что $O(x,r) \cap \partial Q^{(j,j+1)} = \varnothing$. Выберем $k_0 \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\}$ и $i_0 \in \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\}$. На ребре $[B_{i_0}, B_{k_0}]$ выберем точку B' близкой к B_{k_0}. Симплекс $\widehat{\Delta}_n$ разобьём на два симплекса ориентированной гиперплоскостью $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}$, содержащей вершины B' и B_i, $i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_0, k_0\}$, $B_{k_0} \in \mathcal{L}^+_{\mathbf{n}'}$. Пусть $\mathcal{L}^{(0)}_{\mathbf{n}'} \subset L_0$ – параллельная ей гиперплоскость, содержащая A_i, $i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_0, k_0\}$. Гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}$ параллельно передвинем в положение $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'}$ так, что $V_n(\widetilde{\mathcal{L}}^+_{\mathbf{n}'} \cap Q) = V_n(\mathcal{L}^{(0)+}_{\mathbf{n}'} \cap \Delta_n)$. Положим $\widehat{\Delta}^-_n = \widehat{\Delta}_n \cap \widetilde{\mathcal{L}}^-_{\mathbf{n}'}$,$Q^- = Q \cap \widetilde{\mathcal{L}}^-_{\mathbf{n}'}$, $Q^+ = Q \cap \widetilde{\mathcal{L}}^+_{\mathbf{n}'}$, $\Delta^-_n = \Delta_n \cap \mathcal{L}^{(0)-}_{\mathbf{n}'}$, $\Delta^+_n = \Delta_n \cap \mathcal{L}^{(0)+}_{\mathbf{n}'}$. Точку B' можно выбрать на столько близкой к B_{k_0}, а $r > 0$ на столько малым, что $\widehat{\Delta}^-_n \supset O(x,r)$. Если $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(Q) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(Q^-)$, то $\mathbf{n} \notin \bigcup_{i=0}^{n-(j+1)} \mathcal{N}_i \cup (\mathcal{N}_{n-j} \setminus \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0})$, так как $x \notin \partial Q^{(j,j+1)}$, и $\mathbf{n} \notin \bigcup_{i=n-(j-1)}^{n-1} \mathcal{N}_i$, так как гиперплоскости с нормалями из $\bigcup_{i=n-(j-1)}^{n-1} \mathcal{N}_i$ не параллельны (в отличии от $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$) $(j-1)$-граням $\widehat{\Delta}_n$, поэтому $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}$. Но для $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{a}_0}$ гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ не параллельны ни одной $(j-1)$-грани $\widehat{\Delta}^-_n$, иначе они были бы параллельны j-грани $\widehat{\Delta}_n$. Отсюда заключаем, что тело Q^- относительно Δ^-_n относится к классу, непревосходящему $j-1$. Используя п. 1 и предположение индукции для j, получаем $V_n(L \cap [\Delta_n \cup Q]) \geqslant V_n(L \cap [\Delta^-_n \cup Q^-]) + V_n(L \cap [\Delta^+_n \cup Q^+]) \geqslant$ $\geqslant V_n(L \cap [\Delta^-_n \cup Q^-]) + cV_n(\Delta^+_n) > cV_n(\Delta^-_n) + cV_n(\Delta^+_n) = cV_n(\Delta_n)$.

4. Для получения равенства $c = 1$ докажем, что $V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) \geqslant V_n(P_0) = V_n(P_1) = 1$ для тел P_0, P_1, путём стандартного применения п. 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$. Тело P_0 покроем сеткой из n-мерных кубиков со сторонами $\varepsilon > 0$, перпендикулярными $\mathbf{n}_i$, $i = 1, \dots, n$. Пересекающиеся с ∂P_0 кубики назовём граничными. Разделяющие гиперплоскости в L_0, перпендикулярные $\mathbf{n}_1$, индуцируют однозначно задаваемое семейство такого же числа гиперплоскостей в L_1, перпендикулярных $\mathbf{n}_1$. Ломти от P_0 и P_1 между каждой парой соответственных гиперплоскостей из L_0 и L_1 должны иметь одинаковый n-мерный объём. Каждый образовавшийся ломоть в P_1, независимо от остальных, аналогично разбивается семейством гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_2$, исходя из разбиения соответствующего ломтя из P_0. И так для всех $\mathbf{n}_3, \dots, \mathbf{n}_n$. Граничные кубики в P_0 и соответствующие им ломти в P_1 исключаем. Теперь и тело P_1 помещаем в аналогичную сетку из кубиков со стороной ε. Эта сетка индуцирует разбиение на параллелепипеды каждого ломтя $Q_1 \subset P_1$, которому отвечает кубик Q_0 в P_0. На Q_0 индуцируется разбиение на параллелепипеды, отвечающее (как в п.1) разбиению Q_1. Доли ломтей Q_1, пересекающиеся с ∂P_1, исключаем вместе с соответствующей долей кубика Q_0. Суммарный объём оставшихся параллелепипедов в P_0 и P_1 за счёт выбора $\varepsilon > 0$ приближается снизу к 1 сколь угодно близко. Согласно п. 1 остаётся доказать теорему для двух прямоугольных параллелепипедов Π_0, Π_1 со сторонами $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$, $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n = 1$. Теоремой утверждается неравенство $\prod_{i=1}^{n}((1-t)a_i + tb_i) \geqslant 1$ или $t^n \prod_{i=1}^{n}((1-t)/t + a_i/b_i) \geqslant 1$, которое справедливо, поскольку минимум $p = \prod_{i=1}^{n}(\tau + x_i)$ при $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, $\tau = (1-t)/t$, достигается только при $x_1 = \ldots = x_n = 1$ и равен $(\tau+1)^n$, так как при замене $x_i \neq x_j$ на $x_i' = x_j' = \sqrt{x_i x_j}$ величина p становится строго меньшей.

5. Теорема уже доказана для многогранников P_0 и тел P_1. Пусть тело $P_0 \nparallel P_1$, многогранник $P_0' \subset P_0$ является выпуклой оболочкой ε, n-кубиков из п. 4, а тело $P_1' \subset P_1$ получаем последовательными отсечениями (как в п.1) частей P_1 гиперплоскостями, параллельными граням многогранника P_0', отслеживая каждый раз равенство отсекаемых объёмов у P_0 и P_1. Величину $\varepsilon > 0$ можно взять на столько малой, что $P_1' \nparallel P_0'$. Для пары P_0', P_1' теорема уже доказана, поэтому справедливость теоремы следует из пп. 1 и 4. Если $P_1' \| P_0'$ для всех сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, то $P_1 \| P_0$, так как после параллельных переносов $P_1' = P_0'$ и ∂P_1 содержится в $C\varepsilon$-окрестности ∂P_0, где $C > 0$ – константа, зависящая от P_0 и P_1.

Теорема полностью доказана.

Автор благодарен Р. Н. Карасёву за полезные обсуждения с острой взаимной критикой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Делоне Б. Н.* Доказательство неравенства Брунна – Минковского// Успехи математических наук.— 1936.— № 2. — С. 39–46.

2. *Brunn H.* Uber Ovale und Eiflachen. Inag. Diss., Munchen, 1887.

3. *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen. Leipzig-Berlin, 1896, 1910.

4. *Делоне Б. Н.* Герман Минковский// Успехи математических наук.— 1936.— № 2. — С. 32–38.

5. *Gardner R. J.* The Brunn–Minkowski inequality// Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, V. 39, № 3, p. 355–405, 2002.

6. *Бураго Д. М., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. — Л.: "Наука" , 1980.

7. *Булдыгин В. В., Харазишвили А. Б.* Неравенство Брунна – Минковского и его приложения. — Киев: Наукова Думка, 1985.

8. *Белоусов Е. Г.* Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. — М.: МГУ, 1977.

УДК 514.172.45

RR-многогранники с ромбическими вершинами и правильными гранями различного типа

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Донской государственный аграрный университет
e-mail: geometry@mail.ru

RR-polytopes with rhombic vertices and regular faces of various types

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Don state agrarian university
e-mail: geometry@mail.ru

Пусть гранная звезда $StarV$ вершины V замкнутого выпуклого многогранника в E^3 состоит только из равных и одинаково расположенных ромбов. Если количество ромбов равно n, то при условии, что прядок оси вращения $StarV$ равен n, вершина V называется симметричной n-ромбической. Если у многогранника существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин, и при этом все грани, не входящие в звезду ромбической вершины, являются правильными многоугольниками по крайней мере двух различных типов, то такой многогранник называется RR-многогранником с правильными гранями различного типа. RR-многогранник называется составным, если его можно рассечь некоторой плоскостью на два многогранника, состоящих из правильных или правильных и ромбических граней.

Ранее автором в [1] – [3] найдены RR-многогранники с правильными гранями одного типа; количество таких многогранников, указанных там — 21, только один из которых имеет тупоугольную ромбическую вершину; при этом не существует бесконечных серий RR-многогранников.

Отметим, что в [2] не указан 22-й RR-многогранник с двенадцатью 10-ромбическими вершинами, который получается присоединением к 10-угольным граням в усечённом додекаэдре двенадцати 10-ромбических пирамид. Этот многогранник имеет 120 ромбических граней и 140 треугольных граней.

Для удобства в дальнейшем $2k$-угольной "чашей"с k-угольным основанием будем называть правильногранник, у которого k-угольная грань параллельна $2k$-угольной и обе грани имеют общую ось вращения порядка k, причём эти грани разделены двумя типами правильных граней ("боковыми гранями").

Задача, поставленная и решённая в настоящей работе, состоит в нахождении всех составных RR-многогранников с правильными гранями различного типа.

Основной результат работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Замечание 1. *Класс RR-многогранников с одной n-ромбической вершиной, n треугольными гранями и одной гранью, отличной от треугольных, исчерпывается восемью многогранниками при $n = 4, 5, \ldots, 11$.*

Теорема 1. *Следующие многогранники исчерпывают класс составных RR-многогранников с правильными гранями различного типа:*

1) RR-многогранники с одной n-ромбической вершиной, n треугольными гранями и одной гранью, отделённой от треугольных и ромбических замкнутым поясом квадратных граней, $n = 5, 6, \ldots, 11$.

2) RR-многогранники с одной n-ромбическиой вершиной, n треугольными гранями и одной гранью, отделённой от треугольных и ромбических замкнутым антипризматическим поясом, при $n = 6, 7, \ldots, 11$.

3) RR-многогранники с одной n-ромбической вершиной и одной пирамидальной вершиной, разделёнными замкнутым поясом квадратных граней, при $n = 5$.

4) Три многогранника с двумя ромбическими вершинами, полученные соединением многогранников из Замечания 1 и пунктов 1), 2) при $n = 5$ и многогранника $P_{2,31}$.

5) Предыдущие три многогранника 5) с отсечёнными 5-угольными пирамидами от многогранника $P_{2,31}$, то есть три многогранника из Замечания 1 и пунктов 1), 2) при $n = 5$ соединены с 10-угольной чашей с 5-угольным основанием и 5-угольными и треугольными боковыми гранями.

6) Три многогранника из Замечания 1 и пунктов 1), 2) при $n = 5$ соединены с 8-угольной чашей с 4-угольным основанием и 4-угольными и треугольными боковыми гранями.

7) RR-многогранники с двумя n-ромбическиими вершинами, n треугольными гранями, разделённые замкнутым поясом из квадратов , при $n = 5, 6, 7, \ldots, 11$.

8) Три многогранника из Замечания 1 и пунктов 1), 2) при $n = 5$ соединены с 10-угольной чашей с 5-угольным основанием и квадратными и треугольными боковыми гранями.

9) Три многогранника из Замечания 1 и пунктов 1), 2) при $n = 6$ соединены с 6-угольной чашей с 3-угольным основанием и квадратными и треугольными боковыми гранями.

10) Два многогранника с одной и с двумя 8-ромбическими вершинами, полученные соединением $P_{3,48}$ (из которого удалены, соответственно, одна или две 8-угольные чаши с квадратным основанием и квадратными и треугольными боковыми гранями) с многогранником из Замечания 1.

11) Один многогранник с одной ромбической вершиной, полученный из одного многогранника 10) поворотом восьмиугольной чаши на угол $\dfrac{\pi}{4}$.

12) Одиннадцать многогранников с 10-ромбическими вершинами, которые получаются последовательным присоединением к 10-угольным граням в усечённом додекаэдре двенадцати 10-ромбических пирамид.

13) Многогранники, получаемые из многогранников Джонсона J76 — J83 соединением 10-угольных граней с 10-ромбическими пирамидами.

14) Двенадцать многогранников с 10-ромбическими вершинами, которые получаются последовательным присоединением к 10-угольным граням в усечённом икосододекаэдре двенадцати 10-ромбических пирамид.

При доказательстве теоремы использовались, в частности, известные перечни многогранников с правильными гранями и правильногранников, допускающих условные рёбра, приведённые в [4] – [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Том 476. С. 153-164.

2. Субботин В. И. О двух подклассах многогранников с ромбическими вершинами // Труды международного семинара “Дискретная математика и её приложения”, имени академика О.Б.Лупанова. М., МГУ: 2019. (В печати).

3. Субботин В. И. RR-многогранники с одной ромбической вершиной // XV Международная конференция "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования".: тезисы докладов международной конференции (с.Цей, 15-20 июля 2019) — Владикавказ, 2019. С. 205.

4. Jonson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, №1. P. 169—200.

5. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями //Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2. С.1-220.

6. R. Tupelo-Schneck, Regular-faced polyhedra with conditional edges // [Электронный ресурс], Режим доступа: http://tupelo-schneck.org/polyhedra/.

———————————————————————————————

УДК 519

Диофантовы уравнения над квазикристаллом Амманна–Бинкера[1]

А. В. Шутов (Россия, г. Владимир)
Владимирский государственный университет
e-mail: a1981@mail.ru

Diophantine equations over the Ammann–Beenler quasicrystal

A. V. Shutov (Russia, Vladimir)
Vladimir State University
e-mail: a1981@mail.ru

В настоящее время активно изучаются различные диофантовы задачи над квазипериодическими теоретико-числовыми структурами.

Одной из таких структур является квазикристалл Амманна-Бинкера. Он определяется как множество точек вида [1]

$$Amm = \{\pi_1(h, j, k, l) : (h, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4, \pi_2(h, j, k, l) \in W\},$$

где

$$\pi_1(h, j, k, l) = h + j\zeta_8 + k\zeta_8^2 + l\zeta_8^3,$$
$$\pi_2(h, j, k, l) = h + j\zeta_8^3 + k\zeta_8^6 + l\zeta_8,$$

$\zeta_8 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, а W представляет собой правильный восьмиугольник со стороной 1 и с центром в начале координат, ориентированный так, что одно из его ребер параллельно действительной оси.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-02-00835 и 17-42-330787

Бааки и Грим [2] изучали разрешимость диофантова уравнения

$$x^2 + y^2 = r$$

над Amn. В настоящей работе мы рассматриваем решения диофантовых уравнений над множеством Amn.

Основной структурный результат имеет вид.

Теорема 1. *Пусть l – прямая, проходящая через две точки множества Amn. Тогда существует эффективно вычислимый интервал I_l такой, что множество $Amn \cap l$ подобно множеству точек вида*

$$X_l = \{A + B\varepsilon : A, B \in \mathbb{Z}, A + B\varepsilon' \in I_l\},$$

где $\varepsilon = 1+\sqrt{2}$ и $\varepsilon' = 1-\sqrt{2}$. Преобразование подобия также может быть вычислено в явном виде.

Следствие 1. *Прямая, проходящая через две точки множества Amn псодержит бесконечно много точек данного множества.*

Множества X_l являются квадратичными квазирешетками в смысле работы [3]. Используя общие свойства таких квазирешеток, удается получить следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ последовательность точек множества Amn, лежащих на некоторой прямой l. Тогда для почти всех прямых l $x_{n+1} - x_n$ принимает ровно три различных значения, причем одно из них является суммой двух других. Более того, существуют эффективно вычислимые разбиение $I_i = I_1 sqcup I_2 \sqcup I_l$ и перекладывание трех отрезков T_l такие, что значение $x_{n+1} - x_n$ равно номеру k интервала I_k в который попадает точка $T_l^{n+1}(0)$.*

Доказательство допускает также возможнсть существования исключительных прямых, для которых $x_{n+1} - x_n$ принимает ровно два значения. В этом случае отображение T_l представляет собой Примером таких прямых являются координатные оси $x = 0$ и $y = 0$.

Теорема 3. *Пусть $N(X)$ – число точек множества Amn находящихся на отрезке длины X прямой l, проходящей через две точки множества Amn (начальную точку отрезка считаем фиксированной). Тогда существует эффективно вычислимая постоянная c_l такая, что при $X \to \infty$*

$$N(X) = c_l X + O(\log X).$$

Автор благодарит Андрея Владимировича Малеева за полезные обсуждения, приведшие к возникновению данной задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baake M., Grimm U. Aperiodic orderr: Volume 1: A Mathematical Invitation. Cambridge University Press, 2013. 536 pp.

2. Baake M., Grimm U. A note on shelling // Discrete Comput. Geom. 2003. V. 30. P. 573-589.

3. Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток // Чебышевский сб. 2010. Т. 11. Вып. 1. С. 255–262.

Секция 8. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и теория приближений

УДК 517.5

Точная константа в весовом неравенстве Никольского–Бернштейна для неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа[1]

Д. В. Горбачёв (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru
И. А. Мартьянов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Sharp constant in the Nikolskii–Bernstein weight inequality for non-negative entire functions of exponential spherical type

D. V. Gorbachev (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: dvgmail@mail.ru
V. I. Ivanov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: ivaleryi@mail.ru
I. A. Martyanov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Изучается точная константа C_r в весовом неравенстве Никольского–Бернштейна

$$\|\Delta_\kappa^r f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_r \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, d\mu_\kappa(x),$$

для целых функций f экспоненциального сферического типа не больше 1.

Здесь $d\mu_\kappa(x) = c_\kappa v_\kappa(x)\, dx$, $v_\kappa(x) = \prod_{a \in R_+} |\langle a, x\rangle|^{2\kappa(a)}$ — степенной вес Данкля, определяемый системой корней $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ и функцией кратности $\kappa\colon R \to \mathbb{R}_+$, c_κ^{-1} — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, Δ_κ — лапласиан Данкля.

Активно исследовался случай $d = 1$, $r = 0$, $\kappa = 0$. Однако ни в нем, ни в других случаях константа C_r нам неизвестна. Историю вопроса и оценки C_r см. в [1].

В работе [1, теорема 1] доказано, что

$$C_r = \sup \Delta_\kappa^r f(0), \tag{1}$$

где супремум берется по всем радиальным целым функция $f(|x|)$ экспоненциального сферического типа не больше 1, таких что $\|f\|_{1,d\mu_\kappa} = 1$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Предложение 1. *Пусть* $d_\kappa = d + 2\sum_{a\in R_+}\kappa(a)$, $\alpha_\kappa = \frac{d_\kappa}{2} - 1$, $\tau > 0$. *Для интегрируемых радиальных функций сферического типа* 2τ *справедлива следующая квадратурная формула типа Маркова–Эрмита:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,d\mu_\kappa(x) = \frac{1}{\tau^{d_\kappa}}\left(\sum_{l=0}^{r}\delta_{\alpha_\kappa,r,l}\Delta_\kappa^l f(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{\alpha_\kappa,r,k} f\left(\frac{q_{\alpha_\kappa+r,k}}{\tau}\right)\right).$$

Здесь ряд сходится абсолютно, веса $\gamma_{\alpha_\kappa,r,k}$ *и* $\delta_{\alpha_\kappa,r,r}$ *положительны,* $q_{\alpha,1} < q_{\alpha,2} < \ldots$ *— положительные нули функции Бесселя* J_α.

Это предложение несложно следует из квадратурной формулы Бесселя с кратными узлами [2]. При этом вес $\delta_{\alpha_\kappa,r,r}$ явно записывается в терминах функции Бесселя.

Способ доказательства равенства (1) из работы [1] на основе положительного оператора обобщенного сдвига Данкля и предложение 1 позволяют найти точную константу Никольского–Бернштейна на подмножестве неотрицательных функций с дополнительным условием в нуле.

Теорема 1. *Пусть* Y^+ *— множество неотрицательных целых функций* f *экспоненциального сферического типа не больше 1, таких что* $\|f\|_{1,d\mu_\kappa} = 1$ *и* $\Delta_\kappa^l f(0) = 0$ *при* $l = 0, 1, \ldots, r-1$, $C_r^+ = \sup_{f\in Y^+}\|\Delta_\kappa^r f\|_\infty$. *Тогда*

$$C_r^+ = \frac{1}{2^{d_\kappa}\delta_{\alpha_\kappa,r,r}}.$$

Ранее эта теорема была известна только в частных случаях при $r \leqslant 1$ (см. обзор результатов в [1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д.В., Иванов В.И. Константы Никольского–Бернштейна для целых функций экспоненциального сферического типа в весовых пространствах // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 2. С. 75–87. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-75-87

2. Ghanem R.B., Frappier C. Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 92, no. 2. P. 267–279. doi: 10.1006/jath.1997.3122 .

———————————————————————————

УДК 519.72

Приближённый поиск строковой медианы и визуализация строковых кластеров[1]

Д. В. Горбачёв (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
Е. П. Офицеров (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: eofitserov@gmail.com

[1]Результаты исследования опубликованы при финансовой поддержке ТулГУ в рамках научного проекта № НИР_2018_28. Первый автор доклада — победитель конкурса Стипендиальной программы Владимира Потанина 2017/2018.

Approximate searching for string median and visualization of string clusters

D. V. Gorbachev (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: dvgmail@mail.ru
E. P. Ofitserov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: eofitserov@gmail.com

Рассматривается следующая задача о поиске медианы набора строк:

$$c = \arg\min_{a\in U} \sum_{b\in D} d(a,b),$$

где $D \subset G^*$ — конечный набор строк над алфавитом G, $U \subseteq G^*$, d — редакционное расстояние Левенштейна. Эта задача имеет важные приложения, например в биоинформатике при анализе белковых последовательностей. Однако известно, что в общем случае для $U = G^*$ задача о медиане является NP-сложной [1]. Поэтому для приближенного решения были предложены эвристические алгоритмы, в частности, жадный алгоритм [2].

Предлагается новый гибкий подход, базирующийся на гладкой аппроксимации расстояния Левенштейна $\tilde{d}$ [3]. В его основе лежит стохастическое кодирование символьных последовательностей и следующая формула для редакционного расстояния:

$$d(X_1, X_2) = \min_{(X_1', X_2'') \subseteq X_1 \times X_2} \left\{ \frac{1}{2} \|X_1' - X_2''\|_1 + |X_1| - |X_1'| + |X_2| - |X_2''| \right\},$$

где минимум берется по всем подпоследовательностям (X_1', X_2'') равной длины.

С одной стороны, стохастическое кодирование расширяет класс, на котором ищется экстремум. Однако наш основной результат показывает, что медиана не меняется. С другой стороны, теперь можно воспользоваться гладкими методами оптимизации, если заменить минимум в определении выше его гладким приближением. В результате разработано приближенное решения задачи поиска медианы на основе градиентного спуска, включающее расчет $\tilde{d}$ и $\nabla\tilde{d}$ на основе рекуррентных формул. Эффективный расчет приближенной медианы позволяет, например, применить метод k-средних для кластеризации строк. Дается способ визуализации этих кластеров на основе метода стохастического вложения соседей t-SNE [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. De la Higuera C., Casacuberta F. Topology of strings: Median string is NP-complete // Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 230, no. 1–2. P. 39–48. doi: 10.1016/s0304-3975(97)00240-5

2. Casacuberta F., de Antonio M. A greedy algorithm for computing approximate median strings // In: VII Simposium Nacional de Reconocimiento de Formas y Análisis de Imágenes. 1997. P. 193–198.

3. Ofitserov E., Tsvetkov V., Nazarov V. Soft edit distance for differentiable comparison of symbolic sequences // arXiv:1904.12562. 2019.

4. Van der Maaten L., Hinton G. Visualizing data using t-SNE // J. Mach. Learn. Res. 2008. Vol. 9. P. 2579–2605.

УДК 511.3

Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближённом анализе[1]

Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Number geometry and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis

N. M. Dobrovol'skiy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru
N. N. Dobrovol'skiy (Russia, Tula)
Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций из класса Коробова выражается либо через гиперболическую дзета-функцию сетки с весами, либо через гиперболическую дзета-функцию решетки, поэтому основные проблемы теоретико-числового метода приближенного анализа непосредственно связаны с изучением гиперболической дзета-функции решеток и гиперболической дзета-функции сеток с весами. Это необходимо для построения эффективных алгоритмов вычисления оптимальных многомерных квадратурных и интерполяционных формул на основе теоретико-числовых свойств используемых сеток. Оба типа дзета-функций в правой полуплоскости задаются рядами Дирихле, а дзета-функции, соответствующие мультипликативно-замкнутым системам целых чисел, выражаются через L-функции Дирихле.

Пространство решёток является полным метрическим пространством, так как с алгебраической точки зрения оно изоморфно факторгруппе полной линейной группы матриц по подгруппе унимодулярных матриц, то на нём можно задать структуру гладкого многообразия. Возникает задача явного описания гладкого многообразия решёток и изучение дифференциальных свойств основных функций на нём.

В теоретико-числовом методе приближенного анализа важной проблемой является приближение алгебраических сеток, построенных с помощью чисто вещественных алгебраических полей, рациональными сетками, соответствующим целым решёткам. Поэтому изучение вопросов диофантовых приближений алгебраических решёток чисто вещественных алгебраических полей целыми решётками имеет большое значение для развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

---

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

Основными объектами исследования являются: пространство решеток; гиперболическая дзета-функция решеток; гиперболическая дзета-функция сеток с весами; гладкое многообразие решёток.

Основные задачи проектов, разрабатываемых в Тульской школе теории чисел, состоят в изучении гиперболической дзета-функции произвольных решеток и алгоритмов её вычисления; оценки гиперболической дзета-функции сеток с весами; изучении матричных разложений алгебраических иррациональностей чисто вещественных алгебраических полей; приложение полученных результатов к многомерным квадратурным формулам.

Задачами этих проектов являются:

1. Изучение гиперболической дзета-функции решёток на пространстве решёток.

2. Изучение гладкого многообразия решёток и дифференциальных свойств основных функций на нём.

3. Изучение приближения алгебраических решёток целочисленными решётками.

4. Изучение вопросов численного интегрирования на новых классах, порожденных моноидами натуральных чисел.

Гиперболическая дзета-функция решёток в правой полуплоскости абсолютной сходимости ряда Дирихле является непрерывной функцией на пространстве решёток и предел гиперболических дзета-функций по сходящейся последовательности решёток является гиперболической дзета-функцией предельной решётки. Следующий принципиальный вопрос связан с возможностью предельного перехода в левой полуплоскости. Как показали наши исследования существуют моноиды натуральных чисел, для которых дзета-функция не продолжается в левую полуплоскость и предельный переход в правой полуплоскости абсолютной сходимости нарушается для левой полуплоскости. Выяснение возможности такой ситуации на пространстве решёток, несомненно, актуальная задача.

Важность второй фундаментальной задачи обусловлена тем, что, квадратурные формулы с алгебраическими сетками асимптотически дают наилучший возможный порядок убывания погрешности приближенного интегрирования, но они очень сложны с точки зрения генерации точек сетки и расчёта узлов. Возникает вопрос о наилучших приближениях алгебраических решёток целочисленными, которые будут давать квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками, относящиеся к классу простейших однопараметрических квадратурных формул. Поэтому для практического применения теоретико-числовых методов приближенного интегрирования функций многих переменных особую роль играет теория целочисленных приближений алгебраических решёток, которую необходимо построить.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., “On Hyperbolic Zeta Function of Lattices”, Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, 211, 2014, 23–62.

2. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii, “On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities”, Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016, no. 2, 27–39.

3. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова, “О гиперболической дзета-функции Гурвица”, Чебышевский сб., 17:3 (2016), 72–105.

4. Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева. О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ–М. Н. Добровольского–В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сб., 18:2 (2017), 54–97.

5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 18:2 (2017), 98–128.

6. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб., 18:4 (2017), 6–85.

7. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Гипотеза о "заградительном ряде"для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб., 19:1 (2018), 106–123.

8. Алгебраические решетки в метрическом пространстве решеток / Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский // Чебышевский сборник,2017. - Т. 18, № 4. - С. 325-337. - 13 с.

9. Смирнова, Е. Н. Алгебраические решетки в метрическом пространстве решеток / Смирнова Е. Н., Пихтилькова О. А. // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XV Междунар. конф. посвящ. 100-лет. со дня рождения проф. Николая Михайловича Коробова, 28-31 мая 2018 г., Тула / М-во образования и науки Рос. Федерации [и др.]. - Электрон. дан. - Тула : Тульск. гос. пед. ун-т,2018. - . - С. 325-328. . - 4 с.

10. Смирнова, Е. Н. Структура гладкого многообразия на пространстве решеток и пространстве сдвинутых решеток / Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XVI Междунар. конф. посвящ. 80-лет. со дня рождения проф. М. Деза, 13-18 мая 2019 г., Тула / М-во науки и высш. образования Рос. Федерации [и др]. - Электрон. дан. - Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого,2019. - . - С. 303-306. . - 4 с.

11. Пихтилькова, О. А. Гладкое многообразие решеток и сдвинутых решеток / Пихтилькова О. А., Добровольский Н. М., Смирнова Е. Н. // Университетская наука: решения и инновации : материалы Всерос. науч.-практ. конф., 23-25 окт. 2018 г., Оренбург / М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Оренбургский гос. ун-т". - Электрон. дан. - Оренбург : ОГУ,2018. - . - С. 131-136. . - 6 с.

12. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

13. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

14. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5

15. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.

УДК 514.753.22+511.9

Почти линейные участки графиков функций

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: zubkov@mi.ras.ru
О. П. Орлов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: olegorlov92@gmail.com

Almost linear segments of function graphs

A. M. Zubkov (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute of RAS
e-mail: zubkov@mi.ras.ru
O. P. Orlov (Russia, Moscow)
Moscow State University
e-mail: olegorlov92@gmail.com

Аннотация

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такая функция, что ее график $\{(x, f(x))\}_{x\in\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^2$ является спрямляемой кривой. Авторами доказано, что для любых $L < \infty$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие точки $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$, что расстояние между A и B больше L, а расстояния от всех точек $(x, f(x))$, $a \leqslant x \leqslant b$, до отрезка AB не больше $\varepsilon|AB|$. Приведён пример плоской спрямляемой кривой, для которой это утверждение неверно. Показано, что для покоординатно не убывающей последовательности целых точек плоскости с ограниченными расстояниями между соседними точками при любом $r < \infty$ существует прямая, содержащая не меньше r точек этой последовательности.

Формулировки результатов

Определение 1. *Жорданова кривая γ в евклидовом пространстве с концами в точках A и B обладает* ***свойством*** *I_ε, если $\rho_H(\gamma, AB) \leqslant \varepsilon|AB|$, где AB — отрезок, соединяющий точки A и B,*

$$\rho_H(\gamma_1, \gamma_2) = \max\left\{\max_{X\in\gamma_1}\min_{Y\in\gamma_2}|XY|, \max_{Y\in\gamma_2}\min_{X\in\gamma_1}|XY|\right\}$$

— метрика Хаусдорфа, $|XY|$ — длина отрезка XY.

Замечание 1. *Легко показать, что для кривой γ с концами в точках A и B на самом деле*

$$\rho_H(\gamma, AB) = \max_{X\in\gamma}\min_{Y\in AB}|XY|.$$

Теорема 1. *Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что ее график $\{P_x=(x,f(x))\}_{x\in\mathbb{R}}\subset\mathbb{R}^2$ является спрямляемой кривой. Тогда для любых $L<\infty$ и $\varepsilon>0$ существуют такие $s<t$, что $|P_sP_t|>L$ и кривая $(x,f(x))$, $s\leqslant x\leqslant t$, с концами в точках P_s и P_t, обладает свойством I_ε.*

Замечание 2. *Очевидно, что для любого $\varepsilon>0$ на дифференцируемой кривой существуют такие достаточно близкие точки A и B, что часть этой кривой между точками A и B обладает свойством I_ε.*

Следующая теорема показывает, что теорема 1 для кривых, не представимых графиком функции одной переменной, не верна.

Теорема 2. *Существует такая плоская спрямляемая кривая γ, что для любых двух ее точек A и B с $|AB|>3$ часть кривой между A и B не обладает свойством I_ε при всех $\varepsilon<1/(8\sqrt{5})\approx 0.056$.*

Замечание 3. *Построение кривой в теореме 2 основано на идее построения кривой Гильберта, заполняющей квадрат (см., например, [1, Chapter 2]).*

Применяя теорему 1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть M — натуральное число и $\{Z_i=(X_i,Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность таких двумерных векторов с целыми координатами, что $0\leqslant X_i,Y_i\leqslant M$, $i\geqslant 1$. Обозначим $S_0=0, S_k=\sum_{i=1}^{k}Z_i$, $k\geqslant 1$. Тогда для любого натурального r найдется прямая, содержащая не менее r точек последовательности $\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$.*

Замечание 4. *Теорема 3 косвенно связана с вопросом А. А. Евдокимова:*

> *Существует ли в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$ при некотором n бесконечное связное (в смысле целочисленных расстояний) множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Sagan, Space-Filling Curves. — New-York: Springer-Verlag, 1994. 193 pp.

УДК 519.651, 517.589

Вычисление дзета-констант посредством метода с контролем аппроксимации полиномами[1]

Е. А. Карацуба (Россия, г. Москва)
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
e-mail:ekaratsuba@gmail.com

On a method of evaluation of zeta-constants with control of approximation by polynomials

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 17-20-02222, 19-07-00750

E. A. Karatsuba (Russia, г. Moscow)
Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy
e-mail: ekaratsuba@gmail.com

Проблема построения эффективных методов вычисления значений дзета-функции Римана рассматривалась многими авторами (см., например, [1]–[2]). В [3] был построен новый метод быстрого приближения дзета- констант, т.е. значений дзета-функции Римана $\zeta(n)$, $n \geq 2$, n – целое число, рациональными дробями. Этот метод возник на основе подхода Эрмита-Бейкерса (см. [4]–[7]), который последний применил при доказательстве иррациональности дзета-констант $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ с использованием двух специально подобранных полиномов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, $n \geq 1$:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^n(1-x)^n\right), \quad Q_n(x) = (1-x)^n. \tag{1}$$

Несмотря на то, что в [3] было построено быстрое приближение дзета -констант и некоторых их комбинаций достаточно простыми выражениями из рациональных дробей, в которых участвуют коэффициенты многочленов $P_n(x)$, $Q_n(x)$, быстрого алгоритма найдено не было. Алгоритмом, с помощью которого можно быстро вычислить любую дзета -константу остаётся алгоритм из [9] на основе применения общего метода БВЕ (см. [10]). При этом сложность вычисления дзета -константы с точностью до n знаков равна

$$O\left(n \log^3 n \log\log n\right) \tag{2}$$

битовых операций, то есть близка к оптимальной.

В докладе представлено дальнейшее развитие метода, построенного в [3]. При этом в алгоритме приближения и вычисления дзета -констант используются три полинома (а не два, как в [3]).

Основной результат опирается на следующие утверждения

Лемма 1. *При любых $r_1, r_2, r_3 \geq 0$; $s \geq 3$; справедливо соотношение*

$$I(r_1, r_2, r_3) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3}}{1 - x_1 x_2 x_3 \dots x_s} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_s =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r_1+k+1)(r_2+k+1)(r_3+k+1)(k+1)^{s-3}}.$$

Для любых целых s и m; $s \geq 1$, $m \geq 1$; и любых $r \geq 1$, $k \geq 0$, справедливо соотношение

$$\frac{1}{(r+k+1)^m (k+1)^s} =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j-1} \frac{\binom{m+j-2}{m-1}}{r^{j+m-1}(k+1)^{s+1-j}} + (-1)^s \sum_{j=1}^{m} \frac{\binom{s+m-j-1}{m-j}}{r^{s+m-j}(r+k+1)^j}.$$

Лемма 2. *Пусть*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^n(1-x)^n\right) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

$$a_r = \frac{(-1)^r (n+r)!}{(r!)^2 (n-r)!},$$

$$Q_n(x) = (1-x)^n = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n;$$

$$b_r = (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Пусть

$$D_n(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n; \quad d^* = \max_{0 \le j \le n} |d_j|;$$

Тогда при любом $s \geq 3$ для интеграла

$$I_s = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{P_n(x_1) Q_n(x_2) D_n(x_3)}{1 - x_1 x_2 x_3 \dots x_s} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_s$$

справедлива оценка

$$|I_s| < \frac{d^*}{2^{2n}}.$$

Построение аппроксимации к дзета-константам базируется на следующей основной теореме.

