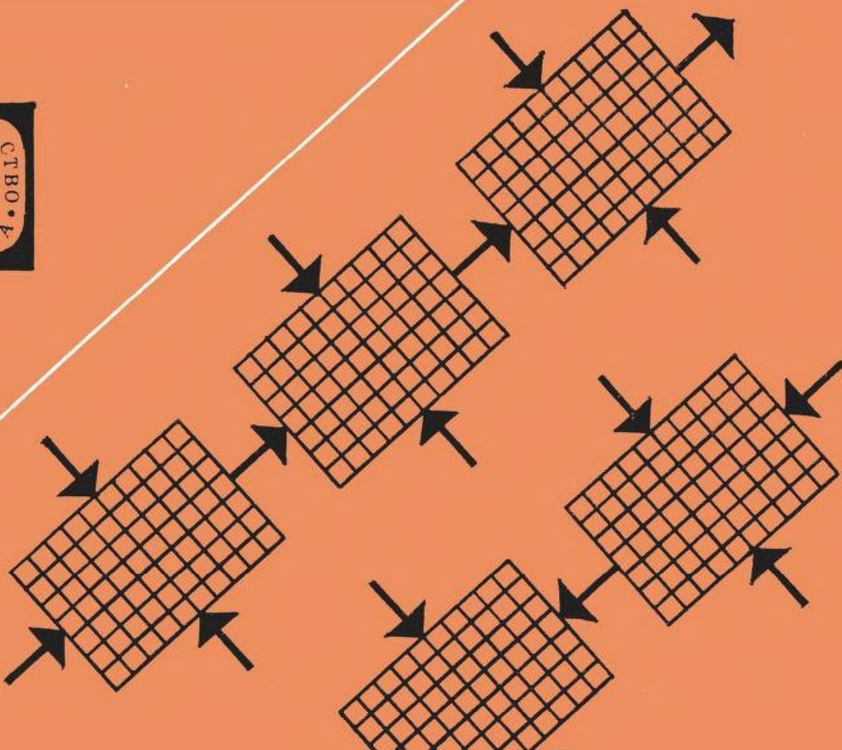
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА



АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Всесоюзный научно-исследовательский институт
системных исследований

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук, профессор
М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

МОСКВА
«Н А У К А»
1986

УДК 62—50

Математическая теория систем/Н. А. Бобылев, В. Г. Болтянский, С. Ю. Всехсвятский, В. В. Калашников, В. С. Козякин, В. Б. Колмановский, А. А. Кравченко, А. М. Красносельский, А. В. Покровский М.: «Наука», 1986.

В книге изложен ряд разделов современной математической теории систем. Рассмотрены методы решения оптимизационных задач для различных классов систем. Большое внимание уделено методам исследования динамики процессов в общих нелинейных системах и системах с нестандартными звеньями; изучены способы приближенного построения решений и возможности упрощения соответствующих уравнений; исследованы свойства стохастических моделей.

Для специалистов по теории систем, теории управления, математиков, механиков. Ил. 14, Библиогр. 114 назв.

Рецензенты:
В. А. ГЕЛОВАНИ, А. Д. МЫШКИС, Б. Т. ПОЛЯК

М $\frac{1502010000\text{-}300}{042(02)\text{-}86}$ 118-86-III

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время математическая теория систем как одно из направлений системного анализа привлекает к себе все большее внимание инженеров и математиков, экономистов и биологов, механиков и других специалистов. Интерес к этому направлению связан как с появлением нового объекта математических исследований, так и с прикладной значимостью этого объекта.

Новизна исследуемого объекта состоит в том, что отдельные его части (подсистемы) и объект (система) как целое могут иметь различные типы поведения. Например, подсистемы, будучи изолированными, могут быть неустойчивыми, тогда как их коллектив устойчив. Довольно распространенной ситуацией является также такая, когда подсистемы имеют стохастический тип поведения, а система как целое — вполне детерминированная. Список таких примеров может быть продолжен, но уже из приведенных видно, что исследование системы как целого позволило бы вскрыть так называемый системный эффект, который не наблюдается ни в одной из составляющих ее подсистем и возникает как результат их взаимодействия.

Подобные явления чаще всего наблюдаются в системах с большим количеством элементов (подсистем). Анализ таких многоэлементных систем связан с необходимостью учитывать и оценивать множество разнообразных по своей природе факторов в условиях неопределенности и недостаточной информированности. Такая ситуация типична для многих экономических, биологических, социальных, технических и других систем.

Математическая теория систем находится сейчас в стадии накопления определенных фактов, методов, моделей, алгоритмов, ориентированных на исследование системы как целого.

В последние годы проблемы математической теории систем интенсивно обсуждались и развивались на общесоюзных и общемосковских семинарах, проводимых Всесоюзным научно-исследовательским институтом системных исследований. Многие из них носят завершенный характер и представляют интерес для широкого круга специалистов. Часть этих результатов подытожена в настоящей монографии, подготовленной авторским коллективом сотрудников ВНИИСИ ГКНТ и АН СССР, ИПУ Минприбора и АН СССР, ИПМ АН СССР, ВКНЦ АМН СССР.

Книга состоит из восьми глав. В первых трех главах основное внимание уделяется оптимизационным проблемам теории систем. В гл. 1, написанной В. Г. Болтянским, приведено описание метода шатров. Этот метод, обладающий высокой конструктивной мощностью, дает единую методологию доказательств в различных общих условиях утверждений типа теоремы Куна — Таккера, принципа максимума и других утверждений теории оптимизации. Гл. 2 написана Н. А. Бобылевым. В ней развивается основанный на понятии топологического индекса экстремали подход к оптимизационным задачам; результаты важны уже для задач классического вариационного исчисления. В главе вычисляется топологический индекс оптимальных управлений в задачах с ограничениями по энергетике. Специфические сложности возникают в задачах оптимального управления системами, содержащими задержки различного типа. В гл. 3, написанной В. Б. Колмановским, предлагаются общие условия оптимальности для систем с последействием, устанавливаются важные соотношения двойственности между оптимальными управлениями и наблюдениями.

Важный раздел математической теории систем связан с изучением стохастических моделей массового обслуживания, надежности, управления запасами и т. п. Поведение подобных моделей часто описывают так называемыми регенерирующими процессами. Гл. 4, написанная В. В. Калашниковым и С. Ю. Всехсвятским, посвящена предельным теоремам, соответствующим распределению времени наступления первого события (типа отказа системы, переполнения очереди и т. п.) в изучаемом процессе.

Последующие главы монографии посвящены изучению сложных нелинейных систем. Анализ динамики таких систем часто упирается в необходимость построения корректного математического описания их нестандартных звеньев. В гл. 5, написанной А. А. Кравченко, предлагается математическая теория нового класса звеньев с гистерезисом, охватывающая общие реологические модели (включая модели А. Ю. Ишлинского, В. В. Новожилова — Ю. И. Кадашевича и др.). Гл. 6 написана А. В. Покровским. Здесь излагаются методы исследования динамики систем с различными типами гистерезисных нелинейностей, с разрывными звеньями и «сильными» нелинейностями других типов. Изучается диссипативность таких систем, исследуются колебательные режимы, обнаруживаются режимы, обладающие свойствами «сильной корректности». В гл. 7, написанной А. М. Красносельским, развиваются частотные методы нелокальной теории вынужденных колебаний в нелинейных системах управления. Предлагаемые частотные критерии существования вынужденных периодических колебаний одновременно обеспечивают реализуемость и сходимость метода гармонического баланса их приближенного построения.

При анализе уравнений, возникающих в математической теории систем, применяются различные формальные процедуры их упрощения. В задачах, связанных с исследованием малых решений, входящие в уравнения нелинейности часто заменяются несколькими членами их разложения в ряд Тейлора. Еще с работ А. Пуанкаре — А. М. Ляпунова известно, что эта процедура может привести к качественно неверным выводам. В последней главе, написанной В. С. Козякиным, исследуется вопрос об эффективных условиях, при которых указанные упрощения допустимы.

1 МЕТОД ШАТРОВ И ПРОБЛЕМЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Современная математика пока не знает адекватных методов исследования сложных систем в целом. Возможно, сложившиеся математические методы не приспособлены для всестороннего анализа таких систем. Вместе с тем в системных исследованиях важную роль играет математическая постановка (и методы решения) задач, связанных с оптимальным функционированием отдельных звеньев сложных систем, с расчетом оптимального поведения упрощенных моделей сложных систем и т. п. Сюда относятся в первую очередь проблемы системного анализа, математически формулирующиеся в виде экстремальных задач разного характера: оптимизации с дискретным и непрерывным (даже «многомерным») временем, математического программирования, минимаксных, игровых равновесных и т. д. Теория таких задач относится к числу сложившихся, сформировавшихся математических методов системного анализа, применяющихся, например, при исследовании экономико-математических моделей, экологических систем, задач управления различными техническими системами. Сказанное делает понятным, что центральные результаты теории экстремальных задач (теорема Куна—Таккера, принцип максимума для задач оптимизации с непрерывным или дискретным временем и др.) относятся к числу важных аппаратных математических средств системного анализа.

Вместе с тем следует отметить, что специфика экстремальных задач, возникающих при математическом исследовании различного рода систем, чрезвычайно многообразна. Постоянно появляются все новые постановки задач, которые чуть-чуть не укладываются в стандартную формулировку теоремы Куна—Таккера или принципа максимума, и это приводит к возникновению все новых вариантов этих теорем. Теорема Куна—Таккера — это сегодня уже не один результат, а большая группа сходных теорем, отличающихся спецификой накладываемых условий. То же относится к принципу максимума и другим критериям решения экстремальных задач. И поскольку возникают все новые вариации постановок задач, совокупность близких, но чем-то отличающихся критериев оптимизации становится все более «распухшей» и менее обозримой, не говоря уже о том, что нет гарантии найти в этом «распухшем» наборе критериев именно тот, который можно будет применить к решению вновь возникшей экстремальной задачи.

К счастью — в отличие от положения вещей, характерного для комбинаторной геометрии или задач дискретного математического программирования, где каждая новая задача зачастую требует совершенно нового подхода,— для решения большей части экстремальных задач созданы единые достаточно общие методы. И с точки зрения методологии системного анализа овладение этими общими методами представляется более важным, чем детальное знакомство с многочисленными критериями решения конкретных экстремальных задач. Во всяком случае, для математика, обслуживающего тот или иной раздел прикладного системного анализа, владение этими общими методами особенно ценно, поскольку эти методы могут с помощью более или менее стандартных схем помочь получить специфические критерии оптимизации для новых постановок экстремальных задач.

В этой главе читатель найдет весьма общее (и в то же время достаточно популярное) изложение метода шатров, который сейчас обладает, по-видимому, наибольшей конструктивной мощностью применительно к задачам оптимизации и другим экстремальным задачам (в первоначальном — конечномерном — виде метод шатров изложен в работах [7—10]; полные доказательства формулируемых ниже теорем — бесконечномерных — можно найти в работах [11—14]).

1. Наглядное описание метода шатров

Для того чтобы пояснить идейную сторону метода, рассмотрим вначале «на пальцах» одну простую задачу математического программирования, на материале которой будет удобно проследить основные конструкции, характерные для метода шатров.

Пусть множество Ω задано в пространстве R^n системой неравенств

$$g_1(x) \leqslant 0,\ g_2(x) \leqslant 0, \ldots, g_l(x) \leqslant 0, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, а g_i — скалярные функции. Кроме того, в пространстве R^n (или в некотором открытом множестве, содержащем Ω) задана функция $f(x)$ и ставится задача об отыскании наименьшего значения этой функции на множестве Ω:

$$f(x) \to \min \text{ (на } \Omega). \tag{1.2}$$

Мы хотим выяснить, как может выглядеть необходимое условие того, что в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ функция f принимает наименьшее значение. С этой целью обозначим через Ω_i множество всех точек x, удовлетворяющих условию $g_i(x) \leqslant 0$:

$$\Omega_i = \{x\colon g_i(x) \leqslant 0\},\ i = 1, \ldots, l.$$

Так как множество Ω определяется системой неравенств, то оно является пересечением введенных множеств:

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_l.$$

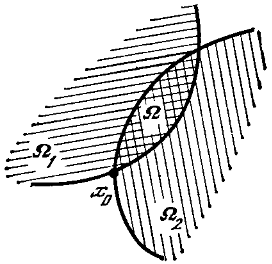


Рис. 1

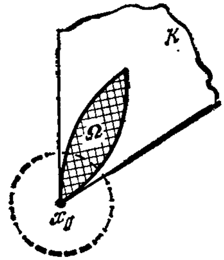


Рис. 2

Далее, «поверхность уровня» функции f, проходящая через точку x_0, т. е. $\{x: f(x) = f(x_0)\}$, разбивает R^n на область меньших значений и область бóльших значений. Добавим к области меньших значений точку x_0 и полученное множество обозначим через Ω_0:

$$\Omega_0 = \{x: f(x) < f(x_0)\} \cup \{x_0\}.$$

При этих обозначениях справедлива следующая теорема: *для того чтобы функция f, рассматриваемая на множестве Ω, достигала в точке x_0 наименьшего значения, необходимо и достаточно, чтобы пересечение $\Omega_0 \cap \Omega$ состояло из единственной точки x_0*:

$$\Omega_0 \cap \Omega = \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l = \{x_0\}. \qquad (1.3)$$

В самом деле, если бы существовала отличная от x_0 точка $x' \in \Omega_0 \cap \Omega$, то в этой точке (по определению множества Ω_0) мы имели бы $f(x') < f(x_0)$, т. е. в точке $x' \in \Omega$ функция f принимала бы меньшее значение, чем в точке x_0. Поэтому условие (1.3) необходимо. Аналогично проверяется достаточность.

Следующая идея — линеаризация Мы хотим заменить каждое из множеств $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ его «линейным приближением», с тем чтобы сделать соотношение (1.3) более грубым, но легче проверяемым. На рис. 1 (относящемся к случаю $l = 2$) изображены области Ω_1, Ω_2 и их пересечение $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Вблизи точки $x_0 \in \Omega$ множество Ω мало отличается от выпуклого конуса K (см. на рис. 2 окрестность, ограниченную штриховой окружностью). Конус K и представляет собой «линейное приближение» множества Ω вблизи точки x_0 — шатер, как в дальнейшем будем говорить (точные определения приведены ниже).

Заметим, что шатром множества Ω_1 в точке x_0 является полуплоскость K_1 (рис. 3), а шатром множества Ω_2 — полуплоскость K_2, причем конус K (шатер множества Ω) является пересечением этих полуплоскостей. Иначе говоря, в рассматриваемой ситуации справедливо следующее утверждение: *пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — некоторые множества в R^n, имеющие общую точку x_0, и пусть $K_1, \ldots, K_l$ — шатры этих множеств в точке x_0; тогда $K_1 \cap \ldots \cap K_l$ есть шатер множества $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$*. В такой общей формулировке это утверждение места не имеет (контрпример приведен в работе [15]), но при наложении некоторых естественных ограничений оно справедливо, и притом не только в евклидовом, но и в топологическом векторном пространстве. Ниже будет приведена точная формулировка (и доказательство) этого утверждения, являющегося одним из центральных результатов теории шатров.

