Гонцов Р. Р.

Периоды эллиптической кривой и уравнение Пикара–Фукса

1. Введение

Как нами было изучено во время подробного разбора книги лекций Б. А. Дубровина [1] по компактным римановым поверхностям на дополнении к семинару по аналитической теории дифференциальных уравнений, риманова поверхность эллиптической кривой – компактная риманова поверхность рода 1 – обладает единственным голоморфным дифференциалом. Периодами эллиптической кривой называют два интеграла этого дифференциала по двум базисным циклам поверхности. Если рассмотреть кривую, зависящую от параметра (семейство кривых), то ее периоды будут функциями параметра, и как функции параметра они окажутся двумя базисными решениями некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка, получившего название уравнения Пикара–Фукса. (Наверно, более точным будет назвать уравнением Пикара–Фукса обобщение этого уравнения на случай периодов кривых произвольного рода, произведенное Пикаром и Фуксом [2].) Объяснению этого факта посвящена данная заметка.

2. Семейство эллиптических кривых, голоморфный дифференциал, периоды

Рассмотрим семейство алгебраических кривых Γ_t в $\mathbb{C}^2$, зависящее от параметра $t \in \mathbb{C}$ $(t \neq 0, 1)$:

$$\Gamma_t = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z-1)(z-t)\}.$$

Компактификация (проективизация) X_t кривой Γ_t есть риманова поверхность рода 1. Единственный (с точностью до пропорциональности) голоморфный дифференциал ω_t на X_t в аффинной карте Γ_t задается выражением

$$\omega_t = \frac{dz}{w}.$$

Его интегралы по независимым циклам γ_1, γ_2 на X_t определяют периоды $y_1(t)$, $y_2(t)$ эллиптической кривой X_t:

$$y_1(t) = \int\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{w}, \qquad y_2(t) = \int\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{w}.$$

3. Линейная независимость периодов

Утверждение 1. *Функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ линейно независимы над $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Линейная зависимость функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ влекла бы существование нетривиальных нулевых линейных комбинаций

$$\alpha_1 \, y_1(t) + \alpha_2 \, y_2(t) \equiv 0,$$
$$\alpha_1 \, y_1'(t) + \alpha_2 \, y_2'(t) \equiv 0.$$

Если это так, то

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Следовательно, при некотором $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ имеем

$$c_1 \, y_1(t_0) + c_2 \, y_1'(t_0) = 0,$$
$$c_1 \, y_2(t_0) + c_2 \, y_2'(t_0) = 0,$$

где хотя бы одна из постоянных c_1, c_2 отлична от нуля. Это означает, что дифференциал $c_1(dz/w) + c_2(dz/w)_t'$ является точным при $t = t_0$ (поскольку его интегралы по обоим циклам γ_1, γ_2 равны нулю):

$$c_1 \frac{dz}{w} + c_2 \left(\frac{dz}{w}\right)_t' = df.$$

Исследуем поведение функции f на X_{t_0}. В силу уравнения кривой Γ_{t_0} имеем $2ww_t' = -z(z-1)$. Поэтому

$$\left(\frac{dz}{w}\right)_t' = -\frac{w_t' \, dz}{w^2} = \frac{dz}{2(z - t_0)w}.$$

В окрестности точки $(z, w) = (t_0, 0)$ кривая Γ_{t_0} (и ее компактификация X_{t_0}) в локальной координате ζ задается формулами

$$z = t_0 + \zeta^2, \qquad w = \zeta O(1), \quad \zeta \to 0.$$

Следовательно, дифференциал $(dz/w)'_t$ – мероморфный на X_{t_0}, с единственным полюсом второго порядка (в то время как dz/w – голоморфный на X_{t_0} дифференциал). Таким образом, f – не более чем мероморфная на X_{t_0} функция с единственным полюсом первого порядка. Существование такой функции, отличной от постоянной, означало бы существование эллиптической функции с единственным полюсом первого порядка в параллелограмме периодов, что невозможно (вычет в полюсе должен быть при этом нулевым, поскольку интеграл от эллиптической функции по границе параллелограмма периодов равен нулю). Итак, $f = \mathrm{const}$ и $c_1 = c_2 = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения.