Теорема 1. *Пусть $P_n(x)$, $Q_n(x)$ и $D_n(x)$ три многочлена степени n, $n \geq 1$;*

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$
$$Q_n(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n;$$
$$D_n(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n;$$

$a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_n; d_0, d_1, \dots, d_n$ – произвольные числа. Пусть интеграл I_s, $s \geq 3$, определяется как

$$I_s = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{P_n(x_1) Q_n(x_2) D_n(x_3)}{1 - x_1 x_2 x_3 \dots x_s} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_s.$$

Тогда при $s \geq 5$ справедливы соотношения:

$$I_3 = A_{s-2,3}\zeta(3) - A_{s-2,2}\zeta(2) - A_{s-2}, \tag{3}$$
$$I_4 = A_{s-3,4}\zeta(4) + A_{s-3,3}\zeta(3) - A_{s-3,2}\zeta(2) - A_{s-3}, \tag{4}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{5}$$
$$I_s = A_{1,s}\zeta(s) + A_{1,s-1}\zeta(s-1) + \dots + A_{1,3}\zeta(3) - A_{1,2}\zeta(2) - A_1, \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

где коэффициенты $A_{\kappa,\eta}$ выписываются непосредственно через коэффициенты полиномов a_μ, b_ν, d_λ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зудилин В. В. О биномиальных суммах, связанных с рациональными приближениями к $\zeta(4)$// Матем. заметки, 2004. Т. 75. № 4. С. 637-640.

2. Матиясевич Ю. В. Дзета-функция Римана и конечные ряды Дирихле// Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 6. С. 174-198.

3. Карацуба Е. А. Об одном методе построения семейства аппроксимаций дзета-констант рациональными дробями// Пробл. передачи информ. 2015. Т. 51. № 4. С. 78-91.

4. Hermite C. Sur la fonction exponentielle// Comptes Rendus Acad. Sci. 1873. V. 77. P. 18-24.

5. Beukers F. A Note on the Irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$// Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. P. 268-272.

6. Beukers F. Legendre polynomials in irrationality proofs// Bull. Aust. Math. Soc. 1980. V. 22. P. 431-438.

7. Hata M. A note on Beukers' integral// J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1995. V. 58. № 2. P. 143-153.

8. Карацуба Е. А., Королев М. А., Резвякова И. С., Чубариков В. Н. О конференции памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям// Чебышевский сб. 2015. Т. 16. № 1. С. 89-152.

9. Карацуба Е. А. Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при целых значениях арумента s// Пробл. передачи информ. 1995. Т. 31. № 4. С. 69–80.

10. Карацуба Е. А. Быстрое вычисление трансцендентных функций// Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 4. С. 87-110.

УДК 519.86

О математических моделях некоторых экономических задач

А. И. Козко (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Л. М. Лужина (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
e-mail: lluzhina@gmail.com
А. Ю. Попов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС
e-mail:
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Московский педагогический государственный университет
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

On mathematical models of some economic problems

A. I. Kozko (Russia, Moscow)
Moscow state University named after M. V. Lomonosov, RANEPA
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
L. M. Luzhina (Russia, Moscow)
Moscow state University named after M. V. Lomonosov, RANEPA
e-mail: lluzhina@gmail.com

A. Yu. Popov (Russia, Moscow)
Moscow state University named after M. V. Lomonosov, RANEPA
e-mail:
V. G. Chirskii (Russia, Moscow)
Moscow state University named after M. V. Lomonosov, MPSU
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Доклад посвящен развитию результатов, опубликованных в [1], [2]. Исследуется математические модели ряда экономических задач. Таких как классическая модели Рамсея-Касса-Купманса [3],[4],[5] и др. Исследование модели Рамсея-Касса-Купманса и её усовершенствование были заложены в работах Касса и Купманса, поэтому часто модель называют моделью Касса-Купманса, чтобы подчеркнуть её отличие от первоначального вида, рассмотренного Рамсеем. Также отметим большой вклад в развитие данной теории Маленво, в некоторых источниках [6] считают, что модель лучше называть моделью Касса-Маленво-Купманса.

В частности, в работе исследуется функция полной полезности экономической деятельности, которая может быть задана как

$$U = \int_0^{\omega} u\Big(c(t)\Big) \cdot e^{-(\varrho - n)t}\, dt \mapsto \max,$$

где $\omega = T$ либо $\omega = +\infty$, $c(t)$ — потребление на одного возрослого в момент t, n — величина, отвечающая за темп прироста населения в изучаемом домохозяйстве, $\varrho > 0$ — ставка временного предпочтения, $u(t)$ — функция полезности. В работе используются методы аналитической аппроксимации, численного анализа и др.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва, (2019) 87-88.

2. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. (2019). (готовится к выходу в печать)

3. Ramsey F. P. A mathematical theory of saving // The Economic Journal. December (1928) 543–559.

4. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. (2010).

5. Benassy, Jean-Pascal. "The Ramsey Model". Macroeconomic Theory. // New York: Oxford University Press. (2011) 145–160.

6. Stephen E. Spear, Warren Young. Optimum savings and optimal growth: the Cass-Malinvaud-Koopmans nexus // Macroeconomic Dynamics. **18**, Issue 1, January (2014) 215-243.

УДК 511.9

О неполных частных одной цепной дроби[1]

А. Н. Кормачева (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: juska789@mail.ru

About the partial quotients of one of the continued fractions[2]

A. N. Kormacheva (Russia, Tula)
Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University
e-mail: juska789@mail.ru

1. Введение

В работе [4] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

с периодом $(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m-ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$.

Через $\Lambda_m(p)$ обозначается целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \left\{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m)|n, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*_m(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}^*_{m,1,Z} = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2,Z} = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda^*_m(p) = \frac{1}{2P_m Q_m}$.

Рассмотрим сетку $M(\Lambda_m(p)) = \Lambda^*_m(p) \cap [0; 1)^s$. Нетрудно видеть, что

$$M(\Lambda_m(p)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right) \middle| k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \,\middle|\, \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \ldots 2Q_m - 1; \end{array} \right\}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.
[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x,y) = 9(1-2\{x\})^2(1-2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ в работе [4] предложено использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_mQ_m}\sum_{n=0}^{2Q_m-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}+\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}-\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

которая для краткости названа функцией качества. Для вычисления функции качества обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ требуется $O(N(P_m,Q_m))$ арифметических операций, где $N(P_m,Q_m)$ — количество точек сетки $M(\Lambda_m(p))$. В работе [4] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m,Q_m)})$ арифметических операций, а в работе [5] построен алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m,Q_m))$ арифметических операций. Центральным моментом в этой работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой. Оптимальный коэффициент a_m по модулю $N_m = 2P_mQ_m$ в этой работе задавался по формуле

$$a_m = \begin{cases} 2P_mQ_{m-1}-1, & \text{при } m\text{— нечетном}\\ 2P_m(Q_m-Q_{m-1})-1, & \text{при } m\text{— четном.}\end{cases}$$

Цель данной работы — найти неполные частные разложения $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную дробь.

2. Сведения из теории цепных дробей квадратичных иррациональностей

В этой работе нас будет интересовать только цепная дробь для $\sqrt{p}$. Согласно теории (см. [2], стр. 104, 111,112) для простых вида $p\equiv 3 \pmod 4$ цепная дробь для $\sqrt{p}$ имеет вид

$$\sqrt{p} = q_0, \overline{q_1,\ldots,q_k,q_{k+1},q_k,\ldots,q_1,2q_0}$$

и $n = 2k+1$, где k может быть любым целым числом $k\geqslant 0$. Отсюда следует, что произвольная подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу $\sqrt{p}$ имеет вид

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{[q_0,\ldots,q_m]_{(m+1)}}{[q_1,\ldots,q_m]_{(m)}},$$

где скобки Эйлера $[b_1,\ldots,b_n]_{(n)}$, определены рекуррентно

$$[\,]_{(-1)} = 0,\quad [\,]_{(0)} = 1,\quad [b_1,\ldots,b_n]_{(n)} = b_n[b_1,\ldots,b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1,\ldots,b_{n-2}]_{(n-2)}\quad (n\geqslant 1)$$

и неполные частные q_ν заданы равенствами

$$q_\nu = \begin{cases} q_0, & \text{при } \nu=0\\ q_\nu, & \text{при } 1\leqslant\nu\leqslant 1+k\\ q_{n+1-\nu}, & \text{при } 2+k\leqslant\nu\leqslant n\\ 2q_0, & \text{при } \nu=n+1\\ q_{(n+1)\left\{\frac{\nu}{n+1}\right\}}, & \text{при } \left\{\frac{\nu}{n+1}\right\}>0\\ 2q_0, & \text{при } \left\{\frac{\nu}{n+1}\right\}=0.\end{cases}$$

3. Случай нечетного номера подходящей дроби

Если m — нечетное, то

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{2P_mQ_{m-1}-1}{2P_mQ_m} = \frac{Q_{m-1}-\frac{1}{2P_m}}{Q_m}.$$

Теорема 1. *При нечетном m справедливо равенство*

$$\frac{a_m}{N_m} = \cfrac{1}{q_m + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_m}}}}}}}}.$$

4. Случай четного номера подходящей дроби

Если m — четное, то

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{2P_mQ_m - 2P_mQ_{m-1}-1}{2P_mQ_m} = \frac{Q_m - Q_{m-1}-\frac{1}{2P_m}}{Q_m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{Q_{m-1}+\frac{1}{2P_m}}{Q_m - Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}}.$$

Теорема 2. *При четном m справедливо равенство*

$$\frac{a_m}{N_m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q_m - 1 + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_m}}}}}}}}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

2. Г. Дэвенпорт. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.

3. А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.

4. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

5. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 302–307.

УДК 517.28, 530.181

Статистическая модель анализа целостности структуры сетевого трафика как динамической системы

А. Е. Краснов (Россия, г. Москва)
Отдел информационных технологий, Центр реализации государственной образовательной политики и информационных технологий
e-mail: krasnovmgutu@yandex.ru
Д. Н. Никольский (Россия, г. Москва)
Отдел информационных технологий, Центр реализации государственной образовательной политики и информационных технологий
e-mail: nikolskydn@mail.ru
Е. Н. Надеждин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: en-hope@yandex.ru

Statistical model for analyzing the integrity of the network traffic structure as a dynamic system

A. E. Krasnov (Russia, Moscow)
Department of Information Technologies of FSAEI EPE CRSEPIT
e-mail: krasnovmgutu@yandex.ru
D. N. Nikol'skii (Russia, Moscow)
Department of Information Technologies of FSAEI EPE CRSEPIT
e-mail: nikolskydn@mail.ru
E. N. Nadezhdin (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: en-hope@yandex.ru

Сетевой трафик рассматривается как динамическая система, характеризуемая потоком последовательных по дискретному времени $t_k = \Delta T k$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ сгруппированных на интервале ΔT времени пакетов (агрегатов), имеющих j-е флаговые состояния $(j = 1, 2, ..., J)$, в которых определены числа $N^j_{\Delta T}$ пакетов и их информационная емкость $I^j_{\Delta T}$. Каждому k-у агрегату ставится в соответствие значение $X^j_{\Delta T}(t_k) = \sqrt{N^j_{\Delta T}(t_k)}$ его обобщенной динамической координаты, а также, вычисленное по ряду обобщенных координат, относящихся к нескольким соседним агрегатам, значение $Y^j_{\Delta T}(t_k)$ обобщенной скорости, формируемой на основе преобразования Гильберта [1].

Статистическая модель потока агрегатов сетевого трафика определяется в виде совокупности дискретных аналитических сигналов $F^j_{\Delta T}(t_k) = X^j_{\Delta T}(t_k) + iY^j_{\Delta T}(t_k)$ и их двумерных фазовых портретов [2] или распределений $w[X^j_{\Delta T}(t_k), Y^j_{\Delta T}(t_k)]$ вероятностей совместных значений реальных $X^j_{\Delta T}$ и мнимых $Y^j_{\Delta T}$ компонент сигналов ($j = 1, 2, \ldots, J$), наблюдаемых в одинаковые моменты времени ($k = 1, 2, ..., K$). Возможно также ввести многомерные фазовые портреты $w[X^j_{\Delta T}(t_s), Y^j_{\Delta T}(t_s), X^j_{\Delta T}(t_p), Y^j_{\Delta T}(t_p)]$, учитывая значения комплексных амплитуд аналитических сигналов, наблюдаемых в различные моменты времени ($s \neq p$). Далее, в эксперименте, для упрощения расчетов, будем использовать фазовый портрет $w[X_{\Delta T}, Y_{\Delta T}]$, где $X_{\Delta T} = \sum\limits_{j=1}^{J} q_{j,j} X^j_{\Delta T}$, $Y_{\Delta T} = \sum\limits_{j=1}^{J} q_{j,j} Y^j_{\Delta T}$, а $q_{j,j}$ —введенные ниже статистические веса j–х флаговых состояний.

Динамическая модель целостности структуры сетевого трафика определяется на основе оператора его эволюции [3]:

$$S(t_s, t_p) \sim F_{\Delta T}(t_s) F^{+}_{\Delta T}(t_p); \quad p < s; \quad s = 2, ..., K, \tag{1}$$

где $F^{+}_{\Delta T}(t_p) = \left[F^{1*}(t_p), F^{2*}(t_p), ..., F^{j*}(t_p), ..., F^{J*}(t_p)\right]$, а $F^{+}_{\Delta T}(t_p)$ означает транспонирование и комплексное сопряжение элементов вектор столбца $F_{\Delta T}(t_p)$.

Формирование фазовых портретов является трудоемкой, в вычислительном смысле, процедурой. Поэтому будем описывать статистическую модель целостности структуры сетевого трафика простой статистикой. Для этого введем по аналогии с [3] нормированный парциальный коррелятор, как среднее (по флаговым состояниям) значение физической величины, соответствующей оператору эволюции (1):

$$H(t_s, t_p) = \frac{Re\left\langle F_{\Delta T}(t_s) F^{+}_{\Delta T}(t_p) \right\rangle}{\sqrt{F^{+}_{\Delta T}(t_s) F_{\Delta T}(t_s)} \sqrt{F^{+}_{\Delta T}(t_p) F_{\Delta T}(t_p)}}; \quad p < s; \quad s = 2, ..., K, \tag{2}$$

где $\left\langle F_{\Delta T}(t_s) F^{+}_{\Delta T}(t_p) \right\rangle = tr\left[Q(t_s, t_p) F_{\Delta T}(t_s) F^{+}_{\Delta T}(t_p)\right]$, а действительные матричные элементы $q_{j,m}(t_s, t_p)$ флагового статистического оператора $Q(t_s, t_p)$ ($tr\left[Q(t_s, t_p)\right] = 1$) определяются значениями $I^j_{\Delta T}(t_s)$ и $I^m_{\Delta T}(t_p)$ ($j, m = 1, 2, \ldots, J; s = 1, 2, \ldots, K$) нагрузок t_s, t_p–агрегатов.

В вычислительном эксперименте анализировались 10 минутные записи сетевого трафика, снятые с одного из Frontend серверов к некоторому Web-сервису. Frontend сервера работал под управлением сервера Nginx. Использовалось 6 флагов протокола TCP ($J = 64$). В качестве аппаратной поддержки применялась сетевая карта Qlogic с призводительностью 10 Гбит/с.

Исследовались распределения $w[H]$ значений корреляторов $H(t_s, t_{s-1})$ смежных агрегатов трафика при его различных состояниях: нормальном – Normal; при атаках TCP Connection Flood, Slow Loris, HTTP Get Flood. Данные атаки относятся к сложным атакам прикладного уровня модели взаимодействия открытых систем (OSI) [4].

На рисунке 1 приведен пример фазовых портретов $w[X_{\Delta T}, Y_{\Delta T}]$ различных состояний сетевого трафика для интервала $\Delta T = 50$ мс. Видно, что фазовые портреты значительно отличаются, однако имеют достаточно сложную структуру.

На рисунке 2 приведены распределения $w[H]$ положительных значений корреляторов H для $\Delta T = 50$ мс. Наглядно видно значительное различие полученных распределений для разных состояний трафика.

В работе рассмотрены примеры применения корреляторов более высокого порядка для анализа целостности структуры сетевого трафика.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kanarachos S., et al. Anomaly detection in time series data using a combination of wavelets, neural networks and Hilbert transform // Information, Intelligence, Systems and Applications: Abstracts of 6th International Conference. Corfu, Greece, IEEE. 2015.

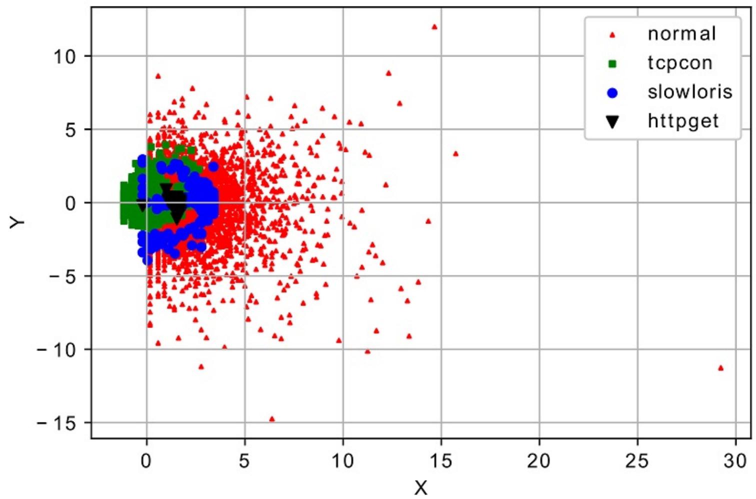


Рис. 1: Фазовые портреты $w[X_{\Delta T}, Y_{\Delta T}]$ сетевого трафика для $\Delta T = 50$ мс

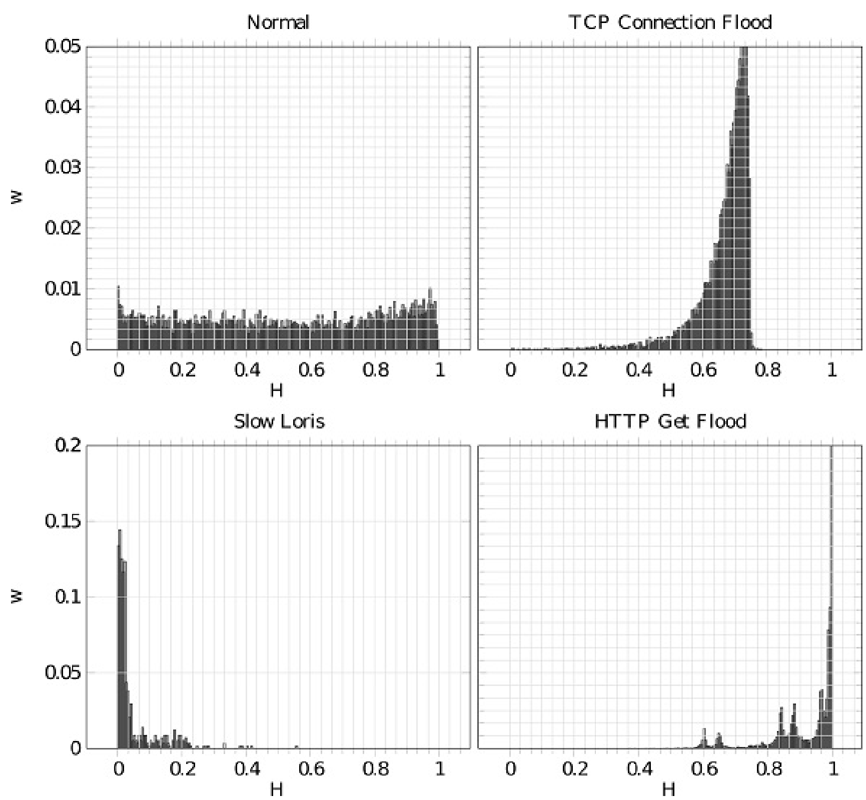


Рис. 2: Распределения $w(H)$ значений H корреляторов смежных агрегатов сетевого трафика для его различных состояний

2. Краснов А. Е. Фазовые портреты огибающих когерентного электромагнитного поля на плоскости: использование фазовых портретов для оптимального различения состояний поля // Радиотехника. 1997. № 2. С. 49–54.

3. Краснов А. Е., Надеждин Е. Н., Никольский Д. Н. Прямые и обратные задачи реконструкции операторов эволюции в анализе динамики многомерных процессов //Чебышевский

сборник. 2018. Т. 19. № 2. С. 217–233.

4. Bhattacharyya D. K., Kalita J. K. DDoS attacks: evolution, detection, prevention, reaction, and tolerance. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2016.

—————————————————————————————

УДК 511.9

Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением [1]

Н. В. Максименко (Россия, г. Оренбург.)
Оренбургский государственный университет
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication[2]

N. V. Maksimenko (Russia, Orenburg)
Orenburg state University
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

В теоретико-числовом методе приближенного анализа важную роль играют гиперболические дзета-функции решёток. Каждая такая гиперболическая дзета-функция решётки является рядом Дирихле по усеченному норменному спектру решётки. Поэтому возникает задача об аналитическом продолжении этого класса рядов Дирихле. Как показали Н. М. Добровольский и его соавторы для любой декартовой решётки такое аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, в которой полюс порядка s, существует. Вопрос о существовании аналитического продолжения для произвольных решёток остается открытым.

Поэтому, естественно, рассмотреть множество всевозможных рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой, и изучить свойства этого функционального пространства над полем комплексных чисел.

Алгебраические решётки и соответствующие алгебраические сетки вошли в науку в 1976 году в работах К. К. Фролова. Каждая такая решётка является решёткой, повторяющейся умножением, а её норменный спектр будет моноидом натуральных чисел. Поэтому можно рассмотреть алгебру рядов Дирихле, соответствующих этому моноиду натуральных чисел.

Такая постановка является новой и ранее не встречалась в литературе.

Принципиальный вопрос, который связан с такой постановкой, заключается в следующем: *Какими аналитическими свойствами обладают ряды Дирихле из соответствующего пространства и соответствующей алгебры?*

—————————————————————————————

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_p_a.
[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

УДК 511.9

Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток[1]

А. В. Михляева (Россия, г. Оренбург.)
Оренбургский государственный университет
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets[2]

A. V. Mikhlyaeva (Russia, Orenburg)
Orenburg state University
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

1. Введение

В работе [2] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\quad \Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p} \quad n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{\lambda}_2^* = \left(\frac{\sqrt{p}}{2p}, -\frac{\sqrt{p}}{2p}\right)$ и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m-ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.
[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m)|n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\quad \vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left(\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}, -\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2pQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(p) = \frac{1}{2P_m Q_m}$.

Рассмотриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1; 1)^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p) \cap [0; 1)^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m} \right) \middle| k \in A(n), |n| \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$A(n) = \left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \ldots - 2Q_m + 1; \end{array} \right\},$$

$$M(\Lambda_m(p)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \ldots 2Q_m - 1; \end{array} \right\}.$$

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x, y) = 9(1 - 2\{x\})^2(1 - 2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ в работе [2] предложено использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_m Q_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

которая для краткости названа функцией качества. Для вычисления функции качества обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ требуется $O(N(P_m, Q_m))$ арифметических операций, где $N(P_m, Q_m)$ — количество точек сетки $M(\Lambda_m(p))$. В работе [2] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m, Q_m)})$ арифметических операций и сформулирована гипотеза, что можно построить алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций.

Цель данной работы — построить такой алгоритм.

2. Преобразование функции качества

Для количества слагаемых в выражении для функции качества, которое обозначим через $N = N(P,Q)$, где $P = P_m$, $Q = Q_m$, справедливо равенство $N = N(P,Q) = 2PQ$.

Наряду с обозначением $H(M(\Lambda_m(p)))$ будем использовать $H(P,Q)$:

$$H(P,Q) = \frac{9}{N}\sum_{n=0}^{2Q-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n}{2Q}+\frac{k}{2P}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n}{2Q}-\frac{k}{2P}\right)\right)^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$H(P,Q) = \frac{9}{N}\sum_{n=0}^{2Q-1}\sum_{k\in B(n)}\left(\left(1-\frac{n}{Q}\right)^2-\left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2.$$

Обозначим через $T(n)$ величину $T(n) = \left[\frac{P\cdot n}{Q}\right]$. Ясно, что $T(n+Q) = P + T(n)$. В работе [2] доказана теорема.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned}H(P,Q) = \frac{9}{N}\Bigg(&\frac{2}{5}P+\frac{2}{3P}-\frac{1}{15P^3}+2\sum_{n=1}^{Q-1}\Bigg(1+2T(n)-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}+\\&+\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4}-\\&-4\frac{n}{Q}\left(1+2T(n)-\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right)+\\&+\left(\frac{n}{Q}\right)^2\left(6(1+2T(n))-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right)-\\&-\left(\frac{n}{Q}\right)^3 4(1+2T(n))+\left(\frac{n}{Q}\right)^4(1+2T(n))\Bigg)\Bigg).\end{aligned}$$

Это выражение и даёт алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m,Q_m)})$ арифметических операций.

3. Новое выражение для функции качества

Положим $N_m = 2P_mQ_m$ и целое a_m зададим равенством

$$a_m = \begin{cases} 2P_mQ_{m-1}-1, & \text{при } m\text{— нечётном}\\ 2P_m(Q_m-Q_{m-1})-1, & \text{при } m\text{— чётном.}\end{cases}$$

Теорема 2. *Справедливо равенство $M(\Lambda_m(p)) = M(a_m,N_m)$, где параллелепипедальная сетка $M(a_m,N_m)$ задаётся равенством*

$$M(a_m,N_m) = \left\{\left(\frac{n}{N_m},\left\{\frac{a_mn}{N_m}\right\}\right)\middle|\, n=0,\ldots,N_m-1\right\}.$$

Рассмотрим разложение $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную периодическую дробь:

$$\frac{a_m}{N_m} = \cfrac{1}{q_{1,m} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{l-1,m} + \cfrac{1}{q_{l,m}}}}}$$

длины $l = l(m)$.

Для дальнейшего нам потребуются скобки Эйлера $[b_1, \ldots, b_n]_{(n)}$, которые определяются рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \ldots, b_n]_{(n)} = b_n[b_1, \ldots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \ldots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geqslant 1).$$

В работе [1] для величин H_k, заданных равенствами

$$H_k = \frac{9}{Q_k} \sum_{n=0}^{Q_k-1} \left(1 - 2\frac{n}{Q_k}\right)^2 \left(1 - 2\left\{\frac{P_k n}{Q_k}\right\}\right)^2,$$

доказана теорема

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$H_k = 1 + \frac{4}{5Q_k^2}\left(10 + 5k + \sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda^2 - \frac{3(P_k^2 + Q_{k-1}^2)}{Q_k^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q_k}\left(2\sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda(Q_\lambda T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2}T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2}T_{k,\lambda-1}) - 10\sum_{\lambda=1}^{k-1} Q_{\lambda-1}T_{k,\lambda+1}\right)\right).$$

Здесь через $T_{k,\nu}$ обозначены величины $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \ldots, q_k]_{(k-\nu)}$.

Теорема 4. *Для функции качества $H(M(\Lambda_m(p)))$ справедливо равенство*

$$H(M(\Lambda_m(p))) = 1 + \frac{4}{5N_m^2}\left(10 + 5l + \sum_{\lambda=1}^{l} q_{\lambda,m}^2 - \frac{3(P_{l,m}^2 + Q_{l-1,m}^2)}{Q_{l,m}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q_{l,m}}\left(2\sum_{\lambda=1}^{l} q_{\lambda,m}(Q_{\lambda,m}T^*_{l,\lambda+1} + Q_{\lambda-2,m}T^*_{l,\lambda+1} + Q_{\lambda-2,m}T^*_{l,\lambda-1}) - 10\sum_{\lambda=1}^{l-1} Q_{\lambda-1,l}T^*_{l,\lambda+1}\right)\right),$$

где $\frac{P_{\lambda,m}}{Q_{\lambda,m}}$ — *λ-ая подходящая дробь к числу* $\frac{a_m}{N_m}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, l)$, $T^*_{l,\nu} = [q_{\nu+1,m}, \ldots, q_{l,m}]_{(l-\nu)}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

2. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

3. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 302–307.

УДК 511.9

Некоторые вопросы теоретико-числовых методов приближённого анализа

М. В. Можайкина (Россия, г. Москва)
Московский педагогический государственный университет
e-mail: marta.mozhajkina@gmail.com

Some questions of theoretical-numerical methods of approximate analysis

M. V. Mozhaikina (Russia, Moscow)
Moscow State Pedagogical University
e-mail: marta.mozhajkina@gmail.com

Работа посвящена исследованию теоретико-числовых алгоритмов численного интегрирования периодических функций многих переменных. В ходе работы исследованы класические теоретико-числовые алгоритмы такого рода, которым посвящен ряд работ известных ученых: Н. М. Коробова [1], Н. С. Бахвалова, В. А. Быковского и др. (Исторически первые алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток были созданы в 1959 году Н. М. Коробовым, ему же принадлежат наилучшие по быстродействию алгоритмы такого рода.)

Установлено, что введение сеток для построения многомерных квадратурных формул позволяет с помощью оценок тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования. Рассмотрены вопросы сравнения и улучшения погрешности вычисления интегралов при использовании в квадратурных формулах различных видов теоретико-числовых сеток.

Особое внимание уделено методу оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова, разработка которого явилась принципиальным прорывом в теории и практике вычисления кратных интегралов от гладких периодических функций многих переменных. (Важность оптимальных параллелепипедальных сеток обусловлена их простотой и ненасыщаемостью алгоритмов приближенного интегрирования по соответствующим квадратурным формулам, заключающейся в росте точности квадратурных формул с ростом гладкости интегрируемых функций.)

Приведены конкретные примеры решения задач численного интегрирования, направленных на вычисление оптимальных коэффициентов и демонстрацию их практических применений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. 2-е изд. - М.: МЦНМО, 2014.

УДК 511.3

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток[1]

Е. М. Рарова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: rarova82@mail.ru

Trigonometric sums of nets of algebraic lattices

E. M. Rarova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rarova82@mail.ru

Рассматриваются: единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\vec{m} = (\,m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,...,$\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y} \in \Lambda\ (\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.*

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x}\,|\,\vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})} d\vec{x}\right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1\ldots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \middle| \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \ldots, \Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Нетрудно видеть, что $\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t(m, \ldots, m) | m \in \mathbb{Z}\}$.

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k))$ $\quad (k = 1 \ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Лемма 1. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left| \int_{-1}^{1} (1 - |x|) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \tag{6}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}, \tag{7}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1, \ldots, N'(t \cdot \Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}_k,\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M(t)}\left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec{y})\right)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[2]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sideset{}{'}\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}\int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}\rho(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})}d\vec{y}, \tag{8}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m}=\vec{0};\\ 0, & \text{при } \vec{m}\neq\vec{0},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^s.\end{cases}$$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *При $t\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{9}$$

Теорема 3. *При $t\to\infty$ для произвольного вектора $\vec{m}\neq\vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{10}$$

Теорему 3 можно уточнить.

Теорема 4. *Для любого целого $m\neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{11}$$

Доказательство.Действительно, по теореме 1

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m,\ldots,m)) = 1 + \sideset{}{'}\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\setminus\{t(m,\ldots,m)\}}\int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}\rho(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{x})}d\vec{y}.$$

Поэтому, по лемме 1 получим

$$|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m,\ldots,m)) - 1| \leqslant \zeta_H(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|2) = O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

[2]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.
2. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34-39.
3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. С. 356-359.
4. Е. М. Рарова. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

————————————————————————————

УДК 511.9

О рациональных приближениях алгебраических сеток[1]

А. В. Родионов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru
А. В. Михляева (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

On rational approximations of algebraic nets

A. V. Rodionov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru
A. V. Mikhlyaeva (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Рассмотрим квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n+k\sqrt{p}|n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F:

$$\Lambda(F)=\{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)})|\Theta = \Theta^{(1)}\in\mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m-ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$.

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p}))|n, k \in \mathbb{Z}\},$$

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Рассмотриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1;1)^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p) \cap [0;1)^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m} \right) \middle| k \in A(n), |n| \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$A(n) = \left\{ k \,\middle|\, \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \ldots -2Q_m + 1; \end{array} \right\},$$

$$M(\Lambda_m(p)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \,\middle|\, \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \ldots 2Q_m - 1; \end{array} \right\}.$$

В докладе рассматриваются результаты численного эксперимента по вычислению значений функции качества

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_m Q_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

разными способами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

3. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

4. Родионов А. В., Чуприн С. Ю. О гиперболических параметрах решётки линейного сравнения // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1. Ч. 1. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 50–62.

5. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

6. Е. И. Климова, Н. Н. Добровольский Квадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 308–310.

7. А. В. Родионов О рациональных приближениях алгебраических сеток // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 321–310.

———————————————————————————

УДК 511.42

Структура гладкого многообразия на пространстве решёток

Е. Н. Смирнова (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: helenash@mail.ru
О. А. Пихтилькова (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

The structure of a smooth manifold on the space of lattices

E. N. Smirnova (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: helenash@mail.ru
O. A. Pikhtilkova (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Как известно (см. [2], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda,\Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda,\Gamma)=\max(\ln(1+\mu),\ln(1+\nu)),\quad \mu=\inf_{\Lambda=A\cdot\Gamma}\|A-E_s\|,\quad \nu=\inf_{B\cdot\Lambda=\Gamma}\|B-E_s\|,$$

$$E_s=\begin{pmatrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant s},\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{при } i=j,\\ 0, & \text{при } i\neq j,\end{cases}\qquad \|A\|=s\cdot\max_{1\leqslant i,j\leqslant s}|a_{ij}|.$$

Определение 1. *Точка $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется делителем нуля, если у неё есть координаты равные* 0.

Определение 2. *Решётка не содержащая делителей нуля называется неприводимой.*

Понятие гладкого многообразия является одним из основных понятий современной математики. Это формализации объекта, независимо возникшего во многих математических дисциплинах, а также в приложениях математики — математической физике, механике и других науках.

Исследования многообразий были начаты во второй половине XIX века, они естественно возникли при изучении дифференциальной геометрии и теории групп Ли. Тем не менее, первые точные определения были сделаны только в 30-х годах XX века.

Целью нашего исследования является построение структуры гладкого многообразия на пространстве решеток.

Задачами исследования является: рассмотрение метрического пространства решёток как гладких многообразий;

изучение важнейших функций на пространстве решёток таких как: норменный минимум, гиперболический параметр решёток, гиперболическая дзета-функция решёток как функций на гладком многообразии;

изучение дифференциальных свойств этих функций.

Как известно (см. [4], стр. 15) *полная линейная группа* $GL(s;\mathbb{R})$ — множество всех невырожденных вещественных матриц размера $s\times s$ образуют гладкое многообразие, как открытое подмножество в $\mathbb{R}^{s^2}$, на котором определитель не обращается в ноль.

Целочисленная решётка $\mathbb{Z}^s$ называется фундаментальной решёткой. Обозначим через $\mathbb{U}_s$ множество унимодулярных целочисленных матриц:

$$\mathbb{U}_s = \left\{ A = \left(\begin{array}{ccc} a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s\,1} & \ldots & a_{s\,s} \end{array} \right) \middle| a_{1\,1}, \ldots, a_{s\,s} \in \mathbb{Z}, \det A = \pm 1 \right\}.$$

$\mathbb{U}_s$ является группой автоморфизмов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$:

$$A\mathbb{Z}^s = \mathbb{Z}^s \quad \text{для любой матрицы} \quad A \in \mathbb{U}_s.$$

Тем самым задается бесконечное множество базисов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$:

$$\vec{\lambda}_{1A} = (a_{1\,1}, \ldots, a_{s\,1}), \ldots, \vec{\lambda}_{sA} = (a_{1\,s}, \ldots, a_{s\,s}) \quad \text{для любой матрицы} \quad A \in \mathbb{U}_s.$$

Векторами такого типа исчерпываются все базисы фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$.

Через $\mathfrak{M}_s$ обозначим кольцо вещественных квадратных матриц s-ого порядка, а через $\mathfrak{M}_s^*$ — мультипликативную группу этого кольца.