Вернемся к двумерной модели, изображенной на рис. 1—3. На рис. 4 изображены не только множество Ω и его шатер K, но и введенное ранее множество Ω_0, шатром которого является полуплоскость K_0. В соответствии с равенством (1.3) пересечение $\Omega_0 \cap \Omega$ состоит только из одной точки x_0. На рисунке видно, что граничная прямая Γ полуплоскости K_0 отделяет K_0 от конуса $K = K_1 \cap K_2$, т. е. K_0 содержится в одной полуплоскости, определяемой прямой Γ (даже совпадает с ней), а пересечение $K_1 \cap K_2$ — в другой полуплоскости. Это дает повод к введению

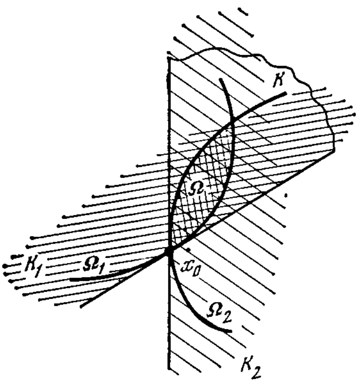


Рис. 3

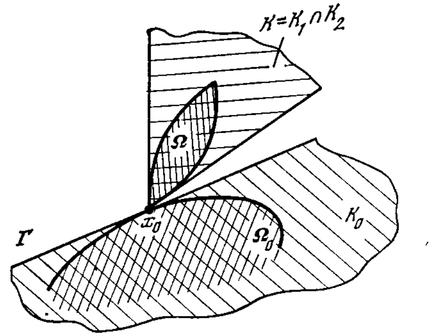


Рис. 4

следующего определения: будем говорить, что система выпуклых конусов $K_0, K_1, \ldots, K_l$ с общей вершиной x_0 в R^n обладает свойством отделимости, если существует в R^n гиперплоскость, проходящая через точку x_0, которая отделяет какой-либо один из этих конусов от пересечения остальных (т. е. для некоторого i конус K_i находится в одном замкнутом полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а пересечение остальных конусов — в другом замкнутом полупространстве). В основной части главы аналогичное определение будет рассматриваться в произвольном топологическом векторном пространстве.

Заметим теперь, что (насколько можно судить по ситуации, изображенной на рис. 4) свойство отделимости конусов $K_0, K_1, \ldots, K_l$ является необходимым условием выполнения равенства (1.3) — именно необходимым, так как конусы K_0 и K могут быть отделимыми, даже если равенство (1.3) не выполняется (т. е. найдется отличная от x_0 точка $x' \in \Omega_0 \cap \Omega$, рис. 5). Таким образом, в рассматриваемой ситуации справедливо следующее утверждение: *пусть $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — некоторые множества в R^n, имеющие общую точку x_0, и пусть $K_0, K_1, \ldots, K_l$ — шатры этих множеств в точке x_0; тогда, если конусы $K_0, K_1, \ldots, K_l$ не обладают* *свойством отделимости, то найдется отличная от* x_0 *точка* $x' \in \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$. Утверждение это при некотором уточнении (а именно в предположении, что хотя бы один из конусов $K_0, K_1, \ldots, K_l$ не совпадает со своей несущей плоскостью) в самом деле справедливо. Более того, при наложении некоторых естественных ограничений, оно имеет место для топологических векторных пространств. Ниже будет приведена точная формулировка (и доказательство) этого утверждения, также являющегося одним из центральных результатов теории шатров.

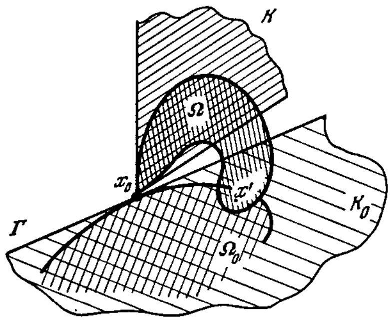


Рис. 5

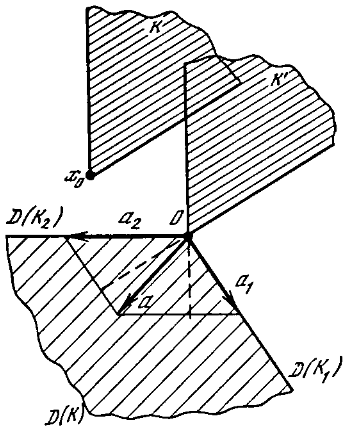


Рис. 6

Сформулированные утверждения дают возможность получения необходимых критериев минимума (для различных экстремальных задач) в геометрической форме, т. е. в виде требования о выполнении свойства отделимости для некоторой системы выпуклых конусов. Для того чтобы переформулировать эти необходимые условия в алгебраической форме (в виде системы равенств и неравенств), воспользуемся понятием двойственного (полярного) конуса.

На рис. 6 изображен двойственный конус $D(K)$ конуса $K \subset R^2$. Он строится следующим образом: берется конус K' с вершиной 0, получающийся из K параллельным переносом, после чего $D(K)$ определяется как множество всех векторов $a \in R^n$, для которых скалярное произведение ax' неотрицательно для любого $x' \in K'$:

$$D(K) = \{a\colon a(x - x_0) \leqslant 0 \text{ при } x \in K\}.$$

Заметим, что для конуса K_1 (полуплоскости) двойственный конус $D(K_1)$ представляет собой луч, являющийся одной из сторон угла $D(K)$ на рис. 6. Конус $D(K_2)$ — луч, являющийся другой стороной этого угла. Так как угол $D(K)$ — выпуклый, то любой вектор $a \in D(K)$ представляется в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in D(K_1)$, $a_2 \in D(K_2)$ (см. рис. 6). Вообще, *если* $a \in D(K_1 \cap \ldots \cap K_l)$, *то существуют такие векторы* $a_1 \in D(K_1), \ldots, a_l \in D(K_l)$, *что* $a = a_1 + \ldots + a_l$.

Это утверждение (также справедливое в топологических векторных пространствах) и позволяет получить интересующее нас алгебраическое условие, при выполнении которого система конусов обладает свойством отделимости. Пусть выпуклые конусы $K_0, K_1, \ldots, K_l$ обладают свойством отделимости. Например, существует гиперплоскость Г, отделяющая K_0 от пересечения остальных конусов (см. рис. 4). Если a_0 — внешняя нормаль полупространства, содержащего конус K_0 (рис. 7), то $a_0 \in D(K_0)$, причем $-a_0$ есть внешняя нормаль полупространства, содержащего $K_1 \cap \ldots \cap K_l$, т. е. $-a_0 \in D(K_1 \cap \ldots \cap K_l)$. Согласно сказанному выше это означает, что $-a_0 = a_1 + \ldots + a_l$, где $a_1 \in D(K_1), \ldots, a_l \in D(K_l)$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации справедливо следующее утверждение: *пусть $K_0, K_1, \ldots, K_l$ — система выпуклых конусов в R^n с общей вершиной x_0; для того чтобы эта система конусов обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно существование таких векторов $a_0 \in D(K_0)$, $a_1 \in D(K_1), \ldots, a_l \in D(K_l)$, хотя бы один из которых был отличен от нуля, и выполнялось соотношение*

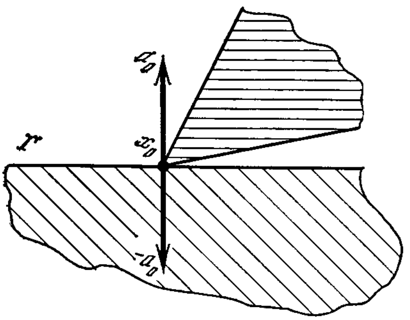


Рис. 7

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_l = 0. \tag{1.4}$$

При наложении некоторых естественных ограничений (о которых речь пойдет ниже) это утверждение справедливо для системы конусов в топологическом векторном пространстве, и это также служит одним из центральных результатов теории шатров.

Наглядные соображения, позволившие сформулировать эти центральные результаты теории шатров, по существу, не выходят за рамки рассуждений, относящихся к доказательству так называемой леммы Фаркаша и применяющихся при доказательстве теоремы Куна—Таккера. Однако они изложены на языке отделимости системы выпуклых конусов. Эта новая идея является решающей. Достаточно сказать, что пользующийся известностью при решении экстремальных задач метод Дубовицкого—Милютина [32, 33], который в идейном плане близок к методу шатров, содержит весьма ограничительное требование телесности выпуклых конусов, мешающее в ряде случаев получать адекватные необходимые критерии экстремума. Именно идея об отделимости системы выпуклых конусов позволяет снять это ограничительное требование телесности и сделать метод шатров весьма общим аппаратом (частным случаем которого является метод Дубовицкого—Милютина), дающим наиболее тонкие критерии экстремума.

Сформулированные предложения дают достаточно ясное представление о схеме рассуждений, характерной для метода шатров. Для примера покажем, как работает эта схема применительно к экстремальной задаче (1.1), (1.2), которая была рассмотрена вначале. При этом будем считать, что все функции $g_1, g_2, \ldots, g_l, f$ являются гладкими, т. е. имеют непрерывные первые производные.

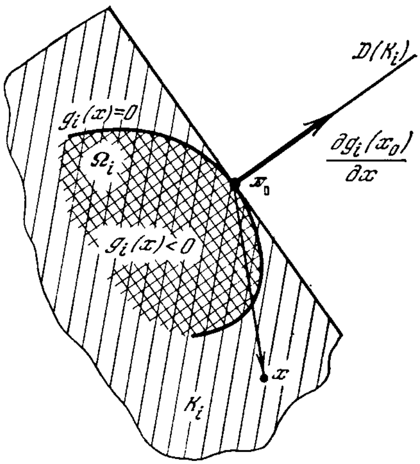


Рис. 8

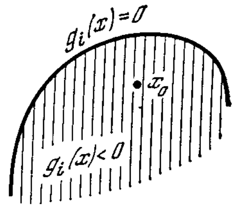


Рис. 9

Пусть x_0 — некоторая точка, удовлетворяющая системе неравенств (1.1), т. е.

$$x_0 \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_l.$$

Тогда в точке x_0 некоторые из функций $g_1, g_2, \ldots, g_l$ могут принимать нулевое значение, а некоторые — отрицательные значения; индекс i, для которого $g_i(x_0) = 0$, называется активным, а индекс, для которого $g_i(x_0) < 0$,— неактивным. Для случая активного индекса i (рис. 8) шатром множества Ω_i является полупространство $K_i = \left\{x: \frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x}(x - x_0) \leqslant 0\right\}$, а двойственный конус $D(K_i)$ состоит из всех векторов вида $a_i = \lambda_i (\partial g_i(x_0)/\partial x)$, где $\lambda_i \geqslant 0$. Аналогично, для множества Ω_0 шатром является полупространство $K_0 = \left\{x: \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}(x - x_0) \leqslant 0\right\}$, а двойственный конус состоит из всех векторов вида $a_0 = \lambda_0 (\partial f(x_0)/\partial x)$, где $\lambda_0 \geqslant 0$. Наконец, для случая неактивного индекса i (рис. 9) все достаточно близкие к x_0 точки $x \in R^n$ принадлежат множеству Ω_i, и потому шатром множества Ω_i служит все пространство $K_i = R^n$ (рассматриваемое как конус с вершиной x_0). Поэтому двойственный конус $D(K_i)$ состоит из единственного вектора 0. Можно считать, что и в этом случае двойственный конус состоит из векторов вида $\lambda_i\,(\partial g_i(x_0)/\partial x)$, где, однако, $\lambda_i = 0$. Теперь равенство (4) принимает вид

$$\lambda_0 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial x} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial g_l(x_0)}{\partial x} = 0, \quad \lambda_i \geqslant 0, \tag{1.5}$$

причем среди чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_l$ имеются отличные от нуля и $\lambda_i \geqslant 0$ для случая активного индекса (т. е. при $g_i(x_0) = 0$), $\lambda_i = 0$ для неактивного индекса (т. е. при $g_i(x_0) < 0$). Таким образом, для любого индекса (активного или неактивного) справедливо равенство

$$\lambda_i g_i(x_0) = 0, \; i = 1, \ldots, l, \tag{1.6}$$

называемое условием нежесткости. Соотношения (1.5), (1.6) и дают необходимое условие экстремума в рассматриваемой задаче математического программирования (представляющее собой частный случай теоремы Куна—Таккера; более общая постановка задачи предполагает, что имеются как ограничения типа неравенств (1.1), так и ограничения типа равенств). Заметим, что все конусы K_0, $K_1, \ldots, K_l$ являются в рассматриваемом случае телесными, т. е. к этой задаче в равной степени применимы как метод шатров, так и метод Дубовицкого—Милютина.

Отметим, что по той же схеме рассуждений, основанной на методе шатров, проводится решение и других экстремальных задач, только множества Ω_i, участвующие в соотношении (1.1), а также их шатры K_i определяются каждый раз по-своему, с учетом специфики рассматриваемой экстремальной задачи.

Рассмотрим в качестве иллюстрации одну простейшую задачу оптимального управления с непрерывным временем. Рассматривается управляемый объект

$$\dot{x} = g(x, u),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ — фазовое состояние объекта, а u — управляющий параметр, которому предписано изменяться в некоторой области управления $U \subset R^r$. Изменение $u(t)$ управляющего параметра с течением времени может быть любой кусочно непрерывной функцией со значениями в U. Задано начальное фазовое состояние x_* и терминальное множество M_0. Кроме того, в R^n задана некоторая функция $f(x)$. Задача заключается в том, чтобы найти такое управление $u(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t_0$ («оптимальное»), для которого соответствующая фазовая траектория $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t_0$, начинающаяся в точке x_* (т. е. $x(t_*) = x_*$), в момент времени t_0 приходит в некоторую точку множества M_0 и при этом доставляет минимум функции f в конечной точке:

$$x_0 = x(t_0) \in M_0, \qquad f(x_0) \to \min.$$

Чтобы осмыслить эту задачу в рамках изложенных выше идей, обозначим через Ω_1 множество достижимости, т. е. множество всех тех фазовых состояний, в которые рассматриваемый управляемый объект может прийти под воздействием какого-либо допустимого управления $u(t)$ (начиная движение из точки x_*). Далее, терминальное множество M_0 обозначим теперь через Ω_2. Таким образом, интересующие нас точки x_0 должны принадлежать множеству $\Omega_1 \cap \Omega_2$, т. е. в точку x_0 мы можем прийти под воздействием некоторого допустимого управления и при этом $x_0 \in M_0$. Задача теперь заключается в том, чтобы найти минимум функции f на этом множестве $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Это задача того же типа, что и выше, и для осуществления минимума функции f в точке $x_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{x_0\}$$

(ср. с условием (1.3)), где Ω_0 определяется так же, как и прежде.

Теперь ясно, что если мы будем знать шатры множеств Ω_0, Ω_1, Ω_2 в точке x_0, то решение этой задачи (получение необходимого условия экстремума) можно будет провести на основе описанной схемы рассуждений по методу шатров. Это и приводит к принципу максимума, дающему искомое необходимое условие оптимальности. Для множеств Ω_0, Ω_2 (например, в случае, если множество Ω_2 представляет собой многообразие или является выпуклым) нахождение шатров не представляет затруднений. Однако множество Ω_1 (множество достижимости) имеет более сложную природу, и нахождение шатра этого множества в точке x_0 связано с существенными затруднениями. Именно построение шатра этого множества, впервые осуществленное автором [16], и явилось успехом в построении основ теории оптимизации в общем, нелинейном случае. Детали этого построения можно найти в обстоятельной статье [10], где имеются также и другие примеры решения экстремальных задач.

На примере задач оптимизации удобно проиллюстрировать сформулированное выше положение о появлении новых, видоизмененных экстремальных задач и о важности в связи с этим развития общих методов. В. Г. Гребенников высказал соображения о целесообразности рассмотрения экономических моделей, в которых при достижении заданного уровня происходит «агрегирование» координат, т. е. переход к упрощенной модели. Например, в начальный (плановый) период учитывается производство нескольких типов легированной стали, а на заключительном (упреждающем) периоде эти координаты соединяются в одну, характеризующую общее производство стали. Таким образом, при переходе от планового периода к упреждающему происходит изменение числа координат, т. е. смена фазового пространства.

Иначе говоря, развитие производства на плановом периоде описывается некоторым управляемым объектом $\dot{x} = g_1(x, u)$, и в фазовом пространстве этого объекта задана гиперповерхность перехода, характеризующая «выполнение плана». Различные точки гиперповерхности соответствуют различным вариантам выполнения плана. Когда рассматриваемый управляемый объект достигает этой гиперповерхности, происходит (по определенному заданному закону) «перескок» в другое заданное фазовое пространство, и дальнейший процесс осуществляется в этом фазовом пространстве по другому закону: $\dot{y} = g_2(y, v)$. В фазовом пространстве переменной y задано терминальное многообразие M_0, и задача заключается в том, чтобы найти полную траекторию (содержащую участок, расположенный в первом фазовом пространстве, перескок и участок во втором фазовом пространстве), для которой конечная точка принадлежала бы терминальному многообразию M_0 и при этом достигался бы максимум заданной функции или заданного интегрального функционала (суммарного дохода).