4. Уравнение Пикара–Фукса

Назовем здесь *уравнением Пикара–Фукса* следующее гипергеометрическое уравнение Гаусса:

$$t(1-t)y'' + (1-2t)y' - \frac{1}{4}y = 0. \tag{1}$$

Утверждение 2. *Линейно независимые функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются базисными решениями уравнения* (1).

Доказательство. Покажем, что всякий интеграл

$$y(t) = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{w}, \tag{2}$$

где γ – цикл на X_t, удовлетворяет уравнению (1). Как уже было получено при доказательстве утверждения 1,

$$y'(t) = \int\limits_{\gamma} \left(\frac{dz}{w}\right)'_t = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{2(z-t)w},$$

следовательно,

$$y''(t) = \int\limits_\gamma \left(\frac{1}{2(z-t)w}\right)'_t dz = -\int\limits_\gamma \frac{-w+(z-t)w'_t}{2(z-t)^2w^2}\,dz =$$

$$= \int\limits_\gamma \left(\frac{1}{2(z-t)^2w} - \frac{w'_t}{2(z-t)w^2}\right) dz =$$

$$= \int\limits_\gamma \left(\frac{1}{2(z-t)^2w} + \frac{1}{4(z-t)^2w}\right) dz = \int\limits_\gamma \frac{3}{4(z-t)^2w}\,dz.$$

Таким образом, для функции y, определяемой формулой (2), имеем

$$t(1-t)y'' + (1-2t)y' - \frac{1}{4}y = \int\limits_\gamma \left(\frac{3t(1-t)}{4(z-t)^2} + \frac{1-2t}{2(z-t)} - \frac{1}{4}\right)\frac{dz}{w} =$$

$$= \int\limits_\gamma \frac{t+2(1-t)z-z^2}{4(z-t)^2}\cdot\frac{dz}{w}. \qquad (3)$$

Теперь для завершения доказательства утверждения остается показать, что последнее подынтегральное выражение является точным дифференциалом. В силу уравнения кривой Γ_t имеем

$$2w\,dw = d\big(z(z-1)(z-t)\big) = (t-2(1+t)z+3z^2)dz =$$

$$= (t+2(1-t)z-z^2)dz + (4z^2-4z)dz.$$

Следовательно,

$$\frac{t+2(1-t)z-z^2}{4(z-t)^2}\cdot\frac{dz}{w} = \frac{dw}{2(z-t)^2} - \frac{z(z-1)}{(z-t)^2}\cdot\frac{dz}{w} = d\,\frac{w}{2(z-t)^2},$$

и, тем самым, интеграл (3) равен нулю.

5. Заключение

Описанное здесь свойство периодов может быть обобщено на произвольную систему алгебраических многообразий, зависящих от параметров, по которым можно дифференцировать, что изложено в работе Ю. И. Манина [3]. Ключевая идея состоит в получении соотношений, являющихся результатом применения линейных дифференциальных операторов к замкнутым дифференциальным 1-формам, преобразующих их в точные (подобно подынтегральной 1-форме в соотношении (3)).

Заметим, что можно рассматривать и мероморфные дифференциалы. Например, если оставаться в рамках одномерных многообразий (алгебраических кривых), зависящих от нескольких параметров $a_1, \ldots, a_n$, $a_i \neq a_j$, то в специальном случае кривых вида

$$\Gamma_a = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^m = (z - a_1)^{k_1} \ldots (z - a_n)^{k_n}\},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, можно подобрать мероморфные дифференциалы на Γ_a такие, что их интегралы по циклам будут выражать решения *уравнения Шлезингера*. При этом интегрирование по циклам, обходящим *особые точки* дифференциалов (отсутствующие в случае голоморфных дифференциалов), сводится к вычислению вычетов и дает явные выражения для полиномиальных, рациональных или алгебраических (представимых в радикалах) решений уравнения Шлезингера. Данное исследование частично изложено в работе [4] и продолжается в настоящий момент.

Литература

1. Дубровин Б. А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. — М.-Ижевск: РХД, 2001.
2. Picard E., Simart G. Théorie des fonctions algébriques de deux variables independants. — Paris, 1897–1906.
3. Манин Ю. И. *Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями* // Известия АН СССР. Сер. матем., 1963, том 27, выпуск 6, 1395–1440.
4. Dragović V., Gontsov R., Shramchenko V. *Triangular Schlesinger systems and superelliptic curves* // Physica D, 2021, V. 424, 132947.