Через $\mathfrak{M}_s(\mathbb{Z})$ обозначим кольцо целочисленных квадратных матриц s-ого порядка, а через $\mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Z})$ — мультипликативный моноид этого кольца. Очевидно, что $\mathbb{U}_s \subset \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Z})$ и это максимальная мультипликативная группа кольца $\mathfrak{M}_s(\mathbb{Z})$.

Рассмотрим произвольную s-мерную решётку Λ с базисом

$$\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{s\,1}), \ldots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{1\,s}, \ldots, \lambda_{s\,s}),$$

которая задается невырожденной базисной матрицей A:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{array} \right),$$

$$\Lambda = A\mathbb{Z}^s = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m_1 \\ \vdots \\ m_s \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} m_1\lambda_{1\,1} + \ldots + m_s\lambda_{1\,s} \\ \vdots \\ m_1\lambda_{s\,1} + \ldots + m_s\lambda_{s\,s} \end{array} \right) \middle| m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ясно, что решётка Λ задается бесконечным множеством базисов, для которых соответствующая базисная матрица A' имеет вид $A' = AB$, где B — произвольная унимодулярная матрица из $\mathbb{U}_s$.

Если через $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ обозначить группу автоморфизмов решётки Λ, то нетрудно видеть, что $\mathrm{Aut}(\Lambda) = A\mathbb{U}_s A^{-1}$, где A — произвольная базисная матрица решётки Λ.

Любые две двумерные решётки Λ и Γ изоморфны как абелевы группы. Обозначим множество изоморфизмов решётки Λ в Γ через $\mathrm{Iso}(\Lambda, \Gamma)$. Если A — произвольная базисная матрица решётки Λ и B — решётки Γ, то $\mathrm{Iso}(\Lambda, \Gamma) = B\mathbb{U}_s A^{-1}$, а $\mathrm{Iso}(\Gamma, \Lambda) = A\mathbb{U}_s B^{-1}$.

Отсюда следует, что расстояние между двумя решётками можно записать следующим образом:

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \quad \mu = \inf_{A \in \mathrm{Iso}(\Gamma,\Lambda)} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B \in \mathrm{Iso}(\Lambda,\Gamma)} \|B - E_s\|.$$

Для описания структуры гладкого многообразия вопрос о расстоянии носит принципиальный характер, так как тем самым мы задаём окрестность решётки, которая в точности гомеоморфна соответствующему открытому подмножеству $\mathbb{R}^{s^2}$.

В заключении остановимся на описании многообразия совместных приближений Дирихле второго рода. Пусть задан набор вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Рассмотрим решётку совместных приближений Дирихле второго рода $\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, заданную равенством

$$\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \{(q, q\alpha_1 - q_1, \ldots, q\alpha_s - q_s) | q, q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Ясно, что это замкнутое ограниченное подмногообразие размерности s в гладком многообразии размерности $(s+1)^2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940. Т. 11. С. 3–340.

2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

3. Б. Ф. Скубенко К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Целочисленные решетки и конечные линейные группы, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 116, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, С. 142–154; J. Soviet Math., 26:3 (1984), 1922–1930.

4. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. — М.: «Мир», 1987. — 304 с.

Секция 9. История математики

УДК 51(091)

Исследование конечных геометрий в работах американских математиков школы Мура–Диксона

В. Г. Алябьева (Россия, г. Пермь)
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

The study of finite geometries in the works of American mathematicians at the Moore–Dickson research school

V. G. Alyabieva (Russia, Perm)
Perm State University
e-mail: vgalyabeva@gmail.com

До 1876 года в университетах США не было программ подготовки исследователей в области математики.

Решающее влияние на возникновение математических исследований в США в последней четверти 19 века оказали три человека: Джордж Сильвестр [1], Феликс Клейн и Элиаким Мур.

В 1876 году в Балтиморе открылся университет Джона Хопкинса – первый университет США, воспринявший многие черты немецкого университета. Главной из этих черт явилось создание исследовательских центров при университете, где сообща вели научную работу преподаватели, аспиранты, студенты. Эти центры в США получили название *аспирантских школ искусств и науки* (Graduate schools of Arts and Science). Кафедру математики в университете Хопкинса возглавил выдающийся английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр и занимал этот пост в течение 7 лет.

Сильвестр читал курсы: теория чисел, теория определителей и современная алгебра, теория подстановок, теория разбиений, Артур Кэли приезжал с лекциями по алгебраической геометрии, абелевым и тэта-функциям, Чарльз Пирс из Гарварда читал теорию вероятностей и логику.

Восемь человек под руководством Сильвестра защитили докторские диссертации.

В 1881 году Сильвестр основал *American Journal of Mathematics*. В этом журнале Сильвестр опубликовал 30 статей, в том числе большую работу «Конструктивная теория разбиений». Усилиями Сильвестра и его учеников *Америка появилась на математической карте мира*. Его студенты публиковали работы не только в американских журналах, но и таких зарубежных изданиях как Comptes Rendus, журнал Крелле.

Возникший после отъезда Сильвестра вакуум в математических исследованиях американцев частично восполнил Феликс Клейн. В 1884 году он впервые приехал в США. Ему предлагали освободившуюся после отъезда Сильвестра кафедру математики в университете Джона Хопкинса, но после долгих переговоров Клейн отклонил предложение и предпочёл Гёттинген. В течение 10 лет Клейн влиял на развитие математики в США. Его широкий взгляд на математику, поиск единой концепции математического знания, его научные связи с ведущими европейскими математиками привлекали американских студентов к его лекционным курсам. Его влияние на американских студентов связано не столько с его конкретной программой исследований, сколько с его общей способностью вдохновлять их и приучать к исследовательской работе. Девять американских студентов под его руководством защитили диссертации, шестеро в разные годы занимали пост президента Американского математического общества, 13 — пост вице-президента Общества.

В 1893 году в США открылась Международная промышленная выставка, посвящённая 400-летию открытия Америки, в её рамках проводился Международный математический конгресс. Конгресс не получил порядкового номера, но и по истечении времени именовался международным. На конгресс прибыл Феликс Клейн. Он привёз доклады немецких коллег и выступил с большим докладом «Современное состояние математики». После конгресса Северо-Западный университет организовал коллоквиум, на котором Клейн в течение двух недель читал лекции для 20 американских слушателей.

Вице-президентом математического конгресса был Елиаким Гастингс Мур (Eliakim Hastings Moore, 1862–1932). Он совместно с Генрихом Машке и Оскаром Больца входил в состав редакционного комитета по изданию трудов конгресса. Мур по значимости своих исследований не сравним ни с Сильвестром, ни с Клейном. Это был начинающий исследователь, но он проявил себя как умелый организатор науки. Его научные интересы относились к геометрии, теории групп, теории чисел, теории функций, интегральным уравнениям.

Мур рано начал интересоваться теорией групп, к которой он возвращался в своей жизни не раз. Ему и его ученику Л. Диксону принадлежит современное определение *группы*. Изначально в теории групп Мур стоял на абстрактной точке зрения, именно, исходил из аксиоматического определения группы, не зависящего от вида элементов, содержащихся в группе. Такая точка зрения восходит к Кронекеру и Дедекинду. Мур доказал [2], *что любое конечное поле есть поле Галуа*. Этот результат Мур сообщил в докладе, прочитанном на Международном математическом конгрессе в 1893 году. В 1897 году Мур построил группы, изоморфные симметрической и знакопеременной группам подстановок. Всего с 1893 по 1905 год Мур опубликовал 12 статей по теории групп. С теоретико-групповыми работами Мура тесно связаны его исследования тактических конфигураций. Так, в работах 1894–95 г. Мур нашёл тактические инварианты для линейной, однородной линейной и дробно-линейной групп. Четыре статьи Мура посвящены системам троек Штейнера. Мур вычислил порядок группы автоморфизмов системы троек из 7 элементов, равный 108, доказал простоту и дважды транзитивность этой группы. Заметим, что, если элементы троек считать точками, а тройки – прямыми, то система троек образует проективную плоскость второго порядка.

В 1896 году Мур опубликовал большую статью «Tactical memoranda» [3]. В этой статье Мур даёт определение тактической конфигурации. К этому времени в геометрии К. Т. Рейе (Karl Theodor Reye, 1838–1919) определил *геометрическую* конфигурацию, элементами которой являются геометрические образы: точки, прямые, плоскости. Мур подчёркивает плодотворность понятия тактической конфигурации и приводит примеры всевозможных систем математических объектов, которые можно воспринимать как тактические конфигурации. К таковым относятся сочетания, размещения, системы Штейнера, геометрические конфигурации, конечные группы.

Теоретико-групповые и тактические исследования Мура продолжили его ученики, прежде всего Л. Диксон и О. Веблен.

Диксон обобщил результаты Галуа, Жордана, Серре, относящиеся к линейным группам простого порядка до групп над произвольным конечным полем. Он дал первое обширное изложение теории конечных полей, одновременно с Уэддербёрном (J. H. M. Wedderburn, 1862–1948) доказал, что *любая конечная линейная ассоциативная алгебра с делением есть поле*. В большой статье 1905 года «О конечных алгебрах» [4] Диксон исследовал независимость постулатов конечного поля и построил два типа конечных алгебр, для которых не выполняются некоторые постулаты поля. Исследования Диксона некоммутативных алгебр продолжил в 1935 году Ганс Цассенхауз (Hans Zassenhaus, 1912–1991). Если Диксон показал, что коммутативность умножения и коммутативность сложения конечной алгебры с делением являются следствиями из остальных аксиом и что ни один из дистрибутивных законов не зависит от остальных аксиом поля, то Цассенхаус перечислил все возможные алгебры с делением, в которых выполняется лишь один из дистрибутивных законов. Цассенхаус назвал такие алгебры почти-полями и в статье «О конечных почти-полях» [5] дал общий метод их построения. Кроме почти-полей, которые можно получить методом, предложенным Цассенхаусом, есть ещё семь особых почти-полей, построенных Диксоном. В 1967 году Дональд Пассман (Donald Passman) доказал, что иных конечных почти-полей нет.

Освальд Веблен учился в университетах Айовы, Гарварда, Чикаго. В Чикаго он слушал лекции О. Больца, Г. Машке, Е. Мура. Докторская диссертация Веблена 1904 года «Система аксиом геометрии» [6] выполнена под руководством Е. Г. Мура. Изложение аксиом геометрии в диссертации более следует традициям Паша и Пеано, нежели традициям Гильберта. В качестве неопределяемых понятий Веблен выбирает понятия «точка» и «порядок». Число аксиом сокращено до 12. Веблен проверяет независимость аксиом и достигает построения независимой аксиоматики. В статье «Конечные проективные геометрии» [7], написанной по материалам лекций зимнего семестра 1905 г, он указал общий метод построения конечных проективных пространств размерностей, равных и превышающих 3, и конечных плоскостей над полями Галуа, сформулировал аксиоматику конечной n-мерной геометрии, исследовал группу коллинеаций геометрии. Веблен доказал, что в проективной n-мерной геометрии, для $n \geq 3$, теорема Дезарга следует из аксиом этой геометрии и того факта, что порядок поля Галуа, над которым строится геометрия, отличен от 2. Используя эту теорему, он построил геометрическую алгебру точек на прямой. Эта алгебра удовлетворяет всем аксиомам поля, кроме коммутативности умножения. Позднее Узддербёрн доказал, что умножение в ней коммутативно всякий раз, когда число точек на прямой конечно. В совместной статье Веблена и Уэддербёрна 1907 г. [8] года были построены первые недезарговы конечные проективные плоскости над алгебрами Диксона порядка 9, сформулирована проблема о наименьшем порядке недезарговой проективной плоскости. Лишь в 1956 г. М. Холл (M. Hall) и его ученики доказали, что искомый порядок равен 9.

Таким образом, Мур и его ученики исследовали конечные геометрии, используя аналитические, теоретико-групповые и тактические методы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алябьева В. Г. Влияние Дж. Сильвестра и А. Кэли на развитие комбинаторики // XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящённая 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 13–18 мая 2019 г.) – Тула. 2019. С. 311–314.

2. Moore E. H. A doubly-infinite system of simple groups / Mathematical Papers Read of the International Mathematical Congress in Chicago 1893, published by MacMillan. 1896. P. 208–242.

3. Moore E.H. Tactical memoranda, I-III // American Journal of Mathematics. 1896. V. 18. P. 264–303.

4. Dickson L. E. On finite algebras // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften der Universität zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1905. S. 358-393.

5. Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper // Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1935. Bd. 11. S. 187-220.

6. Veblen O. A system of axioms for geometry // Transactions of the American mathematical society. 1904. V.5. № 3. P. 343–384.

7. Veblen O., Bussey W. H. Finite projective geometries // Transactions of the American mathematical society. 1906. V.7. № 3. P.241–359.

8. Veblen O., Wedderburn J. H. M. Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries // Transactions of the American mathematical society. 1907. V. 8. P. 379–388.

УДК 51(091)

История очень большого натурального числа, которое придумали физики

П. Н. Антонюк (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: pavera@bk.ru

The history of a very large natural number that physicists came up with

P. N. Antonyuk (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: pavera@bk.ru

Свершилось! Впервые в истории науки законодательно зафиксировано очень большое натуральное число.

Это «поразительно большое число» обсуждал Альберт Эйнштейн (А. Эйнштейн, Л. Инфельд, Эволюция физики, 1938). Он написал половину этого числа, указав все десятичные знаки:

$$300\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

Число было получено из «измерений броуновского движения взвешенных частиц».

Сегодня, начиная с 20 мая 2019 года, это число в точности равно

$$602\ 214\ 076\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

Число определяет количество молекул в одном моле вещества. Термин «моль» придумал в 1894 году немецкий химик Вильгельм Оствальд. Позже французский физик Жан Перрен назвал в 1909 году обсуждаемое число в честь итальянского физика и химика Амедео Авогадро (1776-1856). Сам Авогадро не имел никакого отношения ни к молю, ни к числу Авогадро.

Новые определения семи основных единиц измерения, включающих моль и составляющих основу Международной системы единиц (СИ), были приняты 16 ноября 2018 года в Версале на 26-ой Генеральной конференции по весам и мерам. Определения, благодаря которым число Авогадро стало натуральным числом, вступили в силу в мае этого года.

Разложение числа Авогадро на простые множители

$$2^{17} \cdot 5^{15} \cdot 563 \cdot 267413 \tag{1}$$

показывает, что выбор именно такого значения числа, возможно, – не самый удачный. Например, натуральное число

1 000 000 000 000 000 000 000 000,

означающее триллион в квадрате, выглядит проще и легко запоминается. Правда, физики и химики не хотят, чтобы новое значение числа Авогадро существенно отличалось от старого значения.

В ближайшем будущем предстоит обсуждение нового определения моля и, связанного с ним значения числа Авогадро.

———————————————————————————————

УДК 539.3

Развитие новых разделов математики в XX веке и их влияние на механику композитов[1]

И. К. Архипов (Россия, г. Тула)
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова (Тульский филиал)
e-mail: iarh@list.ru
В. И. Абрамова (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: abramova_vi@mail.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Development of new branches of mathematics in the XX century and their influence on the mechanics of composites

A. I. Arkhipov (Russia, Tula)
Plekhanov Russian University of Economics. Tula branch
e-mail: iarh@list.ru
V. I. Abramova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: abramova_vi@mail.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Введение.

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

В работе изложен краткий обзор по истории развития новых разделов математики и их влияние на теоретические исследования механики композиционных материалов. Показан вклад российских и советских математиков и механиков, позволивший создать функциональную основу для изучения механических свойств композитов - новых материалов, получивших широкое применение в технике и народном хозяйстве.

Влияние разделов математики на механику композитов.

Появление композитных материалов вызвало бурный рост исследований механических свойств, позволяющих проектировать эти материалы. Эти исследования велись как в теоретическом, так и в практическом плане. Теоретические исследования, сводились в основном, к построению математических моделей механического поведения композитов, как структурно-неоднородных материалов. Композиты с детерминированными структурами изучались с помощью традиционных методов механики деформированного твердого тела. Для этого выбирался так называемый представительный объём, характеризующий макроскопические свойства всего композита. Напряжённо-деформированные состояние (НДС) в этом объёме определялось путём соответствующей краевой задачи теории упругости или пластичности. Широко применение нашли также численные методы, в частности, методы конечных элементов. НДС в макроскопическом объёме находилось путём соответствующего осреднения результатов расчёта в представительном объёме.

Более сложной является проблема изучения НДС в композитах со случайными распределениями компонентов. Здесь методы механики деформированного твердого тела могут применяться лишь частично. Для построения математических моделей потребовались фундаментальные результаты новых разделов математики. Такими разделами являются теория случайных процессов и полей, теория восстановления, теория надёжности, математическая статистика. Значительные результаты в этих разделах получены русскими и советскими математиками А. А. Марковым, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоровым, Е. С. Вентцель, Ю. В. Линником, А. П. Хусу, А. М. Ягломом и другими.

Построение математических моделей и композитов, как сред со случайными неоднородностями, с учётом результатов перечисленных разделов математики, началось в 60е-70е годы XX века. Используя новые математические методы, достигнуты значительные результаты в теории упругости, вязко-упругости, пластичности, и прочности композитов. Отметим лишь наиболее существенные успехи, достигнутые советскими учеными-механиками в теории упругости, вязко-упругости композитов.

Применяя методы теории случайных процессов и полей, В. А. Ломакиным построена корреляционная теория упругости композитов [1].

Используя результаты теории надежности, В. В. Болотиным предложены эффективные методы исследования прочности статистически неоднородных сред [2]. Наиболее подробный обзор методов расчета характеристик упругости и вязко-упругости композитов изложено в монографии Т. Д. Шермергора [3]. Широкое применение новых разделов теории вероятности и математической статистики позволило Л.П. Хорошуну создать оригинальные математические модели упругого и пластического поведения композитов [4]. Используя новые математические модели в теории функций комплексного переменного, Г. П. Черепанов исследовал процессы разрушения различных типов композиционных материалов [5]. Достижения в работах советских механиков позволили проектировать материалы с заранее заданными свойствами. Таким образом, был создан технологический прорыв в материаловедении. Это открыло перспективу применения композитов в промышленности и народном хозяйстве.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Ломаким. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 138 с.
2. В. В. Болотин. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
3. Т. Д. Шермергор. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Л. П. Хорошун. Уточненные модели деформирования композитов. //Механика композитных материалов. 1984. №5. С. 798-804.
5. Г. П. Черепанов. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука 1983. 295 с.

УДК 51-7

Роль фундаментальной алгебры в становлении и развитии информатики

И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail:ibalaba@mail.ru

Role of fundamental algebra in formation and development informatics

I. N. Balaba (Russian, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:ibalaba@mail.ru

Роль информатики и информационных технологий в современном мире трудно переоценить. Процесс информатизации современного общества настолько интенсивен, что невозможно назвать ни одну сферу человеческой деятельности, которую бы он не затронул; информационные технологии кардинальным образом меняют повседневную жизнь миллионов людей. Совершается переход от «индустриального общества» к «обществу информационному». В качестве приоритетов стратегии информатизации на 2019-2024 годы определен национальный проект «Цифровая экономика», целями которого являются создание устойчивой и безопасной информационно-телекоммуникационной инфраструктуры высокоскоростной передачи, обработки и хранения больших объёмов данных, доступной для всех организаций и домохозяйств, использование преимущественно отечественного программного обеспечения.

Термин «информатика» возник в начале в начале 60-х годов XX–го века во Франции и определялся как наука о содержательной обработке информации с помощью электронно-вычислительных машин. Российские ученые трактовали этот термин несколько шире, так основоположник теоретического и системного программирования, создатель Сибирской школы информатики, академик АН СССР академик А.П. Ершов в своей статье «Информатика: предмет и понятие» писал: «Термин «Информатика» уже в третий раз вводится в русский язык в новом, куда более широком значении – как название фундаментальной естественной науки, изучающей процессы передачи и обработки информации. При таком толковании информатика оказывается более непосредственно связанной с философскими и общенаучными категориями, проясняется и ее место в кругу «традиционных» академических дисциплин» [1].

В настоящее время информатика – фундаментальная естественная наука, изучающая информационные процессы, методы и средства получения, преобразования, передачи, хранения и использования информации, стремительно развивающаяся и постоянно расширяющаяся область практической деятельности человека, связанная с разработкой, развитием и эксплуатацией систем информатизации и их компонентов.

Рассматривая различные подходы к структуризации предметной области информатики и основные тенденции её развития, К. К. Колин в качестве основного сегмента выделил теоретическую информатику, занимающуюся изучением структуры и общих свойств информации и информационных процессов [2]. Она опирается на математическую логику и включает такие разделы как теория алгоритмов и автоматов, теория информации и теория кодирования, теория формальных языков и грамматик, исследование операций и другие.

Для создания и сопровождения программного обеспечения требуются глубокие знания фундаментальных математических дисциплин, ведь «программист должен обладать способностью первоклассного математика к абстракции и логическому мышлению в сочетании с эдисоновским талантом сооружать все, что угодно из нуля и единицы» [3].

Информационные системы все активнее применяются в различных сферах деятельности человека. В XXI веке они воспринимаются пользователями как интеллектуальные автоматизированные системы с разнообразным набором инструментов для решения прикладных задач. В связи с этим возникает потребность в поиске новых математических инструментов для их разработки и сопровождения.

Уровень разработанности и качество реализации математического обеспечения информационной системы определяет качество её работы и эффективность выполнения информационных процессов в ней. Неудачная реализация математического обеспечения информационной системы, как правило, не может быть компенсирована функционированием других её подсистем.

Для теории информационных систем важна не только количественная характеристика, но и ее качественные характеристики. В этом случае важную роль играет алгебраическая теория информации, которая рассматривает теорию информации как абстрактную теорию слов со своими специфическими задачами, связанными с хранением слов в памяти компьютера, обработкой слов и их передачей по каналам связи. На множестве слов канонически присутствует алгебраическая структура, связанная с действием симметрической группы на словах. При таком подходе важным является математический аппарат современной высшей алгебры.

В настоящее время наиболее распространенными являются информационные системы, использующие реляционные базы данных, основная концепция которых была предложена известным исследователем в области баз данных Е.Ф. Коддом в 1969 году. Применение такого способа при хранении и обработке данных востребовано в различных областях от автоматизированных информационных систем до современных адаптивных информационных систем. Реляционная модель, согласно Дейту, состоит из структурной, манипуляционной и целостной частей, описывающих разные аспекты реляционного подхода. Для описания структурной части используется нормализованное n-арное отношение. В манипуляционной части модели используются два фундаментальных механизма манипулирования реляционными базами данных – реляционная алгебра и реляционное исчисление. Реляционная алгебра базируется на классической теории множеств, традиционные теоретико-множественные операции (объединение, пересечении, разность и декартово произведение) которой, дополнены некоторыми специальными операциями, специфичными для баз данных (ограничениями, проекциями, соединениями и делениями). Кроме того, в состав алгебры включается операция присваивания, позволяющая сохранить в базе данных результаты вычисления алгебраических выражений, и операция переименования атрибутов, дающая возможность корректно сформировать заголовок (схему) результирующего отношения. Реляционное исчисление базируются на исчислении предикатов первого порядка математической логики, базисными понятиями которой являются понятие переменной с определенной для нее областью допустимых значений и понятие правильно построенной формулы, опирающейся на переменные, предикаты и кванторы.

Важным шагом в развитии теории и практики информационного поиска стала линейная алгебраическая модель, предложенная В.Н. Решетниковым в 1979 году и послужившая удобным инструментом для исследования различных задач анализа и обработки информации. В этой модели поисковые образы документов и запросов представлялись элементами конечномерного линейного пространства, а организация поиска данных сводилась к поиску решений системы линейных алгебраических уравнений в этом пространстве [4].

Активно используется аппарат высшей алгебры в алгебраической теории кодирования, имеющей широкое практическое применение как средство экономной, удобной, быстрой, а также надежной передачи сообщений по линиям связи с различного вида шумами.

Таким образом, знания классических математических дисциплин, в частности элементов высшей алгебры, является фундаментом для подготовки квалифицированных специалистов по информатике и информационным технологиям.

Рекомендации по преподаванию информатики для непрофильных специальностей университетов, основанные на «Совокупности знаний по математике и информатике» разработаны в работе [5]. Для компьютерных специальностей взаимосвязь концепции формирования образовательных программ и стандартов на базе «Совокупности знаний» с компетентностной моделью и вопросами разработки профессиональных стандартов рассмотрена в [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов А.П. Информатика: предмет и понятие// В кн. Кибернетика. Становление информатики. — М.: Наука, 1986. С. 28–31.

2. Колин К. К. Становление информатики как фундаментальной науки и комплексной научной проблемы // Системы и средства информ. 2006 «Научно-методологические проблемы информатики». С. 7—58.

3. Ершов А.П. О человеческом и эстетическом факторах в программировании // Кибернетика. 1972. №5

4. Решетников В.Н. Алгебраическая теория информационного поиска // Программирование 1979. № 3. С. 78–83.

5. Борисенко В.В. и др. Преподавание информатики и математических основ информатики для непрофильных специальностей классических университетов /Под ред. А.В. Михалева. М.: Интернет–Университет Информационных Технологий, 2005.

6. Михалев А. В., Чеповский А. М. Проблемы профессиональных и образовательных стандартов по информатике и информационным технологиям // Прикладная информатика. — 2006. — № 4. — С. 15—22.

———————————————————————————

УДК 51

К истории математического факультета (физики и математики) ТГПУ им. Л. Н. Толстого

В. Н. Безверхний (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru
А. Е. Устян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

The history of the faculty of mathematics (physics and mathematics), TSPU them. L. N. Tolstoy

V. N. Bezverkhnii (Russia, Moscow)
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru
A. E. Ustyan (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru

Данная статья является продолжением одноимённой статьи, опубликованной в материалах XVI Международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения Профессора Мишеля Деза(стр. 390-393)

1. Доктор физико-математических наук, профессор Арабаджи Всеволод Исидорович

Родился 10 декабря 1913 года в Краснодарском крае. В 1937 году окончил физический факультет Ленинградского педагогического института. Доктор физико-математических наук (1960 г.). В 1961 году утвержден в должности профессора кафедры общей физике.

Крупный ученый в области физики. Особенно значимы его научные результаты в области электрических атмосферных процессов, которым была посвящена докторская диссертация «Гроза и грозовые процессы».

В июне 1960 г. ему присуждена ученая степень доктора физико-математических наук, а в июне 1961 года присвоено звание профессора.

27 июня 1963 г. профессор Арабаджи В. И. Советом тульского пединститута им. Л. Н. Толстого был избран заведующим кафедрой физики. 22 июля 1963 г. прибыл в Тулгоспединститут и принял кафедру физики.

Им написано и опубликовано свыше 62 научных работ в следующих научных изданиях: в докладах Академии Наук СССР, в «Известиях Академии наук СССР, сер. Геофиз»,в «Известиях Вузов, раздел физика», в «Журнале Экспериментальной и теоретической физики», в «Физика в школе» и во многих других журналах.

Всеволод Исидорович был освобождён от работы приказом №179 от 18 декабря 1966 года по собственному желанию в связи с переходом в другой вуз (не указывается в какой вуз).

2. Кандидат физико-математических наук, доцент Добровольский Михаил Николаевич

Добровольский Михаил Николаевич родился 27 октября 1922 г. в г. Туле. В 1930 г. поступил в 6 среднюю школу г. Тулы, которую окончил с отличием в 1941г. В этой же школе в 1939 г. вступил в ВЛКСМ, здесь же в 1939–40 г. был редактором общешкольной стенной газеты, а в 1940 г. – председателем учкома. В 1941г. участвовал в математической олимпиаде учащихся старших классов г. Тулы и занял в ней первое место. В 1941 г. когда началась Великая Отечественная Война добровольцем пошел в армию. В июле месяце участвовал в боях по уничтожению Ярцевской группировки.

В 1946 году поступил на физико-математический факультет Тульского госпединститута, который окончил в 1950 году и аспирантуру того же института в 1958 г. Самостоятельно изучив новую математику, обеспечил чтение курсов «Алгоритмы и математические машины» и «Математическая логика». Благодаря Михаилу Николаевичу Добровольскому институт смог организовать чтение этих курсов сразу как только они были введены в учебный план.

В 1948 г. за успешную академическую работу и активную общественную работу Ученый совет института присудил Михаилу Николаевичу Сталинскую стипендию.

Работая в общественном порядке директором юношеской математической школы, уделял этой работе много внимания и сумел организовать работу школы.

Уделяя большое внимание научной работе, Михаил Николаевич получил ценные результаты по теории чисел и комбинаторному анализу.

Список некоторых научных трудов:

- Добровольский М. Н. Решение одной комбинаторной задачи // Тульский гос. пед. ин-тут: учен. зап. физ.-мат. наук. 1954. Вып. 5. С. 190–197.

- Добровольский М. Н. О решении одной системы рекуррентных уравнений // Тульский гос. пед. ин-тут: учен. зап. физ.-мат. наук. 1960. Вып. 7. С. 20–24.

- Добровольский М. Н. О числе перестановок элементов n пар с двумя ограничениями позиций // Вестн. Моск. ун-та, 1966. №5. С. 36–40.
- Добровольский М. Н. Одно обобщение задачи о гостях // XXV научно-педагогическая конференция математических кафедр педвузов Уральской зоны. Тезисы докладов. Свердловск, 1967, С. 11–13.
- Добровольский М. Н. О четырехстрочных латинских прямоугольниках // Материалы межвузовской научной конференции математических кафедр пединститутов Центральной зоны. Тула, 1968, С. 72–75.
- Некоторые комбинаторные задачи о перестановках с ограничением позиций. Автореферат, Тула 1970 .

и другие. Умер 18 января 1975 г.

3. Доктор физико-математических наук, профессор Пихтильков Сергей Алексеевич

(зав. кафедрой алгебры Пихтильков С. А. с 1983 г. по 1997 г.)

Пихтильков Сергей Алексеевич родился 2 марта 1953 г. в Туле в семье учителей. По 1968 г. учился в 20-ой средней школе г. Тулы. С 1968 по 1970 г. обучался в физико-математической школе-интернате №18 при МГУ.

В 1970г. поступил в МГУ им. М. В. Ломоносова на механико-математический факультет, который с отличмем закончил в 1975г. С 1975 г. по 1978 г. учился в аспирантуре кафедры алгебры механико-математического факультета.

В декабре 1981 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. С 1982 г. работал в ТГПУ им. Л.Н. Толстого. Руководил кафедрой алгебры с 1983 по 1997 гг.

Тема научных исследований «Структурная теория специальных алгебр Ли». Им опубликовано более 40 научных статей. Среди них:

1. Примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным числом образующих (статья) Успехи мат. наук. 1974, №1. Стр. 183–184.
2. Косые полугрупповые кольца с тождеством (статья) Вестник МГУ , — Сер. Матем., мех. — 1980, №5, стр. 225–226.
3. О специальных алгебрах Ли(статья) Успехи мат. наук. 1981, №6. Стр. 225–226.

4. О первичном радикале специальных алгебр Ли (статья) Соавтор Бейдар К. И. Успехи мат. Наук., — 1994, №1 стр. 233.

5. Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли. Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6 №3. Стр. 643–648.

С 1998 года С. А. Пихтильков вплотную приступает к написанию диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему "Структурная теория специальных алгебр Ли которую успешно защищает в 2004 году в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

В 2009 году по приглашению руководства Оренбургского государственного университета вместе с семьей переезжает в Оренбург.

За время своей научно-педагогическо деятельности С. А. Пихтидьков опубликовал 64 научных статей, 1 монографию и 11 учебно-меточеских работ. Под его руководством защищено две кандидатских диссертации.

Умер 24 декабря 2015 г.

4. Доктор физико-математических наук, профессор Северьянов Владимир Владимирович

Северьянов Владимир Владимирович родился 16 января 1937 г. в селе Меньшиково Венчероского района Новосибирской области. Отец погиб на фронте ВОВ, мать работала учительницей в Бабуринской начальной школы Плавского района Тульской области. С 1941 по 1946 годы был воспитанником Ключевского детского дома Венчеровского района Новосибирской области. (почему оказался в детдоме в автобиографии не указывается).

В 1944 г. поступил в школу. В 1951 году поступил в 8-ой класс Мещеринской средней школы Плавского района Тульской области. В 1952 году вступил в комсомол. В 1954 году окончил среднюю школу и был принят на первый курс Тульского государственного педагогического института.

Осенью 1957 года участвовал в уборке целинного урожая в Казахстане. Награждён медалью «За освоение целинных земель» и значком Ц.К. ВЛКСМ «За освоение новых земель».

В 1959 году окончил ТГПИ им. Л. Н. Толстого и поступил на работу в этот же институт в качестве старшего лаборанта кафедры физики, а с 1 декабря 1959 года ассистентом этой кафедры. С 10 сентября 1960 года по 10 сентября 1963 года — аспирант ТГПИ. С 1 апреля 1964 по 1 сентября 1965 г. старший преподаватель кафедры физики ТГПИ. Диплом кандидата физико-математических наук от 17 ноября 1972г. Ученая степень доктора физико-математических наук решением ВАК присвоена 12 ноября 1993 г. Ученое звание профессора присвоено 29 октября 1997 г. Имеет более 30 научных трудов.

С 1 сентября 1965 по 30 сентября 1974 гг. старший преподаватель кафедры теоретической физики ТГПИ. С 30 сентября 1974 и.о. доцента кафедры теоретической физики ТГПИ. 20 мая 1982 года доцент Северьянов В. В. Советом физического факультета был избран деканом физического факультета и работал на этой должности до 27 апреля 1987 г.

———————————————————————————

УДК 517.956.4

История развития метода углового пограничного слоя

И. В. Денисов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
e-mail: *den_tspu@mail.ru*

History of the development of the angular boundary layer method

I. V. Denisov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: *den_tspu@mail.ru*

Основной текст тезисов

Метод углового пограничного слоя представляет собой одну из ветвей теории асимптотических разложений.

Основоположником современной теории асимптотических разложений является А. Пуанкаре, который в работе 1886 г. (см. [1]) сформулировал понятие асимптотического ряда. В 1904 г. Л. Прандтль (см. [2]) ввел понятие пограничного слоя и рассмотрел дифференциальные уравнения, описывающие течение жидкости в зоне пограничного слоя.

Дальнейшее развитие асимптотической теории связано с рассмотрением дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. На эту тему в книге В. Вазова (см. [3]) представлена обширная библиография накопленных к середине 20 века многочисленных результатов.

Для последующего развития теории дифференциальных уравнений с малым параметром определяющими явились работы А. Н. Тихонова конца сороковых - начала пятидесятых годов (см. [4–6]).

В 1957 г. был сформулирован общий подход к построению асимптотических разложений решений линейных сингулярно возмущенных уравнений с частными производными. Подобные задачи возникали в химической кинетике, синергетике, биологии, астрофизике, лазерной оптике. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник в статье [7] рассмотрели не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и линейные дифференциальные уравнения в частных производных с малыми параметрами при производных. Задачи рассматривались в областях с гладкими границами, а асимптотические разложения решений строились в виде суммы регулярной и погранслойной частей. Погранслойная часть учитывалась только вблизи границы области. Таким образом, появился метод пограничных функций, развитие которого связано с работами В. А. Треногина, А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и др. (см. [8–11]).

В 1970-х годах В. Ф. Бутузов применил метод пограничных функций к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных в областях с негладкими границами. В 1972 году (см. [12]) было рассмотрено разностное уравнение. Асимптотическое разложение решения строились в виде суммы регулярной, погранслойной и угловой частей. Так появился метод угловых пограничных функций.

В 1978 году этот метод был применен к параболическим уравнениям (см. [13]). В прямоугольнике была рассмотрена начально-краевая задача для линейного сингулярно возмущенного уравнения. Обыкновенных погранфункций, которые определялись из обыкновенных дифференциальных уравнений, оказалось недостаточно для построения асимптотики решения. Потребовались еще и угловые погранфункции, которые определялись из линейных параболических уравнений с постоянными коэффициентами. Впоследствии (см., например, [14–28]) В.Ф. Бутузовым и его учениками были рассмотрены разнообразные прикладные задачи, исследование которых проводилось с помощью метода угловых пограничных функций. В работах [14–26] рассматривались в основном линейные задачи, либо нелинейные задачи с краевыми условиями второго рода.