Эта задача не укладывалась в рамки ранее рассматривавшихся вариантов принципа максимума; ее решение было получено [17] на основе метода шатров в соответствии с намеченной выше общей схемой рассуждений, но, разумеется, в связи с новой постановкой задачи построение шатра для множества достижимости было проведено заново с необходимыми видоизменениями.

Впоследствии, после обсуждения с В. Г. Гребенниковым, была рассмотрена более общая постановка (задача оптимизации со сменой фазового пространства и с переменной областью управления), для которой с помощью метода шатров было получено [18] необходимое условие оптимальности. Это хорошо иллюстрирует важность и действенность метода шатров.

2. Математические основы метода*

Везде в дальнейшем через E обозначается локально выпуклое, отделимое топологическое векторное пространство. Будем говорить, что плоскости L_1 и L_2 пространства E находятся в общем положении, если для любых открытых множеств G_1, G_2 этих плоскостей векторная сумма $G_1 + G_2$ является открытым множеством плоскости $L_1 + L_2$. Далее, если K — выпуклый конус в E, то его относительной внутренностью $\operatorname{ri} K$ будем называть наибольшее открытое множество плоскости $\operatorname{aff} K$, содержащееся в K (где $\operatorname{aff} K$ — несущая плоскость конуса K, т. е. наименьшая плоскость, содержащая K); под плоскостью, как всегда, понимаем множество вида $a + L$, где L — векторное подпространство пространства E.

Определение 2.1. Будем говорить, что система выпуклых конусов $K_1, \ldots, K_l$ с общей вершиной x_0 в E обладает свойством отделимости, если в E существует замкнутая гиперплоскость, отделяющая какой-либо один из этих конусов от пересечения остальных (т. е. для некоторого i конус K_i находится в одном замкнутом полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а пересечение остальных конусов — в другом замкнутом полупространстве).

---

* Читатель, интересующийся лишь приложениями метода, может ознакомиться с приводимыми ниже определениями и формулировками теорем, пропустив доказательства.

Определение 2.2. Для выпуклого конуса K с вершиной x_0 в E через $D(K)$ будем обозначать его двойственный конус, т. е. конус, состоящий из всех таких $a \in E'$, что $a(x - x_0) \leqslant 0$ для любого $x \in K$; здесь E' — топологически сопряженное к E пространство (состоящее из всех непрерывных линейных функционалов на E).

Условие общности положения означает, грубо говоря,— в случае когда L_1 и L_2 пересекаются в одной точке,— что «угол» между векторами $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ «ограничен снизу» по величине (хотя понятие угла не определено в топологических векторных пространствах, но смысл этого утверждения наглядно понятен). Пример 2, приведенный ниже и относящийся к гильбертову пространству, иллюстрирует это определение. Заметим, что в конечномерном пространстве любые две плоскости находятся в общем положении. Важность условия общности положения иллюстрируется следующей леммой; пример, 2, приведенный ниже, показывает, что это условие существенно.

Лемма 2.1. *Пусть K_1, K_2 — выпуклые конусы с общей вершиной в E. Если* $\operatorname{ri} K_1 \neq \varnothing$, $\operatorname{ri} K_2 \neq \varnothing$, $\operatorname{ri} K_1 \cap \operatorname{ri} K_2 = \varnothing$ *и несущие плоскости* $\operatorname{aff} K_1$, $\operatorname{aff} K_2$ *находятся в общем положении, то конусы K_1 и K_2 отделимы.*

Справедливость этой леммы несложно устанавливается на основе стандартной теоремы отделимости * и теоремы Хана—Банаха. Сформулированная лемма является основой доказательства следующей теоремы, служащей одним из центральных результатов теории шатров. Отметим, что в конечномерном случае условия А и Б, указанные в формулировке этой теоремы, выполняются автоматически (т. е. в этом случае указанные условия можно из формулировки исключить).

Теорема 2.1. *Пусть $K_1, \ldots, K_l$ — система выпуклых конусов в E с общей вершиной x_0, обладающая следующими двумя свойствами:* А) $\operatorname{ri} K_1 \neq \varnothing, \ldots, \operatorname{ri} K_l \neq \varnothing$; Б) *если L_1 и L_2 — две плоскости в E, каждая из которых представляется в виде пересечения некоторых из плоскостей* $\operatorname{aff} K_1, \ldots, \operatorname{aff} K_l$, *то L_1 и L_2 находятся в общем положении. Для того чтобы система конусов $K_1, \ldots, K_l$ обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно существование таких векторов $a_1 \in D(K_1), \ldots, a_l \in D(K_l)$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что выполнено соотношение*

$$a_1 + \ldots + a_l = 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть векторы $a_1, \ldots, a_l$, указанные в формулировке, существуют, и пусть, для определенности,

* Все необходимые факты, относящиеся к топологическим векторным пространствам, можно найти в [21] или [88]. Стандартная теорема отделимости утверждает, что если K — выпуклый конус с вершиной 0 (в отделимом, локально выпуклом топологическом векторном пространстве), а G — выпуклое открытое множество, не имеющее с K общих точек, то существует замкнутая гиперплоскость, отделяющая K и G (т. е. существует непрерывный линейный функционал, положительный на G и неположительный на K).

$a_1 \neq 0$. Замкнутые полупространства, определяемые гиперплоскостью $\{x\colon a_1(x-x_0)=0\}$, обозначим через Π_1, Π_2:

$$\Pi_1=\{x\colon a_1(x-x_0)\leqslant 0\},\ \Pi_2=\{x\colon a_1(x-x_0)\geqslant 0\}.$$

Так как $a_1 \in D(K_1)$, то для любой точки $x \in K_1$ имеем $a_1(x-x_0)\leqslant 0$, т. е. $K_1 \subset \Pi_1$. Далее, так как $a_i \in D(K_i)$, то для любой точки $x \in K_2 \cap \ldots \cap K_l$ имеем

$$a_i(x-x_0)\leqslant 0, \quad i=2,\ldots,l.$$

Складывая эти неравенства, получаем $(a_2+\ldots+a_l)(x-x_0)\leqslant 0$, т. е. в силу соотношения (2.1) $a_1(x-x_0)\geqslant 0$. Это означает, что $x \in \Pi_2$. Итак, $K_1 \subset \Pi_1$, $K_2 \cap \ldots \cap K_l \subset \Pi_2$, т. е. система конусов $K_1,\ldots,K_l$ обладает свойством отделимости. Этим доказана достаточность.

Докажем необходимость. Можно считать, что общая вершина конусов совпадает с точкой 0. При $l=2$ соотношение (2.1) (для отделимых конусов K_1, K_2) тривиальным образом справедливо. Предположим, что $l \geqslant 3$ и для меньшего, чем l, числа конусов необходимость условия (2.1) установлена. Докажем его для l конусов $K_1,\ldots,K_l$, обладающих свойством отделимости. Предположим для определенности, что существует замкнутая гиперплоскость Г, отделяющая K_1 от $K_2 \cap \ldots \cap K_l$, т. е. $K_1 \subset \Pi_1$, $K_2 \cap \ldots \cap K_l \subset \Pi_2$, где Π_1, Π_2 — соответствующие замкнутые полупространства.

Если $\operatorname{ri} K_{l-1} \cap \operatorname{ri} K_l = \phi$, то согласно лемме 2.1 конусы K_{l-1} и K_l отделимы, т. е. $K_{l-1} \subset \{x\colon qx \leqslant 0\}$, $K_l \subset \{x\colon qx \geqslant 0\}$, где $q \in E'$, $q \neq 0$, и потому векторы $a_1=\ldots=a_{l-2}=0$, $a_{l-1}=q$, $a_l=-q$ удовлетворяют условию (2.1).

Пусть теперь $\operatorname{ri} K_{l-1} \cap \operatorname{ri} K_l \neq \phi$. Положим $K_{l-1}^* = K_{l-1} \cap K_l$. Тогда $K_1 \subset \Pi_1$, $K_2 \cap \ldots \cap K_{l-2} \cap K_{l-1}^* \subset \Pi_2$, т. е. $l-1$ конусов $K_1,\ldots,K_{l-2}, K_{l-1}^*$ обладают свойством отделимости. При этом $\operatorname{ri} K_{l-1}^* = (\operatorname{ri} K_{l-1}) \cap (\operatorname{ri} K_l)$, $\operatorname{aff} K_{l-1}^* = (\operatorname{aff} K_{l-1}) \cap (\operatorname{aff} K_l)$, откуда следует, что конусы $K_1,\ldots,K_{l-2}, K_{l-1}^*$ удовлетворяют указанным в формулировке условиям А, Б. По предположению индукции существуют такие векторы $a_1 \in D(K_1),\ldots,a_{l-2} \in D(K_{l-2})$, $a_{l-1}^* \in D(K_{l-1}^*)$, не все равные нулю, что

$$a_1+\ldots+a_{l-2}+a_{l-1}^*=0. \tag{2.2}$$

Если $a_{l-1}^*=0$, то, положив $a_{l-1}=a_l=0$, получаем систему векторов $a_1,\ldots,a_{l-2},a_{l-1},a_l$, удовлетворяющих соотношению (2.1). Пусть теперь $a^*_{l-1}\neq 0$; положим $\Pi_1^*=\{x\colon a_{l-1}^* x \leqslant 0\}$, $\Pi_2^*=\{x\colon a_{l-1}^* x \geqslant 0\}$. Тогда $K_{l-1}^* \subset \Pi_1^*$, т. е. $K_{l-1}^* \cap \operatorname{int} \Pi_2^* = \phi$, и потому

$$(K_{l-1} \cap \operatorname{int} \Pi_2^*) \cap (K_l \cap \operatorname{int} \Pi_2^*) = \phi. \tag{2.3}$$

Если $K_{l-1} \cap \operatorname{int} \Pi_2^* = \phi$, то $K_{l-1} \subset \Pi_1^*$, т. е. $a_{l-1}^* \in D(K_{l-1})$. Поэтому, положив $a_{l-1}=a_{l-1}^*$, $a_l=0$, получаем векторы $a_1,\ldots$

$\ldots, a_{l-2}, a_{l-1}, a_l$, удовлетворяющие (2.1); аналогично при $K_l \cap \cap \operatorname{int} \Pi_2^* = \emptyset$. Пусть теперь оба пересечения непусты, т. е. существуют векторы

$$x_{l-1} \in K_{l-1} \cap \operatorname{int} \Pi_2^*, \qquad x_l \in K_l \cap \operatorname{int} \Pi_2^*. \tag{2.4}$$

Так как aff K_{l-1} и aff K_l находятся (по условию Б) в общем положении, то из соотношения (2.3) вытекает согласно лемме 2.1, что конусы $K_{l-1} \cap \operatorname{int} \Pi_2^*$ и $K_l \cap \operatorname{int} \Pi_2^*$ отделимы, т. е. первый из них содержится в $P_1 = \{x\colon\ bx \leqslant 0\}$, а второй — в $P_2 = \{x\colon\ bx \geqslant \geqslant 0\}$, где $b \neq 0$. При этом функционалы $\overset{*}{a}_{l-1}$, b линейно независимы (поскольку согласно записи (2.4), $\overset{*}{a}_{l-1}\ x_{l-1} > 0$, $\overset{*}{a}_{l-1}\ x_l > 0$, но $bx_{l-1} \leqslant 0$, $bx_l \geqslant 0$). Следовательно, пересечения $\Pi_1^* \cap P_1$, $\Pi_1^* \cap \cap P_2$, $\Pi_2^* \cap P_1$, $\Pi_2^* \cap P_2$ являются телесными выпуклыми конусами, причем внутренность каждого из них не пересекается с остальными тремя конусами. Из включения

$$K_{l-1} \subset \Pi_1^* \cup (K_{l-1} \cap \operatorname{int} \Pi_2^*) \subset \Pi_1^* \cup P_1$$

вытекает теперь, что $K_{l-1} \cap \operatorname{int} (\Pi_2^* \cap P_2) = \emptyset$, и потому K_{l-1} и $\Pi_2^* \cap P_2$ отделимы, т. е.

$$K_{l-1} \subset \{x\colon\ c_1x \leqslant 0\},\ \Pi_2^* \cap P_2 \subset \{x\colon\ c_1x \geqslant 0\},$$

где $c_1 \neq 0$. Аналогично, $K_l \subset \{x\colon\ c_2x \leqslant 0\}$, $\Pi_2^* \cap P_1 \subset \{x_1\colon\ c_2x \geqslant \geqslant 0\}$, $c_2 \neq 0$. При этом из включения $\Pi_2^* \cap P_2 \subset \{x\colon\ c_1x \geqslant 0\}$ вытекает, что c_1 есть линейная комбинация функционалов $\overset{*}{a}_{l-1}$ и b (и, аналогично, c_2 — линейная комбинация функционалов $\overset{*}{a}_{l-1}$ и b). Далее,

$$\Pi_2^* = (\Pi_2^* \cap P_1) \cup (\Pi_2^* \cap P_2) \subset \{x\colon c_1x \geqslant 0\} \cup \{x\colon c_2x \geqslant 0\}, \tag{2.5}$$

откуда, переходя к дополнениям, имеем

$$\operatorname{int} \Pi_1^* \supset \{x\colon\ c_1x < 0\} \cap \{x\colon\ c_2x < 0\}. \tag{2.6}$$

Если теперь c_1 и c_2 линейно независимы, то $\overset{*}{a}_{l-1} = \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2$, причем из выражения (2.6) следует, что $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$. Так как $K_{l-1} \subset \{x\colon\ c_1\,x \leqslant 0\}$, то $c_1 \in D\ (K_{l-1})$, и потому $\alpha_1c_1 \in D\ (K_{l-1})$. Аналогично, $\alpha_2c_2 \in D\ (K_l)$. Поэтому, полагая $a_{l-1} = \alpha_1c_1$, $a_l = \alpha_2c_2$, получаем требуемые векторы $a_1, \ldots, a_{l-2}, a_{l-1}, a_l$, удовлетворяющие в силу равенства (2.2) условию (2.1). Если же c_1 и c_2 линейно зависимы, т. е. $c_2 = kc_1$ $(k \neq 0)$, то при $k > 0$ из формулы (2.5) следует, что $\Pi_2^* = \{x\colon\ c_1x \geqslant 0\}$, т. е. $\overset{*}{a}_{l-1} = \alpha_1c_1$, где $\alpha_1 > 0$. Поэтому векторы $a_{l-1} = \alpha_1c_1$, $a_l = 0$ обеспечивают выполнение условия (2.1). Наконец, если $c_2 = kc_1$, где $k < 0$, то, поскольку $c_1 \in D\ (K_{l-1})$, $c_2 \in D\ (K_l)$, имеем $-c_1 \in D\ (K_l)$, и потому условию (2.1) удовлетворяют векторы $a_1 = \ldots = a_{l-2} = 0$, $a_{l-1} = c_1$, $a_l = -c_1$.

Проведенная индукция доказывает теорему. Ниже приведены примеры, показывающие существенность наложенных условий А и Б.

В дальнейшем предполагается, что фиксирован некоторый класс Ξ топологических векторных пространств и некоторый класс Θ локальных отображений (отображающих окрестность нуля одного пространства класса Ξ в другое), причем выполнены сформулированные ниже условия α, β, γ. При формулировке этих условий и во всем дальнейшем изложении условимся по аналогии с обозначением $o(x)$ любое отображение класса Θ обозначать $\theta(x)$ (или просто θ).

α. Пусть $f_1 = h_1 + \theta$, $f_2 = h_2 + \theta$ — локальные отображения, где h_1: $E_1 \to E_2$ и h_2: $E_2 \to E_3$ — непрерывные гомоморфизмы. Тогда $f_2 \circ f_1 = h_2 \circ h_1 + \theta$.