Переход к нелинейным уравнениям оказался сопряженным с принципиальными трудностями, касающимися, прежде всего, отсутствия методов решения нелинейных задач и получения необходимых оценок. Возникающих проблем удавалось избежать при рассмотрении задачи Неймана. В работе [27] было рассмотрено нелинейное сингулярно возмущенное параболическое уравнение с краевыми условиями первого рода. Предполагалось, что в угловых точках прямоугольника нелинейная функция кроме монотонности по переменной на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения, подчинена дополнительному условию. В отличие от других работ при построении полной асимптотики пришлось доказывать разрешимость нелинейных параболических уравнений того же типа, что и исходное уравнение. Это удалось сделать с помощью метода верхних и нижних решений. В работе [28] была обоснована равномерность в замкнутом прямоугольнике построенного в [27] асимптотического приближения решения с точностью любого порядка. Однако, оказалось, что поставленным ограничениям не удовлетворяют некоторые квадратичные функции. Обозначенная проблема была преодолена в работах [29–32].

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincare H., Acta Math., 8 1886), 295 - 344.

2. Prandtl L. Uber Flussigkeitsbeneegung bei sehr kleiner Reibung.-Verhandl d. III, Inter Mathem. Kongress, Heidelberg, 1904, 71 - 75.

3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1969.

4. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. 1948, 22 (64), № 2. С. 193 - 204.

5. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. сб. 1950, 27 (69), № 1. С. 147 - 156.

6. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры // Матем. сб. 1952, 31 (73), № 3. С. 575 - 586.

7. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т.12, №5. С. 3 - 122.

8. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника - Вишика // УМН. 1970. Т.25, № 4. С. 121 - 156.

9. Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // УМН. 1963. Т.18, № 3. С. 15 - 86.

10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973.

11. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.

12. Бутузов В. Ф. Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. №3. С. 582-597.

13. Бутузов В.Ф., Нестеров А.В. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 2. С. 49-56.

14. Бутузов В. Ф. Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными // Дифференц. ур-ния. 1979. Т. 15. №10. С. 1848-1862.

15. Бутузов В. Ф., Калачев Л.В. Асимптотическое приближение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в критическом случае // Дифференц. ур-ния. 1986. Т. 39. №6. С. 819-830.

16. Бутузов В. Ф., Мамонов В.М. Об одной сингулярно возмущенной нелинейной параболической задаче с негладкими угловыми пограничными функциями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 7. С. 1012-1021.

17. Бутузов В. Ф., Бучнев В.Ю. Об асимптотике решения одной сингулярно возмущенной параболической задачи в двумерном случае // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. №3. С. 453-461.

18. Бутузов В. Ф., Бучнев В.Ю. Об асимптотике решения одной сингулярно возмущенной двумерной задачи типа реакция-диффузия-перенос // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 4. С. 533-542.

19. Бутузов В. Ф. О сингулярно возмущенных системах типа реакция-диффузия-перенос // Дифференц. ур-ния. 1993. Т. 29. №5. С. 833-845.

20. Бутузов В.Ф., Уразгильдина Т.А. Асимптотика решения нестационарной задачи о межфазной конвекции в тонком слое жидкости // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. №5. С. 92-104.

21. Бутузов В.Ф., Уразгильдина Т.А. Асимптотика решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с мощным нелинейным источником в тонком стержне // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. №3. С. 472-482.

22. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т. Об одной сингулярно возмущенной системе типа реакция-диффузия-перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. №4. С. 907-922.

23. Бутузов В.Ф., Деркунова Е.А. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла в тонком стержне // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. №6. С. 68-85.

24. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т. Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы уравнений реакция-диффузия в тонком стержне // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 8. С. 1160-1182.

25. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. №10. С. 1295-1307.

26. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного и трехкратного корня вырожденного уравнения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. Вып. 4. С. 41-76.

27. Денисов И.В. Первая краевая задача для квазилинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. № 10. С. 56 - 72.

28. Денисов И.В. Оценка остаточного члена в асимптотике решения краевой задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. № 12. С. 64 - 67.

29. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возму-

щенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т.57. №2. С. 255-274.

30. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т.58. №4. С. 1-11.

31. Денисов И.В., Денисов А.И. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т.59. №1. С. 102-117.

32. Денисов И.В., Денисов А.И. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т.59. №9. С. 1581-1590.

———————————————————————

УДК 539.21:621.785

Из истории развития математических моделей пластических сред [1]

Г. М. Журавлев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
А. П. Навоев (Россия, г. Рыбинск)
Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева
e-mail: Navoev@yandex.ru
А. А. Жуков (Россия, г. Рыбинск)
Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева
e-mail: anat.juckov2013@yandex.ru
А. А. Шатульский (Россия, г. Рыбинск)
Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева
e-mail: shatulsky@rsatu.ru
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

From the history of development of mathematical models of plastic media

G. M. Zhuravlev (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
A. P. Navoev (Russia, Rybinsk)
Rybinsk State Aviation Technical University
e-mail: Navoev@yandex.ru
A. A. Zhukov (Russia, Rybinsk)
Rybinsk State Aviation Technical University
e-mail: anat.juckov2013@yandex.ru
A. A. Shatulsky (Russia, Rybinsk)
Rybinsk State Aviation Technical University
e-mail: shatulsky@rsatu.ru
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Введение.

Пластическая деформация металлов является одним из древнейших видов обработки металлов давлением. Способы производства деталей давлением постоянно совершенствуются. В месте с ними совершенствуются и методы исследований и расчета технологических процессов. Однако развитие техники выдвигает более сложные задачи, эффективное решение которых связано как с уточнением математических моделей изучаемых процессов, так и с совершенствованием расчетных методов. Особое значение приобретает точность расчета напряжений, деформаций, температуры, повреждаемости с учетом неравномерности их распределения.

Материалы и методика исследования.

Теоретические исследования силовых режимов, деформированного и напряженного состояния для процессов пластического течения различных сред, выполняются на основе основных математических соотношений. Для построения решения используется интегрирования дифференциальных уравнений, что связано с большими трудностями математического характера, особенно в случае исследования нестационарных процессов, так как методы точного интегрирования систем уравнений, описывающих пластическое течение, разработаны лишь для простейших случаев. В связи с этим часто используется вариационный подход, обладающий большей общностью при решении задач пластического течения металла, характеризующегося разнообразными схемами развития жестких и пластических областей. Однако в любом случае для построения согласованных полей для пластических сред необходимо составление системы дифференциальных уравнений, которая будет зависеть от принятой математической модели среды, с учетом рекомендаций работ авторов [1-21]. Результаты исследований могут быть применены для разработки технологических процессов получения изделий методами аддитивных технологий с использованием лазерного спекания и сплавления порошковых сплавов, технологий термопластической обработки и технологий упрочняющей химико-термической и термической обработок металлических систем различных химических составов [22-27].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

2. Всидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
5. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела. Уч. зап. МГУ: Механика. Вып. 39. 1940. с. 3-81.
6. Баничук Н.В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций / Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. 1966. т.6. №6. С.947-961.
7. Черноусько Ф.Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
8. Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.
9. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. М.: Металлургия, 1971. 264 с.
10. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
11. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. М.: Мир, 1989. 510 с.
12. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
13. Виноградов Г.А., Каташинский В.П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. М.: Металлургия, 1979. 224 с.
14. Перельман В.Е. Формование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1979. 232 с.
15. Макаров Э.С. К теории формования металлических порошков в условиях плоской деформации // Известия вузов, Машиностроение. 1973. №10. С. 158-162.
16. Павлов В.А., Кипарисов С.С., Щербина В.В. Обработка давлением порошков цветных металлов. М.: Металлургия, 1977. 176 с.
17. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А.П. Коликов, П.И. Полухин, А.В. Крупин и др. М.: Высшая школа, 1986. 352 с.
18. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под ред. Б.С. Митина. М.: Металлургия, 1987. 792 с.
19. Экономичные методы формообразования деталей / Под ред. К.Н. Богоявленского и В.В. Риса. Л.: Лениздат, 1984. 144 с.
20. Херрманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов // Проблемы теории пластичности. М.: Мир, 1976. С. 178-216.
21. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. // Int. J. Mech. Sci., vol.14, 1972, pp. 215-224.
22. Навоев А.П., Жуков А.А., Кутепов С.Н., Гвоздев А.Е. Особенности работы, процессы упрочнения, структура, свойства и качество стальных зубчатых колес привода агрегатов двигателей внутреннего сгорания: монография / под ред. д-ра техн. Наук, проф. А.Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 212 с.

23. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Sergeev A.N., Maliy D.V. Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials. Chebyshevskii Sbornik. 2018;19(4):43-54. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

24. Makarov E.S., Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., Sapozhnikov S.V., Sergeev A.N., Kolmakov A.G., Breki A.J., Maliy D.V., Dobrovolsky N.N. Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems. Chebyshevskii Sbornik. 2018;19(1):152-166. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166.

25. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 320 с.

26. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Кузовлева О.В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 382 с.

27. Гвоздев А.Е., Стариков Н.Е., Сергеев Н.Н., Кутепов С.Н., Сапожников С.В., Калинин А.А., Клементьев Д.С. Основы ресурсосберегающих процессов получения быстрорежущего инструмента: монография / под ред. проф. А.Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 209 с.

———————————————————————————

УДК 51(092

Результаты Д. А. Граве по дифференциальной геометрии

И. В. Игнатушина (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный педагогический университет
e-mail: streleec@yandex.ru

D. A. Grave results on differential geometry

I. V. Ignatushina (Russia, Orenburg)
Orenburg state pedagogical University
e-mail: streleec@yandex.ru

1. Введение

В 2018 г. исполнилось 155 лет со дня рождения одного из выдающихся отечественных математиков, почетного члена АН СССР, академика АН УССР, основоположника крупной алгебраической школы - Дмитрия Александровича Граве (1863-1939).

Дмитрий Александрович является представителем младшего поколения Петербургской математической школы XIX в.[1]. Его учителями на физико-математическом факультете Петербургского университета были видные ученые-математики того времени: П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин, А. А. Марков, К. А. Поссе, И. Л. Пташицкий, Ю. В. Сохоцкий [2].

2. Основной текст статьи

На формирование научных интересов Граве немалое влияние оказал профессор А. Н. Коркин [3]. Каждую неделю на его квартире собирались студенты и профессора Петербурга. В своих автобиографических записках Граве об этих вечерах вспоминал с большой теплотой: "Сидя на диване, Коркин вел интересную беседу, так как был умный и образованный человек. Особенно были интересны его разговоры о математике. Я должен признать, что обе мои диссертации вытекали из этих разговоров, хотя в докторской диссертации большую роль сыграли Чебышев и Марков"[4, с. 223].

Выпускная работы (кандидатская диссертация) Граве, которую он представил по окончании университета в 1885 г., была посвящена одному из вопросов дифференциальной геометрии, а именно наименьшим поверхностям, т.е. поверхностям, в каждой точке которых средняя кривизна равна нулю. В первой главе этой работы с помощью вариационного исчисления выведены условия, которым должна удовлетворять наименьшая поверхность. Во второй рассмотрены теоремы о кривизне таких поверхностей. В третьей изложено интегрирование дифференциальных уравнений наименьших поверхностей [5].

Решение целого ряда важных задач дифференциальной геометрии Граве представил в своей докторской диссертации "Об основных задачах математической теории построения географических карт"[6] 1896 г. Тематически она являлась продолжением исследований Л.Эйлера, Ж.Л.Лагранжа, П.Л.Чебышева, А.Н.Коркина, А.А.Маркова и Ж.Г.Дарбу по математической картографии.

Поскольку поверхность земного сфероида не развертывается на плоскость, то изобразить ее на плоскости без искажения невозможно. Этот факт был доказан Л.Эйлером в его работе "Об изображении поверхности шара на плоскости"(1777г.) [7].

Существуют два основных вида проекций: конформные и эквивалентные. При конформных проекциях сохраняется угол между любыми двумя линиями поверхности при их изображении на карте или, другими словами, сохраняется подобие в бесконечно малых частях. Масштаб при таком отображении остается постоянным по всем направлениям при переходе от одной точки к другой.

Эквивалентные проекции таковы, что все площади фигур на карте пропорциональны площадям соответствующих фигур на земной поверхности. При такой проекции масштаб на карте меняется в каждой точке в зависимости от азимута. На карте, выполненной в эквивалентной проекции, не может быть подобия в бесконечно малых частях. В связи с этим при изображении большой части земной поверхности, когда уже ощутима кривизна земли, делают выбор между указанными видами проекций.

Общую теорию конформных проекций любой поверхности вращения на плоскость представил Ж.Л.Лагранж в своей работе "О построении географических карт"(1779 г.) [8]. Особое внимание он уделил случаю, когда поверхность вращения есть сфера и все ее меридианы и параллели переходят в окружности или прямые на плоскости. Схожая задача в отношении одного частного случая эквивалентных проекций, когда изображения меридианов и параллелей пересекаются под прямым углом, была решена еще раньше Эйлером в мемуаре [7].

В общем виде вопрос об отыскании эквивалентных проекций шара на плоскость, при которых изображения меридианов и параллелей являются прямыми или окружностями, был поставлен А. Н. Коркиным.

В своей работе Граве дал полное решение задачи Коркина, указав все 11 типов возможных проекций, удовлетворяющих указанным условиям. При этом наиболее выгодными проекциями, по его мнению, являются те, при которых изображения меридианов и параллелей взаимно ортогональны. Таким образом, Граве подтвердил здесь мнение Эйлера о самой выгодной проекции шара на плоскость.

Другим ценным результатом Граве, изложенным в диссертации, было доказательство следующей теоремы П.Л.Чебышева: "Наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой нормальной величине масштаба"[9, с. 242]. Это утверждение Чебышев высказал на заседании Петербургской Академии наук 18 января 1853 г., и долгое время оно оставалось без доказательства [10].

В 1894г. на конгрессе французской ассоциации содействия прогрессу наук Граве представил первое доказательство этой теоремы. В диссертации он изложил его полнее. В 1911г. Граве опубликовал на французском языке работу "Обобщение доказательства одной теоремы Чебышева"[11], в которой распространил свои рассуждения на произвольные поверхности, имеющие гауссову кривизну постоянного знака. Рассмотрим это доказательство подробнее.

Если линейный элемент заданной поверхности в изотермических координатах имеет вид $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$, то коэффициенты первой квадратичной формы

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

принимают значения:

$$F = 0, E = G = \lambda^2. \tag{1}$$

Поскольку всякая конформная проекция поверхности (u, v) на плоскость (x, Y) задается формулой $x + iy = f(u + iv)$, тогда масштаб этого отображения определяется следующим образом: $m = \dfrac{|f'(u + iv)|}{\lambda}$.

Введя обозначение $H = \ln|f'(u+iv)| = \dfrac{1}{2}\ln|f'(u+iv)| + \dfrac{1}{2}\ln|f'(u-iv)|$, получим $\ln m = H - \ln\lambda$.

Функция H, будучи действительной частью аналитической функции $ln|f'(u+iv|$, является гармонической функцией, поэтому она не принимает экстремальных значений во внутренних точках областей.

Схожим свойством обладает и функция $H - \ln\lambda$. Действительно, если, положим, что гауссова кривизна K положительна, и функция $H - \ln\lambda$ достигла своего максимума во внутренней точке некоторой области, тогда будут выполняться следующие неравенства

$$\frac{\partial^2(H - \ln\lambda)}{\partial u^2} \le 0, \frac{\partial^2(H - \ln\lambda)}{\partial v^2} \le 0,$$

складывая которые, после некоторых преобразований, получим:

$$\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial v^2} \ge 0. \tag{2}$$

К.Гауссом в 1816г. было доказано, что кривизна K зависит только от коэффициентов первой квадратичной формы и их производных, т.е. выполняется равенство:

$$\begin{aligned}4(EG - F^2)K = E&\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right)+\\ F&\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}\right)+\\ G&\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right)-\\ 2(EG - FF)&\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right).\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношения (1) и (2), получим

$$\frac{1}{\lambda^2}K = -\left(\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial v^2}\right) \leq 0,$$

следовательно, $K \leq 0$, что противоречит предположению. Аналогично доказывается, что и в случае отрицательной гауссовой кривизны функция $H - \ln\lambda$ не достигает своего минимума во внутренней точке некоторой области.

Далее, пусть на заданном контуре функция $H - \ln\lambda$ равна нулю, тогда при $K > 0$ она принимает отрицательные значения внутри контура. Требуется доказать, что амплитуда функции $H - \ln\lambda$, т.е. разность между наибольшим и наименьшим значениями, меньше, чем у любой другой функции вида $H_1 - \ln\lambda$. Обозначим наибольшее значение функции $H_1 - \ln\lambda$ через A, тогда функция $H_2 - \ln\lambda = H_1 - \ln\lambda - A$ имеет ту же амплитуду и принимает внутри и на контуре только неположительные значения. Остается доказать, что минимум функции $H_2 - \ln\lambda$ меньше, чем у функции $H - \ln\lambda$. Это следует из того, что разность

$$H - \ln\lambda - (H_2 - \ln\lambda) = H - H_2$$

являясь гармонической функцией и принимая на контуре исключительно положительные значения, не может принимать отрицательных значений внутри контура [12].

В диссертации Граве решил и целый ряд частных задач картографии. Например, он сравнил отклонение масштаба в проекциях Гаусса и Чебышева и показал преимущество второй. Для этого он рассмотрел четырехугольник, ограниченный дугам параллелей 40° и 70° северной широты, и двумя меридианами, отстоящими друг от друга на 40°. Следует отметить, что это пространство охватывает всю европейскую часть России. Граве вычислил отклонение масштаба вдоль среднего меридиана через каждые 5°. Оказалось, что в проекции Чебышева «отклонение от нуля логарифма масштаба почти в два с половиной раза меньше, чем для Ламбертовой проекции, которая под именем Гауссовой введена при изображении Российской империи» [6, с. 3].

3. Заключение

Научные результаты этой диссертационной работы были высоко оценены А. Н. Коркиным, который на ее защите, обращаясь к Граве, сказал: «Вы являетесь достойным учеником Эйлера. В вашей диссертации совсем нет воды и каждая глава ее имеет вполне конкретное содержание» [4, с. 225].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Урбанский В. М. Дмитрий Граве и время. Киев, 1998. 266 с.
2. Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве (1863-1939). М., 1968. 112 с.
3. Сборник, посвящённый памяти академика Дмитрия Александровича Граве / Под ред. акад. О. Ю. Шмидта, чл.-кор. Акад. наук СССР Б. Н. Делоне, чл.-кор. Акад. наук СССР Н. Г. Чеботарева. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 328 с.
4. Автобиографические записки Д.А. Граве (Публикация А.Н. Боголюбова) // Историко-математические исследования. М., 1993. Вып. XXXIV. С. 219-246.
5. Добровольский В. А. Научно-педагогическая деятельность Д.А. Граве (к столетию со дня рождения) // Историко-математические исследования. М., 1963. Вып. XV. С. 319-360.

6. Граве Д. А. Об основных задачах математической теории построения географических карт. СПб., 1896. 192 с.

7. Эйлер Л. Об изображении поверхности шара на плоскости // Л. Эйлер. Избранные картографические статьи. М., 1959. С. 21-50.

8. Lagrange J. L. Sur la construction des cartes geographiques // Nouveaux Mem. de l'Acad. Royale et Belles-Lettres (1779). Berlin, 1781. pp.161-210.

9. Чебышев П. Л. Сочинения. СПб., 1899. Т.1. 722 с.

10. Делоне Б. Н. Некролог // Изв. АН СССР. М., 1940. Сер. математика. 4:4-5. С. 349-356.

11. Grave D. A. Demonstration d'un theoreme de Tchebychef generalise // Journal fur reine und angewandte Mathematik. Berlin,1911. Bd. 140. S. 247-251.

12. Игнатушина И. В. Петербургский период научно-педагогической деятельности Д. А. Граве по дифференциальной геометрии (К 150-летию со дня рождения) // История науки и техники. М.: Научтехлитиздат, 2013. №4. С. 3-7.

УДК 51(09)

Анализ исторических аспектов в ходе преподавания математических дисциплин для иностранных студентов

Н. М. Исаева (Россия, г.Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: isaevanr@yandex.ru
Н. В. Сорокина (Россия, г.Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: sorokina_nv_08@mail.ru

Analysis of historical aspects in teaching mathematics to international students

N. M. Isaeva (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: isaevanr@yandex.ru
N. V. Sorokina (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: sorokina_nv_08@mail.ru

Обучение студентов отделения предвузовской подготовки международного факультета математике осуществляется в условиях постепенного овладения студентами русским языком, чем и определяется специфика подготовки иностранных студентов. При отборе учебного материала обязательно учитывается уровень предварительной подготовки студентов по курсу «Математика» и их специализацию.

Целью обучения элементам математики является формирование фундаментальных математических знаний, умений и навыков, обеспечивающих прочное и сознательное овладение учащимися курсами математики и смежных дисциплин в системе высшего образования.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен знать теоремы, правила и формулы, выражающие основные соотношения элементарной математики; элементы теории множеств, числовые множества; методы вычислений и тождественных преобразований математических выражений; методы решения и исследования основных типов уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств; определения, графики и свойства элементарных функций; метод координат, методы исследования основных свойств и построения графиков функций; основные понятия начал математического анализа: предел последовательности и функции, производная, первообразная, интеграл; действия над векторами в геометрической и координатной формах; определения (описания) базовых понятий элементарной математики, начал математического анализа.

Программа курса математики для подготовительного отделения международного факультета включает в себя такие разделы, как элементарная математика; элементы векторной и линейной алгебры; введение в анализ; дифференциальное исчисление функций одной переменной; неопределённый интеграл; определённый интеграл; комплексные числа; элементы теории множеств, комбинаторика.

Студенты приезжают на обучении из разных стран мира и поступают учиться на подготовительное отделение с разным уровнем знаний по математическим дисциплинам. В одних странах уровень математической подготовки очень высокий, к таким странам относятся, например, Китай и Вьетнам. А студенты из арабских стран иногда могут не владеть даже устным счетом и операциями с обыкновенными дробями, то есть все действия выполняют только с калькулятором и результат представляют в виде десятичных дробей. Таким образом, преподавателю приходится учитывать все эти особенности при изложении материала курса.

А также, обучение математике на отделении предвузовской подготовки международного факультета должно учитывать слабый уровень владения студентами русским языком, в том числе специальной терминологией курса. Поэтому методика изучения курса и строится с учетом имеющейся у студентов математической базы и их познавательных возможностей, обусловленных уровнем владения русским языком. Данная программа предлагает определенный порядок прохождения тем курса математики, соответствующий логике предмета, что позволяет систематизировать материал, построить его изучение по принципу "от простого к сложному" и обеспечить координацию в преподавании курсов математики и русского языка.

Вначале при изучении терминологии целесообразно использовать приемы овладения лексикой, применяемые при изучении русского языка как иностранного. Так, каждый вновь вводимый термин должен быть записан студентами, прочитан и многократно произнесен. Отработка произношения новых слов особенно важна на данном этапе, так как произносительные нормы русского языка еще недостаточно прочно усвоены студентами. При раскрытии содержания вводимых терминов рекомендуется широко привлекать символический язык математики, принятый во многих странах. Использование символических записей знакомых студентам математических объектов и понятий создает смысловую опору понимания вводимого материала и усвоения соответствующей терминологической лексики.

Несмотря на некоторые особенности и трудности при изучении математики на отделении предвузовской подготовки международного факультета авторы считают обязательным использование на лекционных и практических занятиях отдельных аспектов из истории математики. Далее мы хотим привести примеры использования исторических фактов при изучении отдельных тем данного курса.

При изучении тем «Натуральные и целые числа», «Рациональные числа» авторами упоминаются отдельные факты из истории арифметики. История арифметики охватывает период от возникновения счёта до формального определения чисел и арифметических операций над ними с помощью системы аксиом. Студентам рассказывается о том, что арифметика - наука о числах, их свойствах и отношениях - является одной из основных математических наук и тесно связана с алгеброй и теорией чисел. Причиной возникновения арифметики стала практическая потребность в счёте, простейших измерениях и вычислениях. Первые достоверные сведения об арифметических знаниях обнаружены в исторических памятниках Вавилона и Древнего Египта, относящихся к III-II тысячелетиям до н.э. Большой вклад в развитие арифметики внесли греческие математики, в частности пифагорейцы, которые пытались с помощью чисел определить все закономерности мира. В Средние века основными областями применения арифметики были торговля и приближённые вычисления. Теоретические обоснования представления о числе связаны в первую очередь с определением натурального числа и аксиомами Пеано, сформулированными в 1889 году. За ними последовали строгие определения рациональных, действительных, отрицательных и комплексных чисел [1].

При изучении темы «Квадратное уравнение. Теорема Виета. Исследование квадратного трёхчлена» студентам бывает интересно и полезно узнать о первом крупном математике Франции 16 века - Франсуа Виете (1540-1603). Он впервые использовал привычные нам знаки арифметических действий над известными числами или над буквами, изображающими неизвестные числа и изложил на этом языке все известные факты о решении уравнений-многочленов. Открытие Виета выявило неожиданную аналогию между многочленами и целыми числами: они одинаково просто разлагаются на неразложимые множители. В мире чисел такими множителями являются простые числа - а среди многочленов двучлены вида (x-a) или более сложные неразложимые многочлены.

Одним из фундаментальных понятий современной математики являются вектор, поэтому при изучении студентами темы «Векторы. Операции над векторами. Скалярное произведение векторов» рассказывается об эволюции понятия вектора, которая осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики, а так же в технике. Говорится так же о том, что вектор относительно новое математическое понятие. Сам термин «вектор» впервые появился в 1845 году у ирландского математика и астронома Уильяма Гамильтона (1805–1865) в работах по построению числовых систем, обобщающих комплексные числа. Гамильтону принадлежат и термин «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение». Почти одновременно с ним исследования в том же направлении, но с другой точки зрения вёл немецкий математик Герман Грассман (1809 – 1877). Англичанин Уильям Клиффорд (1845 – 1879) сумел объединить два подхода в рамках общей теории, включающий в себя и обычное векторное исчисление. А окончательный вид оно приняло в трудах американского физика и математика Джозайи Уилларда Гиббса (1839–1903), который в 1901 году опубликовал обширный учебник по векторному анализу. Конец прошлого и начало текущего столетия ознаменовались широким развитием векторного исчисления и его приложений. Были созданы векторная алгебра и векторный анализ, общая теория векторного пространства. В соответствии с требованиями новой программы по математике и физике понятие вектора стало одним из ведущих понятий школьного курса математики [2].

Ко второму семестру расширяются знания студентов по русскому языку: существенно обогащается их словарный запас, закрепляются знания грамматики, студенты овладевают навыками аудирования и говорения. Знания по русскому языку и математике, полученные в первом семестре, создают надежную опору для более глубокого изучения теоретического материала курса.

Данный этап отличается от предыдущего возможностью сосредоточить главное внимание на усвоении студентами содержания материала. В качестве главной цели обучения математике выступает интенсивное изучение программного материала с выделением фундаментальных понятий для их более глубокого изучения. А также на данном этапе мы продолжаем знакомить студентов с основными аспектами из истории математики.

При изучении темы «Функция. Исследование функции элементарными методами» рассказываются исторические аспекты возникновения данного понятия в математике. Понятие функции уходит своими корнями в ту далёкую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их предметы взаимосвязаны. Они ещё не умели считать, но уже знали, что:

1. чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода;
2. чем сильнее натянута тетива лука, тем дальше полетит стрела;
3. чем дольше горит костёр, тем теплее будет в пещере.

Понятие переменной величины было введено в науку французским учёным и математиком Рене Декартом (1596-1650). Он ввёл идею числовой функции числового аргумента. При записи зависимостей между величинами Декарт стал применять буквы. Он начал геометрически изображать не только пары чисел, но и уравнения, связывающие два числа. Одновременно с Декартом к мысли о соответствии между линиями и уравнениями пришёл другой французский математик – Пьер Ферма (1601-1665). Термин «функция» начал применять в конце XVII века Лейбниц (1646-1716) и его ученики. Определение функции, приближенное к современному, дал Иоганн Бернулли: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Одним из интереснейших понятий с исторической точки зрения является последовательность и прогрессия, которая изучается в темах «Числовые последовательности» и «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Слово «прогрессия» (от латинского progression) означает «движение вперед» (как слово «прогресс»). Этот термин впервые был введен римским автором Боэцием, жившем в 6 веке. Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были еще у древних народов. В клинописных табличках вавилонян, как и в египетских папирусах, относящихся ко II тысячелетию до н.э., встречаются примеры арифметической и геометрической прогрессий. С начала нашей эры известна задача-легенда: «Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал на первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую – два зерна, за третью – четыре и т. д. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить это «скромное» желание Сеты». В задаче надо было найти сумму 64 членов геометрической прогрессии с первым членом единицей и знаменателем 2, что составило огромную сумму и поразило царя.

Архимед умел вычислять сумму числа членов геометрической прогрессии. Правило нахождения суммы членов арифметической прогрессии впервые встречается в «Книге абака» (1202) Леонардо Пизанского.

В данной работе авторами показаны лишь отдельные примеры использования исторических аспектов в изучении математики на отделении предвузовской подготовки международного факультета. В целом авторами ведется непрерывная работа по введению небольших исторических экскурсов в каждую из тем данного курса, что делает его изучение более познавательным и интересным для студентов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Депман И. Я. История арифметики. 6-е издание. М.: Изд-во Либроком, 2011. 416 с.
2. Манкевич Ричард. История математики. М.: Изд-во Ломоносов, 2011. 256 с.

УДК 004.942

Моделирование компьютерных систем с FIFO-дисциплиной обработки прерываний

Е. В. Ларкин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: elarkin@mail.ru
А. Н. Привалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: privalov.61@mail.ru

MODELING COMPUTER SYSTEMS WITH FIFO DISCIPLINE PROCESSING INTERRUPTIONS

E.V. Larkin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: elarkin@mail.ru
A.N. Privalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: privalov.61@mail.ru

ЭВМ Фон Неймановского типа, в которых реализован режим прерываний, широко используются при обмене данными в цифровых управляющих и информационных системах [1, 2, 3]. Прерывания, как правило, поступают от внешних источников сигналов, функционирующих независимо от самой ЭВМ. При поступлении соответствующего запроса процессор прекращает интерпретацию текущего (фонового) алгоритма и переходит к интерпретации алгоритма обработки прерываний, по завершении которой возвращается к интерпретации отложенного алгоритма [4, 5].

Несмотря на широкое распространение систем с прерываниями, предварительное моделирование процесса обработки данных в них развито мало, что объясняется отсутствием подходов, которые позволяли бы, с одной стороны, адекватно описывать функционирование системы на физическом уровне, а с другой стороны приводили бы к достаточно простым расчетам временных характеристик системы. Вместе с тем, существует практически универсальный подход, основанный на теории полумарковских/Марковских процессов [6, 7, 8, 9, 10], позволяющий провести оценку временных интервалов с точностью до плотностей распределения и развитие теории полумарковских процессов - математический аппарат сетей Петри-Маркова (СПМ) [11], позволяющий проводить анализ «соревнований» в системе, а следовательно оценивать величину временных интервалов при взаимодействии систем. Для формирования адекватной Петри-Марковской модели системы с FIFO-дисциплиной обработки прерываний ниже сделаны следующие допущения:

процессы в системе развиваются в реальном физическом времени;

как интервалы времени между прерываниями, так и интервалы времени, затрачиваемого на обработку прерываний, являются случайными, задаются с точностью до плотностей распределения и не зависят от предыстории процесса.

Это позволило построить первичную модель, учитывающую эффект «соревнования» в системе, и упростит модель до ординарного полумарковского процесса, позволяющего проводить оценку временных интервалов.

Сложность любого математического описания системы, включающей ряд взаимодействующих элементов, определяется сложностью описания ее компонентов, поэтому модели компонентов системы с прерываниями должны быть предельно простыми. Интерпретация алгоритма любой сложности в физическом времени может быть представлена в виде ординарного полумарковского процесса μ_m следующего вида:

$$\mu = \{A,\ h(t)\}, \tag{1}$$

где t - время; $A = \{a_0,\ ...,\ a_j,\ ...,\ a_J\}$ - множество состояний; a_0 - стартовое состояние, моделирующее начало интерпретации алгоритма; a_J - поглощающее состояние, моделирующее окончание интерпретации алгоритма; $h(t)$ - полумарковская матрица;

$$h(t) = [h_{j,k}(t)] = p \otimes f(t); \tag{2}$$

$p = [p_{j,k}]$ и $f(t) = [f_{j,k}(t)]$ - $(J+1) \times (J+1)$ стохастическая матрица и матрица плотностей распределения времени пребывания полумарковского процесса в состояниях, соответственно.

На практике возможен случай, когда например, фоновая программа является циклической, т.е. после окончания выполнения снова перезапускается сначала. В этом случае нулевой элемент последней строки матрицы $h(t)$, $h_{J,0}(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ - δ-функция Дирака. При упрощении модель общего вида (2) преобразуется в модель:

$$\mu \to \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \{\alpha_0,\ \alpha_1\},\ \begin{bmatrix} 0 & f(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} - \text{4; O A; CG0O :>= 5G => 3 > 0; 3 > @8B < 0;} \\ \left\{ \{\alpha_0,\ \alpha_1\},\ \begin{bmatrix} 0 & f(t) \\ \delta(t) & 0 \end{bmatrix} \right\} - \text{4; O A; CG0O F8 :; 8G5A :> 3 > 0; 3 > @8B < 0;} \end{array} \right. \tag{3}$$

где $f(t)$ - плотность распределения времени интерпретации алгоритма;

В общем случае плотность распределения $f(t)$ для конечного алгоритма определяется по следующей зависимости:

$$f(t) = L^{-1}\left[I_0^R \cdot \sum_{w=1}^{\infty} \{L[h(t)]\}^w \cdot I_J^C \right], \tag{4}$$

где I_0^R - $(J+1)$-мерный вектор строка, в котором нулевой элемент равен единице, а все остальные элементы равны нулю; $I_J^!$ - $(J+1)$-мерный вектор-столбец, J-й элемент которого равен единице, а все остальные элементы равны нулю; $L[...]$ и $L^{-1}[...]$ - прямое и обратное преобразования Лапласа.

Для определения плотности распределения $f(t)$ в случае циклического алгоритм, в $h(t)$ необходимо выполнить подстановку $h_{J,0}(t) \Leftarrow 0$, после чего к сформированной таким образом матрицы применить зависимость (4)..

Внешний генератор прерываний, имеет вид

$$\nu \to \{\{\beta\},\ [g(t)]\}, \tag{5}$$

где β - единственное возвратное состояние; $g(t)$ - плотность распределения времени возврата в состояние.

Для описания рекурсивного «соревнования» процессов, описываемых плотностями $f(t)$ и $g(t)$, вводятся функции ${}^k\varphi_f(t)$ и ${}^k\varphi_g(t)$, которые соответственно обозначают плотности распределения времени, оставшегося до окончания обработки прерывания и до поступления очередного прерывания на k-м этапе рекурсии.

Взвешенные плотности распределения времени завершения этапа «победителем» определяются по зависимостям:

$$\begin{cases} {}^k\varphi_f(t) \,/\, {}^k\varphi_g(t) = {}^k\eta_{f/\mathrm{g}}(t) = {}^k\varphi_f(t) \cdot \left[1 - {}^k\Phi_g(t)\right]; \\ {}^k\varphi_g(t) \,/\, {}^k\varphi_f(t) = {}^k\eta_{g/f}(t) = {}^k\varphi_g(t) \cdot \left[1 - {}^k\Phi_f(t)\right], \end{cases} \tag{6}$$

где ${}^{\cdots}\Phi_{\dots}(t) = \int_0^t {}^{\cdots}\varphi_{\dots}(\tau)\,d\tau$.

Вероятности и плотности распределения времени завершения этапа «победителем» равны, соответственно

$$\begin{cases} {}^k\pi_{f/g} = \int_0^\infty {}^k\eta_{f/g}(t)\,dt; \\ {}^k\pi_{g/f} = \int_0^\infty {}^k\eta_{g/f}(t)\,dt; \end{cases} \begin{cases} {}^k\varphi_{f/g}(t) = \frac{{}^k\eta_{f/g}(t)}{{}^k\pi_{f/g}}; \\ {}^k\varphi_{g/f}(t) = \frac{{}^k\eta_{g/f}(t)}{{}^k\pi_{g/f}}. \end{cases} \tag{7}$$

Плотности распределения времени ожидания «победителями» завершения этапа «побежденными» определяется по зависимостям

$$\begin{cases} {}^k\varphi_f(t) \to {}^k\varphi_g(t) = {}^k\varphi_{f\to g}(t) = \frac{1(t)\int_0^\infty {}^k\varphi_f(\tau){}^k\varphi_g(t+\tau)d\tau}{\int_0^\infty {}^k\Phi_f(t)d^k\Phi_g(t)}; \\ {}^k\varphi_g(t) \to {}^k\varphi_f(t) = {}^k\varphi_{g\to f}(t) = \frac{1(t)\int_0^\infty {}^k\varphi_g(\tau){}^k\varphi_f(t+\tau)d\tau}{\int_0^\infty {}^k\Phi_g(t)d^k\Phi_f(t)}, \end{cases} \tag{8}$$

где $1(t)$ - единичная функция Хевисайда.

С использованием зависимостей (6), (7), (8) может быть построена аналитическая модель прерываний.

Исследования были проведены при поддержке Госпрограммы Минобрнауки РФ (№ 2.3121.2017/ПЧ).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 750 p.

2. Landau I.D., Zito G. Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 2006. 484 p.

3. Astrцm J., Wittenmark B., Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tsinghua University Press. Prentice Hall, 2002. 557 p.

4. Regehr J. Duongsaa U. 2005. Preventing interrupt overload // Proceedings of the Conference on Languages, Compilers, and Tools for Embedded Systems. 2005. - Pp. 50 – 58.

5. Czerwinski, M., Cutrell, E., Horvitz, E. Instant messaging and interruption: Influence of task type on performance // Proceedings of OZCHI. Sydney, Australia - 2000, - https://interruptions.net/literature/Czerwinski-OZCHI00.pdf.

6. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewкgiowski M. Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence // Stochastic Processes and their Applications. V. 127, N. 4. 2017. Pp. 1125–1170.

7. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications / International Series in Operations Research & Management Science. V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013. 241 p.

8. Markov A.A. Extension of the law of large numbers to dependent quantities // Izvestiia Fiz.-Matem. Obsch. Kazan Univ., (2-nd Ser.), - 1906, - Pp. 135–156

9. Howard R. A. Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes. Courier Corporation, 2012.

10. Janssen J., Manca R. Applied Semi-Markov processes. Springer US, 2006. 310 p.

11. Larkin E.V., Malikov A.A., Ivutin A.N. Petri-Markov model of fault-tolerant computer systems // 4th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). – 5-7 April 2017, Barcelona, Spain – IEEE, 2017. – P. 416-420.

———————————————————————————

УДК 51

Математические исследования Карла Маркса. Цели, предпосылки, источники.

Т. А. Ласковая (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: talaskovy@mail.ru
К. К. Рыбников (Россия, г. Москва)
ООО «Полиэдр»
e-mail: kkrybnikov@mail.ru
О. К. Чернобровина (Россия, г. Москва)
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана

Karl Marks’s mathematical studies. Purposes, background, sources.

T. A. Laskovaya (Russian, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: talaskovy@mail.ru
K. K. Rybnikov (Russian, Moscow)
OOO "Polyhedron»
e-mail: kkrybnikov@mail.ru
O. K. Chernobrovina (Russian, Moscow)
Bauman Moscow State Technical University

Введение

По крайней мере последние 25 лет жизни Карла Маркса были связаны с его попытками овладеть в полной мере всеми возможностями применения современного ему математического анализа. Со свойственной ему основательностью, он анализировал и подвергал глубокому осмыслению математический аппарат дифференциального исчисления. К началу 30-х годов прошлого столетия почти весь математический архив Маркса (в подлинниках и копиях) оказался в распоряжении Института Марксизма-Ленинизма при ЦК КПСС в Москве. Однако, только к 1968 году советским ученым удалось окончательно опубликовать все математические рукописи Маркса, сопроводив их некоторыми комментариями [1]–[8].

Основная часть

Ответ на вопрос, что же все-таки побудило уже немолодого Маркса приступить в последние годы его жизни к основательному и глубокому изучению математики, по-видимому, никогда не станет ясным для нас. Однако, перспективность использования математического аппарата для самых различных исследований была для него очевидна. Благодаря П. Лафаргу мы знаем, что «он считал..., что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой» (см., например, [17]).

Важны были и личные пристрастия. В письме к Энгельсу от 23 ноября 1860 года в период крайне плохого самочувствия он пишет: «Единственное занятие, которым я поддерживаю необходимое душевное равновесие, – это математика».

Другим побудительным мотивом, разумеется, стали необыкновенные, ранее неизвестные, возможности прикладных исследований на базе дифференциального исчисления. Энгельс в «Диалектике природы» пишет: «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы*». Главным процессом для Маркса было, конечно, движение. Энгельс там же пишет: «Поворотным пунктом в математике была Декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошло *движение* и, тем самым, диалектика, и благодаря этому же стало немедленно *необходимым дифференциальное и интегральное исчисления*» [9], [10].

Авторы настоящей статьи, ни в коем случае не отрицая этих мотивов, в то же время считают, что все-таки главной причиной является чисто практический интерес К. Маркса к анализу экономических показателей с помощью более совершенного аппарата, нежели элементарная статистика.

Сам Маркс в письме к Энгельсу от 31 мая 1873 года пишет: «Дело в следующем: ты знаешь таблицы, в которых цены, учетный процент и т.д., и т.д. представлены в движении в течение года и т.д. в виде восходящих и нисходящих зигзагообразных линий. Я неоднократно пытался – для анализа кризисов – вычислять эти up and down как неправильные кривые и думал (да и теперь еще думаю, что с достаточно проверенным материалом это возможно) математически вывести из этого главные законы кризисов».

В соответствии с современной терминологией Маркс пытался подойти к решению задач прогнозирования экономических показателей на основе анализа, так называемых, временных рядов.

В источниках, которыми пользовался Маркс, прежде всего анализировались результаты Грегори и Тейлора, которые пришли к окончательной формулировке «теоремы Тейлора» на основании исследования интерполяционной формулы Ньютона. В ней рассматривалась функция $y = f(x)$, где переменная х задавалась в равноотстоящих узлах интерполяции $x, x + \Delta x, \dots, x + n\Delta x = h$ при соответствующих значениях функции y (или y_0), $y_1, y_2, \dots, y_n$. Исходными данными при этом являются, так называемые, последовательные разности:
– разности первого порядка $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$;
– разности между этими разностями (разности второго порядка) $\Delta^2 y, \Delta^2 y_1, \dots, \Delta^2 y_{n-2}$ и т.д.

Выражая $f(x+\Delta x), f(x+2\Delta x), f(x+3\Delta x), \dots$ через $\Delta^2 y, \Delta^2 y, \Delta^3 y \dots$, Тейлор получил:
$f(x + \Delta x) = y + \Delta y$,
$f(x + 2\Delta x) = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$,
$f(x + 3\Delta x) = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$,
....

Далее, подмечая общую закономерность, Тейлор в конечном счете получает

$$f(x + \Delta x) = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y + \dots + \Delta^n y,$$

что, по-существу, является интерполяционной формулой, полученной ранее Ньютоном.

Далее, полагая:

$$n = \frac{h}{\Delta x}, n-1 = \frac{h-\Delta x}{\Delta x}, n-2 = \frac{h-2\Delta x}{\Delta x}, \ldots, n-(n-1) = \frac{h-(n-1)\Delta x}{\Delta x},$$

приходим к соотношению:

$$f(x+h) = y + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots$$

(заметим, что Тейлор выписывал только первые члены этой суммы). Затем, считая h фиксированным, а Δx – бесконечно малым, приходим к соотношению:

$$f(x+h) = y + y^{*}h + y^{**}\frac{h^2}{1\cdot 2} + y^{***}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

где

y^{*} – первая флюксия по Ньютону $\left(\frac{dy}{dx}\text{ по Лейбницу}\right)$,

y^{**} – вторая флюксия по Ньютону $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\text{ по Лейбницу}\right)$ и т.д., что и приводит нас к теореме Тейлора.

Анализ вышесказанного и последней, оставшейся неоконченной, рукописи Маркса «Теорема Тейлора» говорит о том, что он был хорошо знаком и с теоремой Тейлора, и с теоремой Маклорена. Об этом свидетельствует и наличие в рукописях Маркса решения задач с использованием этих теорем для некоторых функций: $y = \frac{1}{a+x}$, $y = \sqrt{a^2+bx}$, $y = (a+x)^m$.

В то же время Маркс не успел остановиться на примерах использования идей интерполяции для построения приближенного описания многочленом функции, заданной таблично, хотя, как мы видим, был в шаге от этого.

Также в его работах нет упоминания о методе наименьших квадратов, возникшем на самом рубеже веков в работах Гаусса (1794-1795) и Лежандра (1805-1806).

Увлеченный анализом представления аналитических функций многочленами, Маркс не успел продвинуться дальше.

Заключение

В 2018 году исполнилось 200 лет со дня рождения Карла Маркса. В 1968 году в нашей стране были полностью изданы его математические рукописи. В том же году увидели свет не менее семи работ, посвященных анализу этих трудов. [11]–[17]. Так получилось, что эти работы оказались последними. Более полувека работы Маркса были вне зоны внимания исследователей и сейчас практически забыты.

Авторы выражают надежду, что необыкновенно интересные страницы истории математики (и не только математики) вновь окажутся доступными для студентов и аспирантов в рамках учебных курсов механико-математических, физико-математических и философских факультетов университетов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркс К. Математические рукописи. М.: Наука, 1968. 640 с.

2. Маркс К. Математические рукописи // Под знаменем марксизма. 1933. №1. С. 14-73.

3. Яновская С. А. О математических рукописях К. Маркса // Под знаменем марксизма. 1933. №1. С. 74-115.

4. Гливенко В. И. Дифференциал у Маркса и Адамара // Под знаменем марксизма. 1934. №5. С. 79-85.
5. Рыбников К. А. О работах К. Маркса по математике : дис. д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1954.
6. Рыбников К. А. К вопросу о понятии функции // Вопросы философии. 1958. №11. С. 89-92.
7. Рыбников К. А. Математические рукописи Маркса // БСЭ. изд. 2. Т. 26.
8. Гокиели Л. П. Математические рукописи Карла Маркса и вопросы обоснования математики. Тбилиси: АН Гр ССР, 1947. 111 с.
9. Энгельс Ф. Анти-Дюринг // К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения. Изд. 2. Т. 20.
10. Энгельс Ф. Диалектика природы // К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения. Изд. 2. Т. 20.
11. Католин Л. Судьба «Математических рукописей» // Неделя. 1968. - № 10(418).
12. Католин Л. Мы были тогда дерзкими парнями... // Знание – сила. 1968. №№3, 4, 5.
13. Рывкин А. А. Математические рукописи Маркса. К 150-летию со дня рождения Карла Маркса // Природа. 1968. №5. С. 14-21.
14. Кольман Э. К. Маркс и математика. (О «Математических рукописях» К. Маркса) // «Вопросы истории естествознания и техники». 1968. Вып. 25. С. 101-112.
15. Рывкин А. А., Рывкин А. З. К. Маркс. Математические рукописи // Экономика и математические методы 5. 1968. №5 С. 818-823.
16. Молодший В. Н. К. Маркс. Математические рукописи // Вестник АН СССР. 1968. №7. С. 136-144.
17. Розов Н. Х. Математические рукописи Карла Маркса // Успехи математических наук. 1968. Т. XXIII, вып. 5 (143). С. 205-210.
18. Славков Св. Карл Маркс и някои проблеми на математиката. София, 1963. 122 с.

УДК 51

Александр Гротендик: связи с Россией

К. И. Пименов (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: k.pimenov@spbu.ru

Alexander Grothendieck: Russian Relations (in Russian)

K. I. Pimenov (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg state University
e-mail: k.pimenov@spbu.ru

Based on records in Russian archives, we present some new facts about life of Alexandre Grothendieck's father in Russia and his anarchism activities. We found his name at birth and that he had at least three brothers. Moreover, we found the fate of his eldest son, David Aleksandrovich Shapiro, a prominent petrophysicist, and established contact with his daughter. Notably, in mid-90s David Shapiro has dictated several pages of memories about his parents which are now kept by his daughter.

Moreover, we briefly discuss relations between Grothendieck and Moscow in 1960-80ths.

На основе архивных документов мы дополним и уточним сведения об отце Александра Гротендика, основная часть которых содержится в биографии Гротендика, написанной У.Шарлау. Нам удалось установить настоящее имя, данное при рождении Александру Петровичу Шапиро и с достоверностью установить, что у него было не менее трех братьев. Кроме того, мы выяснили судьбу старшего сына А.П.Шапиро, Давида Александровича, и установили контакт с его дочерью. В середине 90-х годов Д.А.Шапиро надиктовал ей несколько страниц воспоминаний о своих родителях, где рассказал настоящее имя своего отца, бабушки, историю знакомства родителей и другие сведения, которые знал со слов матери.

Кроме того, мы кратко обсудим контакты Гротендика с московскими математиками в 1960-80-ые годы.

———————————————————————————————

УДК 512.54+51(091)

Проблемы М. Дена в комбинаторной теории групп

О. А. Пихтилькова (Россия, г. Оренбург)
Оренбургский государственный университет
e-mail:opikhtikova@mail.ru

M. Dehn's problems in combinatorial group theory

O. A. Pikhtilkova (Russia, Orenburg)
Orenburg State University
e-mail:opikhtilkova@mail.ru

Начало комбинаторной теории групп обычно связывают с работой В. Дика 1882 года, в которой впервые были ведены понятия порождающих и определяющих соотношений. Как самостоятельная наука комбинаторная теория групп оформилась только после того, как в 1911 году М. Ден сформулировал основные алгоритмические проблемы теории групп [3]: проблему распознавания равенства слов или «проблема тождества»(Identitaetsproblem у М. Дена), проблему сопряженности и проблему изоморфизма. Исследование этих проблем стимулировало развитие комбинаторных методов в теории групп, что и явилось причиной возникновения одного из самых активно развивающихся направлений современной математики – комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг, посвященных данной теме; среди них достаточно назвать монографии Карраса А., Магнуса В. и Солитера Д.[15], а также Линдона Р. и Шуппа П.[13].

Среди работ, связанных с исследованием проблем М. Дена, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблемы равенства слов в конечно определенных группах; им же доказана неразрешимость проблемы изоморфизма групп. Примеры конечно определенных групп с неразрешимой проблемой равенства были даны Буном [2]. С. И. Адяном [9] определено понятие наследственного нетривиального свойства группы и доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений распознать выполнимость свойства β, представляющего собой объединение нетривиального наследственного инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие этим свойством β.

Из этого следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы.

Отрицательное решение проблемы равенства слов явилось причиной изучения проблем Дена в определенных классах групп.

Для групп с разрешимой проблемой равенства слов возникает более общая проблема - проблема вхождения, впервые рассмотренная Нильсеном в свободных группах и Магнусом в группах с одним определяющим соотношением для так называемых магнусовых подгрупп.

Известно, что проблема вхождения в классе всех конечно определенных групп неразрешима, что непосредственно следует из связи между проблемой вхождения и проблемой равенства слов. Поэтому естественен интерес к изучению рассматриваемой проблемы для каких - то фиксированных классов групп. Как было отмечено выше, положительное решение проблемы вхождения в свободных группах следует из результата Нильсена.

К. А. Михайловой этот результат был обобщен на свободное произведение групп, доказано, что если в группах A и B разрешима проблема вхождения, то она разрешима в их свободном произведении.

В отличие от свободного произведения, прямое произведение групп, как доказала К. А. Михайлова, не наследует свойства сомножителей иметь разрешимой проблему вхождения.

Обобщением проблемы сопряженности слов является проблема обобщенной сопряженности слов, проблема степенной сопряженности и проблема сопряженности подгрупп.

Существование такого алгоритма для некоторого класса конечно определенных групп позволяет для любого автоморфизма $\phi \in AutG$ определить, является ли он внутренним.

Проблема изоморфизма конечно порожденной коммутативной полугруппы сводится к проблеме обобщенной сопряженности слов в классе $GL_n(Z)$ групп. Поэтому, решение данной проблемы является важной задачей в комбинаторной теории групп.

С описанием множества решений данной системы связана проблема построения централизатора конечно порожденной подгруппы.

Г. С. Маканиным решена известная проблема Артина об описании всех кос в B_{n+1}, коммутирующих с данной косой. Доказано, что централизатор любого элемента в B_{n+1} конечно порожден и указан алгоритм построения его образующих. Используя результат Г. Г. Гурзо [12], обобщившей теорему Г. С. Маканина, Т. А. Маканина получила полное решение обобщенной проблемы сопряженности слов в B_{n+1}.

Результаты Г. С. Маканина, Г. Г. Гурзо и Т. А. Маканиной справедливы для групп Артина конечного типа, определенных Брискорном Э. и Сайто К. в статье [11], а именно, показано, что централизатор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора; разрешима проблема обобщенной сопряженности слов; дано полное описание решений системы уравнений $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_i z = v_i)$.

И. Г. Лысенок [14], доказал разрешимость обобщенной проблемы сопряжённости для гиперболических групп, им же установлено, что централизатор элемента в гиперболической группе является конечно порожденным.

В. Н. Безверхний доказал разрешимость проблемы обобщенной сопряженности в группах $C(p)\&T(q)$, где $(p,q) \in \{(6,3),(4,4),(3,6)\}$ и в группах Артина большого типа. Также, для данных классов групп была доказана конечная порожденность централизатора конечно порожденной подгруппы.

Герстеном и Шортом [4] доказана конечная порожденность централизатора элементов для биавтоматных групп.

А. И. Мальцев решил задачу о нахождении образующих пересечения конечно порожденных подалгебр данной алгебры для конечно порожденных нильпотентных групп. С данной проблемой тесно связано свойство H (Хаусона) подалгебр данной алгебры, а именно, алгебра обладает свойством H, если пересечение конечно порожденных подалгебр есть конечно порожденная подалгебра. Известно [5], что свободные группы обладают свойством Н. Б. Баумслаг [1] обобщил результат Хаусона на свободное произведение групп.

Для свободных групп проблема А. И. Мальцева о пересечении подгрупп решена В. Н. Безверхним. Конструктивное доказательство теоремы Б. Баумслага, данное в статье [10], позволило ее авторам решить указанную проблему А. И. Мальцева для свободного произведения групп. Там же доказано, что теорема Баумслага на свободное произведение с объединением не переносится. Показано, что свободное произведение групп, обладающих свойством Хаусона, объединенных по конечным группам, обладает свойством Хаусона. Также в данной работе показано, что если сомножители обладают свойством Хаусона и в них разрешима проблема Мальцева и разрешима проблема пересечения смежных классов конечно порожденных подгрупп, то и свободное произведение этих групп, объединенных по конечным подгруппам, наследует указанное выше свойство.

Д. И. Молдаванским доказывается, что группы с одним определяющим соотношением с нетривиальным центром свойством Хаусона не обладают. И. Капович показал [6], что в группе $G = \langle a, t; at^{-1}ata^2t^{-2}a^{-1}t^2 \rangle$ свойство Хаусона также не выполнено.

Для свободного произведения двух свободных групп с коммутирующими подгруппами $G = \langle A * B; [H, K] = 1 \rangle$, H и K —конечно порожденные подгруппы в A и B соответственно, описан централизатор элементов, построено пересечение централизаторов и решена обобщенная проблемы сопряженности. Для групп этого класса Д. Гурвицем [8] доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов. В работе Р. Е. Шуппа и С. Ф. Миллера [7] исследуется геометрия этих групп и показано, что условия при которых проблема слов разрешима идентичны для свободного произведения с объединением. Если A и B имеют разрешимую проблему равенства и в подгруппах H и K разрешима обобщенная проблема равенства, то в группе G разрешима проблема равенства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baumslag B. Intersection of finitely generated subgroups in free product // J. London Math, soc., 1966, 41. P. 673-679.

2. Boone W. W. Gertain simple, unsolvable problems of group theory // V, VI. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1957, 19, №1, 22-27; №2, p. 227¬232 (РЖМат, 1959, 78).

3. Dehn M. Über unendliche discontinuierliche Gruppen. Maht. Annal. 71, 116-144,1.4, II.3, 1911.

4. Gersten S. M., Short H. B. Rational subgroups of biautomatic groups // Annals of Math. 1991, 134, P. 125-158.

5. Howson A.G. On the intersection of finitely generated free groups // J. London Math, soc., 1954, 29. P. 428-434.

6. Kapovich I. Howson property and one- relator groups // Commynication in algebra. 1999. V. 27.№ 3. P. 1057-1072.

7. Miller, C. F. III, Schupp, P. E. The geometry of Higman-Neumann-Neumann extensions // Comm. Pure. Appl. Math. 26, 787-802(1973).

8. R. Daniel Hurwitz. On the Conjugacy Problem in a Free product with Commuting Subgroup // Math. Ann. 221, 1-8, 1976.

9. Адян С.И. Неразрешимость алгоритмических проблем в теории групп // Труды Мос. Мат. об-ва. 1957. Т.6. С. 231-298.

10. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра, вып.1.-Л., 1974. С.

11. Брискорн Э., Сайто . Группы Артина и Кокстера // Математ. заметки: сб. переводов, 1974. 18, № 6. С. 56-79.

12. Гурзо Г. Г. О централизаторах конечных множеств элементов группы кос// Математ. заметки. 1985.Т. 37.№1. С.3-6.

13. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп.-М.: Мир, 1980.

14. Лысенок И. Г. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т.53.№4.

15. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп.-М.: Наука, 1974.

УДК 539.4: 620.22

Инженерный подход к моделированию плавления металлического порошка с применением лазерных технологий

А.Н. Привалов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: privalov.61@mail.ru
Е.В Ларкин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: elarkin@mail.ru

THE ENGINEERING APPROACH TO MODELING THE METAL-MOLD POWDER MELTING WITH LASER TECHNOLOGIES

A.N. Privalov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: privalov.61@mail.ru
E.V. Larkin (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: elarkin@mail.ru

Аддитивные технологии изготовления деталей, основанные на послойном лазерном наплавлении частиц мелкодисперсных порошков металлов, в настоящее время распространены достаточно широко [1, 2, 3, 4, 7, 8]. Практическая реализация подобных технологий, например, для стали 07Х18Н12М2, связана с установлением оптимальных режимов функционирования лазера 3D-принтера, осуществляющего нагрев частиц до температуры плавления и последующее их плавление [1, 2], что обеспечивает, в конечном итоге, требуемые прочностные характеристики изготавливаемых деталей, и позволяет экономить дорогостоящее сырье.

Для решения задачи оптимизации необходима математическая модель, позволяющая за приемлемое время оценить эффективность предлагаемых технических решений. Общепринятый подход к математическому моделированию процесса нагрева и расплавления металлического порошка основан на исследовании распространения тепла внутри частицы при ее нагреве и фазовом превращении [5, 6]. Реализация подобного подхода связана с интегрированием уравнений в частных производных, что в свою очередь, требует значительных вычислительных ресурсов, и поэтому малопригодны для практической инженерии. В том случае, если результатом оптимизации является настройка 3D-принтера под конкретный материал с известными свойствами, требуется упрощенная модель, позволяющая оперативно варьировать параметры установки.

Расчетная схема для определения температуры частицы порошка приведена на рис. 1 a, где показана частица в виде шара радиусом R, в ортогональном пространстве $xOyz$, центр O которого связан с центром шара, ось z совпадает с направлением падения на шар лазерного луча, а оси x и y образуют с осью z правую систему координат. Вследствие того, что шар представляет собой точечно-симметричное симметричное тело, без нарушения общности можно считать, что центр пучка электромагнитного излучения, формируемого лазерной системой, смещен вдоль оси x относительно оси z на величину d [9]

Распространение тепла при нагревании шарообразной частицы лазерным лучом в пределах одного фазового состояния (твердого, или жидкого) описывается с помощью дифференциального уравнения теплопроводности [10]

$$\frac{\partial T\left(x,y,z,t\right)}{\partial t}=\frac{\alpha}{c\rho}\nabla^2 T\left(x,y,z,t\right),\forall x,y,x\in\left(x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\right), \tag{1}$$

где $T\left(x,y,z,t\right)$ - распределение температуры по объему частицы в момент времени t в градусах Кельвина; x, y, z - пространственные координаты; $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - дифференциальный оператор Лапласа; α - коэффициент теплопроводности, характеризующий скорость выравнивания температуры в неравномерно нагретой частице; c - удельная теплоемкость материала частицы; ρ - плотность материала частицы; t - время; R - радиус шара.

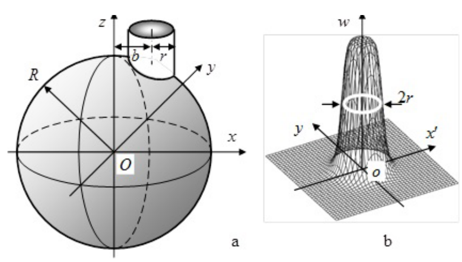


Рис. 1. Расчетная схема для определения температуры частицы (a)
и распределение энергии в лазерном луче (b)

Распределение энергии $w(x',y)$ по площади сечения лазерного пучка с эффективным радиусом r определяется конструкцией и режимом функционирования лазера (рис. 1 b). Лазерный пучок, направленный сверху вниз вдоль координаты z, нагревает верхнюю полусферу частицы, откуда тепло распространяется по всему ее объему. При этом лучи пучка частично отражаются, от поверхности частицы, а частично поглощаются частицей.

Количество поглощенной энергии зависит от свойств поверхности частицы и от углов падения лучей лазерного пучка на поверхность,

$$\tilde{w}\left(x,y\right)=\left\{1-k_r\left[\varphi\left(x,y\right)\right]\right\}\cdot w\left(x-b,y,t\right), \tag{2}$$

где b - расстояние от оси z до центра лазерного пучка; $\varphi(x,y)$ - угол падения луча на поверхность шара в точке с координатами x, y; $k_r[\varphi(x,y)]$ - коэффициент отражения;

$$\varphi(x,y) = \arccos\frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R}. \tag{3}$$

При импульсном нагреве частиц, с прямым фронтом и прямым срезом импульса [10]

$$w(x', y, t) = w(x', y)\left[\eta(t) - \eta(t - \theta)\right]. \tag{4}$$

где $w(x', y)$ - распределение энергии в лазерном пучке; $\eta(t)$ - единичная функция Хевисайда; θ - длительность импульса;.

Распределение температуры внутри шара после начала воздействия лазерного излучения определяется за счет интегрирования уравнения в частных производных (1) при начальных условиях

$$T_0(x,y,z) = T_0 = const_{x,y,z},\ \forall x,y,z \in \left[\left(x^2,\ y^2,\ z^2\right) \leqslant R^2\right], \tag{5}$$

и граничных условиях теплообмена с окружающей средой на верхней и нижней полусферах [11]

$$q_L(x,y,z,t) = \frac{1}{\beta}\cdot\left[T_L^+(x,y,z,t) - T_L^-(x,y,z,t)\right], x,\ y,\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \geqslant 0 \tag{6}$$

$$q_e(x,y,z,t) = \frac{1}{\beta}\cdot\left[T_e^+(x,y,z,t) - T_e^-(x,y,z,t)\right], x,\ y,\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leqslant 0; \tag{7}$$

где $q_L(x,y,z,t)$ - удельный тепловой поток, поступающий от лазерного источника, через единицу площади поверхности в единицу времени; $q_e(x,y,z,t)$ - удельный тепловой поток, рассеиваемый в окружающем пространстве через единицу площади поверхности в момент времени t; β – термическое сопротивление материала частицы; $T_L^+(x,y,z,t)$ - температура в точке падения лазерного луча.

Исследования были проведены при поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» по теме: «Разработка прототипа инженерного программного обеспечения на основе высокопроизводительных вычислений для оценки механических характеристик изделия, изготовленного с использованием аддитивных технологий (методом селективного лазерного спекания) с учетом стратегии изготовления изделия» (уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0271.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Зеленко М.А., Нагайцев М.В., Довбыш В.М. Аддитивные технологии в машиностроении. Пособие для инженеров. – М.: ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ». 2015. - 220 с.

2 Волегжанин И.А., Макаров В.Н., Холодников Ю.В. Аддитивные технологии использования композитов при производстве горных машин // Горный информационно-аналитический бюллетень. - 2017. - № 6. С. 32 - 38.

3 Olakanmi E.O., Cochrane R.F., Dalgarno K.W. A review on selective laser sintering/melting (SLS/SLM) of aluminium alloy powders: Processing, microstructure, and properties // Progress in Materials Science. - Vol. 74. - October 2015. - P. 401 - 477.

4. Travyanov A. Ya. et. al. Study of mechanical properties of cellular structures from 03Kh16N15M3 stainless steel depending on parameters of an elementary cell. Chernye Metally. 2018. No. 10. pp. 59–64.

5. Petrovsky P. V. et. al. Dependence of structure and properties of 03Kh16N15M3 on the geometry of cellular structures obtained by the selective laser melting method. Chernye Metally. 2019. No. 3. pp. 49-53.

6. Travyanov A. Ya., Dub A. V., Petrovsky P. V. et. al. Study of mechanical properties of cellular structures from 03Kh16N15MZ stainless steel depending on parameters of an elementary cell. Chernye Metally. 2018. No. 10. pp. 59–63.

7. Петровский П.В., Чеверикин В.В., Соколов П.Ю. и др. Зависимость структуры и свойств стали 03Х16Н15М3 от геометрии ячеистых структур, полученных методом селективного лазерного плавления // Черные металлы. 2019. № 3. С. 49-53.

8. Масайло Д.В., Попович А.А., Орлов А.В. и др. Исследование структуры и механических характеристик образцов, полученных газопорошковой лазерной наплавкой и селективным лазерным плавлением из сфероидизирующего порошка на основе железа // Черные металлы. 2019. № 4. С. **73-77**.

9. Шишковский И.В. Лазерный синтез функционально-градиентных мезоструктур и объемных изделий. – М.: Физматлит, 2009. – 424 с.

10. Orfanidis S.J. Introduction to signal processing. - Prentice Hall Inc. NY, USA, 1996. 790 p.

11. Handbook of Physics / Editors: W. Benenson, J.W. Harns, H. Stocker, H. Lotz. N.Y., USA. Springer Verlag, 2002. Pp. LVIII, 1190.

УДК 51(091)+(092)

О возникновении и развитии теоретико-числовых методов в приближённом анализе и их информационной поддержке[1]

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого
e-mail: i_rebrova@mail.ru

On the origin and development of number-theoretic methods in approximate analysis

I. Yu. Rebrova (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Хорошо известно, что теоретико-числовой метод приближенного анализа был создан в конце 50-ых — начале 60-ых годов XX столетия в рамках работы семинара под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова (семинар **трёх К**). Этот семинар был организован по предложению Н. Н. Ченцова, который работал в группе И. М. Гельфанда по математическому обеспечению отечественного атомного проекта.

Возникает естественный вопрос, а почему именно на этом семинаре был осуществлён существенный прорыв в области численного вычисления кратных интегралов высокой кратности?

Другой, не менее интригующий вопрос, – это состав руководителей семинара **трёх К**. Н. М. Коробов родился 23 ноября 1917 года, в 1953 году защитил докторскую диссертацию, в 1955 году ему присвоили звание профессора. В 1956 году летом он был правой рукой академика И. М. Виноградова, который был председателем оргкомитета III Всесоюзного математического съезда в Москве, а Н. М. Коробов исполнял обязанности ученого секретаря оргкомитета.

Будущему академику Н. С. Бахвалову в то время было только 22 года, и он ещё работал над кандидатской диссертацией, которую защитил в 1958 году, а уже в 1964 году защитил докторскую диссертацию [3]. Будущему дважды лауреату государственных премий Н. Н. Ченцову было 26 лет, и он тоже защитил свою кандидатскую диссертацию только в 1958 году, но

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

уже в 1956 году был награжден орденом Трудового Красного Знамени за выполнение важных прикладных работ. Свою докторскую диссертацию на тему "Общая теория статистического вывода" Н. Н. Ченцов защитил в 1969 г.

Что их объединяло? Малый мехмат и Московские математические олимпиады. Н. М. Коробов был победителем 1-ой московской математической олимпиады в 1935 году. Н. Н. Ченцов получил первую премию на X-ой московской математической олимпиаде в 1947 г. Н. С. Бахвалов рано проявил свои способности и закончил школу в 1950 году, когда ему только исполнилось 16 лет. В 1956 году он закончил первый год обучения в аспирантуре.

При ответе на первый вопрос необходимо обратиться к истории возникновения теории равномерного распределения по модулю 1. Здесь, прежде всего, мы должны сослаться на вопрос о наложении колебаний, который поставил Ж. Л. Лагранж в своей аналитической механике. Первый ответ, отличный от лагранжева случая, дал П. Г. Боль в 1909 году. Другим источником теории равномерного распределения по модулю 1 были аппроксимационная теорема Л. Кронекера 1884 г., работы В. Серпинского 1910 г. и Х. Бора. В 1948 году Н. М. Коробов защитил кандидатскую диссертацию по теории равномерного распределения, основные положения которой изложены в большой работе [14]. В частности, в этой работе было введено понятие вполне равномерного распределения. В 1953 году Н. М. Коробов защитил докторскую диссертацию. Таким образом, к 1965 году он вошёл в число ведущих специалистов в стране по теории равномерного распределения и теории тригонометрических сумм. Именно эта его квалификация сыграла решающую роль для создания теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Выделение класса E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье позволило, используя средства гармонического анализа и аналитической теории чисел, получить оптимальные результаты в теории многомерных квадратурных формул. В этой области работали многие известные математики в нашей стране и за рубежом: Н. М. Коробов [15]–[38], Н. С. Бахвалов [1]–[4], Н. Н. Ченцов [44], Хуа Ло Кен [47], Э. Главка [45]–[46], К. К. Фролов [40]–[43], В. А. Быковский [5]–[10] и многие другие.

Вопросы построения многомерных квадратурных формул тесно связаны с теорией равномерного распределения, основанной Г. Вейлем [53]. В этой области хорошо известны фундаментальные работы К. Рота по оценке квадратичного отклонения [48]–[49] и В. Шмидта по оценке q-ого отклонения [50]–[51].

Теоретико-числовые алгоритмы численного интегрирования имеют существенное значение при расчете интегралов взаимодействия в квантовой химии [39] и при расчете наноразмерных ферромагнитных гетеросистем. Другой класс интегралов, где применимы эти методы, возникает в физике высоких энергий.

За рубежом аналог метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова был предложен на три года позже (1962 г.) Е. Главкой [45]. Он назвал параллелепипедальные сетки с оптимальными коэффициентами сетками с "хорошими точками". В результате, один и тот же объект вошел в позднейшие публикации и вычислительную практику с различными названиями и ссылками на разных авторов, хотя в последнее время даже австрийские математики ссылаются на работы Н. М. Коробова, восстанавливая историческую справедливость.

Результаты работы семинара **трех К** за первые шесть лет работы были отражены в монографии Н. М. Коробова в 1963 г. [25] (второе издание вышло в 2004 г. [38]). За рубежом этой проблеме были посвящены различные монографии [46], [47], [52].

Таким образом, мы видим, что мотивом организации научной деятельности по разработке новых многомерных квадратурных формул было решение жизненно важных проблем вычислительной практики, возникших в ходе выполнения отечественного атомного проекта. Поэтому история развития теоретико-числового метода в приближенном анализе делится на две части.

Первая часть — это открытая теоретическая часть, в которой и были получены первые результаты, и которая продолжала успешно развиваться все прошедшие 60 лет.

И вторая часть — это прикладная, закрытая часть, о которой можно только догадываться.

На первый взгляд, мы сталкиваемся с парадоксальной ситуацией разрыва связи между мотивирующей причиной исследований и самими исследованиями. Но здесь вступает в силу общий методологический закон научных исследований — внутренняя логика предметной области является движущей силой дальнейшего развития.

Дело всё в том, что были достаточно быстро выделены фундаментальные проблемы, с которыми связано решение основных задач, стоящих перед теоретико-числовым методом в приближенном анализе, многие из которых остаются открытыми и по настоящее время.

Отметим ещё один важный методологический момент истории становления теоретико-числового метода в приближенном анализе. Семинар **трех К** был эффективной формой организации исследований. Сейчас трудно судить об административно-организационных аспектах функционирования данного семинара. Вопрос о существовании или отсутствии в архивах Математического института соответствующих документов остается открытым, а участников тех событий практически не осталось, но можно и по тем крохам доступной информации делать вывод, что по современной терминологии семинар был успешной формой организации инновационной деятельности. Надо отметить, что такой подход к проведению научных исследований был и остается основной формой, используемой как на мехмате МГУ, так и в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

Подводя итог краткому обсуждению вопросов, связанных с возникновением и развитием теоретико-числовых методов в приближенном анализе, нельзя не остановиться на возможной дальнейшей судьбе этого метода. Семинар **трех К** просуществовал около 10 лет с 1956 по 1965 годы. С 1968 по 2001 годы под руководством Н. М. Коробова в МГУ работал семинар по тригонометрическим суммам и их приложениям для студентов, аспирантов и научных сотрудников, на котором, в частности, продолжались исследования по теоретико-числовому методу в приближенном анализе. 25 октября 2019 года исполняется 15 лет как не стало основателя теоретико-числового метода в приближенном анализе профессора Н. М. Коробова.