β. Пусть $f = e + \theta$ — локальное отображение из E в E, где e — тождественное отображение. Тогда существуют такие окрестности нуля V и Σ в E, что f гомеоморфно отображает V на Σ и $f^{-1} = e + \theta$.

γ. Пусть $f = h + \theta$, где h: $E_1 \to E_2$ — непрерывный гомоморфизм. Пусть, далее, $z \in E_1$ и $C \subset E_2$ — такой конус с вершиной 0, что $h(z) \in \operatorname{int} C$. Тогда существует такой конус Q с вершиной 0 в E_1 и такая окрестность нуля Σ в E_1, что $z \in \operatorname{int} Q$ и $f(Q \cap \Sigma) \subset C$.

Чтобы условия α, β, γ не казались слишком абстрактными, заметим, что они (как несложно проверить, см. работу [14]) выполняются, если Ξ — класс всех банаховых пространств, а Θ — класс всех локальных отображений типа $o(x)$, имеющих непрерывный дифференциал Фреше.

Определение 2.3. Пусть $\Omega \subset E$ — множество, содержащее точку x_0, и K — выпуклый конус в E с вершиной x_0. Конус K будем называть *шатром* множества Ω в точке x_0, если K обладает непустой относительной внутренностью и для любой точки $z \in \operatorname{ri} K$ найдется такой выпуклый конус $Q_z \subset K$ с вершиной x_0 и такое отображение $\psi_z = e + \theta$, где e — тождественное отображение пространства E, что выполнены следующие условия: 1° $z \in \operatorname{ri} Q_z$ и $\operatorname{aff} Q_z = \operatorname{aff} K$; 2° $\psi_z((-x_0 + Q_z) \cap \Sigma_z) \subset -x_0 + \Omega$, где Σ_z — некоторая окрестность точки 0.

Условие 2° можно сформулировать и иначе: существует такое отображение φ, определенное вблизи точки x_0 и имеющее вид $\varphi(x) = x + \theta(x - x_0)$, что $\varphi(Q_z \cap \Sigma_z') \subset \Omega$, где Σ_t' — некоторая окрестность точки x_0.

Замечание. Если существует такое отображение $\psi = e + \theta$ и такая окрестность нуля Σ, что $\psi((-x_0 + K) \cap \Sigma) \subset -x_0 + \Omega$, то K — шатер множества Ω в точке x_0. В самом деле, для любой точки $z \in \operatorname{int} K$ можно положить $Q_z = K$, $\psi_z = \psi$, $\Sigma_z = \Sigma$, и тогда условия 1°, 2° выполняются.

Следующие три теоремы содержат наиболее простые случаи нахождения шатров.

Теорема 2.2. *Пусть $g = h + \theta$ — локальное отображение* *из E в E_1, где h — непрерывный гомоморфизм. Если существует такое подпространство $L \subset E$, что гомоморфизм h: $L \to E_1$ обладает непрерывным обратным гомоморфизмом k: $E_1 \to L$, то ядро K гомоморфизма h: $E \to E_1$ является шатром множества $\Omega = g^{-1}(0)$ в точке* 0.

Доказательство. Положим $p = k \circ h$, $q = e - p$ (e — тождественное отображение). Тогда гомоморфизм p является тождественным на L и потому для любого $x \in E$ имеем $p(q(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$, т. е. $q(x) \in p^{-1}(0) = h^{-1}(0) = K$. Положим, далее, $f = k \circ g = p + \theta$, $\varphi = f + q$. Тогда $\varphi = (p + \theta) + (e - p) = e + \theta$. Согласно свойству β в определении класса Θ существуют такие окрестности нуля V и Σ, что φ гомеоморфно отображает V на Σ, а отображение $\psi = \varphi^{-1}$ имеет вид $\psi = e + \theta$. Для любой точки $x \in K \cap \Sigma$ имеем

$$f(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) - q(\psi(x)) = x - q(\psi(x)) \in K.$$

Кроме того, $f(\psi(x)) \in L$, поскольку f — локальное отображение из E в L. Следовательно, $f(\psi(x)) \in K \cap L = \{0\}$, т. е. $f(\psi(x)) = 0$, и потому $\psi(x) \in f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \Omega$. Таким образом, $\psi(K \cap \Sigma) \subset \Omega$, т. е. согласно замечанию к определению 3 K — шатер множества Ω в точке 0.

Теорема 2.3. *Пусть $f(x)$ — действительная функция, заданная в окрестности точки $x_0 \in E$ и имеющая вид $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \theta(x - x_0)$, где l — нетривиальный непрерывный линейный функционал. Положим: $\Omega_1 = \{x: f(x) \leqslant f(x_0)\}$, $\Omega_0 = \{x: f(x) < f(x_0)\} \cup \{x_0\}$, $K_0 = \{x: l(x) \leqslant l(x_0)\}$. Тогда K_0 есть шатер каждого из множеств Ω_0, Ω_1 в точке x_0.*

Доказательство достаточно провести в случае, когда $x_0 = 0$. Пусть $z \in \operatorname{ri} K_0$, т. е. $l(z) < 0$. Множество $W_z = \{w: l(w) < -\frac{1}{2}l(z)\}$ открыто в E и содержит точку 0, и потому $z + W_z$ есть окрестность точки z. Обозначим через Q_z^* конус с вершиной 0 в E, порожденный множеством $z + W_z$. Если $x \in Q_z^*$, причем $x \neq 0$, т. е. $x = \lambda(z + w)$, $\lambda > 0$, $w \in W_z$, то имеем

$$l(x) = l(\lambda(z + w)) = \lambda(l(z) + l(w)) < \lambda(l(z) - \tfrac{1}{2}l(z)) = \tfrac{1}{2}\lambda l(z) < 0, \tag{2.7}$$

и потому $Q_z^* \subset K_0$.

Далее, положим $h = \frac{1}{2}l$, $f_1 = f - h = h + \theta$, и обозначим через C множество всех неположительных чисел. Тогда C есть конус с вершиной 0 в R, и мы имеем $h(z) = \frac{1}{2}l(z) < 0$, т. е. $h(z) \in \operatorname{int} C$. Согласно свойству γ в определении класса Θ существует такой конус Q_z^{**} с вершиной 0 в E и такая окрестность нуля Σ_z в E, что $z \in \operatorname{int} Q_z^{**}$ и $f_1(Q_z^{**} \cap \Sigma_z) \subset C$, т. е. $f_1(x) \leqslant 0$ при $x \in Q_z^{**} \cap \Sigma_z$. Иначе говоря, при $x \in Q_z^{**} \cap \Sigma_z$ имеем

$$f_1(x) = f(x) - \tfrac{1}{2}l(x) \leqslant 0. \tag{2.8}$$

Наконец, положим $Q_z = Q_z^* \cap Q_z^{**} \subset K_0$. Тогда $z \in \operatorname{int} Q_z$

и $\operatorname{aff} Q_z = E = \operatorname{aff} K_0$, т. е. условие 1° в определении шатра выполнено. При $x \in Q_z \cap \Sigma_z$, $x \neq 0$, имеем согласно соотношениям (2.7) и (2.8) $f(x) = {}^1/_2 l(x) + (f(x) - {}^1/_2 l(x)) < 0$, откуда вытекает, что $Q_z \cap \Sigma_z \subset \Omega_0$. Поэтому, полагая $\psi_z = e$ (тождественное отображение пространства E), находим $\psi_z(Q_z \cap \Sigma_z) = Q_z \cap \cap \Sigma_z \subset \Omega_0$, т. е. выполнено и условие 2° в определении шатра. Таким образом, K_0 — шатер множества Ω_0 в точке 0. Так как $\Omega_0 \subset \Omega_1$, то K_0 является также шатром множества Ω_1 в точке 0.

Теорема 2.4. *Пусть $\Omega \subset E$ — выпуклое множество, обладающее непустой относительной внутренностью и удовлетворяющее условию $0 \in \Omega$, а K — опорный конус множества Ω в точке 0, т. е. $K = \bigcup_{\lambda > 0} (\lambda\Omega)$. Тогда K — шатер множества Ω в точке* 0.

При доказательстве этой теоремы (которое мы не рассматриваем) в качестве ψ_z берется (как и в предыдущем доказательстве) тождественное отображение.

Для того чтобы доказать следующую (основную) теорему, понадобится еще одно определение и несколько лемм.

Определение 4. Пусть топологическое векторное пространство E распадается в алгебраическую прямую сумму своих подпространств L_1 и L_2. Если при этом L_1 и L_2 находятся в общем положении, то будем писать $E = L_1 \oplus_{\text{оп}} L_2$.

Лемма 2.2. *Пусть $p\colon E \to L$ — проекция пространства E на L параллельно подпространству N. Тогда каждое из подпространств L, N замкнуто в E и $E = L \oplus_{\text{оп}} N$.*

Лемма 2.3. *Пусть L_1 и $L \subset L_1$ — подпространства топологического векторного пространства E и $E = L \oplus_{\text{оп}} N$. Тогда $L_1 = (L_1 \cap N) \oplus_{\text{оп}} L$.*

Лемма 2.4. *Пусть L_1 и L_2 — подпространства топологического векторного пространства E, находящиеся в общем положении, и L — их пересечение. Если $L_1 = L \oplus_{\text{оп}} N$, то $L_1 + L_2 = L_2 \oplus_{\text{оп}} N$.*

Теорема 2.5. *Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — некоторые множества в отделимом локально выпуклом пространстве E, имеющие общую точку x_0, и $K_1, \ldots, K_l$ — шатры этих множеств в точке x_0. Предположим, что $E = (\operatorname{aff} K_1 \cap \ldots \cap \operatorname{aff} K_l) \oplus_{\text{оп}} N$, $N \subset E$, и $\operatorname{ri} K_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, l$. Предположим, кроме того, что любые две плоскости, каждая из которых представляется в виде пересечения некоторых из плоскостей $\operatorname{aff} K_1, \ldots, \operatorname{aff} K_l$, находятся в общем положении, а их сумма является замкнутой плоскостью в E. Тогда если конусы $K_1, \ldots, K_l$ не обладают свойством отделимости, то $K_1 \cap \ldots \cap K_l$ является шатром множества $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$ в точке x_0.*

Доказательство (при $x_0 = 0$). Пусть для меньшего, чем l, числа конусов теорема справедлива ($l > 1$). Положим $K = K_1 \cap \ldots \cap K_{l-1}$. Согласно условиям теоремы $\operatorname{aff} K$ находится в общем положении с $\operatorname{aff} K_l$, а подпространство $\operatorname{aff} K + \operatorname{aff} K_l$ замкнуто и потому совпадает с E (иначе $K_1, \ldots, K_l$ обладали бы свойством отделимости). Положим, $L = \operatorname{aff} K \cap \operatorname{aff} K_l$. Согласно леммам 2.3 и 2.4 имеем

$$\operatorname{aff} K_l = (N \cap \operatorname{aff} K_l) \oplus_{\text{оп}} L, \qquad E = (\operatorname{aff} K) \oplus_{\text{оп}} (N \cap \operatorname{aff} K_l).$$

Следовательно, в силу индуктивного предположения K — шатер множества $\Omega = \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_{l-1}$.

Пусть $z \in \operatorname{ri}(K \cap K_l) = \operatorname{ri} K \cap \operatorname{ri} K_l$ и пусть (см. определение 3) $\psi(Q \cap \Sigma) \subset \Omega$, $\psi_l(Q_l \cap \Sigma) \subset \Omega_l$, где $z \in \operatorname{ri} Q$, $\operatorname{aff} Q = \operatorname{aff} K$ и $z \in \operatorname{ri} Q_l$, $\operatorname{aff} Q_l = \operatorname{aff} K_l$. Можно считать, что $Q = C \cap \operatorname{aff} K$, $Q_l = C \cap \operatorname{aff} K_l$, где C — телесный конус в E с вершиной 0 и $z \in \operatorname{int} C$.

Обозначим через p проектирование пространства E на $\operatorname{aff} K$ параллельно $N \cap \operatorname{aff} K_l$, а через q — проектирование на $N \cap \operatorname{aff} K_l$ параллельно $\operatorname{aff} K$ и положим $f = q \circ \psi^{-1} \circ \psi_l = q + \theta$, $\varphi = f + p = e + \theta$. Тогда

$$\varphi^{-1}(L \cap V) \subset M \cap \operatorname{aff} K_l, \tag{2.9}$$

где $M = f^{-1}(0)$, а V — достаточно малая окрестность нуля. В самом деле, при $x \in \varphi^{-1}(L \cap V)$ имеем $\varphi(x) \in L \subset \operatorname{aff} K$, откуда $q(\varphi(x)) = 0$, $q(f(x) + p(x)) = 0$, $q(f(x)) = 0$, и потому в силу соотношения $q \circ f = q \circ (q \circ \psi^{-1} \circ \psi_l) = f$ $f(x) = 0$, т. е. $x \in f^{-1}(0) = M$. Кроме того, при $x \in \varphi^{-1}(L \cap V)$ имеем в силу соотношения $f(x) = 0$ $p(x) = p(f(x) + p(x)) = p(\varphi(x)) \in p(L) = L$, и потому $x \in \operatorname{aff} K_l$. Этим соотношение (2.9) доказано.

Далее, для любого $y \in M$ имеем $f(y) = 0$, т. е. $q(\psi^{-1}(\psi_l(y)) = 0$, $\psi^{-1}(\psi_l(y)) \in \operatorname{aff} K$, и потому $\psi_l(M) \subset \psi((\operatorname{aff} K) \cap V_1)$, где V_1 — область определения отображения ψ. Следовательно, согласно соотношению (2.9)

$$\psi_l(\varphi^{-1}(L \cap V)) \subset \psi_l(M) \subset \psi((\operatorname{aff} K) \cap V_1). \tag{2.10}$$

В силу свойства γ в определении класса Θ существует такой телесный конус Q^* в E с вершиной 0 и такая окрестность нуля $\Sigma^* \subset V$, что $z \in \operatorname{int} Q^*$ и выполнены включения

$$\varphi^{-1}(Q^* \cap \Sigma^*) \subset C, \qquad \psi^{-1}(\psi_l(\varphi^{-1}(Q^* \cap \Sigma^*))) \subset C,$$

и потому (если окрестность Σ^* достаточно мала)

$$\psi_l(\varphi^{-1}(Q^* \cap \Sigma^*)) \subset \psi_l(C \cap \Sigma), \qquad \psi_l(\varphi^{-1}(Q^* \cap \Sigma^*)) \subset \\ \subset \psi(C \cap \Sigma).$$

Следовательно,

$$\psi_l(\varphi^{-1}(Q^* \cap L \cap \Sigma^*)) \subset \psi_l(C \cap \Sigma) \cap \psi(C \cap \Sigma) \cap \\ \cap \psi_l(\varphi^{-1}(L \cap \Sigma^*)) \subset \psi_l(C \cap \Sigma) \cap \psi(C \cap \Sigma) \cap \\ \cap \psi_l((\operatorname{aff} K_l) \cap V_2) \cap \psi((\operatorname{aff} K) \cap V_1)$$

(см. соотношения (2.9), (2.10), где V_2 — область определения отображения ψ_l). Отсюда получаем

$$\psi_l(\varphi^{-1}(Q^* \cap L \cap \Sigma^*)) \subset \psi(C \cap (\operatorname{aff} K) \cap \Sigma) \cap \psi_l(C \cap \\ \cap (\operatorname{aff} K_l) \cap \Sigma) = \psi(Q \cap \Sigma) \cap \psi_l(Q_l \cap \Sigma) \subset \Omega \cap \Omega_l.$$

Это означает, что конусы $K \cap K_l$, $Q^* \cap L$ и отображение $\psi_l \circ \circ \varphi^{-1}$ удовлетворяют (по отношению к множеству $\Omega \cap \Omega_l$) условиям 1°, 2°, и потому $K \cap K_l$ является шатром множества $\Omega \cap \Omega_l$ в точке 0.