В настоящее время отдельные работы, связанные с этим методом, появляются в Хабаровской школе теории чисел, возглавляемой учеником Н. М. Коробова, член-корреспондентом РАН В. А. Быковским.

Другим отечественным центром, где продолжаются интенсивные работы в этой области, является г. Тула. Возрождение Тульской школы теории чисел происходило под непосредственным влиянием Н. М. Коробова. Логика научных исследований привела к тому, что первоначальные направления исследований, инициированные В. Д. Подсыпаниным в области диофантовых приближений и неопределённых уравнений, стали перекликаться с исследованиями по теоретико-числовому методу. За 69 лет существования Тульской школы теории чисел накопился значительный материал требующий своего осмысления. Другая проблема — это доступность этого материала как целого для других исследователей. Например, сейчас три аспиранта из г. Оренбурга подключены к исследованиям по этому направлению.

Именно для решения этих проблем и была создана ПОИВС (Проблемно Ориентированная Информационно-Вычислительная Система Теоретико-числовой Метод Коробова), которая уже существует более 6 лет. В процессе её функционирования наш подход претерпел изменения. В работе [13] сформулирован общий взгляд на ПОИВС как индикатор эффективности научной школы. Понятно, что это возможно только при условии, что ПОИВС осуществляет комплексную информационную поддержку деятельности научной школы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.
2. Бахвалов Н. С. Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул // Журн. вычислит. математики и математической физики. 1960. № 1. С. 64–77.
3. Бахвалов Н. С. Об оптимальных на классах функций способах интегрирования с заданным числом узлов. / Дис....док. физ.-мат. наук. Москва. Мгу 1964.
4. Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н. Применение теоретико-числовых сеток к задачам приближенного анализа // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 580–587.
5. Быковский В. А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток. / Препринт ДВНЦ АН СССР. Владивосток, 1985, с. 31.
6. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Математический сборник, 136(178), 4(8), 1988, С. 451–467.
7. Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. / Хабаровск, 1995. с. 13. (Препринт.)
8. Быковский В. А. Оценки отклонений оптимальных сеток в Lp-норме и теория квадратурных формул. // Analysis Mathematica, 22(1996), pp. 81–97.
9. Быковский В. А. Теоретико-числовые решетки в эвклидовых пространствах и их приложения. / Дис....док. физ.-мат. наук. Хабаровск. ИПМ ДВО АН СССР, 1990.
10. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т.3 вып. 2(4) С. 27–33.
11. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.
12. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.
13. Добровольский Н. М. Проблемно ориентированная информационно-вычислительная система (ПОИВС) как индикатор эффективности научной школы // В сб.: «Совершенствование системы взаимодействия российского фонда фундаментальных исследований и субъектов Российской Федерации в вопросах проведения региональных и молодежных конкурсов» : труды Всеросс научно- практ конф. – Изд-во РФФИ , 2016 . – с. 160-162.
14. Коробов Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1950, том 14, выпуск 3, с. 215–238.
15. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. 115. № 6. С. 1062–1065.
16. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

17. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 2. С. 235–238.

18. Коробов Н. М. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. Резюме докл. на заседании Моск. мат. об-ва. // УМН. 1959. Т. 14, вып. 2 (86). С. 227–230.

19. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

20. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

21. Коробов Н. М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961. Т. 60, Изд-во АН СССР, М., С. 195–210.

22. Коробов Н. М. О применении теоретико-числовых сеток // Вычислительные методы и программирование: // Сб. Моск. ун-т. 1962. С. 80–102.

23. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах в приближенном анализе // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. М.: Машгиз. 1963.

24. Коробов Н. М. О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа: Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

25. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.

26. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С. 83 — 118.

27. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 267. 1982. N2. С. 289 — 292.

28. Коробов Н. М. Об одной оценке А. О. Гельфонда // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983. N3. С. 3 — 7.

29. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // Тезисы докладов всесоюзной конференции „Теория трансцендентных чисел и ее приложения“. 1983. С. 62.

30. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

31. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83 — 90.

32. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб., 1994. Вып. XXXV. С. 285—301.

33. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Матем. записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.

34. Коробов Н. М. О конечных цепных дробях // УМН. 1998. Т. 52. 3. С. 167-168.

35. Коробов Н. М. О теоретико-числовых интерполяционных формулах // Историко-матем. исследования. М.: „Янус // К“. 2001. Вып. 6 (41). С. 266-276.

36. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник. Тула. 2001. Т. 1. С. 40 – 49.

37. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики “ Тула. 2002. с. 39–40.

38. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

39. Ю. А. Кругляк, Г. С. Гордадзе, Л. М. Подольская, С. Б. Цинаури, Г. Б. Шарашидзе Численный расчет молекулярных интегралов с функциями от межэлектронного расстояния I-II. - Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1971. - 136 с.

40. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

41. Фролов К. К. О связи квадратурных формул и подрешеток решетки целых векторов // ДАН СССР. 232. 1977. № 1. С. 40 — 43.

42. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

43. Фролов К. К. Оценка сверху дискрепанса в метрике L_2 // ДАН СССР. 252. 1980. № 4. С. 805 — 807.

44. Ченцов Н. Н. О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1961. № 3.

45. Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte f ur Math. 66, 2. 1962, p. 140–151.

46. Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretiscne Methoden in der numerischen Matematik. / Wien, Mūnchen, Oldenbourg, 1981.

47. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

48. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

49. Roth K. F. On irregularities of distribution – IV, // Acta Arithm. 37. 1980. P. 65–75.

50. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – VII, // Acfa Arithm. 21. 1972. P. 45–50.

51. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – X // Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.) New York: Academic Press. 1977. P. 311–329.

52. Wang Yuan О методах приближенного интегрирования // Тр. ин-та матем. Акад. наук КНР 1962

53. Weyl H.Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313 — 352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

———

УДК 929+666.982.24

Николай Николаевич Сергеев, доктор технических наук, профессор по кафедре «Физика металлов и материаловедение», профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого – выдающийся ученый, педагог, яркий представитель научной школы физического фундаментального и прикладного материаловедения профессора М. А. Криштала

А. Н. Сергеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ansergueev@gmail.com
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
М. В. Ушаков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
П. Н. Медведев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Ю. С. Дорохин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: avangard-tula@yandex.ru
С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Nikolay Nikolaevich Sergeev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Metal Physics and Materials Science, Professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University is an outstanding scientist, teacher and bright representative of the scientific school of physical fundamental and applied materials science of Professor M. A. Krishtal

A. N. Sergeev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ansergueev@gmail.com
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
M. V. Ushakov (Russia, Tula)
Tula State University
P. N. Medvedev (Russia, Tula)

Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Yu. S. Dorokhin (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: avangard-tula@yandex.ru
S. N. Kutepov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Важнейшей научной проблемой, решаемой под руководством профессора Криштала М. А. была проблема коррозионно-механического разрушения высокопрочных арматурных железных сплавов. Много сил было затрачено для решения данной научной проблемы громадного прикладного значения. Были установлены комплексные закономерности и выявлены физическая природа и механизмы водородного охрупчивания и разрушения арматурных высокопрочных сталей, применяемых в композиционных железобетонных конструкциях и сооружениях в виде волокнистых стальных арматурных наполнителей. В тульском регионе в решении данной проблемы значительный вклад внес ученик Михаила Ароновича Криштала – профессор Николай Николаевич Сергеев, защитивший под его руководством кандидатскую и докторскую диссертации.

Сергеев Николай Николаевич,
доктор технических наук, профессор
(15.04.1944 г. – 30.12.2016 г.)

Сергеев Николай Николаевич родился 15 апреля 1944 года в деревне Доробино Тепло-Огаревского района Тульской области. В 1959 г. окончил школу №16, в 1963 г. – Тульский механический техникум им. С. И. Мосина получив квалификацию техника-технолога, а в 1968 г. – Тульский политехнический институт по специальности литейное производство черных и цветных металлов с присвоением квалификации инженера-металлурга.

Н.Н. Сергеев рано начал трудовую деятельность. С 1962 г. работал фрезеровщиком, формовщиком, обрубщиком литья, грузчиком, лаборантом, мастером плавильного участка на Тульском оружейном и Тульском комбайновом заводах.

В 1972 г. поступил в аспирантуру, которую в 1975 г. окончил с досрочной защитой диссертации на тему «Водородное охрупчивание и растрескивание высокопрочной арматурной стали» по специальности 05.16.01 «Металловедение и термическая обработка металлов» на механико-технологическом факультете Тульского политехнического института. Научным руководителем Н.Н. Сергеева был доктор технических наук, профессор М.А Криштал – ведущий специалист по физике прочности и пластичности металлов и металлических сплавов.

После окончания аспирантуры работал в Тульском политехническом институте в отраслевой научно-исследовательской лаборатории №3 младшим научным сотрудником, а после получения диплома кандидата технических наук он переведен по конкурсу в ОНИЛ3 на должность старшего научного сотрудника.

После присвоения ученого звания старшего научного сотрудника (Решение Высшей аттестационной комиссии при Совете Министров СССР от 22 марта 1978 г.) Н.Н. Сергеев переведен на соответствующую данному званию должность, а затем был избран по конкурсу на должность старшего преподавателя кафедры общетехнических дисциплин ТГПИ им. Л.Н. Толстого, а в 1981 г. – на должность доцента кафедры «Машиноведение», где он проработал доцентом до 1983 г.

С 1983 по 1986 г. Н.Н. Сергеев работает в научно-исследовательском институте «ТУЛАЧЕРМЕТ» заведующим лабораторией физики металлов.

21 апреля 1986 г. Н.Н. Сергеев был избран по конкурсу в Тульском государственном педагогическом институте на должность доцента кафедры «Машиноведение». С 1990 г. в связи с избранием по конкурсу, он заведующий, профессор кафедры «Современные технические средства и видеотехника», которая в 1995 г. переименована на кафедру «Технологии».

В 1996 г. Н.Н. Сергеев защищает в Самарском государственном техническом университете докторскую диссертацию на тему «Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах» по специальности «Физика твердого тела», после чего ему присуждается ученая степень доктора технических наук и присваивается ученое звание профессора по кафедре «Физика металлов и материаловедение» (2002 г.).

В Тульском государственном педагогическом университете с 1990 по 2016 г. Н.Н. Сергеев заведовал многими кафедрами: «Машиноведение», «Современные технические средства и видеотехника», «Технологии», «Технологии, машиноведение и безопасность жизнедеятельности», «Технологии и сервис», исполнял обязанности декана Сельскохозяйственного факультета. Н.Н. Сергеевым были организованы лаборатория «Поверхностное упрочнение и длительная прочность конструкционных материалов» и центр «Наукоемкие лазерные технологии» при кафедре «Технологии и сервис» факультета «Технологий и бизнес» ТГПУ им. Л.Н. Толстого, которыми он руководил впоследствии.

За годы его руководства в ТГПУ им. Л.Н. Толстого были созданы такие специализированные лаборатории, как «Автомобили», «Тракторы и сельскохозяйственная техника», «Эксплуатация и ремонт машинно-тракторного парка», «Материаловедение», «Декоративно-прикладное творчество», которые в данный момент реорганизуются в соответствии с требованиями ГОС ВПО.

На кафедре «Технологии» им была создана уникальная исследовательская база для проведения ускоренных лабораторных испытаний натурных образцов сталей на коррозионное растрескивание и водородное охрупчивание. По данному научному направлению защищены две докторские диссертации по специальностям: 01.04.07 – Физика твердого тела (Сергеев Н. Н. Самарский государственный технический университет, 1997 г.) и 01.04.07 – Физика конденсированного состояния (В. П. Баранов Тульский государственный университет, 2007 г.). В последнее время проводимые им научные исследования финансировались за счет грантов губернатора Тульской области в сфере науки и техники и государственных заданий МО РФ.

Для повышения долговечности и исследования влияния внутренних и внешних факторов на чувствительность арматурных сталей к коррозионно-механическому разрушению коллективом авторов ТГПУ им. Л. Н. Толстого под руководством Н. Н. Сергеева была разработана комплексная методология ускоренных испытаний на КМР высокопрочных сталей, которая включала:

1. Исследование ресурсостойкости высокопрочных сталей к ВР и КРН в агрессивных средах на точеных и натурных образцах арматурных сталей марок: Ст3, Ст5, 18ГС, 20ГС, 20ГС2, 22ГСРМ, 30ГСТ, 35ГС, 20ХГ2Ц, 22Х2Г2АЮ, 23Х2Г2Т, 80С гладкокатанного и периодического профиля Ш6...22 мм и l = 100...400 мм, как в исходном (горячекатанном или термоупрочненном состоянии), так и прошедших последующую термическую обработку. При выборе водородсодержащей среды для ускоренных лабораторных испытаний исходили из того, что ее действие должно соответствовать действию среды в реальных условиях работы конструкции (характер разрушения в лабораторных и эксплуатационных условиях должен быть одинаковым), и, вместе с тем, она должна обеспечивать сокращение длительности лабораторных испытаний. В связи с этим, в качестве среды вызывающей КРН использовали кипящий раствор нитратов (60% в.ч Ca(NO3)2 + 5% в.ч. NH4NO3 + 35% в.ч. H2O) при температурах 70; 90; 110 ℃; а для исследования ВР использовали водный раствор серной кислоты с добавлением роданистого аммония (4,5% H2SO4 + 2,5% NH4CNS) при комнатной температуре с катодной поляризацией при плотности тока DK = 60 А/м2, так и без нее. Испытания проводили с использованием коррозионных камер и рычажных установок, разработанных Н. Н. Сергеевым [10] в условиях статического нагружения (при постоянной растягивающей нагрузке) при напряжениях σЭ = (0,1...0,9)σВ. Стойкость стали против коррозионно-механического разрушения (КМР) оценивали временем до разрушения по результатам испытаний 4...6 образцов на каждую экспериментальную точку графика. Сталь считали стойкой к растрескиванию если она не разрушилась после 200 часов испытаний при величине статических растягивающих напряжений не менее 75% от критического разрушающего напряжения [12-15].

2. Исследование влияния наводороживания, уровня растягивающих напряжений, длительности коррозионных процессов на субмикроструктурные изменения высокопрочной стали при испытаниях на длительную прочность применяли метод внутреннего трения (ВТ), позволяющий судить о характеристиках локального напряженного состояния металла. Измерения температурных зависимостей внутреннего трения (ТЗВТ) проводили на натурных образцах (d = 8, 10 и 12 мм; l = 200 мм) сталей (гладкокатанных и периодического профиля). Исследования кинетики процесса КМР производили в следующей последовательности: предварительно образцы подвергали комплексному и раздельному влиянию различных факторов – коррозионной среды, растягивающих напряжений, катодной поляризации от внешнего источника тока при различном времени выдержки вплоть до момента предразрушения. Затем из натурных образцов вырезали образцы l = 200 мм и определяли ТЗВТ. Время между подготовкой образцов и измерением ВТ не превышало 1 часа. Измерения ТЗВТ проводили при различных температурах (20...500 ℃) при f ˜ 103 с–1 по резонансной методике [15]. Наблюдали изменение высоты пика Кестера под влиянием вышеуказанных факторов. Измеряли также величину низкотемпературного фона ВТ˜150 ℃, который связан с наличием в материале субмикропустот. По резонансной частоте определяли величину модуля упругости.

3. Установление закономерностей влияния температуры отпуска на механические свойства и стойкость против растрескивания в водородсодержащих средах. Отпуск осуществляли с электронагрева в диапазоне температур 150...600℃ с интервалом в 50 ℃. Скорость электронагрева составляла 10...15℃/сек. Превращения, происходящие при отпуске, оценивали по изменению высоту пика Кестера, природу которого связывают с взаимодействием примесных

атомов с дислокациями, а также с обусловленным этим взаимодействием уровнем внутренних локальных (пиковых) микронапряжений.

Проведение большого числа сравнительных испытаний наиболее широко распространенных марок арматурных сталей позволило получить систематические базы данных и установить, что при высоком уровне приложенных растягивающих напряжений ($0{,}9\ldots0{,}7\sigma$В) практически все стали обладают высокой чувствительностью к КМР. Несмотря на большую разницу в абсолютных значениях стойкости образцов, испытываемых в различных средах, и характера зависимости времени до разрушения от уровня приложенных напряжений – имеется идентичность в определении порядка стойкости при проведении сравнительных испытаний.

Установлено, что увеличение уровня приложенных растягивающих напряжений приводит к сокращению инкубационного периода развития микротрещин при водородном растрескивании. Зарождение и развитие трещин при этом происходит преимущественно в объеме образца в местах локализации растягивающих напряжений на дефектных участках структуры и субструктуры. Исследование влияния внутренних и внешних факторов на кинетику процесса КМР позволило выявить, что длительная прочность термически упрочненного арматурного проката в значительной степени определяется релаксационной способностью структуры – релаксация остаточных пиковых микронапряжений, локализующихся у границ зерен и субструктурных границ способствует снижению чувствительности к растрескиванию.

Полученные результаты испытаний на коррозионное растрескивание в растворах нитратов показали, что стержневая арматура периодического профиля из стали 80С в состоянии поставки при механических свойствах класса прочности А600 имеет достаточно высокую стойкость против КРН. Наилучшие коррозионные и механические свойства для арматуры, изготовленной из стали 80С обеспечивают структуры сорбита и тонкого перлита. Арматура из стали марки 20ХГ2Ц в состоянии поставки при сложившейся технологии производства отличается большой нестабильностью стойкости против КРН при изменении химического состава (в основном углерода) в пределах марочного. Высокую коррозионную стойкость арматура из стали 20ХГ2Ц имеет только при содержании углерода на нижнем пределе марочного состава, что обеспечивается структурой однородного бейнита при механических свойствах на уровне класса прочности А600. При более высоких механических свойствах арматура из стали 20ХГ2Ц имеет более низкую коррозионную стойкость.

Исследование влияния химического состава и температуры отпуска на чувствительность стали 23Х2Г2Т к КРН позволило установить, что контролируя химический состав (и прежде всего содержание углерода и хрома) и технологические режимы получения данной стали можно не только резко повысить ее сопротивляемость растрескиванию, но и получить гарантированный комплекс высоких эксплуатационных свойств – механических и коррозионных. Наибольшую устойчивость против КРН при практически неизменной прочности для арматуры из стали 23Х2Г2Т обеспечивает 2-х часовой отпуск в интервале температур 350…400℃. Полученные данные об изменении высоты 200° пика на ТЗВТ при отпуске стали 23Х2Г2Т в интервале температур 150…400℃, позволяют предполагать, что снижение чувствительности стали 23Х2Г2Т к КРН при отпуске обусловлено протеканием релаксационных процессов. Проведенные исследования показывают, что влияние микроструктуры и термической обработки на чувствительность арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН в растворах нитратов, сводится к изменению уровня и распределения остаточных напряжений в структуре стали и особенностям распределения примесей внедрения (C и N) по объему зерен. По-видимому, наличие примесей (C и N) на границах зерен является необходимым условием для возникновения коррозионного процесса, а его скорость определяется напряженным состоянием, способностью структуры к релаксации напряжений и концентрацией агрессивной среды. Таким образом, для повышения стойкости арматурной стали 23Х2Г2Т к КРН необходимо обеспечивать такой состав и условия термической обработки, в результате которых примеси внедрения (C и N) будут удерживаться преимущественно в объеме зерен, а структура стали будет отличаться однородностью и повышенной стойкостью к релаксации напряжений.

Таким образом, разработанная методика сравнительных испытаний, позволяет достаточно экспрессно определять стойкость против коррозионно-механического разрушения арматурных сталей. Установлено влияние термической обработки на механические и коррозионные свойства арматурного проката. Выявлены кинетические закономерности процессов разрушения высокопрочных сталей в условиях воздействия механических, тепловых, концентрационных полей и агрессивных сред, необходимые для повышения и прогнозирования долговечности арматурного проката из высокопрочных сталей в композиционных железобетонных конструкциях и сооружениях. Предложены физико-химические комплексные методы защиты черных и цветных металлов и сплавов от коррозионно-механического разрушения, которые могут обеспечить повышение долговечности высокопрочных сталей, эксплуатируемых в агрессивных водородсодержащих средах и ресурс композиционных железобетонных конструкций со стальными арматурными стержневыми высокопрочными наполнителями.

Доктором технических наук, профессором Сергеевым Николаем Николаевичем написано и опубликовано 122 работы, из них 22 учебно-методических, 100 научных статей и 5 монографий, которые широко используются в педагогической практике, по результатам исследований получено 5 авторских свидетельств на изобретения.

———————————————————————————————————

УДК 666.982.24

Из теории микробиологических коррозионных процессов[1]

Н. Е. Стариков (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: starikov_taii@mail.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
А. Д. Бреки (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: albreki@yandex.ru
С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Д. О. Селифонтов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
И. С. Науменко (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
А. В. Лаврушин (Россия, г. Тула)
Тульский государственный университет
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

From the theory of microbiological corrosion processes

N. E. Starikov (Russia, Tula)
Tula State University
e-mail: starikov_taii@mail.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
A. D. Breki (Russia, St. Petersburg)
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
e-mail: albreki@yandex.ru
S. N. Kutepov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
D. O. Selifontov (Russia, Tula)
Tula State University
I. S. Naumenko (Russia, Tula)
Tula State University
A. V. Lavrushin (Russia, Tula)
Tula State University
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Введение

Особенностью конструкции современных изделий машиностроения является многообразие материалов, используемых при их изготовлении. Применяемые конструкционные материалы должны выдерживать высокие механические нагрузки, а защитные покрытия и материалы призваны обеспечивать надежную защиту образцов от влияния внешних воздействующих факторов и вызывающих их микробиологических и коррозионных повреждений [1].

Роль микроорганизмов и продуктов их жизнедеятельности в коррозионных процессах может быть различной, они могут воздействовать на катодные или анодные электрохимические процессы, изменять физико-химические характеристики почвы, разрушать защитные покрытия [3, 4].

Установлено, что ряд видов микроорганизмов, обладая способностью ферментативного окисления жидких углеводородов, используют их в качестве источника питания. Ассимилируя такие углеводороды и воздействуя на них продуктами жизнедеятельности, микроорганизмы-деструкторы приводят к разложению и потере рабочих свойств материала. Нефтяные топлива и продукты из них подвержены микробиологическому повреждению как при хранении и транспортировании, так и в эксплуатационных условиях [2-4].

Проведенные исследования позволили сделать вывод о том, что все моторные, дизельные, вазелиновые, веретенные, авиационные, почти все трансмиссионные и изоляционные масла и пластичные смазки неустойчивы к грибам и бактериям. При воздействии этих микроорганизмов большинство показателей свойств масел и смазок (вязкость, кислотное число, стойкость к окислению и др.) существенно изменяет свои значения. Возникает коррозия узлов и деталей, контактирующих с поврежденными маслами и смазками [3, 5].

Многие исследователи отмечают большую зависимость микробиологической стойкости горюче-смазочных материалов (ГСМ) даже одного и того же типа от исходного сырья и технологии изготовления. Так, масла различного назначения из анастасиевской нефти (Россия) наиболее устойчивы, а трансформаторное масло из этой нефти считают «абсолютно устойчивым» к микроорганизмам. Такие отличия обусловлены особенностями группового и индивидуального углеводородного состава конкретного материала. Установлено также, что многие соединения серы, имеющиеся в сернистой нефти, значительно снижают микробиологическую стойкость изготовленных из нее масел. В то же время имеющиеся в смолистых фракциях нефти азотосодержащие соединения оказываются активными биоцидами – веществами, убивающими микроорганизмы.

Среди многочисленных способствующих микробиологическим повреждениям ГСМ внешних условий определяющими являются наличие в материале воды, минеральных примесей (загрязнений) и оптимальной для развития микроорганизмов температуры.

Масла и смазки наиболее часто повреждаются грибами Aspergillus niger, Penicillium variabile, Penicillium chrysogenum, Penicillium verrucosum, Scopulariopsis brevicaulis, бактериями Bacillus subtilis, Bacillus pumilus, Bacillus licheniformis.

Известно, что проблема биоповреждений ГСМ, существующая с момента их создания и начала использования, не утратила своей актуальности в настоящее время. Присутствие даже незначительного количества воды (0,01...0,02 % и даже ее следов), минеральных загрязнений и благоприятная температура (от 3...15 до 35...40 ℃ и выше) в нефтепродуктах даёт возможность активно развиваться различным группам микроорганизмов. Скорость и глубина микробиологического окисления нефтепродуктов зависят от их углеводородного состава. При этом, нефтепродукты, содержащие меньшее количество живых организмов, проявляют более высокую биостойкость, чем продукты, содержащие их в большем количестве. Только 30...40 % микроорганизмов, выделенных из нефтепродуктов, способны разрушать масла, а остальные находятся в пассивной форме. Известно, что углеводороды, имеющие линейное строение молекул, быстрее разрушаются активными микроорганизмами, чем их разветвленные изомеры. Алифатические (парафиновые) углеводороды чаще менее биостойкие, чем ароматические, поэтому и топлива, содержащие в основном парафиновые углеводороды, могут разрушаться активными микроорганизмами быстрее, чем содержащие большее количество ароматических соединений. Среди различных видов нефтяных топлив более биостойкие – легкие дистилляционные топлива – бензины, менее стойкие керосины. Подвержены биоповреждениям не только смазочные масла и топлива, но и пластичные смазочные материалы (ПСМ) различного состава и назначения. Особое место среди них занимают пластичные смазочные материалы триботехнического назначения. Влияние микроорганизмов на триботехнические свойства ПСМ изучено ещё недостаточно, в связи с чем необходимо проведение исследований в данном направлении, поскольку от качества ПСМ зависит надёжность работы различных машин и механизмов.

Методика исследования.

Приведены результаты исследований трения скольжения одного шара из стали марки ШХ15 по трём таким же покоящимся шарам в среде базового смазочного материала марки «ЛИТА» и в среде этого же ПСМ содержащего ветвящийся мицелий грибов aspergillus niger.

Грибы aspergillus niger способны прижиться и разрастись в колонию даже при температуре свыше +40 ℃. Споры aspergillus niger присутствуют повсеместно, кроме областей полной стерильности или вакуума.

Пластичный смазочный материал «ЛИТА» относится к морозостойким, многоцелевым смазкам, предназначенным для применения в различных ответственных узлах трения: в подшипниках качения и скольжения, нагруженных зубчатых передачах, направляющих и других механизмах, эксплуатируемых под открытым небом в зимнее и летнее время во всех климатических зонах. Температурный интервал применения ПСМ «ЛИТА» достаточно широк: от минус 50 ℃ до плюс 100 ℃. С учётом такой широкой области применения и условий эксплуатации, «ЛИТА» является потенциальной благоприятной средой для жизни колонии aspergillus niger.

Перед проведением триботехнических исследований определили грибостойкость ПСМ «ЛИТА» в соответствии с ГОСТ 9.052-88 (метод 1) с увеличением срока инкубирования заражённых грибами образцов свыше 90 суток при температуре +29±2 ℃. Образцы смазки «ЛИТА», нанесённые на дно чашек Петри, заражали водной суспензией спор грибов, выдерживали в условиях, оптимальных для развития грибов, с последующим визуальным определением признаков их развития на образцах (грибостойкости). Смазка является грибостойкой (ГОСТ 9.052-88, метод 1), если после 56 суток инкубирования признаки развития грибов на образцах отсутствуют при осмотре под микроскопом при 50-60-кратном увеличении. После проведения осмотра были обнаружены признаки развития aspergillus niger. Полученные образцы – базовый ПСМ «ЛИТА» и «ЛИТА + aspergillus niger» использовали для триботехнических исследований. Испытания образцов проводили по схеме, реализуемой на чётырёхшариковой машине трения [12].

Элементами узла трения являются 4 шарика подшипников ГОСТ 3722, выполненные из материала «сталь ШХ15», диаметром 12,7 мм. Три шарика закладывали в нижнюю ёмкость и жёстко фиксировали с помощью сепаратора и гайки. Далее в ёмкость с шариками закладывали испытуемые смазочные материалы ПСМ «ЛИТА» и «ЛИТА + aspergillus niger». В шпинделе устанавливали цангу с верхним шариком, после чего устанавливали его контакт с нижними шариками через ПСМ под нагрузкой 200Н. Далее приводили в движение шпиндель с частотой вращения (1460±70) мин$^{-1}$. Время одного испытания составляло 12 мин. В процессе каждого испытания регистрировалась сила трения. Трение реализовывалось в трёх площадках контакта (по Герцу) при движении по круговой траектории.

Результаты и их обсуждение.

Исследовали трение и износ шариков из стали ШХ15 в среде базового пластичного смазочного материала «ЛИТА». Зависимость силы трения скольжения для ПСМ «ЛИТА» от времени фрикционного взаимодействия можно выразить с использованием следующей функции:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр.}} = {} & \tfrac{16{,}3}{1+\exp(-5{,}2t)} + \tfrac{0{,}4}{1+\exp(-0{,}2(t-100))} + \tfrac{0{,}5}{1+\exp(-0{,}3(t-250))} + \\ & + \tfrac{0{,}5}{1+\exp(-0{,}2(t-400))} - \tfrac{3.6}{1+\exp(-0{,}12(t-535))} - \tfrac{0{,}5}{1+\exp(-0{,}2(t-600))}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из (1) видно, что до значения $t \approx 535$ с сила трения несколько раз ступенчато увеличивается на небольшие величины, а затем скачкообразно падает и устанавливается. Аппроксимирующая функция плотности вероятности (функция Гаусса) величины силы трения в результате испытания ПСМ «ЛИТА» на интервале до 535 с имеет вид:

$$f(F_{\text{тр.}}) = \left(\frac{1}{0,66 \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(F_{\text{тр.}} - 17,1)^2}{2 \cdot (0,66)^2}\right). \quad (2)$$

Из (2) видно, что среднеквадратическое отклонение составляет 0,66 Н, а дисперсия силы трения составляет 0,436 Н^2. После 535 с среднее значение силы трения падает, среднеквадратическое отклонение составляет 0,571 Н, а дисперсия уменьшается до 0,326 Н.

Соответственно функция Гаусса после уменьшения силы трения:

$$f(F_{B@}) = \left(\frac{1}{0,2571 \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(F_{B@} - 13,75)^2}{2 \cdot (0,571)^2}\right). \quad (3)$$

Аналитически зависимость силы трения скольжения от времени дляПСМ «ЛИТА+ aspergillus niger» можно выразить с использованием следующей функции:

$$F_{B@}(t) = \frac{1}{1 + \exp(-5,2t)}. \quad (4)$$

График функции плотности вероятности для силы трения при испытании ПСМ «ЛИТА + aspergillus niger» показан на рис. 1.

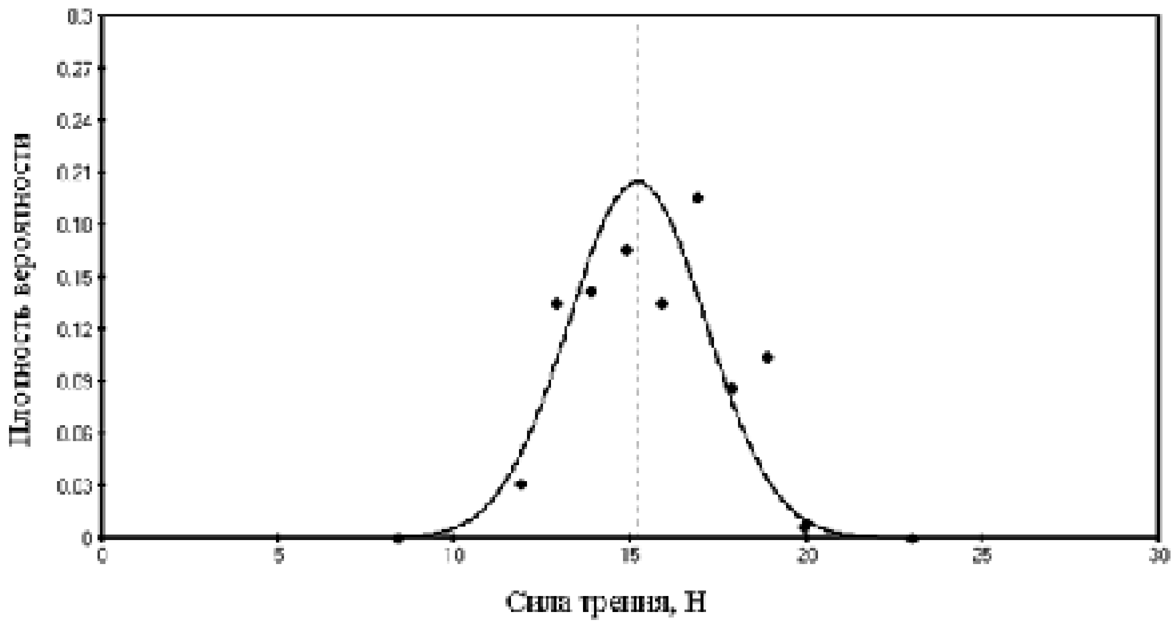


Рис. 1: Рис. 1. Плотность вероятности величины силы трения в результате испытания «ЛИТА».

Аппроксимирующая функция плотности вероятности в этом случае имеет следующий вид:

$$f(F_{B@}) = \left(\frac{1}{1,95 \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(F_{B@} - 17,1)^2}{2 \cdot (3,8)^2}\right). \quad (5)$$

Из (5) следует, что среднеквадратическое отклонение составляет 1,95Н, а дисперсия силы трения составляет 3,8Н^2.

Диаметры лунок износа на нижних шариках, образовавшихся в результате испытаний ПСМ приведены в таблице.

Диаметры лунок износа на нижних шариках

№	ЛИТА	ЛИТА + aspergillus niger
1	0,5мм	0,5мм
2	0,5мм	0,4мм
3	0,45мм	0,45мм

Из таблицы видно, что существенной разницы по противоизносным свойствам между испытуемыми образцами ПСМ не обнаружено [12].

Выводы.

В результате испытаний пластичного смазочного материала ЛИТА в соответствии с ГОСТ 9.052-88 (метод 1) обнаружен ветвящийся мицелий грибов более чем на 50% поверхности, при этом отчётливо видны при увеличении ×50 конидиеносцы с шаровидным вздутием и конидиями почти чёрного цвета, характерными для грибов вида Aspergillus niger, таким образом, смазка является не грибостойкой. В результате сравнительных лабораторных триботехнических испытаний установлено, что наличие ветвящегося мицелия грибов Aspergillus niger в смазке ЛИТА способствует повышению дисперсии силы трения в 8,7-11,7 раз. Такое увеличение говорит о снижении стабильности фрикционного взаимодействия, несмотря на то, что средние значения силы трения на интервале всего испытания близки по величине. Износ, образовавшийся в результате испытания пластичного смазочного материала «ЛИТА» и «ЛИТА

+ aspergillus niger» практически не отличается по величине, что может быть связано с дискретным экранированием поверхностей трения ветвящимся мицелием грибов Aspergillus niger, несмотря на нарушение им целостности смазочного слоя.

Полученные результаты играют важную роль в развитии процессов нанобиофрикционного взаимодействия материалов различной природы, имеют большое значение для нанобиотрибологии и могут быть использованы для разработки ресурсосберегающих процессов обработки металлических материалов различных химических и фазовых составов с использованием новых нанокомпозиционных смазок и покрытий [6-11, 13-23].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильичев В. Д. Биоповреждения: учеб. пособие для биолог. спец. / отв. ред. В. Д. Ильчев. М.: Высш. шк., 1987. 352 с.

2. Бреки А.Д. Триботехнические свойства модифицированных смазочных масел: дис. канд. техн. наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич. Санкт-Петербург, 2011. 161 с.

3. Ямпольская Т. Д., Шахалай Т. В. Биоповреждения горюче-смазочных материалов в условиях северных регионов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2010. Т. 12. №1. С. 1250-1255.

4. Коррозия легированных сталей под консервационными смазками в присутствии микроорганизмов / А. С. Волков, Н. Е. Стариков, А. В. Мишаков, В. А. Алферов, Э. В. Пекар, С. Ф. Хлебникова // Защита металлов. 2003. Т. 39. № 4. С. 403-409.