Теорема 2.6. *Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — некоторые множества в пространстве E, имеющие общую точку x_0, и $K_1, \ldots, K_l$ — шатры этих множеств в точке x_0, причем выполнены условия теоремы 2.5 и хотя бы один из конусов $K_1, \ldots, K_l$ не совпадает со своей несущей плоскостью. Тогда, если конусы $K_1, \ldots, K_l$ не обладают свойством отделимости, то найдется отличная от x_0 точка $x' \in \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$.*

Доказательство (при $x_0 = 0$). Пусть $z \in \operatorname{ri} K_1 \cap \ldots \cap \operatorname{ri} K_l$. Так как хотя бы один из конусов K_i не совпадает со своей несущей плоскостью, то для этого конуса $0 \notin \operatorname{ri} K_i$, и потому $z \neq 0$. По теореме 5 конус $K = K_1 \cap \ldots \cap K_l$ является шатром множества $\Omega = \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$ в точке 0. Так как $z \in \operatorname{ri} K$, то найдутся такой выпуклый конус $Q_z^0 \subset K$ с вершиной 0, такое отображение $\psi_z^0 = e + \theta$ и такая окрестность нуля Σ_z^0 в E, что $z \in \operatorname{ri} Q_z^0$ и $\psi_z^0 (Q_z^0 \cap \Sigma_z^0) \subset \Omega$. Так как $z \neq 0$, то существует такой непрерывный линейный функционал l: $E \to R$, что $l(z) < 0$.

Положим, $f = l \circ \psi_z^0$; тогда согласно свойству α в определении класса Θ $f = l + \theta$. Повторяя конструкцию, проведенную при доказательстве теоремы 2.3, найдем такой конус Q_z с вершиной 0 в E и такую окрестность нуля Σ_z, что $z \in \operatorname{int} Q_z$ и $f(x) < 0$ при $x \in Q_z \cap \Sigma_z$, $x \neq 0$. Из соотношения $f(x) < 0$ вытекает, что $\psi_z^0 \neq 0$ при $x \in Q_z \cap \Sigma_z$, $x \neq 0$. Если теперь $x \in (Q_z^0 \cap \Sigma_z^0) \cap \cap (Q_z \cap \Sigma_z)$, $x \neq 0$ (такая точка существует, поскольку $z \in \operatorname{ri} Q_z^0 \cap \operatorname{int} Q_z \subset Q_z^0 \cap Q_z$), то имеем $\psi_z^0(x) \neq 0$, $\psi_z^0(x) \in \Omega$, т. е. $x' = \psi_z^0(x)$ есть отличная от 0 точка множества $\Omega = \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$.

Замечание. Теорема 2.6 справедлива также [8], если Ξ — класс всех конечномерных пространств, а Θ — класс всех непрерывных локальных отображений вида $f(x) = h(x) + o(x)$, где h — линейный гомоморфизм. Однако теорема 2.5 в этом случае места не имеет [15].

Теорема 2.7. *Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — некоторые множества в отделимом локально выпуклом топологическом векторном пространстве E, имеющие общую точку x_0, и $K_1, \ldots, K_l$ — шатры множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ в точке x_0. Пусть, далее, f — действительная функция, заданная в некотором открытом множестве, содержащем $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$, и имеющая в точке x_0 вид $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \theta(x - x_0)$, где l — непрерывный линейный функционал. Через K_0 обозначим конус $\{x\colon l(x) \leqslant l(x_0)\}$. Предположим, что выполнены условия, наложенные на конусы $K_1, \ldots, K_l$ в теореме 2.5. Для того чтобы функция f, рассматриваемая на множестве $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$, достигала минимума в точке x_0, необходимо, чтобы конусы $K_0, K_1, \ldots, K_l$ обладали свойством отделимости,* *т. е. существовали такие векторы* $a_0 \in D(K_0)$, $a_1 \in D(K_1), \ldots$ $\ldots, a_l \in D(K_l)$, *не все равные нулю, что* $a_0 + a_1 + \ldots + a_l = 0$.

Доказательство. Так как $\operatorname{aff} K_0 = E$, то конусы K_0, $K_1, \ldots, K_l$ обладают всеми свойствами, которые в теореме 2.5 сформулированы для конусов $K_1, \ldots, K_l$. Кроме того, конус K_0 не совпадает со своей несущей плоскостью, причем этот конус является шатром множества $\Omega_0 = \{x: f(x) < f(x_0)\} \cup \{x_0\}$ в точке x_0 (теорема 2.3). Если бы $K_0, K_1, \ldots, K_l$ не обладали свойством отделимости, то согласно теореме 2.5 существовала бы отличная от x_0 точка $x' \in \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$. Тогда мы имели бы $x' \in \Omega_l \cap \ldots \cap \Omega_l$ и, кроме того, $x' \in \Omega_0$, $x' \neq x_0$, т. е. $f(x') < f(x_0)$; это означает, что функция f, рассматриваемая на множестве $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l$, не достигала бы минимума в точке x_0. Таким образом, для того чтобы в точке x_0 достигался минимум, необходимо чтобы конусы $K_0, K_1, \ldots, K_l$ обладали свойством отделимости, т. е. (согласно теореме 2.1) необходимо существование векторов $a_0, a_1, \ldots, a_l$, указанных в формулировке теоремы 2.7.

Доказанная теорема легко обобщается на случай, когда функционал l — выпуклый. В таком виде она содержит практически все необходимые условия первого порядка в задачах математического программирования (теоремы типа Куна—Таккера и др.). Достаточные условия получаются с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.8. *Пусть* $K_0, K_1, \ldots, K_l$ *— выпуклые конусы с общей вершиной* x_0 *в топологическом векторном пространстве* E *и* $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ *— такие множества, что выполнены включения* $\Omega_i \subset K_i$, $i = 0, 1, \ldots, l$. *Если существуют такие векторы* $a_0 \in D(K_0), \ldots, a_l \in D(K_l)$, *что* $a_0 \neq 0$ *и* $a_0 + \ldots + a_l = 0$, *то*

$$\Pi = (\operatorname{int} \Omega_0) \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_l = \varnothing.$$

(Заметим, что если выполнены условия теоремы 2.1, то вместо $a_0 \neq 0$ можно потребовать, чтобы не все векторы $a_0, a_1, \ldots, a_l$ были равны нулю и конусы $K_1, \ldots, K_l$ не обладали свойством отделимости.)

Доказательство. Допустим, напротив, что $\Pi \neq \varnothing$, и пусть $z \in \Pi$. Так как $z \in \Omega_i \subset K_i$ и $a_i \in D(K_i)$, то

$$a_i(z - x_0) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{2.11}$$

Далее, так как $z \in \operatorname{int} \Omega_0 \subset \operatorname{int} K_0$ и $a_0 \in D(K_0)$, причем $a_0 \neq 0$, то $a_0(z - x_0) < 0$. Отсюда, учитывая соотношения (2.11), получаем

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_l)(z - x_0) < 0,$$

что, однако, противоречит соотношению $a_0 + a_1 + \ldots + a_l = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\Pi = \varnothing$.

В заключение приведем примеры, иллюстрирующие условия А и Б в теореме 2.1.

Пример 1. Обозначим через S единичную сферу гильбертова пространства H и выберем счетное множество $M = \{x_1, x_2, \ldots$ $\ldots\} \subset S$, плотное в S. Далее, построим индуктивно такие элементы $x_1', x_2', \ldots$ сферы S, что $\| x_k - x_k' \| < 1/k$, $k =$

$= 1, 2, \ldots$, и для любого k векторы $x_1', \ldots, x_k'$ линейно независимы. Множество $M' = \{x_1', x_2', \ldots\}$ также плотно в S. Обозначим теперь через N алгебраический базис в H, содержащий M', а через K_1 — множество всех (конечных) линейных комбинаций элементов базиса N с неотрицательными коэффициентами. Наконец, положим, $K_2 = -K_1$, $K_3 = \{x\colon ax \leqslant 0\}$, где $a \in H$ — ненулевой элемент. Тогда $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, и потому выпуклые конусы K_1, K_2, K_3 с общей вершиной 0 обладают свойством отделимости. Однако равенство $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, где $a_1 \in D\,(K_1)$, $a_2 \in D\,(K_2)$, $a_3 \in D\,(K_3)$, имеет место лишь при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (поскольку $\overline{K}_1 = H$, т. е. $D\,(K_1) = \{0\}$ и, аналогично, $D\,(K_2) = \{0\}$). Неприменимость теоремы 2.1 объясняется здесь тем, что не выполнено условие А: $\operatorname{aff} K_1 = H$, но $\operatorname{ri} K_1 = \varnothing$.

Пример 2. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H. Обозначим через K_1 замкнутое подпространство, порожденное векторами $e_2, e_4, \ldots, e_{2n}, \ldots$, через K_2 — замкнутое подпространство, порожденное единичными векторами $e_n' = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\left(e_{2n} - \frac{1}{n} e_{2n-1}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, и положим $K_3 = \{x\colon bx \leqslant 0\}$, где $b = \sum \frac{1}{n} e_n'$. Тогда $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, и потому выпуклые конусы K_1, K_2, K_3 с общей вершиной 0 обладают свойством отделимости. Однако равенство $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, где $a_1 \in D\,(K_1)$, $a_2 \in D\,(K_2)$, $a_3 \in D\,(K_3)$, как нетрудно проверить, имеет место лишь при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Неприменимость теоремы 2.1 объясняется здесь тем, что не выполнено условие Б: подпространства K_1 и K_2 не находятся в общем положении.

Эти примеры показывают, что условия А и Б в теореме 2.1 существенны.

Заметим еще, что в примере 2 угол α_n между векторами $e_{2n} \in K_1$ и $e_n' \in K_2$ удовлетворяет условию $\sin \alpha_n < 1/n$, и потому $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Именно с этим связан тот факт, что замкнутые подпространства K_1 и K_2 (имеющие лишь одну общую точку 0) не находятся в общем положении.

2 ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНДЕКС ЭКСТРЕМАЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Глава посвящена важному разделу математической теории систем — оптимизационным задачам (см., например, [6, 39, 73, 83, 104]). В главе вводится и изучается топологический индекс экстремалей ряда оптимизационных задач; указываются приложения этого понятия.

1. Топологический индекс критических точек функционалов на гильбертовых пространствах

1.1. H-правильные функционалы. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v). Функционал $f(u) \in C^1(H, R^1)$ назовем H-правильным на шаре $T \subset H$, если его градиент ограничен на T и удовлетворяет следующему условию (S); если $u_n \in T$, $u_n \rightharpoonup u_0$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla f(u_n), u_n - u_0) \leqslant 0, \tag{1.1}$$

то $u_n \to u_0$ (символы $\rightharpoonup$ и $\to$ обозначают соответственно слабую и сильную сходимость в H). Функционал $f(u)$ назовем H-правильным в точке $u_* \in H$, если он H-правильный на некоторой ее шаровой окрестности. Приведем примеры.

а. Рассмотрим функционал $f(u) = (u, u)/2$. Так как $\nabla f(u) = u$, то из $u_n \rightharpoonup u_0$ вытекает оценка

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla f(u_n), u_n - u_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(u_n, u_n - u_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\| u_n - u_0 \|^2$$

и в силу соотношения (1.1) $u_n \to u_0$. Значит, рассматриваемый функционал H-правилен.

б. Рассмотрим функционал $f(u) = (u, u)/2 + g(u)$, где $g(u)$ дифференцируем по Фреше и его градиент $\nabla g(u)$ слабо непрерывен, т. е. переводит слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся. Если $u_n \rightharpoonup u_0$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla f(u_n), u_n - u_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(u_n + \nabla g(u_n), u_n - u_0) =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\| u_n - u_0 \|^2 + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla g(u_0), u_n - u_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\| u_n - u_0 \|^2$$

и из соотношения (1.1) следует, что $u_n \to u_0$. Значит, функционал $f(u)$ H-правилен.

в. Пусть $\Omega \subset R^N$ $(N \geqslant 3)$ — ограниченная область с гладкой границей. Пусть $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева [95] функций $u(x)$ $(x \in \Omega)$, имеющих обобщенные производные $u_{x_i}(x)$, суммируемые с квадратом, и имеющих нулевой след на границе $\partial\Omega$ области Ω. Пространство $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ гильбертово. Рассмотрим функционал

$$f(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx, \qquad u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{1.2}$$

с гладким интегрантом $F(x, u, p)$ $(x \in \Omega, |u|, |p| < \infty)$. Пусть

$$|F_u| \leqslant C(1 + |u|^{\alpha_1} + |p|^{\alpha_2}), \tag{1.3}$$

$$|F_{p_i}| \leqslant C(1 + |u|^{\alpha_3} + |p|), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.4}$$

$$|F_{uu}| \leqslant C(1 + |u|^{4/(N-2)} + |p|^{4/N}), \tag{1.5}$$

$$|F_{up_i}| \leqslant C(1 + |u|^{2/(N-2)} + |p|^{2/N}), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.6}$$

$$c \sum_{i \leqslant N} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i, j \leqslant N} F_{p_i p_j} \xi_i \xi_j \leqslant C \sum_{i \leqslant N} \xi_i^2, \tag{1.7}$$

где C, c, α_1, α_2, α_3 — положительные постоянные, причем $\alpha_1 < (N+2)/(N-2)$, $\alpha_2 < (N+2)/N$, $\alpha_3 < N/(N-2)$. Функционал (1.2) $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — правилен [94].

1.2. Топологический индекс множества минимумов. Пусть на границе ∂V ограниченной области $V \subset H$ нет критических точек H-правильного функционала $f(u)$, а $\mathfrak{M}$ — множество лежащих в V его критических точек. Ниже рассматриваются расширяющиеся последовательности $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots$ конечномерных подпространств, для которых

$$\overline{\bigcup_n H_n} = H; \tag{1.8}$$

через P_n обозначаются ортопроекторы на H_n. Тогда [76, 94] определенные на границах ∂V_n областей $V_n = V \cap H_n$ конечномерные векторные поля $\Phi_n(u) = P_n \nabla f(u)$ при больших n невырождены и их вращения одинаковы. Это общее вращение назовем топологическим индексом $\operatorname{ind}(\mathfrak{M}; f)$ множества $\mathfrak{M}$ критических точек функционала $f(u)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — компактное связное многообразие класса C^2, лежащее в конечномерном подпространстве, а $\chi(\mathfrak{M})$ — его характеристика Эйлера—Пуанкаре (см., например, [84]).

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *реализует строгий локальный минимум функционала* $f(u)$. *Тогда* $\operatorname{ind}(\mathfrak{M}) = \chi(\mathfrak{M})$.

Доказательству предпошлем несколько лемм. Для простоты будем считать окрестность V, участвующую в определении топологического индекса $\operatorname{ind}(\mathfrak{M}; f)$, шаром. Пусть $\mathfrak{M}$ реализует строгий минимум функционала $f(u)$ на $\overline{V}$ и $f(u) = 0$ при $u \in \mathfrak{M}$.

1.3. Леммы. Лемма 1.1 [107]. *Каждый H-правильный функционал слабо полунепрерывен снизу.*

Лемма 1.2. *Пусть $W \subset V$ — некоторая окрестность многообразия $\mathfrak{M}$. Тогда* $\inf \{f(u) \colon u \in \partial W\} > 0$.

Доказательство. В предположении противного найдется последовательность точек $u_n \in \partial W$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = 0. \tag{1.9}$$

Так как шар $\overline{V}$ слабо компактен, то можно считать, что $u_n \rightharpoonup u_0 \in \overline{V}$. Тогда в силу леммы 1.1

$$\varliminf_{n\to\infty} f(u_n) \geqslant f(u_0). \tag{1.10}$$

Из соотношений (1.9) и (1.10) следует равенство $f(u_0) = 0$. Поэтому $u_0 \in \mathfrak{M}$. По формуле конечных приращений

$$f(u_n) - f\left(\frac{u_n + u_0}{2}\right) = \frac{1}{2}(\nabla f(v_n), u_n - u_0),$$

где $v_n = u_n(1 + \theta_n)/2 + u_0(1 - \theta_n)/2$, а θ_n — некоторое число из промежутка $(0, 1)$. Поскольку

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[f(u_n) - f\left(\frac{u_n + u_0}{2}\right)\right] \leqslant 0,$$

то в силу равенства (1.9)

$$\varlimsup_{n\to\infty} (\nabla f(v_n), v_n - u_0) \leqslant 0.$$

Так как $v_n \rightharpoonup u_0$, то в силу (S)-свойства градиента $\nabla f(u)$ имеет место сходимость $v_n \to u_0$. Но тогда и $u_n \to u_0$. Следовательно, $u_0 \in \partial W$. С другой стороны, $u_0 \in \mathfrak{M}$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Пусть $W \subset V$ — окрестность многообразия $\mathfrak{M}$ и $T(n) = (V \setminus \overline{W}) \cap H_n$.

Лемма 1.3. *Существуют такие N и $\alpha > 0$, что*

$$\inf \| P_n \nabla f(u) \| \geqslant \alpha, \quad u \in \overline{T}(n),\ n \geqslant N.$$

Доказательство. В предположении противного найдутся последовательности индексов n_k и точек $u_k \in T(n_k)$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \| P_{n_k} \nabla f(u_k) \| = 0. \tag{1.11}$$

Поскольку $u_k \in V$, то можно считать что $u_k \rightharpoonup u_0 \in \overline{V}$, и так как операторы P_n сильно сходятся к единичному, то

$$\lim_{k\to\infty} (\nabla f(u_k), u_k - u_0) = \lim_{k\to\infty} (P_{n_k} \nabla f(u_k), u_k - u_0) +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} (\nabla f(u_k), P_{n_k} u_0 - u_0) \leqslant \lim_{k\to\infty} \| P_{n_k} \nabla f(u_k) \| \, \| u_k - u_0 \| +$$

$$+ \sup_{u\in V} \| \nabla f(u) \| \lim_{k\to\infty} \| P_{n_k} u_0 - u_0 \| = 0.$$

Но оператор $\nabla f(u)$ обладает (S) свойством, поэтому $u_k \to u_0$. Тогда в силу равенства (1.11)

$$\|\nabla f(u_0)\| = \lim_{k\to\infty} \| P_{n_k}\nabla f(u_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \|\nabla f(u_0) - \nabla f(u_k)\| + \lim_{k\to\infty} \| P_{n_k}\nabla f(u_k)\| = 0.$$

Следовательно, $\nabla f(u_0) = 0$ и $u_0 \in \mathfrak{M}$. С другой стороны, в силу включений $u_k \in \overline{T}$ (n_k) справедливо включение $u_0 \in V \setminus \overline{W}$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

1.4. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\mathfrak{M} \subset H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а $V(\varepsilon)$ и $V_k(\varepsilon)$ — это ε окрестности многообразия $\mathfrak{M}$ в H и H_n. Поскольку при малых $\varepsilon > 0$ границы $\partial V_n(\varepsilon)$ областей $V_n(\varepsilon)$ гладкие, то на $\partial V_n(\varepsilon)$ определены поля $\Psi_n(u)$ внешних единичных нормалей к $\partial V_n(\varepsilon)$ в H_n. А так как при малых $\varepsilon > 0$ вращения γ_n полей Ψ_n совпадают с характеристикой Эйлера—Пуанкаре $\chi(\mathfrak{M})$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что при больших n вращения γ_n совпадают с вращениями μ_n векторных полей $\Phi_n(u) = P_n\nabla f(u)$, рассматриваемых на $\partial V_n(\varepsilon)$. При этом без ограничения общности можно считать, что поля Φ_n имеют гладкость C^1.

Выберем такое $\varepsilon_0 > 0$, что $V_n(\varepsilon_0) \subset V$ и вращения γ_n совпадают с $\chi(\mathfrak{M})$. В силу лемм 1.2 и 1.3 найдутся такие $N_0 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, $0 < \alpha_1 < \alpha_0$, $\beta > 0$, что

$$\inf\{f(u):\ u \in \partial V\} > \alpha_0, \qquad \sup\{f(u):\ u \in \overline{V}(\varepsilon_0)\} < \alpha_0, \tag{1.12}$$

$$\inf\{f(u):\ u \in \partial V(\varepsilon_0)\} > \alpha_1, \qquad \sup\{f(u):\ u \in \overline{V}(\varepsilon_1)\} < \alpha_1, \tag{1.13}$$

$$\inf\{\min\{\|\nabla f_n(u)\|,\ \|\nabla g_n(u)\|\}:\ u \in (\overline{V} \setminus V(\varepsilon_1)) \cap H_n,\ n \geqslant N_0\} > \beta. \tag{1.14}$$

Здесь $f_n(u)$ — сужение функционала $f(u)$ на H_n, а

$$g_n(u) = \min\{\|u - v\|^2:\ v \in \mathfrak{M}\}, \qquad u \in H_n.$$

Зафиксируем некоторое $m \geqslant N_0$ и рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\dot{u} = -\nabla f_m(u), \qquad \dot{u} = -\nabla g_m(u) \qquad u \in \overline{V}_m = \overline{V} \cap H_m.$$

Для этих уравнений определены соответственно операторы сдвига $U_1(t)$ и $U_2(t)$. Рассмотрим эти операторы на границе $\partial V_m(\varepsilon_0)$ области $V(\varepsilon_0) \cap H_m$. Из оценок (1.12) — (1.14) вытекает существование такого $T_0 > 0$, что при $t \geqslant T_0$ выполнены включения

$$U_1(t)\,u \in V(\varepsilon_0), \qquad U_2(t)\,u \in V(\varepsilon_1), \qquad u \in \partial V_m(\varepsilon_0). \tag{1.15}$$

Рассмотрим на $\partial V_m(\varepsilon_0)$ два непрерывных семейства векторных полей:

$$\Phi(u;\lambda) = \begin{cases} u - U_1(\lambda)\,u & \text{при } 0 < \lambda < T_0, \\ u - U_2(\lambda - T_0)\,U_1(T_0)\,u & \text{при } T_0 \leqslant \lambda \leqslant 2T_0, \end{cases}$$

и

$$\Psi(u;\lambda)=\begin{cases}u-U_2(\lambda)u & \text{при } 0<\lambda<T,\\ u-U_1(\lambda-T)U_2(T)u & \text{при } T\leqslant\lambda\leqslant 2T.\end{cases}$$

В силу включений (1.15) поля $\Phi(u;\lambda)$ и $\Psi(u;\lambda)$, $0<\lambda\leqslant 2T$, $u\in\partial V_m(\varepsilon_0)$, невырождены и, следовательно, гомотопны, соответственно, полям $I-U_2(T)U_1(T)$ и $I-U_1(T)U_2(T)$. Но при малых $\lambda>0$ векторы $\Phi(u;\lambda)$ образуют острый угол с векторами $\Phi_m(u)$. Поэтому при малых $\lambda>0$ поля $\Phi(u;\lambda)$ гомотопны полю $\Phi_m(u)$. Следовательно, вращение μ_0 поля $I-U_2(T)U_1(T)$ на $\partial V_m(\varepsilon_0)$ равно μ_m. Аналогично, вращение γ_0 поля $I-U_1(T)U_2(T)$ на $\partial V_m(\varepsilon_0)$ равно γ_m. Но в силу теоремы М. А. Красносельского и П. П. Забрейко о равенстве вращений полей $I-AB$ и $I-BA$ (см. [64, с. 194]) $\gamma_0=\mu_0$. Следовательно, $\gamma_m=\mu_m$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.1 и равенства $\chi(u_*)=1$ вытекает

Следствие 1.1. *Если многообразие $\mathfrak{M}$ состоит из одной точки u_*, то* $\operatorname{ind}(u_*;f)=1$.

1.5. Условный экстремум. Рассмотрим задачу минимизации H-правильного функционала $f(u)$ на шаре $V=\{u\in H\colon \|u\|\leqslant\leqslant 1\}$:

$$f(u)\to\min,\quad u\in V. \tag{1.16}$$

Точка u_* называется экстремалью функционала $f(u)$ в задаче (1.16), если либо $\nabla f(u_*)=0$ и $u_*\in\operatorname{int}V$, либо $\nabla f(u_*)=\lambda u_*$ $(\lambda\leqslant 0)$ и $u_*\in\partial V$. Топологический индекс изолированной экстремали $u_*\in\operatorname{int}V$ определяется по схеме п. 1.2. Если экстремаль u_* изолирована, $u_*\in\partial V$ и $\nabla f(u_*)\neq 0$, то введение понятия ее топологического индекса требует дополнительных построений. Пусть P_* — ортопроектор на ортогональное дополнение H_* к вектору u_*, а V_* — единичный шар в H_*. Рассмотрим функционал $f_*(u)=f(r(u))$, где $r(u)=u+(1-\|u\|^2)^{1/2}u_*$ $(u\subset V_*)$; он дифференцируем на V_* и

$$\nabla f_*(u)=P_*\nabla f(r(u))-(1-\|u\|^2)^{-1/2}(\nabla f(r(u)),u_*)u.$$

Поэтому нуль — изолированная экстремаль функционала $f_*(u)$.

Лемма 1.4. *Функционал $f_*(u)$ является H_*-правильным в нуле.*

Доказательство. Выберем такое $\rho\in(0,1)$, чтобы при $\|u\|\leqslant\rho$ выполнялось неравенство $(\nabla f(r(u)),u_*)\leqslant 0$. Пусть $\|u_n\|\leqslant\rho$, $u_n\rightharpoonup u_0$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty}(\nabla f_*(u_n),u_n-u_0)\leqslant 0. \tag{1.17}$$

Положим $v_n=r(u_n)$. Поскольку последовательность v_n ограничена, то можно считать, что $v_n\rightharpoonup v_0$. Но тогда $u_n=P_*v_n\rightharpoonup P_*v_0$. Следовательно, $P_*v_0=u_0$. Поэтому

$$(\nabla f_*(u_n),u_n-u_0)=(\nabla f(v_n),v_n-v_0)-(\nabla f(v_n),u_*)\times$$
$$\times(u_*,v_n-v_0)-(1-\|u_n\|^2)^{-1/2}(\nabla f(v_n),u_*)(u_n,u_n-u_0).$$

Поскольку

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1-\|u_n\|^2)^{-1/2}(\nabla f(v_n),u_*)(u_n,u_n-u_0)\leqslant 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\nabla f(v_n),u_*)(u_*,v_n-v_0)=0,$$

то из соотношения (1.17) вытекает неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla f(v_n),v_n-v_0)\leqslant 0.$$

Но тогда $v_n\to v_0$ — в силу (S)-свойства градиента $\nabla f(u)$. Поэтому $P_*v_n\to P_*v_0$ и, далее, $u_n\to u_0$. Лемма доказана.

Поскольку нулевая критическая точка функционала $f_*(u)$ изолирована и функционал $f_*(u)$ является H_*-правильным в этой точке, то определен топологический индекс $\operatorname{ind}(0;f_*)$. Этот индекс будем называть топологическим индексом $\operatorname{ind}(u_*;f)$ экстремали u_* функционала $f(u)$.

Теорема 1.2. *Пусть экстремаль* $u_*\in\partial V$ *функционала* $f(u)$ *в задаче* (1.16) *изолирована и реализует его локальный минимум на* V. *Пусть* $\nabla f(u_*)\neq 0$. *Тогда* $\operatorname{ind}(u_*;f)=1$.

Доказательство. В условиях теоремы нулевая точка реализует локальный минимум функционала $f_*(u)$. Остается сослаться на следствие 1.1.

2. Топологический индекс оптимальных управлений

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального управления движением со свободным правым концом и закрепленным временем

$$\int_0^1\varphi^0(t,x,u)\,dt\to\min, \tag{2.1}$$

$$\dot x=\varphi(t,x,u),\quad x(0)=0, \tag{2.2}$$

$$\int_0^1 u^2(t)\,dt\leqslant 1. \tag{2.3}$$

Функция $\varphi^0(t,x,u)$ и вектор-функция $\varphi(t,x,u)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $x\in R^N$, $u\in R^M$, предполагаются непрерывными по совокупности переменных вместе с первыми производными по x_i, u_j, $i=1,\ldots,N$; $j=1,\ldots,M$.

Ограничения вида (2.3) возникают в задачах коррекции движения: они отвечают управлению с ограничениями по энергетике (в частности, управлению при помощи малой тяги) [30, 100, 101].

Пусть при каждом управлении $u=u(t)\in L_2^M$ задача Коши (2.2) имеет единственное решение $x=x(t)=B(u)$. Тогда задача (2.1)—(2.3) эквивалентна минимизации функционала

$$f(u)=\int_0^1\varphi^0(t.\,B(u),u)\,dt \tag{2.4}$$

на единичном шаре V пространства L_2^M, т. е. задаче

$$f(u) \to \min, \quad u \in V. \tag{2.5}$$

При естественных ограничениях на рост функций $\varphi^0(t, x, u)$ и $\varphi(t, x, u)$ функционал $f(u)$ является L_2^M-правильным. В этих условиях определен топологический индекс изолированных экстремалей задачи (2.5). Если экстремаль u_* реализует локальный минимум функционала $f(u)$ на V и изолирована в L_2^M, то в силу теорем 1.1 и 1.2 ее индекс равен 1. Это равенство является необходимым условием оптимальности в задаче (2.1)—(2.3). Его обоснованию посвящен этот параграф.

2.2. Леммы. Лемма 2.1. *Пусть при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x \in R^N$, $u \in R^M$ *верны оценки*

$$|\varphi_x^0(t, x, u)| + |\varphi_x(t, x, u)| \leqslant c(t, x)(1 + |u|^2), \tag{2.6}$$

$$|\varphi_u^0(t, x, u)| + |\varphi_u(t, x, u)| \leqslant c(t, x)(1 + |u|), \tag{2.7}$$

где $c(t, x)$ — *непрерывная функция. Тогда функционал* (2.4) *непрерывно дифференцируем на* L_2^M *и*

$$\nabla f(u) = \varphi_u^0(t, x, u) + (\varphi_u(t, x, u))^{\text{т}}(X^{-1}(t))^{\text{т}} \int_t^1 \times$$

$$\times (X(s))^{\text{т}} \varphi_x^0(s, x, u)\, ds. \tag{2.8}$$

Здесь т — *операция транспонирования,* $x = B(u)$, *а* $X(t)$ — *фундаментальная матрица линейной системы*

$$\dot{h} = \varphi_x(t, x(t), u(t))\, h. \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть $W_{1,1}^N$ — пространство Соболева абсолютно непрерывных вектор-функций $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, принимающих при $t = 0$ нулевые значения. Рассмотрим на $W_{1,1}^N \times L_2^M$ оператор

$$A(x, u) = x(t) - \int_0^t \varphi[s, x(s), u(s)]\, ds.$$

В силу (2.6) справедлива оценка $|\varphi(t, x, u)| \leqslant d(t, x)(1 + |u|^2)$, где $d(t, x)$ — непрерывная функция. Поэтому оператор $A(x, u)$ действует из $W_{1,1}^N \times L_2^M$ в $W_{1,1}^N$. Покажем, что он непрерывно дифференцируем по Фреше. Пусть $(x, u) \in W_{1,1}^N \times L_2^M$. Определим линейный оператор $D(x, u): W_{1,1}^N \times L_2^M \to W_{1,1}^N$ равенством

$$D(x, u)(h, g) = h(t) - \int_0^t (\varphi_x(s, x, u)\, h(s) + \varphi_u(s, x, u)\, g(s))\, ds.$$

Тогда

$$\| A(x+h, u+g) - A(x,u) - D(x,u)(h,g) \|_{W_{1,1}^N} \leqslant$$
$$\leqslant \| h \|_{W_{1,1}^N} \int_0^1 \| \varphi_x(t, x+\theta h, u+\theta g) - \varphi_x(t,x,u) \|_{L_1^N} d\theta +$$
$$+ \| g \|_{L_2^M} \int_0^1 \| \varphi_u(t, x+\theta h, u+\theta g) - \varphi_u(t,x,u) \|_{L_2^M} d\theta.$$

Из оценок (2.6), (2.7) вытекает [60] непрерывность операторов суперпозиции

$$R_0(x,u) = \varphi_x(t,x,u) : W_{1,1}^N \times L_2^M \to L_1^N,\ R_1(x,u) =$$
$$= \varphi_u(t,x,u) : W_{1,1}^N \times L_2^M \to L_2^M.$$

Поэтому

$$\lim_{\|h\|_{W_{1,1}^N} + \|g\|_{L_2^M} \to 0} \int_0^1 \| \varphi_x(t, x+\theta h, u+\theta g) - \varphi_x(t,x,u) \|_{L_1^N} d\theta = 0$$

и

$$\lim_{\|h\|_{W_{1,1}^N} + \|g\|_{L_2^M} \to 0} \int_0^1 \| \varphi_u(t, x+\theta h, u+\theta g) - \varphi_u(t,x,u) \|_{L_2^M} d\theta = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\|h\|_{W_{1,1}^N} + \|g\|_{L_2^M} \to 0} \| A(x+h, u+g) - A(x,u) - D(x,u)(h,g) \|_{W_{1,1}^N} = 0.$$

Таким образом, $A'(x, u) = D(x, u)$. Непрерывность производной следует из соотношений (2.6) и (2.7).