5. Стариков Н. Е., Гвоздев А. Е., Фомичева Н. Б. Микробная коррозия сталей в присутствии консервационных составов // Коррозия: материалы, защита. 2005. № 1. С. 37-40.

6. Синтез и триботехнические свойства композиционного покрытия с матрицей из полиимида (Р-ООО)ФТ и наполнителем из наночастиц дисульфида вольфрама при сухом трении скольжения / А. Д. Бреки, А. Л. Диденко, В. В. Кудрявцев, Е. С. Васильева, О. В. Толочко, А. Г. Колмаков, А. Е. Гвоздев, Д. А. Провоторов, Н. Е. Стариков, Ю. А. Фадин // Материаловедение. 2016. № 4. С. 44-48.

7. Многоуровневый подход к проблеме замедленного разрушения высокопрочных конструкционных сталей под действием водорода / В. П. Баранов, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Н. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов // Материаловедение. 2017. № 7. С. 11-22.

8. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon / A. D. Breki, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, N. E. Starikov, D. A. Provotorov, N. N. Sergeyev, D. M. Khonelidze // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 1. С. 126-129.

9. Synthesis and dry sliding behavior of composite coating with (R-OOO)FT polyimide matrix and tungsten disulfide nanoparticle filler / A. D. Breki, A. L. Didenko, V. V. Kudryavtsev, E. S. Vasilyeva, O. V. Tolochko, A. G. Kolmakov, A. E. Gvozdev, D. A. Provotorov, N. E. Starikov, Yu. A. Fadin // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 1. С. 32-36.

10. Composite coatings based on A-OOO polyimide and WS_2 nanoparticles with enhanced dry sliding characteristics / A. D. Breki, A. L. Didenko, V. V. Kudryavtsev, E. S. Vasilyeva, O. V. Tolochko, A. E. Gvozdev, N. N. Sergeyev, D. A. Provotorov, N. E. Starikov, Yu. A. Fadin, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. №1. С. 56-59.

11. Стариков Н. Е., Лаврушин А. В. Анализ конструкции материалов, применяемых в современных образцах стрелково-пушечного вооружения, используемого в частях и соединениях ВДВ // Известия ТулГУ. 2018 «Технические науки». Вып. 6. С. 229 - 236.

12. Стариков Н. Е., Бреки А. Д., Семенов С. А., Гвоздев А. Е., Лаврушин А. В. Влияние микроскопических грибов Aspergillus niger на триботехнические свойства пластичного смазочного материала марки « ЛИТА» // Известия ТулГУ. Серия «Технические науки». 2018. Вып. 7. С. 108-117.

13. Стариков Н. Е., Лаврушин А. В. Методика оценки изменения состояния стрелково-пушечного вооружения при воздействии на него факторов окружающей среды // Известия ТулГУ. «Технические науки». 2018. Вып. 6. С. 272-285.

14. Виноградов П.А. Консервация изделий машиностроения. Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение. 1986. 270 с.

15. Стариков Н.Е., Рыжков А.А. Применение эфирных масел для повышения коррозионной и биологической стойкости масла РЖ и его использование для комплексной защиты материалов стрелкового вооружения от воздействия внешних факторов. //Депонирована НТЦ «Информтехника». Сборник рефератов НИОКР. Сер VIII. – 1993. – вып. 1.

16. Starikov N.E. On Improving the Protective Properties and Biological Stability of Preservative Oil // Protection of Metals. 1997. V. 33. №5. P. 483-485.

17. Стариков Н.Е., Мишаков А.В., Хлебникова С.Ф., Пекар Э.В. Воздействие продуктов метаболизма микроорганизмов на коррозию конструкционных легированных сталей. // Известия ТулГУ серия «Химия и электрофизикохимические воздействия на материалы». – 2001. Выпуск №2 - с.45-50.

18. Стариков Н.Е., Пекар Э.В., Хлебникова С.Ф., Мишаков А.В. Оценка антикоррозионных свойств смазок на поверхности легированных сталей при их взаимодействии с биодеструкторами. //В сб. матер. НПК «Экологические проблемы Тульского региона». - Тула, 2002. - С. 211-212.

19. Стариков Н.Е., Волков А.С. и др. Коррозия легированных сталей под консервационными смазками в присутствии микроорганизмов. // «Защита металлов», 2003, том 39, № 4. С. 403-409.

20. ГОСТ 9.052–88. ЕСЗКС. Масла и смазки. Методы лабораторных исследований на стойкость к воздействию плесневых грибов. – М.: Издательство стандартов, 1989. – 42 с.

21. Исследование влияния механической обработки на коррозионную стойкость интерметаллических покрытий / Н. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2019. Вып. 3. С. 601-614.

22. Исследование коррозионной стойкости интерметаллических порошковых материалов / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 8. С. 108-121.

23. Исследование коррозионной стойкости конструкционных легированных сталей в агрессивных средах / Н. Н. Сергеев, М. В. Ушаков, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Пантюхин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2019. Вып. 3. С. 591-601.

УДК 51

К истории математического факультета (методисты) ТГПУ им. Л. Н. Толстого

А. Е. Устян (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ustyan37@mail.ru

The history of the faculty of mathematics (methodists) TSPU them. L. N. Tolstoy

A. E. Ustyan (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ustyan37@mail.ru

В учебных планах педагогических вузов большое внимание уделяется методикам преподавания специальных дисциплин. Преподавание дисциплин блока методики преподавания математики и физики на факультете обеспечивали:

1. Буданцев Пётр Алексеевич

Буданцев Пётр Алексеевич родился 24 июня 1911 г. в городе Туринске Свердловской области.

Осенью 1932 г. он поступил на второй курс (после окончания Оренбургского техникума механизации сельского хозяйства) вечернего отделения физико-математического факультета Оренбургского пединститута, который окончил в 1935 г. с похвальной грамотой.

С июня 1941г. по 1945 г. был в СА.

Буданцев Пётр Алексеевич инициатор различных форм по повышению квалификации учителей математики.

Участие Петра Алексеевича в ВОВ, его трудовая деятельность отмечены правительственными наградами. Он награжден Орденом Красной звезды, Отечественной войны II степени, медалью «За победу над Германией в ВОВ», знаками «Отличник просвещения СССР», «Отличник народного просвещения просвещения РСФСР».

Буданцев Пётр Алексеевич скончался в 1990 г. в Туле.

2. Гайдуков Иван Иванович

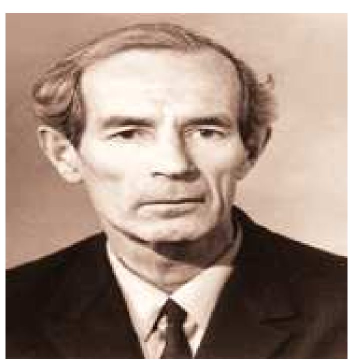
Гайдуков Иван Иванович родился 11 сентября 1915 г. в селе Климовское, Крапивинского уезда Тульской губернии. В 1940 г. окончил вечернее отделение Тульского пединститута и аспирантуру при институте методов обучения АПН РСФСР в 1952 г. На преподавательской работе с 1937 г., с 1961 г. более четверти века Иван Иванович работал на математическом факультете ассистентом, старшим преподавателем, доцентом, заведующим кафедрой, деканом. За это время он написал много статей, пособий, методических рекомендации, оказавших значительную помощь учителям математики. Его методическая работа «Абсолютная величина» по достоинству оценена и за рубежом — она издавалась в Японии.

Он является автором более 25 работ. По совокупности опубликованных работ И. И. Гайдукову было присвоено ученое звание доцента.

И. И. Гайдуков участник Великой Отечественной войны. Его боевые и трудовые успехи отмечены правительственными наградами: орденом Красной Звезды, медалями «За боевые заслуги», «За победу над Германией», «За победу над Японией», орденом «Трудового Красного Знамени», знаками «Отличник просвещения СССР» и «Отличник народного просвещения РСФСР».

Умер И. И. Гайдуков 23 июня 1990 г. в Туле.

3. Санинский Владимир Яковлевич



Санинский Владимир Яковлевич родился 17 января 1917 года в с. Турки Саратовской области. В 1939 г. окончил Оренбурский Пединститут.

Значителен вклад В. Я. Саннинского в дело развития математического образования: из-под его пера вышли статьи, разработки, пособия по актуальным проблемам методики преподавания математики. В течение многих лет при подготовке будущих учителей математики используется учебное пособие «Методика преподавания математики в средней школе» (в 2 частях), одним из авторов которого был Владимир Яковлевич.

Он много работал в Тульском областном отделении Педагогического общества; действуя инициативно и энергично, организовывал математические олимпиады среди школьников; получил широкую известность среди тульских учителей математики как активнейший лектор областного института усовершенствуя учителей.

Владимир Яковлевич прошел славный путь защитника Родины, его ратный труд отмечен орденом «Отечественной войны 2-й степени», медалью «За оборону Сталинграда».

Владимир Яковлевич отличник просвещения СССР, отличник народного просвещения РСФСР.

Владимир Яковлевич умер 31 октября 1990 г. в Туле.

4. Баранов Иван Алексеевич

Баранов Иван Алексеевич родился 3 октября 1947 г. в деревне Даниловка, Щёкинского района Тульской области.

В 1954 поступил в 1 класс, а в 1961 г. окончил Даниловскую среднюю школу и в этом же году поступил в Тульское педагогическое училище. После окончания педучилища в 1965 г. был направлен на работу в Новосибирскую область; там работал в сельской школе учителем математики и физики. В 1967 году поступил в Тульский пединститут, а в 1971 году с отличием окончил его. С августа 1971 г. по 15 августа 1975 г работал в средней школе № 33 г. Тулы учителем математики. В сентябре 1975 г. он был приглашен и избран на должность ассистента кафедры геометрии и методики математики, и в этой должности он успешно работал до 1982 г. В мае 1982 года был избран на должность старшего преподавателя, а с декабря 1982 по 1996 год заведовал кафедрой геометрии.

Баранов И. А. после окончания целевой аспирантуры в НИИ содержания и методов обучения АПН СССР в 1981 году защитил кандидатскую диссертацию. Ему была присуждена ученая степень кандидата педагогических наук.

Иван Алексеевич вёл научную работу по проблеме формирования профессионально-педагогических умений и навыков будущего учителя математики.

Баранов Иван Алексеевич является автором многих научных и методических трудов.

Умер Иван Алексеевич в феврале 1996 г. в Туле.

5. Васильев Сергей Иосифович

Васильев Сергей Иосифович родился 6 апреля 1949 года в селе Западнинка, Васильковского района, Киевской области в семье военнослужащего. В 1966 году закончил среднюю школу №36 г. Тулы. В этом же году поступил в Тульский государственный педагогический институт им. Л. Н. Толстого на математический факультет, который закончил в 1970 году. С 16 мая 1971 по 24 мая 1972 г. служил в рядах Советской Армии в г. Долине Ивано-Франковской области. По окончании службы поступил работать инженером в НИИСа в ТГПИ им. Л. Н. Толстого в г. Туле.

Кандидат педагогических наук, доцент. Тема научных исследований «Актуальные проблемы методики преподавания математики». Является автором более 24 учебно-методических и научно-методических работ.

Умер Сергей Иосифович 24 августа 2013 г. в Туле.

6. Сотский Николай Николаевич

Подготовка учителей физики началась одновременно с созданием Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого. 1940 год можно считать годом образования кафедры физики, которую возглавил Назаревский С. Н., а с 1947 г. по 1956 г. ею руководил доцент Жадин Н. П. Педагогический коллектив этой кафедры сумел в трудных условиях послевоенных лет обеспечить хорошую подготовку будущих учителей физики и математики.

В 1962 году физико-математический факультет перевели в новые учебные корпуса на пр. Ленина, 125. В создании физических лабораторий активное участие принимали все преподаватели и лаборанты, а кафедрой в то время руководил Н. Н. Сотский.

Выпускник факультета, автор школьных учебников по физике.

Сотский Николай Николаевич родился 21 января 1922 г. в деревне Бушово Ленинского района Тульской области в семье рабочего. Был призван в Красную армию в 1940 г. после окончания средней школы №22 г. Тулы, служил в Москве.

В 1946 г. поступил на физико-математический факультет ТГПИ, по окончании которого 5 лет работал учителем физики с средней школе №1 г.Тулы. В 1955 г. поступил в аспирантуру при кафедре физики ТГПИ. По окончанию аспирантуры по 1997 год работал на той же кафедре. Решением Министерства образования Российской Федерации от 9 декабря 1993 г. Сотскому Николаю Николаевичу было присвоено ученое звание доцента по кафедре методики преподавания физики.

Участник Великой Отечественной войны. Награждён многими правительственными наградами и знаками.

Умер Н. Н. Сотский в Туле 28 февраля 2016г.

УДК 539.21:621.785

Механическая спектроскопия и повреждаемость сталей. Реновация забытого открытия[1]

А. Н. Чуканов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
А. Н. Сергеев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ansergueev@gmail.com
А. А. Яковенко (Россия, г. Тула)
ООО «Металлург-Туламаш»
e-mail: Alexyakovenk@gmail.com
С. Н. Кутепов (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
П. Н. Медведев (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
Д. В. Малий (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Mechanical spectroscopy and steel damage. Renovation forgotten open

[1]Работа выполнена в рамках реализации госзадания Минобрнауки №11.6682.2017/БЧ «Моделирование ресурсосберегающих процессов обработки и фрикционного взаимодействия металлических систем в различных условиях и состояниях».

A. N. Chukanov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
A. E. Gvozdev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
A. N. Sergeev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: ansergueev@gmail.com
A. A. Yakovenko (Russia, Tula)
Metallurg-Tulamash Ltd.
e-mail: Alexyakovenk@gmail.com
S. N. Kutepov (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
P. N. Medvedev (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: medvedeff_82@mail.ru
D. V. Maliy (Russia, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Введение.

В физическом материаловедении в период с 40-х и до конца 90-х годов 20 века был крайне популярен и активно использовался метод изучения структурного состояния материалов на их различных масштабных уровнях (атомарном – субзеренном, мезо- и макроскопическом), получивший в последствие название механической спектроскопии (МС). С помощью МС изучали и продолжают изучают природу структурных и фазовых превращений в металлах и сплавах. Выявляют и используют явления, контролирующие свойства сталей и сплавов в ходе различных видов воздействия: термического, деформационного, термо-деформационного, электромагнитного, радиационного, агрессивных сред и др. Во многих случаях метод МС является уникальным с точки зрения избирательности, так как получаемая с его помощью информация (в том числе атомарного уровня) не может быть получена другими методами.

Технически МС заключается в измерении и анализе частотных, температурных, амплитудных и временных спектров рассеиваемой материалом энергии [1]. Подведение энергии к материалу производят как правило в виде колебаний (крутильные, изгибные) или статического нагружения. Рассеивание (диссипация) энергии связана с внутренним трением (ВТ) материала – переходом части энергии упорядоченных процессов в энергию неупорядоченных процессов, в конечном счёте - в теплоту. Процессы рассеяния энергии связаны с явлениями как фундаментальными, присущими идеальным кристаллам, так и со структурными, обусловленными наличием дефектов кристаллической решётки. В кристаллических материалах – диссипация реализуется перемещением и взаимодействием дефектов строения (точечных, линейных, поверхностных, объёмных) [2].

Явление ВТ материалов неразрывно связано с понятием их упругости и относится к группе явлений несовершенной (не полной) упругости (ВТ, последействие) [1]. Формирование современного металлофизического подхода к анализу неупругого поведения материалов при их циклическом деформировании начато К.М. Зинером [1]. Яркий след в науке о неупругости материалов оставили работы А. Новика, Т. С. Кэ, Ч. Верта, Ж. Снука, К. Люкке, А. Гранато, А. Зегера. В России систематическое изучение физики неупругости начато Б.Н. Финкельштейном в середине 1950-х годов в Московском институте стали и сплавов. Исследования неупругости были продолжены Ю.В. Пигузовым, Н.А. Тяпуниной, М.С. Блантером, Г.М. Ашмариным, И.Б. Кекало, Е.К. Наими и др. Сложились сильные научные школы в Ленинграде (С.П. Никаноров), Воронеже (В.С. Постников), Туле (М.А. Криштал), Киеве, Харькове, Тбилиси (Ф.Н. Тавадзе), Ереване и других городах.

Первая международная конференция по проблеме неупругости материалов состоялась в 1956 г. в США под названием «Внутреннее трение и рассеяние ультразвука». В 2002 г. ее название было частично изменено на «Внутреннее трение и механическая спектроскопия» (*International Conference on Internal Friction and Mechanical Spectroscopy: ICIFMS*), а нумерация конференций сохранилась с 1956 г.: ICIFMS-14 прошла в 2005 г. в Японии, ICIFMS-15 – в 2008 г. в Италии, ICIFMS-16 – в 2011 г. в Швейцарии, ICIFMS-17 в 2014 г. в Китае. Впервые за всю историю Международная конференция ICIFMS-19 («Внутреннее трение и механическая спектроскопия») будет проведена в 2020 году (начало июля) в Москве на базе НИТУ МИСиС!

В России первая межвузовская конференция «Релаксационные явления в металлах и сплавах» была организована и проведена Б.Н. Финкельштейном в 1958 г. в Москве (МИСиС) и затем, начиная с 1960 г. регулярно проводились национальные и международные конференции по проблемам неупругости в твёрдых телах: в Воронеже, Туле, Харькове, Кутаиси, Виннице [1].

Количественными мерами ВТ в зависимости от способа внешнего воздействия являются: при затухающих колебаниях - логарифмический декремент или ВТ (Q^{-1}); при статическом нагружении - относительное изменение площади петли механического гистерезиса [1].

В ходе свободно затухающих колебаний (резонансный метод) измеряют и анализируют параметры частотных или температурных зависимостей ВТ (ЧЗВТ, ТЗВТ). На территории России наибольшее распространение получили измерения ТЗВТ. Указанные зависимости представляют собой зависимости $Q^{-1}(T)$ с характерными максимумами (диапазонами интенсивного затухания), отражающими эффекты неупругости (ЭН) различной природы в определенном диапазоне температур.

Природа подавляющего большинства наблюдаемых ЭН хорошо изучена. Подробно описаны их механизмы и произведены расчеты термодинамических параметров ЭН (температурного положения T_{max}, высоты максимума ВТ $Q^{-1}{}_{max}$, энергии активации $H_{\text{ак}}$). В середине XX в. с помощью метода МС было сделано множество открытий о строении, поведении и взаимодействии дефектов строения кристаллических и аморфных металлических материалов под нагрузкой. Были обнаружены и получили своё объяснение базовые эффекты релаксационного (эффекты Зинера и Снука, Бордони, Хазигути, Финкельштейна – Розина, Снука – Кёстера, Горского и др.) и гистерезисного (теории Давиденкова, Гранато и Люкке, Бешерса, Гремо и др.) рассеяния энергии.

Цель работы.

Знакомство с историей реновации эффекта неупругости (ЭН), зафиксированного более, чем на 25 лет назад, и разработкой на его основе нового направления МС - прогнозирования перехода стали к локальному разрушению.

Основная идея. Открытие и забвение.

В конце 80-х годов прошлого века активность использования МС снизилась. Казалось, что новую информацию с помощью метода МС получить сложно. Однако в 1974 году в Тульском политехническом институте его сотрудниками Николаем Николаевичем Сергеевым и Виталием Степановичем Агеевым при измерении ТЗВТ образцов арматурных сталей после термомеханической обработки был открыт ранее не описанный ЭН [3]. Новый ЭН фиксировали совместно с уже известным эффектом Снука, который вуалировал «новичка». Интенсивность обнаруженного ЭН возрастала вместе с ростом интенсивности внешнего термического и деформационного воздействия. К анализу физической природы обнаруженного ЭН был привлечен молодой тогда физик-теоретик Даниил Михайлович Левин (будущий заведующий кафедрой физики ТулГУ). Совместно была высказана гипотеза о связи нового ЭН с эволюцией микротрещин в образцах, подвергшихся [3].

К сожалению, на этом активные исследования природы обнаруженного ЭН были приостановлены. Трагически ушёл из жизни талантливейший экспериментатор и специалист в области МС В.С. Агеев. Научные и практические интересы Н.Н. Сергеева привели его на новую работу в НИИ при ТулаЧермете. Д.М. Левин активно включился в исследовательский и учебный процессы кафедры физики. С другой стороны, выдвинутая авторами гипотеза о механизме формирования обнаруженного ЭН и его связи с трещинообразованием не нашла поддержки у коллег, работавших в данной области. Главная причина – отсутствие масштабных теоретических и экспериментальных исследований, подтверждающих описанную гипотезу, а также наличие альтернативных взглядов на природу обнаруженного ЭН. Таким образом, обнаруженный в 1974 году Н.Н. Сергеевым и В.С. Агеевым интереснейший ЭН был забыт. Вопрос о его природе был отложен до 1997 года.

Возрождение открытия. Новое — это хорошо забытое старое?

Вопрос о природе ЭН, зафиксированного Н.Н. Сергеевым и В.С. Агеевым был поднят Чукановым А.Н. Проведя обширный анализ литературы о свойствах (и в частности ВТ) сталей, подвергшихся различным деструктивным воздействиям, Чуканов А.Н. выявил информацию о некотором ЭН, встречающимся после деформации, деформационно-термического воздействия и обработок, приводящих к поверхностному трещинообразованию. Его природу никто не пытался идентифицировать. Были подняты архивы работ Н.Н. Сергеева и В.С. Агеева. После предварительных экспериментов с арматурными и конструкционными сталями стало понятно, что ранее обнаруженный ЭН действительно существует. Он стал центральным в диссертационной работе Чуканов А.Н.. К исследованиям был вновь привлечен Д.М. Левин и группа аспирантов.

Чуканов А.Н. и Д.М. Левин провели подробные теоретические и экспериментальные исследования, воспользовавшись помощью коллег из ЦНИИЧерМет им. И.П. Бардина (Институт качественных сталей, Москва). На специально разработанном Чукановым А.Н. оборудовании [4-6] были проведены измерения и выполнен анализ температурных и амплитудных спектров ВТ и модулей упругости углеродистых, конструкционных, легированных сталей и сплавов, а также чугунов различных марок, после деструкционных воздействий (деформация, ТМО, водородная коррозия). Оценен комплекс физико-механических свойств этих материалов (прочность, пластичность, упругость, плотность, электросопротивление и др.) [7-14]. Проведен микроструктурный анализ наличия микротрещин и пор с использованием программной обработки. Проведены рентгеноструктурные исследования наличия и количества дефектов кристаллического строения.

В итоге было четко определено, что ЭН, обнаруженный Сергеевым-Агеевым действительно имеет место.

Чуканов А.Н. предложил использовать его параметры в качестве инструмента, фиксирующего самые ранние этапы зарождения, эволюции несплошностей. От субструктурных размеров до микроструктурных и далее, к переходу в состояние, названное «локальным предельным». После него материал переходит к необратимой поврежденности и далее – макроскопическому разрушению. Описываемый ЭН по-разному реагировал на появление и развитие трещин разной природы (при силовом и коррозионном воздействии). Это позволило выделить вклады в трещинообразование физических процессов различной природы. Были созданы статистические прогнозные модели, позволявшие по результатам измерения ВТ прогнозировать переход материалов промышленных объектов (трубные стали, тяжело нагруженные стальные конструкции) в состояние предразрушения. Безымянный до тех пор ЭН получил название «деструкционного» эффекта неупругости [15].

Полученными результатами активно заинтересовались практики - эксплуатационники транспортных систем нефте- и газопроводов России. Они хотели иметь метод мониторинга состояния трубопроводов для предотвращения их преждевременного выхода из строя и недопущения катастрофических разрушений. Решения, полученные Чукановым А.Н. и Левиным Д. М. были поддержаны документами Росстандарта и грантами РФФИ [16-18].

Чукановым А.Н. была разработана методика, основанная на анализе ТЗВТ и установлении параметров целого комплекса неупругих эффектов, отражающих концентрацию водорода, примесей внедрения, интенсивность дислокационно-примесного взаимодействия, блокировку дислокаций, а также трещинообразование и уровень микроискажений в объёме [19,20]. Совместный анализ параметров перечисленных эффектов неупругости позволял детально описать изменения субструктуры, приводящие материал в предельное состояние, близкое к началу локального разрушения.

Заключение

«Деструкционный» эффект в комплексе с другими ЭН успешно применяется авторами статьи и их коллегами для анализа состояния слитковых сталей и сплавов после различных обработок, для изучения экстремальных эффектов и причин изменения прочности и пластичности в гетерофазных металлических системах при термомеханических воздействиях и в предпереходных состояниях для оптимизации режимов ресурсосберегающих способов их обработки. К областям использования деструкционного эффекта можно отнести следующие: изучение стадийности деградации и разрушения сталей, оценку роли водорода в этих процессах, использование этого эффекта как основы структурного моделирования поврежденности гетерогенных материалов, изучение поверхностной активности углерода и развития локального обезуглероживания в сталях при деструктивных воздействиях [21].

В качестве совсем нового направления можно указать исследования с помощью описанного эффекта механизмов упругости и порообразования при производстве изделий из порошковых материалов в рамках аддитивных технологий 3d печати.

Выводы

Применение механической спектроскопии в анализе спектров внутреннего трения (демпфирующей способности) и модулей упругости твёрдых тел представляет собой перспективную и продолжающуюся развиваться область физики твёрдого тела и является источником уникальных сведений о процессах, происходящих в субструктуре твёрдых тел на их атомарном уровне. Полученная с помощью механической спектроскопии информация позволяет физически обоснованно анализировать состояние материала, а также разрабатывать методики получения сталей и сплавов с особыми свойствами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метод внутреннего трения в металловедческих исследованиях / Под ред. М.С. Блантера, Ю.В. Пигузова. М: Металлургия, 1991. 248 с.

2. Физика конденсированного состояния. Дефекты строения и создание теорий упрочнения материалов: учеб. пособие / А.Н. Чуканов, Н.Н. Сергеев, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, П.Н. Медведев, Ю.С. Дорохин, С.Н. Кутепов, А.А. Яковенко, Д.В. Малий. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 298 с.

3. Агеев В.С., Постников В.А., Сергеев Н.Н. Внутреннее трение в высокопрочных арматурных сталях, подвергнутых испытаниям на релаксационную стойкость и длительную

прочность в коррозионных средах // Вопросы металловедения и физики металлов. Тула: ТПИ, 1974. Вып.3. С. 73-80.

4. Чуканов А.Н. Точность определения модуля нормальной упругости // Проблемы качества и эффективности использования металла в машиностроении. Тула:ТПИ, 1982. С.169-172.

5. Чуканов А.Н. Комплексное исследование характеристик микродеформации, внутреннего трения и модуля сдвига при кручении // Взаимодействие дефектов кристаллической решетки и свойства металлов. Тула: ТПИ, 1983. С.132-135

6. Чуканов А.Н. Совершенствование аппаратуры для измерения низкочастотного внутреннего трения // Дефекты кристаллической решетки и сплавы с особыми свойствами. Тула: ТулПИ, 1994. С.177-182.

7. Чуканов А.Н., Головин С.А., Левин Д.М. Анализ кривых микропластичности в медно-алюминиевых сплавах // Термическая обработка и свойства металлов. Свердловск: УПИ, 1985. С.93-98.

8. Чуканов А.Н., Левин Д.М., Канунникова И.Ю. Развитие микропластичности в медно-алюминиевых сплавах // Диффузионные процессы в металлах. Тула: ТулПИ, 1986. С.139-145.

9. Чуканов А.Н., Левин Д.М., Канунникова И.Ю. Особенности процесса микропластической деформации в твердых растворах замещения // Взаимодействие дефектов кристаллической решетки и свойства металлов и сплавов. Тула: ТулПИ, 1986. С.21-27.

10. Чуканов А.Н., Ганопольская Н.Е. Особенности микродеформационной кривой однофазных сплавов замещения // Дислокационная структура в металлах и сплавах и методы ее исследования.Тула: ТулПИ, 1987. С.104-107.

11. Левин Д.М., Чуканов А.Н. Дефект упаковки и твердорастворное упрочнение в однофазных сплавах меди и никеля // Роль дефектов кристаллической решетки в структурообразовании сплавов. Тула: ТулПИ, 1989. С.69-73.

12. Чуканов А.Н., Левин Д.М. О концентрационной зависимости микродеформационных характеристик твердых растворов Cu-Al и Ni-Al // Внутреннее трение и дислокационная структура металлов. Тула: ТулПИ, 1990. С.88-93.

13. Чуканов А.Н. Анализ механизмов твердорастворного упрочнения в однофазных сплавах систем медь-алюминий и никель-алюминий // Влияние дислокационной структуры на свойства металлов и сплавов. Тула: ТулПИ, 1991. С.35-40.

14. Чуканов А.Н. Подвижность дислокаций в однофазных сплавах системы алюминий-магний//Дефекты кристаллической решетки и свойства металлов и сплавов. Тула: ТулПИ, 1992. С.99-104.

15. Чуканов А.Н. Физико-механические закономерности формирования предельного состояния и развития локального разрушения в металлических материалах // Дисс. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. Тула: ТулГУ, 2001. 387 с.

16. Чуканов А.Н. Низкотемпературное внутреннее трение в микролегированном алюминии // Известия Российской АН. Серия физическая. 1993. Т.57. №11. С.90-93.

17. Chukanov A.N., Levin D.M., Muravleva L.V. Internal friction as a measure of local damage of metallic materials // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2000. Vol.64. №9. P.1714 - 1717.

18. Levin D.M., Chukanov A.N. Effect of local stresses induced by structural defects of dislocation cluster dynamics //Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2005. T.69. №8. C.1345-1350.

19. Chukanov A.N., Levin D.M., Yakovenko A.A. Use and Prospects for the Internal Friction Method in Assessing the Degradation and Destruction of Iron-Carbon Alloys // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. 2011. Vol.75. № 10. pp. 1340-1344.

20. Чуканов А.Н., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М. Применение метода механической спектроскопии для изучения субструктурной деградации и начальных этапов разрушения сталей // «XV Междунар. Конгресс сталеплавильщиков и производителей металла (ISCON-2018)», 15-19.10.18 г., Москва-Тула, Сб. матер., С. 606-612.

21. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement // Metal Science and Heat Treatment. 2015. vol.57. №1-2. P. 63-68.

Секция 10. Алгебраическая теория чисел

УДК 511.32

Galois group of trinomials

B. Benseba (Algeria, Algeria)
University of Sciences and Technology Houari Boumediene
e-mail: b.benseba@usthb.dz

Abstract

We study the Galois groups of prime p degree Eisenstein general trinomials $X^p + aX^s + b$ by exploring the inertia groups of ramified primes using Newton polygons. This is done with the help of Feit's list of degree p permutation groups susceptible to be the Galois group of a suchs trinomials. We show, under minor conditions, that such Galois groups are the symmetric group S_p or the alternating group A_p.

Let $f(X) = X^p + aX^s + b \in \mathbb{Z}[X]$, $1 \leqslant s < p$, an irrйductible polynomial over $\mathbb{Q}$, $\pi = \pi_1, \ldots, \pi_p$ the distincts zeros of f in $\overline{\mathbb{Q}}$, $K = \mathbb{Q}(\pi)$ and $N = \mathbb{Q}(\pi_1, \ldots, \pi_p)$.

The discriminant D of f is given by:

$$D = (-1)^{\frac{(p-1)}{2}} b^{s-1} \left[p^p b^{p-s} + (p-s)^{p-s} s^s a^p\right]$$

The main of this paper is to describe how to determine $G = \mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$. The simplest way to establish that the Galois group of a trinomial with rational coefficients is S_n is related to the property Demonstrated by Schinzel that Galois group over $\mathbb{Q}(t)$ of the generic trinomials $X^n + t^r X^m + t^s$, where $n; m; r; s$ are integers such that $n > m > 0$ and $s(n-m) - rm = 1$, is S_n .

In fact, the Hilbert irreducibility theorem yields that the Galois group, over $\mathbb{Q}$, of the trinomial $X^n + t^r X^m + t^s$, is S_n for infinite values of the parameter $t \in \mathbb{Q}^*$. For example, Independently, Osada and Serre (187-1988) have showed that the trinomial $X^n - X - 1$ have this property for any integer $n > 1$.

In fact, to date the works known indicate that it is very difficult to construct examples of irreducible trinomials of degree $n > 7$ having for Galois group over $\mathbb{Q}$ a permutations group not containing the alternating group A_n.

1. Main results

Lemma 1. *Let $f(X) = X^p + aX^s + b$, $1 \leqslant s < p$, be an Eisenstein type with respect to p, D his discriminant.*

- *If $v_p(a) > 1$, then $v_p(D) = 2p - 1$*
- *If $v_p(a) = 1$, then $v_p(D) = p + s - 1$*

Theorem 1. *The Galois groupe G of the Eisenstein trinomial $f(X) = X^p + aX^s + b$, $1 \leqslant s < p$, est $G \simeq S_p$ as soon as $v_p(a) > 1$ or s odd.*

It remains to study the following cases :

- G is solvable group
- $v_p(a) = 1$ with s even

Using Newton's polygon associated, we investigate inertia groups of ramified primes. Let $g(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i X^{n-i} + a_n$,

The lower convex envelope of the set $\{(i, v_p(a_i)), 1 \leq i \leq n\}$, called the $(\mathbb{Q}_p, X)$-polygone of $g(X)$ of sides S_i . We put $\epsilon_i = \gcd(\ell_i, h_i)$ et $\lambda_i = \dfrac{\ell_i}{\epsilon_i}$, where ℓ_i and h_i are respectively the length of the projection of S_i to the X-axis and Y-axis.

If S_i begin by the point $(r, v_p(a_r))$, we take $r_j = r + j\lambda_i$ and

$$b_j = \begin{cases} \dfrac{a_{r_j}}{p^{v_p(a_{r_j})}} & \text{si } \left(r_j, v_p(a_{r_j})\right) \in \{S_i\} \\ 0 & \text{if not} \end{cases}$$

For each S_i we correspond the polynomial $g_i(Y) = b_0 Y^{\epsilon_i} + \cdots + b_{\epsilon_i}$, called "the associated polynomial to S_i". g_i is said rŭgular if $p \nmid D(g_i)$.

Lemma 2. *Let $\mathfrak{p}$ be an idŭal of K over p, then the quotient $v_{\mathfrak{p}}(\theta) \diagup e(\mathfrak{p} \diagup p)$ is the sharp of one side of the Newton polygone of $f(X)$ with respect to pand reciprocally.*

Proposition 1. *The inertia group of a prime $\wp$ of N above p in $N/\mathbb{Q}$ is isomorphic to :*

- *the affine group $Aff(\mathbb{F}_p)$ if $v_p(a) > 1$,*
- *the subgroup of the affine group of index* $\gcd(p-1, s)$ *if* $v_p(a) = 1$.

Theorem 2. *In each of the following cases :*

- $v_p(a) > 1$,
- $v_p(a) = 1$ *et* $\gcd(s, p-1) = 1$

If the Galois group of $X^p + aX^s + b$ is solvable, then it is he $Aff(\mathbb{F}_p)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bensebaa, A. Movahhedi, A. Salinier, The Galois group of $X^p + aX^s + a$. Acta Arith. 134(2008), n°1, 55-65.
2. B. Bensebaa, A. Movahhedi, A. Salinier, The Galois group of $X^p + aX^{p-1} + a$. J. Number Theory 129(2009), n°4, 824-830.

УДК 511.23

Об арифметике порядков в полях алгебраических чисел

Б. З. Мороз (Россия, г. Москва)
Московский физико-технический институт (государственный университет);
Санкт - Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН;
Universität Bonn, D-53113 Bonn, Германия.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru

On arithmetic of orders in fields of algebraic numbers

B. Z. Moroz (Russia,Moscow)
Moscow Institute of physics and technology (state University);
St. Petersburg branch of the Mathematical Institute. V. A. Steklov of RAS;
Universität Bonn, D-53113 Bonn, Germany.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru

Моё сообщение носит чисто методический характер и задумано как введение в эту довольно обширную тему, восходящую к классическим работам о представлении целых чисел бинарными квадратичными формами. Я постараюсь в общих чертах описать эту теорию, упомянув известные мне открытые вопросы и направления для дальнейшей работы.

———————————————————————————

УДК 512.623.22+511.14

Новый взгляд на обозначения формулы Рамануджана

К. И. Пименов (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: k.pimenov@spbu.ru

New look on Ramanujan denesting formulae

K. I. Pimenov (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg state University
e-mail: k.pimenov@spbu.ru

Classical cubic Ramanujan cubic root formulae suth that ([2, p.22–24]):

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}}.$$

could be deduced by High School student using Vieta theorem. In 2012 Ilya Krepkyi and K.Pimenov in [1] obtained a simple explanation for this formulae from the point of view basic Galois theory and Hilbert 90 theorem.