Рассмотрим оператор

$$A_x'(x,u)h = h(t) - \int_0^t \varphi_x(s,x,u)\,ds. \tag{2.10}$$

Он взаимно однозначно отображает $W_{1,1}^N$ на себя. По теореме Банаха [31] оператор (2.10) непрерывно обратим на $W_{1,1}^N$ (при каждых фиксированных x, u). Из теоремы о неявной функции вытекает, что оператор $B(u) : L_2^M \to W_{1,1}^N$ непрерывно дифференцируем. Его производная $B'(u)$ имеет вид

$$B'(u)g = \int_0^t X(t) X^{-1}(s) \varphi_u(s,x,u) g(s)\,ds, \tag{2.11}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица линейной системы (2.9).

Рассмотрим функционал

$$G(x, u) = \int_0^1 \varphi^0(s, x, u)\, ds.$$

Из оценок (2.6), (2.7) и равенства

$$G(x+h, u+g) - G(x, u) = \int_0^1 [\varphi_x^0(s, x, u)\, h(s) + \\ + \varphi_u^0(s, x, u)\, g(s)]\, ds + \omega(x, u; h, g)$$

следует ограниченность на $W_{1,1}^N \times L_2^M$ (при фиксированных $x \in W_{1.1}^N$, $u \in L_2^M$) функционала

$$l(x, u)(h, g) = \int_0^1 [\varphi_x^0(s, x, u)\, h(s) + \varphi_u^0(s, x, u)\, g(s)]\, ds$$

и равенство

$$\lim_{\|h\|_{W_{1,1}^N} + \|g\|_{L_2^M} \to 0} (\|h\|_{W_{1,1}^N} + \|g\|_{L_2^M})^{-1}\, \omega(x, u; h, g) = 0.$$

Поэтому функционал $G(x, u)$ дифференцируем на $W_{1,1}^N \times L_2^M$ причем из оценок (2.6), (2.7) следует непрерывность градиента $\nabla G(x, u)$. Но функционал (2.4) представим в виде $f(u) = G(B(u), u)$. Поэтому $f(u)$ непрерывно дифференцируем и

$$(\nabla f(u), g) = \int_0^1 ((\varphi_x^0(s, x, u), B'(u)\, g) + (\varphi_u^0(s, x, u), g(s)))\, ds. \tag{2.12}$$

Из выражений (2.11) и (2.12) следует равенство (2.8). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия лемммы 2.1. Пусть $x_*(t)$ — решение задачи Коши (2.2) при управлении $u_*(t)$,*

$$\psi_*(t) = (X_*^{-1}(t))^{\mathrm{T}} \int_t^1 (X_*(s))^{\mathrm{T}}\, \varphi_x^0(s, x_*, u_*)\, ds,$$

где $X_*(t)$ — фундаментальная матрица системы (2.9) при $x(t) = x_*(t)$, $u(t) = u_*(t)$. Пусть, наконец, справедливы оценки

$$((\varphi_u(t, x, u_1) - \varphi_u(t, x, u_2))^{\mathrm{T}}\, \psi_*(t) + \varphi_u^0(t, x, u_1) - \\ - \varphi^0(t, x, u_2), u_1 - u_2) \geqslant \alpha\, |u_1 - u_2|, \tag{2.13}$$

$$|\varphi_u(t, x, u_1) - \varphi_u(t, x, u_2)| \leqslant L\, |u_1 - u_2|, \tag{2.14}$$

$$(0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in R^N, \quad u \in R^M, \quad \alpha > 0).$$

Тогда на управлении $u_*(t)$ функционал (2.4) L_2^M-правилен.

Доказательство. Оператор

$$C(u)=(X^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\int_t^1 (X(s))^{\mathrm{T}}\varphi_x^0(s, B(u), u)\,ds$$

действует и непрерывен из L_2^M в $W_{1,1}^N$. Поэтому при некотором $\varepsilon_0>0$ верна оценка

$$\sup_{\|u-u_*\|_{L_2^M}\leqslant\varepsilon_0}\ \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|C(u)-\psi_*(t)|<\alpha/2L. \tag{2.15}$$

Покажем, что на шаре $V_0=\{u\in L_2^M\colon \|u-u_*\|\leqslant\varepsilon_0\}$ функционал $f(u)$ является L_2^M-правильным. Пусть $u_n\in V_0$, $u_n\rightharpoonup u_0$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\nabla f(u_n), u_n-u_0)\leqslant 0. \tag{2.16}$$

Положим $x_n=B(u_n)$. Тогда

$$(\nabla f(u_n), u_n-u_0)=\int_0^1(\varphi_u^0(t, x_n, u_n)-\varphi_u^0(t, x_n, u_0)+$$
$$+(\varphi_u(t, x_n, u_n)-\varphi_u(t, x_n, u_0))^{\mathrm{T}}\psi_*(t), u_n-u_0)\,dt+$$
$$+\int_0^1((\varphi_u(t, x_n, u_n)-\varphi_u(t, x_n, u_0))^{\mathrm{T}}(C(u_n)-\psi_*(t)), u_n-u_0)dt+$$
$$+\int_0^1(\varphi_u^0(t, x_n, u_0), u_n-u_0)\,dt+$$
$$+\int_0^1((\varphi_u(t, x_n, u_0))^{\mathrm{T}}C(u_n), u_n-u_0)\,dt.$$

Оценим каждый интеграл в правой части последнего равенства.

В силу (2.13) справедлива оценка

$$\int_0^1(\varphi_u^0(t, x_n, u_n)-\varphi_u^0(t, x_n, u_0), u_n-u_0)\,dt+$$
$$+\int_0^1((\varphi_u(t, x_n, u_n)-\varphi_u(t, x_n, u_0))^{\mathrm{T}}\psi_*(t), u_n-u_0)\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\alpha\|u_n-u_0\|_{L_2^M}^2. \tag{2.17}$$

Из неравенств (2.14) и (2.15) следует оценка

$$\int_0^1((\varphi_u(t, x_n, u_n)-\varphi_u(t, x_n, u_0))^{\mathrm{T}}(C(u_n)-\psi_*(t)), u_n-u_0)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant L\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|C(u_n)-\psi_*(t)|\,\|u_n-u_0\|_{L_2^M}^2\leqslant\frac{\alpha}{2}\|u_n-u_0\|_{L_2^M}^2. \tag{2.18}$$

Наконец, поскольку последовательности $\{\varphi_u^0(t, x_n, u_0)\}$ и $\{(\varphi_u(t, x_n, u_0))^{\mathrm{T}} C(u_n)\}$ компактны в L_2^M, а последовательность u_n слабо сходится к u_0, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (\varphi_u^0(t, x_n, u_0), u_n - u_0)\,dt = 0, \tag{2.19}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ((\varphi_u(t, x_n, u_0))^{\mathrm{T}} C(u_n), u_n - u_0)\,dt = 0. \tag{2.20}$$

Из (2.17)—(2.20) вытекает неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla f(u_n), u_n - u_0) \geqslant \frac{\alpha}{2}\lim_{n\to\infty}\| u_n - u_0 \|^2_{L_2^M}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (2.16) следует, что $u_n \to u_0$. Значит, функционал (2.4) L_2^M-правилен на шаре V_0. Лемма доказана.

2.3. Необходимое условие оптимальности. Пусть $u_* = u_*(t)$ — оптимальное управление в задаче (2.1)—(2.3). Если $u_* \in \operatorname{int} V$, то u_* — это решение уравнения

$$\varphi_u^0(t, x, u) - (\varphi_u(t, x, u))^{\mathrm{T}}(X^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\int_t^1 (X(s))^{\mathrm{T}}\varphi_x^0(s, x, u)\,ds = 0. \tag{2.21}$$

Из следствия 1.1 вытекает

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия лемм* 2.1 *и* 2.2. *Пусть оптимальное управление* $u_* \in \operatorname{int} V$ *является изолированным в* L_2^M *решением уравнения* (2.21). *Тогда* $\operatorname{ind}(u_*; f) = 1$.

Перейдем к случаю, когда оптимальное управление u_* лежит на границе области ограничений, т. е. $\| u_* \|_{L_2^M} = 1$. Тогда u_* — решение системы уравнений

$$\varphi_u^0(t, x, u) + (\varphi_u(t, x, u))^{\mathrm{T}}(X^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\int_t^1 (X(s))^{\mathrm{T}}\varphi_x^0(s, x, u)\,ds -$$

$$- u(t)\int_0^1 (\varphi_u^0(s, x, u), u)\,ds - u(t)\int_0^1\Big(\int_s^1 (X(\tau))^{\mathrm{T}}\varphi_x^0(\tau, x, u)\,d\tau,$$

$$X(s)(\varphi_u(s, x, u)\,u)\,ds = 0, \tag{2.22}$$

$$\int_0^1 u^2(s)\,ds = 1.$$

Из теоремы 1.2 вытекает

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия лемм* 2.1 *и* 2.2.

Пусть u_* изолированное в L_2^M решение системы (2.22). *Пусть, наконец,*

$$\varphi_u^0(t, x_*, u_*) + (\varphi_u(t, x_*, u_*))^{\mathrm{T}}(X_*^{-1}(t))^{\mathrm{T}} \int_t^1 (X_*(s))^{\mathrm{T}} \varphi_x^0(s, x_*, u_*)\, ds \not\equiv 0.$$

Тогда $\mathrm{ind}\,(u_*; f) = 1$.

Таким образом, если найдено экстремальное управление u_* в задаче (2.1)—(2.3), то необходимым условием его оптимальности является равенство $\mathrm{ind}\,(u_*; f) = 1$. Для проверки последнего равенства могут быть использованы эффективные алгоритмы вычисления топологического индекса [64].

Рассмотрим в качестве примера задачу

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}u^2 - g(x)\right) dt \to \min; \qquad \dot{x} = x + u, \qquad x(0) = 0;$$

$$\int_0^1 u^2(t)\, dt \leqslant 1, \tag{2.23}$$

где $g(x)$ — гладкая функция и $g(0) = g'(0) = 0$. Функционал (2.4), отвечающий задаче (2.23), имеет вид

$$f(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u^2 - g\left(\int_0^t e^{t-s} u(s)\, ds\right)\right] dt.$$

Поэтому

$$\nabla f(u) = u - \int_t^1 e^{s-t} g'\left(\int_0^s e^{s-\tau} u(\tau)\, d\tau\right) ds.$$

Функция $u(t) \equiv 0$ — экстремаль задачи (2.23). Так как

$$\nabla^2 f(0) h = h - g''(0) \int_t^1 e^{2s-t} \int_0^s e^{-\tau} h(\tau)\, d\tau\, ds,$$

то спектр оператора $\nabla^2 f(0)$ совпадает со спектром задачи Штурма—Лиувилля

$$h'' + (1-\lambda)^{-1}(g''(0) + \lambda - 1) h = 0; \quad h'(0) + h(0) = 0,$$
$$h(1) = 0,$$

т. е. состоит из чисел $\lambda_i = 1 - g''(0)(1 + \omega_i^2)^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, где ω_i — положительные решения уравнения $\omega = \mathrm{tg}\,\omega$. Если $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то нуль — локально оптимальное управление задачи (2.23). Если же среди чисел λ_i есть отрицательные, то нуль не является локально оптимальным управлением в задаче (2.23).

Пусть $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_i > 0$, $i = 2, 3, \ldots$, т. е. $g''(0) = 1 + \omega_1^2$. В этом случае для анализа экстремали $u(t) \equiv 0$ условия второго порядка неприменимы, но применима теорема 2.1. Если $g'''(0) \neq$

$\neq 0$, то $\operatorname{ind}(0; f) = 0$ и, следовательно, нулевая экстремаль не является локально оптимальной.

2.4. О сходимости численных процедур. Теоремы 2.1 и 2.2 могут быть применены по известным схемам (см., например, [22, 45, 63]) к обоснованию процедур методов Галеркина, механических квадратур, коллокации и других методов приближенного построения оптимального управления в задаче (2.1)—(2.3). Приведем одно утверждение, относящееся к методу Галеркина.

Рассмотрим последовательность конечномерных подпространств $H_n \in L_2^M$, для которых $\overline{UH_n} = L_2^M$, и, как и прежде, обозначим через P_n ортопроекторы на H_n. Пусть управление u_* оптимально и является изолированной экстремалью задачи (2.1)—(2.3), причем $\| u_* \|_{L_2^M} < 1$. Пусть выполнены условия лемм 2.1 и 2.2. Тогда при достаточно больших n множества $\Omega_n \subset H_n$ решений конечномерных уравнений $P_n \nabla f(u_n) = 0$, $u_n \in H_n$; $n = 1, 2, \ldots$, непусты и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{u_n^* \in \Omega_n} \| u_n^* - P_n u_* \|_{L_2^M} = 0.$$

3. Топологический индекс экстремалей задач вариационного исчисления

3.1. Постановка задачи. Пусть $W_q^2(\Omega)$ — пространство Соболева, где Ω — ограниченная область в R^N с гладкой границей. Положим $W_{0,q}^2(\Omega) = W_q^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и определим норму в $W_{0,q}^2(\Omega)$ равенством

$$\| u \|_{W_{0,q}^2(\Omega)} = \| u \|_{W_q^2(\Omega)} + \| u \|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Рассмотрим функционал

$$f(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx, \qquad u \in W_{0,q}^2(\Omega), \tag{3.1}$$

с гладким интегрантом $F(x, u, p)$, $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^N$. Если $q > N$, то функционал (3.1) дважды непрерывно дифференцируем по Фреше на $W_{0,q}^2(\Omega)$ (так как $W_{0,q}^2(\Omega)$ непрерывно вложено в $C^1(\overline{\Omega})$). Пусть $\nabla f(u)$ — оператор градиента функционала $f(u)$, а $\nabla^2 f(u)$ — его производная Фреше. Справедливо представление

$$f(u + h) - f(u) = \langle \nabla f(u), h \rangle + 1/2 \langle \nabla^2 f(u) h, h \rangle + \omega(u; h), \tag{3.2}$$

$h \in W_{0,q}^2(\Omega)$.

Здесь

$$\langle \nabla f(u), h \rangle = \int_\Omega \Big(F_u h + \sum_{i \le N} F_{p_i} h_{x_i} \Big) dx, \tag{3.3}$$

$$\langle\nabla^2 f(u)\,h, h\rangle = \int\limits_{\Omega}\Big(F_{uu}h^2 + 2h\sum_{i\leqslant N} F_{up_i}h_{x_i} +$$
$$+\sum_{i,\,j\leqslant N} F_{p_ip_j}h_{x_i}h_{x_j}\Big)\,dx, \tag{3.4}$$

(частные производные интегранта $F(x, u, p)$ вычислены при $u = u(x)$, $p = \nabla u(x)$) и

$$\lim_{\|h\|_{W^2_{0,q}(\Omega)}\to 0} \|h\|^{-2}_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)}\,|\omega(u; h)| = 0. \tag{3.5}$$

Пусть u_* — экстремаль функционала (3.1), т. е. $\nabla f(u_*) = 0$. Оператор $\nabla^2 f(u_*)$ допускает продолжение до ограниченного самосопряженного оператора A, действующего в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Теорема Якоби. *Если спектр $\sigma(A)$ оператора A лежит на положительной полуоси, то u_* реализует локальный минимум функционала* (3.1) *в* $W^2_{0,q}(\Omega)$. *Если же $\sigma(A)$ пересекается с отрицательной полуосью, то u_* не является точкой минимума функционала* (3.1) *в* $W^2_{0,q}(\Omega)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из оценки

$$\langle\nabla^2 f(u_*)\,h, h\rangle = (Ah, h)_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} \geqslant \alpha\,\|h\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)},$$
$$h \in W^2_{0,q}(\Omega), \quad \alpha > 0,$$

из представления (3.2), равенства $\nabla f(u_*) = 0$ и соотношения (3.5).