We will discuss the generalisation of these formulae for higher degree which was a tantamount for a number of amateur mathematicians. The explicit coeeficients in the fifth degree Ramanujan like formulae were obtained be Sergey Markelov from Moscow.

Ramanujan formulae could be seen as examples for denesting radical expression. R.Zippel in [3, p.205] cited Ramanujan formulae

$$\sqrt[3]{27mn^2+9n^3-9m^3+9(m^2+mn+n^2)\sqrt[3]{(m-n)(m+2n)(2m+n)}}=$$

$$=\sqrt[3]{(m-n)(m+2n)^2}-\sqrt[3]{(2m+n)(m-n)^2}+\sqrt[3]{(m+2n)(2+n)^2},$$

asking if this formulae is the only one of that type.

In an upcoming paper with M.Antipov we address this question with a suitable answer.

REFERENCES

1. I. A. Krepkiy, K. I. Pimenov, Cubic Ramanujan formulae and elementary Galois theory. — Vestnik SPbGU. Series 1 MATHEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY. 2(60), No. 4 (2015), 530–540.
2. B. C. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Part IV. New York: Springer-Verlag, 1994.
3. R. Zippel, Simplifocatiom of Expression Involving Radicals — J.Symbolic Computation, No. 1 (1985), 189-210.

———————————————————————————————

УДК 511.235

Системы корней и решётки корней в числовых полях

В. Л. Попов (Россия, г. Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: popovvl@mi-ras.ru

Root systems and root lattices in number fields

V. L. Popov (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
e-mail: popovvl@mi-ras.ru

Излагаемые ниже результаты получены автором совместно с Ю. Г. Зархиным.

Пусть L — свободная абелева группа конечного ранга $n > 0$. Мы рассматриваем ее как (аддитивную) подгруппу полного ранга в n-мерном линейном пространстве $V := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$. Поскольку в любой системе корней каждый корень является целочисленной линейной комбинацией простых, для любого типа R систем корней ранга n в L найдется подмножество R ранга n, являющееся системой корней типа R. Однако, если пара (V, L) снабжена какой-либо дополнительной структурой, группа Вейля $W(R)$ множества R может оказаться с ней не согласованной: например, $W(R)$ может не состоять из ортогональных преобразований, если V снабжено скалярным произведением. Интересно поэтому искать лишь такие R, что $W(R)$ согласована с какими-либо дополнительными структурами на (V, L).

Естественным источником пар (V, L) является алгебраическая теория чисел, в которой они возникают в виде $(K, \mathscr{O}_K)$, где K — числовое поле (т.е. поле алгебраических чисел) степени n над $\mathbb{Q}$, а $\mathscr{O}_K$ — его кольцо целых.

С полем K естественно связана описанная в следующем разделе группа $\mathcal{L}(K)$ линейных преобразований этого поля. Ниже мы формулируем наши результаты по классификации типов R систем корней, допускающих такой выбор R, что $W(R)$ является подгруппой группы $\mathcal{L}(K)$.

Числовые поля K являются также естественным источником пар (L, b), где $b\colon L \times L \to \mathbb{Z}$ — невырожденная симметрическая билинейная форма (далее такие пары кратко называются *решётками*). А именно, зафиксируем автоморфизм $\theta \in \operatorname{Aut} K$, для которого $\theta^2 = \mathrm{id}$. Тогда

$$\mathrm{tr}_\theta\colon K \times K \to \mathbb{Q}, \quad \mathrm{tr}_\theta(x, y) := \mathrm{trace}_{K/\mathbb{Q}}(x \cdot \theta(y))$$

— такая невырожденная симметрическая билинейная форма, что для любого идеала I в $\mathscr{O}$ пара $(I, \mathrm{tr}_\theta|_{I \times I}) =: (I, \mathrm{tr}_\theta)$ является решёткой ранга n. Некоторые замечательные решетки изоморфны (т.е. изометричны) решеткам вида (I, tr_θ): например, это так для части корневых решеток, решетки Кокстера–Тодда, решетки Лича и ряда других; см. [2], [3]. Поэтому естественно возникает задача о классификации получающихся таким способом решеток. Среди всех ненулевых идеалов в $\mathscr{O}$ имеется выделенный, а именно, само кольцо $\mathscr{O}$. Это приводит к вопросу о том какие замечательные решетки имеют вид $(\mathscr{O}, \mathrm{tr}_\theta)$. Ниже мы формулируем наши результаты о подобии решеток вида $(\mathscr{O}, \mathrm{tr}_\theta)$ и корневых решеток.

Системы корней

В группе $\mathrm{GL}_{\mathbb{Q}}(K)$ невырожденных линейных преобразований линейного пространства K над $\mathbb{Q}$ естественно выделяются три подгруппы. Первой является группа $\mathrm{Aut}\, K$ автоморфизмов поля K. Второй — образ мономорфизма $\mathrm{mult}\colon K^* \hookrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{Q}}(K)$, где $\mathrm{mult}(a)$ — оператор умножения на элемент $a \in K^*$, т.е. $\mathrm{mult}(a)\colon K \to K,\ x \mapsto ax$. Третьей — подгруппа $\mathcal{L}(K)$ в $\mathrm{GL}_{\mathbb{Q}}(K)$, порожденная $\mathrm{Aut}\, K$ и $\mathrm{mult}(K^*)$.

Определение 1 ([1, Def. 1]). *Мы говорим, что тип* R (*не обязательно приведённой*) *системы корней допускает реализацию в числовом поле K, если*
(a) $[K : \mathbb{Q}] = \mathrm{rk}(\mathsf{R})$;
(b) *в $\mathscr{O}_K$ существует подмножество R ранга* $\mathrm{rk}(\mathsf{R})$, *являющееся системой корней типа* R;
(c) *$W(R)$ является подгруппой группы $\mathcal{L}(K)$.*
В этом случае подмножество R называется реализацией типа R *в поле K.*

Отметим, что, заменяя $\mathscr{O}_K$ в п. (b) определения 1 на K, мы не получаем нового понятия (т.е. если R допускает реализацию в K в смысле измененного определения 1, то допускает и в смысле исходного).

Ввиду определения 1, если тип R системы корней допускает реализацию в числовом поле K, то группа $\mathcal{L}(K)$ содержит подгруппу, изоморфную группе Вейля системы корней типа R. Следующая теорема дает классификацию всех случаев, когда выполнено это последнее свойство:

Теорема 1 ([1, Thm. 1]). *Следующие свойства группы Вейля $W(R)$ приведённой системы корней R типа* R *и ранга n эквивалентны:*
(i) *$W(R)$ изоморфна подгруппе группы $\mathcal{L}(K)$, где K — числовое поле степени n над $\mathbb{Q}$;*
(ii) R *содержится в следующем списке:*

$$\mathsf{A}_1,\ \mathsf{A}_2,\ \mathsf{B}_2,\ \mathsf{G}_2,\ 2\mathsf{A}_1,\ 2\mathsf{A}_1 \dotplus \mathsf{A}_2,\ \mathsf{A}_2 \dotplus \mathsf{B}_2. \tag{1}$$

То, что для числового поля K подгруппа G группы $\mathcal{L}(K)$ изоморфна группе Вейля системы корней ранга $n = [K : \mathbb{Q}]$ и типа R, не эквивалентно тому, что $G = W(R)$, где R — система корней типа R в $\mathscr{O}_K$. Это видно из сравнения теоремы 2 со следующей теоремой, отвечающей на вопрос о том, какие типы корней из списка (1) реализуются в числовых полях:

Теорема 2 ([1, Thm. 2]). *Для каждого типа* R (*не обязательно приведённой*) *системы корней следующие свойства эквивалентны:*
(i) *существет числовое поле, в котором* R *допускает реализацию;*
(ii) $\mathrm{rk}(\mathsf{R}) = 1$ *or* 2.

Ниже указаны явные реализации всех типов R систем корней рангов 1 и 2 в числовых полях [1, Sect. 2]. Через A_1' мы обозначаем единственный тип неприведенныз систем корней ранга 1, а через $\mathscr{O}_K(d)$ множество всех элементов из $\mathscr{O}_K$, норма которых равна d.

Системы корней типов A_1 *и* A_1'.

В этом случае $K = \mathbb{Q}$, $\mathscr{O}_K = \mathbb{Z}$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$, то $R := \{\pm\alpha\}$ (соответственно, $R := \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$) является реализацией типа A_1 (соответственно, A_1') в поле K.

Системы корней типов A_2 *и* G_2.

Пусть K — третье циклотомическое поле: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Тогда $\mathscr{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$, где $\omega = (1+\sqrt{-3})/2$. Пусть $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \omega^2$, $\beta_1 = (1+\omega)\alpha_1$, $\beta_2 = (1+\omega)\alpha_2$. В этом случае

$$\mathscr{O}_K(1) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}, \quad \mathscr{O}_K(3) = (1+\omega)\mathscr{O}_K(1).$$

Можно доказать, что каждое из множеств $\mathscr{O}_K(1)$ и $\mathscr{O}_K(3)$ является реализацией типа A_2 в поле K, а множество

$$\mathscr{O}_K(1)\bigcup\mathscr{O}_K(3) = \{\pm\alpha_1, \pm\beta_2, \pm(\alpha_1+\beta_2), \pm(2\alpha_1+\beta_2), \pm(3\alpha_1+\beta_2), \pm(3\alpha_1+2\beta_2)\},$$

— реализацией типа G_2 в поле K.

Системы корней типов B_2, $2\mathsf{A}_1$, BC_2, $2\mathsf{A}_1$, $2\mathsf{A}_1'$ *и* $\mathsf{A}_1 \dotplus \mathsf{A}_1'$.

Пусть K — четвертое циклотомическое поле: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Тогда $\mathscr{O}_K = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$, где $i = \sqrt{-1}$. Пусть $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\beta_1 = (1+i)\alpha_1$, $\beta_2 = (1+i)\alpha_2$. В этом случае

$$\mathscr{O}_K(1) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}, \quad \mathscr{O}_K(2) = (1+i)\mathscr{O}_K(1), \quad \mathscr{O}_K(4) = 2\mathscr{O}_K(1).$$

Можно доказать, что каждое из множеств $\mathscr{O}_K(1)$, $\mathscr{O}_K(2)$ и $\mathscr{O}_K(4)$ является реализацией типа $2\mathsf{A}_1$ в поле K, множество

$$\mathscr{O}_K(1)\bigcup\mathscr{O}_K(2) = \{\pm\alpha_1, \pm\beta_2, \pm(\alpha_1+\beta_2), \pm(2\alpha_1+\beta_2)\},$$

— реализацией типа B_2 в поле K, множество

$$\mathscr{O}_K(1)\bigcup\mathscr{O}_K(2)\bigcup\mathscr{O}_K(4) = \{\pm\alpha_1, \pm2\alpha_1, \pm\beta_2, \pm(\alpha_1+\beta_2), \pm2(\alpha_1+\beta_2), \pm(2\alpha_1+\beta_2)\}$$

— реализацией типа BC_2 в поле K, множество $\mathscr{O}_K(1)\bigcup\mathscr{O}_K(4)$ — реализацией типа $2\mathsf{A}_1'$ в поле K, а множество и $\mathscr{O}_K(1)\bigcup\{\pm2\}$ — реализацией типа $\mathsf{A}_1 \dotplus \mathsf{A}_1'$ в поле K.

Корневые решётки

Мы по-прежнему обозначаем через K числовое поле степени n над $\mathbb{Q}$. Напомним, что решетка (L_1, b_1) называется *подобной* решетке (L_2, b_2), если найдутся такие ненулевые целые числа m_1, m_2, что (L_1, m_1b_1) и (L_2, m_2b_2) — изоморфные решетки. Пусть множество $\mathcal{R}$ решеток является объединением двух бесконечных серий $\mathbb{A}_n$ $(n \geqslant 1)$, $\mathbb{D}_n$ $(n \geqslant 4)$ и четырёх спорадических решеток $\mathbb{Z}^1$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$, краткое описание которых мы напоминаем в приложении ниже (дальнейшие детали см., например в [3], [4]). Все решетки из $\mathcal{R}$ неприводимы, а всевозможные их ортогональные суммы называются *корневыми решетками.* Согласно классической теореме Витта, корневые решетки — это в точности такие решетки (L, b), что билинейная форма b положительно определена, а L является $\mathbb{Z}$-линейной оболочкой множества $\{x \in L \mid b(x,x) = 1 \text{ или } 2\}$.

Теорема 3 (об изоморфизме). *Определённая парой (K, θ) решётка $(\mathscr{O}_K, \mathrm{tr}_\theta)$ изоморфна корневой решётке тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(a) $K = \mathbb{Q}$, $\theta = \mathrm{id}$;

(b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, *$\theta$ является комплексным сопряжением;*

(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, *$\theta$ является комплексным сопряжением.*

Теорема 4 (о подобии решётке $\mathbb{A}_n$). *Пусть определённая парой (K, θ) решётка $(\mathscr{O}_K, \mathrm{tr}_\theta)$ подобна корневой решётке $\mathbb{A}_n$ с $n > 1$. Тогда n четно, $n+1$ свободно от квадратов и пара (K, θ) обладает следующими свойствами:*

(a) *если $n = 2$, то $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, а θ — комплексное сопряжение;*

(b) *если $n \geqslant 4$, то $K/\mathbb{Q}$ не является расширением Галуа и выполнено одно из условий:*

 (i) *K является вполне вещественным полем, $\theta = \mathrm{id}$, $n \equiv 0 \pmod 4$ и $n \geqslant 36$;*

 (ii) *K является CM-полем, θ — комплексное сопряжение, а $n \geqslant 50$.*

Теорема 5 (о подобии решётке $\mathbb{D}_n$). *Пусть определённая парой (K, θ) решётка $(\mathscr{O}_K, \mathrm{tr}_\theta)$ подобна корневой решётке $\mathbb{D}_n$ с $n \geqslant 4$. Тогда n четно и пара (K, θ) обладает одним из следующих свойств:*

(a) *K является вполне вещественным полем, $\theta = \mathrm{id}$, $n \equiv 0 \pmod 4$ и $n \geqslant 76$;*

(b) *K является CM-полем, θ — комплексное сопряжение, а $n \geqslant 46$.*

Теорема 6 (о подобии решётке $\mathbb{E}_n$). *Не существует такой пары (K, θ), что решётка $(\mathscr{O}, \mathrm{tr}_\theta)$ подобна какой-либо из решеток $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$.*

Приложение: решетки $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_m$ и $\mathbb{E}_r$

Пусть $\mathbb{R}^n$ — координатное n-мерное вещественное линейное пространство строк со стандартной структурой евклидова пространства

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i. \tag{2}$$

Пусть e_j — строка $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, в которой число нулей слева от 1 равно $j-1$.

Если L — такая $\mathbb{Z}$-линейная оболочка множества линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$, что $b(L \times L) \subseteq \mathbb{Z}$, где b — ограничение на $L \times L$ отображения (2), то (L, b) называется *решеткой в* $\mathbb{R}^n$ и обозначается просто через L.

$\mathbb{Z}^n$ — это решетка $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{Z} \text{ для всех } j\}$ в $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{A}_n$ — это решетка $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 0\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\mathbb{D}_n$ — это решетка $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \equiv 0 \pmod 2\}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

$\mathbb{E}_8$ — это решетка $\mathbb{D}_8 \bigcup \left(\mathbb{D}_8 + \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_8)\right)$ в $\mathbb{R}^8$.

$\mathbb{E}_7$ — это ортогонал в $\mathbb{E}_8$ к подрешетке $\mathbb{Z}(e_7 + e_8)$.

$\mathbb{E}_6$ — это ортогонал в $\mathbb{E}_8$ к подрешетке $\mathbb{Z}(e_7 + e_8) + \mathbb{Z}(e_6 + e_8)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Popov V. L., Zarhin Yu. G. Root systems in number fields, accepted for publication in Indiana Univ. Math. J., arXiv:1808.01136v3. 2019.

2. Bayer-Fluckiger E. Lattices and number fields. Contemporary Math. 1999. Vol. 241. P. 69–84.

3. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Тт. I и II. — Москва: Изд-во Мир, 1990.791 с.

4. Martinet J. Perfect Lattices in Euclidean spaces. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 327, Springer-Verlag, 2003. 523 pp.

———————————————————————————

УДК 511.6

Об одном конечном классе периодических функциональных непрерывных дробей в эллиптических полях

Г. В. Федоров (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

On a finite class of periodic functional continued fractions in elliptic fields

G. V. Fedorov (Moscow, Russia)
Moscow State University, SRISA/NIISI RAS
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

В статьях [1]–[4] доказан критерий квазипериодичности функциональных непрерывных дробей в гиперэллиптическом поле L, согласно которому элемент $\alpha \in L$ имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь, связанную с линейным нормированием, тогда и только тогда, когда есть нетривиальные решения определенного вида у норменного уравнения — функционального аналога уравнения типа Пелля. Разрешимость норменного уравнения равносильна наличию фундаментальной S_h-единицы в поле L для множества S_h, состоящего из двух неэквивалентных сопряженных линейных нормирований.

В случае числовых непрерывных дробей теорема Лагранжа утверждает, что любая квадратичная иррациональность имеет периодическое разложение в числовую непрерывную дробь. Гиперэллиптическое поле L — поле функций гиперэллиптической кривой — есть квадратичное расширение поля рациональных функций $K(x)$. Если в поле L нет нетривиальных S_h-единиц, то функциональные непрерывные дроби элементов поля L неквазипериодические. Если же в поле L существует фундаментальная S_h-единица, то в поле L могут быть элементы с периодическими, с квазипериодическими, но не периодическими, и неквазипериодическими функциональными непрерывными дробями. Естественным образом возникает вопрос, о выделении классов элементов имеющих периодические функциональные непрерывные дроби и классов элементов имеющих квазипериодические функциональные непрерывные дроби. В статье [8] доказано, что наличие фундаментальной S_h-единицы в поле $L = K(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g+1$, равносильно условию периодичности непрерывных дробей элементов $\sqrt{f}/h^g$ и $\sqrt{f}/h^{g+1}$. Для гиперэллиптического поля $L = K(x)(\sqrt{f})$ с многочленом f произвольной степени $2g+1 \leqslant \deg f \leqslant 2g+2$ в статье [4] показано, что наличие фундаментальной S_h-единицы, равносильно условию периодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}/h^{g+1}$. В связи с этим элементы вида $\sqrt{f}/h^s$, $s \in \mathbb{Z}$, мы называем *ключевыми* в поле L. Для случая $\deg f = 2g+1$ в статьях [3], [6], [7] доказано, что для фиксированного $s \in \mathbb{Z}$ непрерывные дроби элементов $\sqrt{f}/h^s$ и $\sqrt{f}/h^{2g+1-s}$ одновременно периодические или неквазипериодические.

В текущем сообщении мы отвечаем на вопрос о квазипериодичности и квазипериодичности функциональных непрерывных дробей ключевых элементов эллиптического поля $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 3$. Достаточно описать два класса многочленов $f \in \mathbb{Q}[x]$, для которых соответственно элементы $\sqrt{f}/h$ и $\sqrt{f}$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь.

Ясно, что если для некоторого многочлена $f \in \mathbb{Q}[h]$ элемент $\sqrt{f(h)}/h$ или $\sqrt{f(h)}$ обладает периодическим разложением в непрерывную дробь, то элемент $\sqrt{a^2 f(bh)}/h$ или $\sqrt{a^2 f(bh)}$ соответственно имеет периодическое разложение в непрерывную дробь для любых $a, b \in \mathbb{Q}^*$. Поэтому мы можем искать многочлены $f \in \mathbb{Q}[h]$ с точностью до указанной замены. Замены такого вида разбивают множество многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$ на классы эквивалентности, поэтому многочлены из одного класса мы будем называть эквивалентными.

Для описания первого класса многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$, для которых $\sqrt{f}/h$ имеет периодическое разложение в непрерывную дробь, мы выписываем полную параметризацию всех многочленов $f(h)$, $\deg f = 3$, таких, что в группе классов дивизоров степени ноль $\Delta^\circ(L)$ гиперэллиптического поля $L = \mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$ порядок класса дивизора $P_h^- - P_h^+$ равен n, где точки $P_h^\pm$ соответствуют нормированиям $\nu_h^\pm$. Последнее условие равносильно тому, что точки P_h^- и P_h^+ имеют порядок n на эллиптической кривой $C_n(\mathbb{Q})$, заданной уравнением $C_n:\ y^2 = f_n(h)$. Согласно теореме Мазура [9] достаточно рассматривать $2 \leqslant n \leqslant 10$, $n = 12$.

Для $n > 4$ мы используем известную параметризацию [10]. Напомним, что *нормальная форма Тейта* уравнения неособой плоской кубической кривой имеет вид

$$Y^2 + (1-c)XY - bY = X^3 - bX^2$$

с дискриминантом $\Delta = b^3(16b^2 - 8bc^2 - 20bc + b + c^4 - 3c^3 + 3c^2 - c)$. В статье [10] для $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ приведена явная параметризация $b = b(t)$, $c = c(t)$ всех эллиптических кривых $C_n = C_{n,t}$, заданных в нормальной форме Тейта с точкой $(0,0)$ порядка n. С помощью замены $y = Y + \frac{(1-c)X-b}{2}$, $h = X$ мы можем для кривой C_n получить параметрическое уравнение вида $y^2 = f(h)$ с точкой $P = (x_1, y_1) = (0, \sqrt{f(0)})$ порядка n. Для краткости явную параметризацию мы здесь опускаем.

Для $2 \leqslant n \leqslant 4$ мы отдельно находим все эллиптические кривые, заданные уравнением вида $y^2 = f(h)$ и имеющие точку порядка n. Для этого рассмотрим непрерывную дробь $\sqrt{f}/h^2$, которая должна быть периодической. Чтобы степень S_h-единицы не превосходила 4, нам достаточно рассмотреть для $n = 2$ непрерывные дроби вида

$\sqrt{f}/h^2 = [a_0;\ \overline{2a_0}^c]$, а для $n = 3$ непрерывные дроби вида $\sqrt{f}/h^2 = [a_0;\ \overline{a_1, 2a_0}^c]$, и

$$\frac{\sqrt{f}}{h^2} = [a_0;\ \overline{a_1, c^{-1}a_1, 2ca_0, c^{-1}a_1, a_1, 2a_0}],$$

где $c \in \mathbb{Q}^*$. По арифметическому виду непрерывной дроби $\sqrt{f}/h^2$ мы явно выписываем параметрическое семейство подходящих многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$.

Следующая теорема описывает второй класс многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$, для которых $\sqrt{f}$ имеет периодическое разложение в непрерывную дробь.

Теорема 1 ([1]). *Существует бесконечная серия многочленов $f_c = ch^3 + 1$, $c \in \mathbb{Q}^*$, имеющих периодическое разложение $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. За исключением этой серии существует только три неэквивалентных свободных от квадратов многочленов $f \in \mathbb{Q}[h]$,* $\deg f = 3$, *имеющих периодическое разложение $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь:*

$$f = 12h^3 - 8h^2 + 4h + 1, \quad f = 12h^3 - 5h^2 + 2h + 1, \quad f = -120h^3 + 25h^2 + 2h + 1.$$

Поиск свободных от квадратов многочленов f, $\deg f \geqslant 4$, с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $\mathbb{Q}((h))$ является трудной задачей. Сначала в статье [7] были найдены два примера многочленов f степени 5 с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. Далее, в статье [4] для каждого целого m, начиная с 3, приведены 3 неэквивалентных примера многочленов f степени m, обладающих периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. В случае $\deg f = 4$ в статье [4] найдены 5 нетривиальных примеров многочленов с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь. В статье [1] найден новый пример многочлена f степени 6 с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, №4. С. 54-94.

2. Федоров Г. В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, №3.

3. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354-376.

4. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, №5. С. 540-544.

5. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475, №2. С. 133-136.

6. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471, №6. С. 640-644.

7. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН. 2016. Т. 71, №5. С. 181-182.

8. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, №5. С. 537-541.

9. Mazur B. Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Modular Forms of One Variable V (Proc. Internat. Conf., University of Bonn), Lecture Notes in Math., Springer-Verlag. 1977. Vol. 601. P. 107-148.

10. Kubert D. S. Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math.Soc. 1976. Vol. 33, №2. P. 193-237.

Секция 11. Арифметическая и алгебраическая геометрии

УДК 515.17

Кокасательный комплекс нульмерных особенностей

А. Г. Александров (Россия, г. Москва)
Институт проблем управления РАН
e-mail: ag_aleksandrov@mail.ru

Cotangent complex of zero-dimensional singularities

A. G. Aleksandrov (Rossia, Moscow)
Institute for Control Sciences RAS
e-mail: ag_aleksandrov@mail.ru

Нульмерные особенности, которые часто называются также кратными точками, естественно возникают во многих разделах математики. Изучению свойств таких особенностей и вычислению их инвариантов посвящено множество работ, в которых используются самые разные подходы и методы. По-видимому, одно из первых исследований в этом направлении относится к трудам А.Пуанкаре, который ввел понятие индекса особой точки векторного поля на плоскости и доказал существование версальной деформации для нульмерных полных пересечений. Затем Ф.Маколей обнаружил невырожденную двойственность на нульмерных полных пересечениях и описал целый ряд замечательных приложений в алгебре и геометрии, а в середине прошлого века А.Гротендик и его последователи значительно продвинулись в понимании и интерпретации этих идей в рамках обшей теории вычета и двойственности.

Большая часть современных исследований основана на изучении комбинаторных и численных характеристик нульмерных подсхем *проективных* пространств, т.е. *однородных* особенностей, и соответствующих артиновых алгебр, а также связанных с этой тематикой вычислительных алгоритмов, приспособленных для работы на компьютере. С другой стороны, для изучения деформаций нульмерных особенностей можно эффективно использовать и другие, нетрадиционные методы и аналогии. Так, очевидно, что любая такая особенность является одновременно и *компактным* комплексным пространством. Среди прочего, это соображение приводит к описанию двойственности в кокасательной гомологии и когомологии нульмерных особенностей (см. [1]).

Представленный доклад посвящен дальнейшему развитию этого подхода, основанного на систематическом использовании теории дифференциальных форм и конструкций из общей теории деформаций многообразий и комплексных пространств для изучения фундаментальных свойств нульмерных особенностей. Среди прочего предполагается обсудить некоторые вопросы теории деформаций нульмерных особенностей, которые тесно связаны с изучением свойств дифференциальных форм и комплекса Пуанкаре-де Рама, исследовать кокасательную гомологию и когомологию нульмерных особенностей, вычислить основные аналитические инварианты для некоторых типов таких особенностей, а также подробно разобрать целый ряд интересных примеров и приложений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aleksandrov A G. Duality, derivations and deformations of zero-dimensional singularities. — In: Zero-dimensional schemes. Berlin, de Gruyter. 1994. C. 11-31.

———————————————————————————

УДК 512.62

Двумерные локальные поля: сравнение классификаций[1]

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: s.vostokov@spbu.ru
И. Б. Жуков (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: i.zhukov@spbu.ru
О. Ю. Иванова (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет авиационного приборостроения
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Two-dimensional local fields: comparison of classifications

S. V. Vostokov (Russia, St. Petersburg)
Saint Petersburg State University
e-mail: s.vostokov@spbu.ru
I. B. Zhukov (Russia, St. Petersburg)
Saint Petersburg State University
e-mail: i.zhukov@spbu.ru
O. Yu. Ivanova (Russia, St. Petersburg)
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Данное исследование, начатое в работе [1], посвящено изучению связи между двумя подходами к классификации полных дискретно нормированных полей с несовершенными полем вычетов и, в частности, двумерных локальных полей, в случае смешанной характеристики. Один из этих подходов был введён в работе Курихары [2], другой базируется на теории Эппа устранения высшего ветвления для дискретно нормированных полей, подробно разработанной в [3].

В работе [2] полные поля смешанной характеристики делятся на два типа, которые в случае двумерного локального поля определяются следующим образом. В модуле дифференциалов кольца целых данного рассматривается соотношение вида $a\,d\pi + b\,dt = 0$, где π и t — локальные параметры. Поле K считается полем типа I, если величина $\Delta(\pi,t) = v(b) - v(a)$ положительна, и полем типа II в противном случае; здесь v — нормирование, нормализованное условием $v(p) = 1$. Для полей типа I мы вводим в рассмотрение более точный классифицирующий инвариант $\Gamma(K) = \sup \Delta(\pi,t)$. Значением этого инварианта может быть либо натуральное число, либо $+\infty$. Последний случай имеет место тогда и только тогда, когда K либо стандартное (является неразветвленным расширением своего подполя констант), либо почти стандартное (такое, что из него можно получить стандартное поле неразветвленным расширением). Подполем констант здесь называется максимальное подполе k поля K, поле вычетов которого совершенно. Отметим, что двумерное локальное поле смешанной характеристики является стандартным, если и только если оно представимо в виде $k\{\{t\}\}$, см. [4] или [5].

В теории устранения высшего ветвления для данного поля рассматриваются всевозможные константные расширения (получаемый присоединением элементов, алгебраических над

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 16-11-10200

подполем констант), которые являются стандартными или почти стандартными полями. Такие расширения существуют для любых полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики и минимальная степень такого расширения может рассматриваться как ещё один из инвариантов изучаемого поля.

Центральная идея данного исследования — прояснить, как связаны эти два инварианта. В целом оказывается, что чем больше значение $\Gamma(K)$, то есть чем больше поле «похоже на стандартное» (не являясь при этом почти стандартным), тем «дальше» оно от стандартного, т. е. тем большая степень константного расширения требуется, чтобы превратить поле в почти стандартное. В работе [6] данная связь была установлена для двумерных локальных полей типа I с некоторым дополнительным ограничением. А именно, была установлена оценка снизу на степень константного расширения L/K с почти стандартным L, являющаяся линейной функцией от $\Gamma(K)$ с коэффициентом, зависящим только от p-адического нормирования индекса ветвления поля K над его подполем констант.

В дальнейшем нами был получен аналогичный результат без каких-либо ограничений на поле K, но с более слабой оценкой для степени константного расширения (порядка $\sqrt{\Gamma(K)}$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова О. Ю. О связи классификации Курихары с теорией устранения ветвления // Алгебра и анализ. 2012. Том 24, № 2. С. 130–153.

2. Kurihara M. On two types of complete discrete valuation fields // Compos. Math. 1987. Vol. 63. P. 237–257

3. Жуков И. Б., Коротеев М. В. Устранение высшего ветвления // Алгебра и анализ. 1999. Том 11, №6. С. 153–177.

4. Жуков И. Б., Мадунц А. И. Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия // Труды С.-Петерб. мат. общ. 1995. Том 3. С. 4–46.

5. Zhukov I. B. Higher dimensional local fields. In book: Invitation to higher local fields (Münster, 1999), 5–18, Geom. Topol. Monogr., 3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000; `http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtmcontents3.html`.

6. Olga Ivanova, Sergei Vostokov, Igor Zhukov. On two approaches to classification of higher local fields // Чебышёвский сборник. 2019. Том 2, вып. 3 (в печати).

УДК 514.74

Матрицы Гессе приводимых многочленов третьей степени

А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: slvstv@iitp.ru

Hessian matrices of reducible third degree polynomials

A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)

e-mail: slvstv@iitp.ru

Основной текст тезисов

Матрицей Гессе функции нескольких переменных называется симметричная матрица вторых частных производных $\mathrm{hess}(f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$. Элементами матрицы Гессе многочлена третьей степени служат (неоднородные) линейные функции или числовые константы. Многочлен называется свободным от квадратов, если он не делится на квадрат никакого многочлена положительной степени.

Цель этой работы — описание свойства матриц Гессе многочленов третьей степени над полем вещественных чисел, которое не зависит от числа переменных. Некоторые свойства матриц Гессе отличаются для многочленов от различного числа переменных [1, 2, 3]. Например, Гордан и Нётер доказали, что существует свободный от квадратов однородный многочлен третьей степени от пяти переменных, у которого матрица Гессе вырождена в каждой точке, хотя первые частные производные многочлена линейно независимые. Однако не существует таких однородных многочленов от четырёх переменных.

Приводимые формы рассмотрены в недавних работах, поскольку для них удаётся получить результаты, обобщение которых на общий случай связано с большими трудностями. Например, разложение Варинга для приводимых кубических форм рассмотрено в работе [4], а для мономов в работе [5].

Рассматриваются квазипроективные алгебраические многообразия. В каждой размерности фиксировано проективное пространство с выделенными бесконечно удалённой гиперплоскостью и аффинным подпространством с системой декартовых координат. Комплексное сопряжение этих координат определяет инволюцию, неподвижными точками которой служат вещественные точки.

Теорема 1. *Дан свободный от квадратов многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ третьей степени над полем вещественных чисел. Если его матрица Гессе $\mathrm{hess}(f)$ знакоопределена в некоторой вещественной точке, то проективное замыкание множества нулей многочлена f не содержит вещественных особых точек на бесконечно удалённой гиперплоскости.*

Теорема 1 не накладывает никаких ограничений на особые точки над полем комплексных чисел, которые не являются вещественными. Теорема 1 равносильна одному из результатов, который уже апробирован на конференции весной 2018 года [6]. Доказательство использует свойства прямых, касательных к графику многочлена. Близкий метод применён в работе [7].

Теорема 2. *Существует отличный от тождественно нулевого многочлен p с целыми коэффициентами, обращающийся в нуль на всех наборах коэффициентов многочлена $q(x_1, \ldots, x_n)$ второй степени и многочлена $\ell(x_1, \ldots, x_n)$ первой степени над полем вещественных чисел, для которых матрица Гессе произведения многочленов $\mathrm{hess}(q\ell)$ не знакоопределена ни в одной вещественной точке, но проективное замыкание множества нулей произведения многочленов $q\ell$ не содержит вещественных особых точек на бесконечно удалённой гиперплоскости.*

Теорема 2 говорит, что обратное утверждение к теореме 1 справедливо для почти всех приводимых многочленов третьей степени. Однако следующий пример показывает, что в некоторых случаях обратное утверждение к теореме 1 не выполнено.

Пусть множеством нулей многочлена $f(x_1, x_2)$ служат три различные прямые, пересекающиеся в начале координат. Эта точка служит единственной особой точкой проективного замыкания, но матрица Гессе не знакоопределена ни в одной вещественной точке. Она обращается в нуль в начале координат. Графиком многочлена служит обезьянье седло.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования графиков многочленов третьей степени. Более того, хотя в теореме 2 рассмотрены приводимые многочлены, но если для некоторого многочлена матрица Гессе знакоопределена в некоторой вещественной точке, то она останется знакоопределённой в той же точке при небольшом изменении коэффициентов многочлена. Следовательно, рассмотренный метод применим не только для приводимых многочленов. В частности, существует эффективно проверяемый сертификат, свидетельствующий об отсутствии вещественных особых точек на бесконечности у почти каждой вещественной кубической гиперповерхности, которая достаточно хорошо аппроксимируется объединением гиперплоскости и эллипсоида. Однако точная формулировка условия существования такого сертификата не известна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пинкус А., Вайнриб Б. Об одной задаче аппроксимации с помощью многомерных полиномов // Успехи математических наук. 1995. Том 50, № 2(302). С. 89–110.

2. de Bondt M., van den Essen A. Singular Hessians // Journal of Algebra. 2004. Vol. 282. P. 195–204. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.08.026

3. Gondim R., Russo F. On cubic hypersurfaces with vanishing hessian // Journal of Pure and Applied Algebra. 2015. Vol. 219, № 4. P. 779–806. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.04.030

4. Carlini E., Ventura E., Guo C. Real and complex Waring rank of reducible cubic forms // Journal of Pure and Applied Algebra. 2016. Vol. 220, № 11. P. 3692–3701. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.05.007

5. Carlini E., Kummer M., Oneto A., Ventura E. On the real rank of monomials // Mathematische Zeitschrift. 2017. Vol. 286. P. 571–577. https://doi.org/10.1007/s00209-016-1774-y

6. Селиверстов А. В. Распознавание вещественных кубических гиперповерхностей без прямой из особых точек // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. Тезисы докладов, 23–25 Мая 2018. — М.: МГУ, 2018. С. 177–179.

7. Селиверстов А. В. О касательных прямых к аффинным гиперповерхностям // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 2. С. 248–256. https://doi.org/10.20537/vm170208

СОДЕРЖАНИЕ