Если $\sigma(A)$ пересекается с отрицательной полуосью, то

$$\langle\nabla^2 f(u_*)\,h_0, h_0\rangle = (Ah_0, h_0)_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} < 0$$

при некотором $h_0 \in W^2_{0,q}(\Omega)$. Поэтому $t = 0$ — точка локального максимума скалярной функции $\varphi(t) = f(u_* + th_0)$ и, следовательно, u_* не будет точкой минимума функционала $f(u)$. Теорема доказана.

Если спектр $\sigma(A)$ лежит на неотрицательной полуоси и $0 \in \sigma(A)$, то экстремаль u_* называют вырожденной.

Теорема 3.1. *Пусть вырожденная экстремаль u_* изолирована в* $W^2_{0,q}(\Omega)$ *и*

$$\sum_{i,\,j\leqslant N} F_{p_ip_j}(x, u_*, \nabla u_*)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i\leqslant N}\xi_i^2, \qquad \alpha > 0. \tag{3.6}$$

Пусть нуль — простое собственное значение оператора A. Тогда экстремаль u_* реализует строгий локальный минимум в пространстве $W^2_{0,q}(\Omega)$ *функционала $f(u)$, если и только если* $\operatorname{ind}(u_*; f) = 1$.

Доказательство будет изложено ниже.

3.2. Топологический индекс изолированной экстремали. Для простоты будем считать, что $u_*(x) \equiv 0$. Рассмотрим наряду с (3.1) $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — правильный (см. п. 1.1) интегральный функционал

$$f_0(u) = \int_\Omega F^0(x, u, \nabla u)\,dx, \tag{3.7}$$

интегрант $F^0(x, u, p)$ которого удовлетворяет оценкам

$$\begin{gathered}|F^0| \leqslant C(1 + u^2 + |p|^2),\\ |F_u^0| + \sum_{i \leqslant N}(|F_{p_i}^0| + |F_{ux_i}^0|) + \sum_{i,\,j \leqslant N}|F_{p_ix_j}^0| \leqslant C(1 + |u| + |p|),\\ |F_{uu}^0| + \sum_{i \leqslant N}|F_{up_i}^0| + \sum_{i,\,j \leqslant N}|F_{p_ip_j}^0| \leqslant C,\\ \sum_{i,\,j \leqslant N} F_{p_ip_j}^0 \xi_i\xi_j \geqslant \beta \sum_{i \leqslant N} \xi_i^2 \quad (\beta > 0)\end{gathered} \tag{3.8}$$

и

$$F^0(x, u, p) = F(x, u, p) \qquad (x \in \overline{\Omega},\ |u| + |p| \leqslant a,\ a > 0). \tag{3.9}$$

Лемма 3.1. *Функция $u_*(x) \equiv 0$ является изолированной в $W_{0,q}^2(\Omega)$ экстремалью функционала $f_0(u)$.*

Для доказательства воспользуемся соотношением (3.9).

Лемма 3.2. *Экстремаль $u_*(x) \equiv 0$. функционала $f_0(u)$ изолирована в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность ненулевых экстремалей $u_n(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функционала (3.7), для которых

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n(x)\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = 0. \tag{3.10}$$

Каждая из них — это обобщенное решение из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения Эйлера

$$\sum_{i \leqslant N} \frac{d}{dx_i} F_{p_i}^0 - F_u^0 = 0, \qquad u(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу (3.8) справедливы (см. [75, с. 335]) оценки $\operatorname{vrai}\max|u_n(x)| \leqslant M_n$ $(x \in \Omega,\ n = 1, 2, \ldots)$, в которых константы M_n зависят лишь от C, β, Ω и $\|u_n\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}$. Поэтому из равенства (3.10) вытекает общая оценка $\operatorname{vrai}\max|u_n(x)| \leqslant M_0$ $(x \in \Omega)$. Но тогда [23] $u_n(x) \in W_2^2(\Omega)$ и $\operatorname{vrai}\max|\nabla u_n(x)| \leqslant N_0$ $(x \in \Omega)$. Следовательно, (см. [75, с. 332]) $u_n(x) \in C^3(\overline{\Omega})$ и

$$\|u_n\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leqslant K_0 < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.11}$$

где K_0 зависит лишь от M_0, N_0, F^0, Ω. Поскольку [80] для некоторого $\theta \in (0, 1)$

$$\| u_n \|_{W^2_{0,q}(\Omega)} \leqslant C_0 \| u_n \|^{\theta}_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} \| u_n \|^{1-\theta}_{C^3(\bar{\Omega})}, \tag{3.12}$$

то из (3.10) и (3.11) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n \|_{W^2_{0,q}(\Omega)} = 0. \tag{3.13}$$

Так как функционалы $f_0(u)$ и $f(u)$ совпадают на шарах $\| u \|_{W^2_{0,q}(\Omega)} \leqslant r$ малых радиусов, то функции $u_n(x)$ являются экстремалями функционала $f(u)$, для которых выполнено равенство (3.13). Мы пришли к противоречию с утверждением леммы 3.1. Лемма доказана.

Итак, нулевая экстремаль $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$-правильного функционала $f_0(u)$ изолирована в $\overset{0}{W}{}^2_1(\Omega)$. Поэтому (см. п. 1.2) определен ее топологический индекс $\operatorname{ind}(u_0; f_0)$. Положим $\operatorname{ind}(u_0; f) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ind}(u_0; f_0)$. Этот индекс не зависит от выбора функционала f_0, поэтому его определение корректно.

3.3. Топологический индекс точки минимума.

Теорема 3.2. *Пусть изолированная в $W^2_{0,q}(\Omega)$ экстремаль $u_0(x)$ функционала (3.1) реализует его локальный минимум в $W^2_{0,q}(\Omega)$. Тогда* $\operatorname{ind}(u_0; f) = 1$.

Доказательство. Если изолированная в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ экстремаль $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$-правильного функционала реализует его локальный минимум, то в силу следствия 1.1 ее топологический индекс равен единице. Поэтому достаточно показать, что изолированная (в силу леммы 3.2) в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ нулевая экстремаль функционала $f_0(u)$ реализует его локальный минимум в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Предположим противное. Рассмотрим функционал $f_0(u)$ на шарах $T_n = \{u \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega) \colon \| u \| \leqslant n^{-1}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и положим $A_n = \inf f_0(u)$, $(u \in T_n)$. Так как (см. лемму 1.1) функционал $f_0(u)$ слабо полунепрерывен снизу на $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$, а шары T_n слабо компактны, то для каждого n найдется ненулевая функция $u_n(x) \in T_n$, для которой $A_n = f_0(u_n)$. Покажем, что при больших n имеют место включения $u_n \in \partial T_n$. Действительно, если для некоторой последовательности u_{n_k} выполняются неравенства $\| u_{n_k} \|_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} < n_k^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\nabla f_0(u_{n_k}) = 0$ и, следовательно, u_{n_k} — последовательность экстремалей функционала $f_0(u)$. Последние неравенства противоречат изолированности нулевой экстремали функционала $f_0(u)$ в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Итак, $u_n \in \partial T_n$ при больших n. Но тогда в силу теоремы Л. А. Люстерника [74] при больших n для некоторых $\lambda_n \geqslant 0$ выполняются равенства

$$\nabla f_0(u_n) + \lambda_n u_n = 0, \tag{3.14}$$

т. е. функции u_n являются экстремалями функционалов $\varphi_n(u) = f_0(u) + \lambda_n(u, u)/2$. В силу (3.8) градиент $\nabla f_0(u)$ функционала $f_0(u)$ удовлетворяет локальному условию Липшица; поэтому из равенств (3.14) вытекает оценка $\lambda_n \leqslant L < \infty$. Поэтому интегранты $\Phi_n(x, u, p)$ функционалов $\varphi_n(u)$ удовлетворяют оценкам вида (3.8) с некоторыми положительными константами C, β, которые не зависят от n. Тогда, как и при доказательстве леммы 3.2, получаем, что $u_n(x) \in W^2_{0,q}(\Omega)$ при больших n и $u_n \to 0$ в $W^2_{0,q}(\Omega)$. Но на шарах малых радиусов функционалы $f_0(u)$ и $f(u)$ совпадают. Поэтому $A_n = f_0(u_n) = f(u_n) < f(0)$ при больших n. Таким образом, нуль не является точкой локального минимума функционала $f(u)$ в $W^2_{0,q}(\Omega)$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

3.4. Доказательство теоремы 3.1. Необходимость следует из теоремы 3.2. Доказательство достаточности состоит из трех этапов. Первый заключается в построении некоторой вспомогательной функции. На втором этапе при помощи этой функции исходная задача сводится к анализу более удобной для исследования эквивалентной задачи. Третий этап завершает доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что интегрант $F(x, u, p)$ функционала $f(u)$ удовлетворяет оценкам вида (3.8). Тогда $f(u)$ определен на $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$-правилен.

Первый этап. Пусть $Ah_0 = 0$ и $\|h\|_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} = 1$, $P_0 u = (u, h_0)\,h_0$, $P^0 = I - P_0$, $H_0 = P_0\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$, $H^0 = P^0\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$. Пусть в пространстве $H_1 = W^2_{0,q}(\Omega) \cap H^0$ норма индуцирована нормой пространства $W^2_{0,q}(\Omega)$. Поскольку $H_0 \subset W^2_{0,q}(\Omega)$, а оператор P^0 непрерывен из $W^2_{0,q}(\Omega)$ в H_1, то $W^2_{0,q}(\Omega) = H_0 \oplus H_1$.

Элементы подпространств H_0 и H_1 обозначим соответственно через v_0 и v_1. Значения оператора $B(v_0, v_1) = P^0\nabla f(v_0 + v_1)$ ($v_0 \in H_0$, $v_1 \in H_1$) лежат в H_1; производная Фреше $B'_{v_1}(v_0, v_1) = P^0\nabla^2 f(v_0 + v_1)$ непрерывно зависит от v_0 и v_1 (в окрестности нуля) по операторной норме. Оператор P^0A, где A — оператор из формулировки теоремы Якоби, взаимно однозначен на подпространстве H^0; но оператор $B'_{v_1}(0, 0) = P^0\nabla^2 f(0)$ является сужением оператора P^0A на подпространство $H_1 \subset H^0$; поэтому оператор $B'_{v_1}(0, 0)$ взаимно однозначен на H_1. Уравнение $P^0\nabla^2 f(0)\,u = f_*$ при $f_* \in H_1$ имеет решение $u_* \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$; тогда функция u_* является решением уравнения $\nabla^2 f(0)\,u = f_* + \mu h_0$ при некотором

$\mu \in R^1$, т. е. решением уравнения

$$\sum_{i\leqslant N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j\leqslant N} F_{p_ip_j}u_{x_j}\Big) + \sum_{i\leqslant N} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{up_i}u) - $$
$$- \sum_{i\leqslant N} F_{up_i}u_{x_i} - F_{uu}u = \sum_{i\leqslant N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(f_* + \mu h_0),$$

где частные производные функции $F(x, u, p)$ вычислены при $u = 0$, $p = 0$. Поэтому из теоремы 15.1 монографии [75] следует, что $u_* \in W^2_{0,\,q}(\Omega)$. Таким образом, оператор $B'_{v_1}(0, 0)$ взаимно однозначно отображает H_1 на H_1 и из теоремы Банаха [31] вытекает непрерывная обратимость оператора $B'_{v_1}(0, 0)$. Следовательно, уравнение

$$P^0\nabla f(v_0 + v_1) = 0 \qquad (3.15)$$

и равенство $\nabla f(0) = 0$ определяют в окрестности нуля пространства H_0 однозначную неявную функцию $v_1 = \varphi(v_0)$, удовлетворяющую условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$.

Функция $\varphi(v_0)$ в другой ситуации использовалась в работе [69] и была названа информативной.

Второй этап. Рассмотрим на шаре $V = \{u \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)\colon \|u\| \leqslant 1\}$ непрерывно дифференцируемый функционал

$$g(u) = f(P_0u + \varphi(P_0u)) + 1/2\,(P^0A(P^0u - \varphi(P_0u)),$$
$$P^0u - \varphi(P_0u)). \qquad (3.16)$$

Если $u_n \in V$, $u_n \rightharpoonup u_0$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\nabla g(u_n), u_n - u_0) \leqslant 0,$$

то из представления

$$\nabla g(u) = P_0(I + \varphi'(P_0u))^*\nabla f(P_0u + \varphi(P_0u)) +$$
$$+ (P^0 - P_0(\varphi'(P_0u))^*)\,P^0A\,(P^0u - \varphi(P_0u))$$

вытекает оценка

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(P^0AP^0(u_n - u_0), u_n - u_0) \leqslant 0$$

и, поскольку A положительно определен на H^0, $P^0u_n \to P^0u_0$ в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$. Но тогда из компактности последовательности P_0u_n вытекает, что $u_n \to u_0$. Поэтому функционал (3.16) $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$-правилен.

Нуль реализует локальный минимум функционала $f(u)$ в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$, если и только если он реализует локальный минимум функционала $g(u)$. Для доказательства (в силу принципа инвариантности минимума при невырожденных деформациях [4]) достаточно показать, что при малых $r > 0$

$$\lambda \nabla f(u) + (1-\lambda) \nabla g(u) \neq 0 \ (\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \leqslant r; \quad u \neq 0;$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1). \tag{3.17}$$

Пусть найдутся последовательности чисел $\lambda_n \in [0, 1]$ и точек $u_n \neq 0$, для которых $u_n \to 0$ и $\lambda_n \nabla f(u_n) + (1-\lambda_n) \nabla g(u_n) = 0$. Тогда $\lambda_n P^0 \nabla f(u_n) + (1-\lambda_n) P^0 A (P^0 u_n - \varphi(P_0 u_n)) = 0$, т. е. $\lambda_n \nabla f(u_n) + (1-\lambda_n) A u_n = \xi_n$, где $\xi_n = (1-\lambda_n) P^0 A (P^0 u_n + \varphi(P_0 u_n)) + \mu_n h_0$ $(\mu_n \in R^1)$. Поэтому u_n — это решения квазилинейных эллиптических уравнений

$$\lambda_n \left(F_u - \sum_{i \leqslant N} \frac{d}{dx_i} F_{p_i}\right) + (1-\lambda_n) F_{uu}(x, 0, 0) u +$$
$$+ (1-\lambda_n)\left(\sum_{i \leqslant N} F_{up_i}(x, 0, 0) u_{x_i} - \sum_{i \leqslant N} \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{up_i}(x, 0, 0) u)\right) -$$
$$- (1-\lambda_n) \sum_{i \leqslant N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j \leqslant N} F_{p_i p_j}(x, 0, 0) u_{x_j}\right) + \sum_{i \leqslant N} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i^2} = 0.$$

Как и при доказательстве леммы 3.2, устанавливается, что $u_n \in W^2_{0,q}(\Omega)$ и $u_n \to 0$ в $W^2_{0,q}(\Omega)$. Поэтому

$$\nabla f(u_n) = \nabla f(P_0 u_n + \varphi(P_0 u_n)) +$$
$$+ \nabla^2 f(P_0 u_n + \varphi(P_0 u_n))(P^0 u_n - \varphi(P_0 u_n)) + \omega_n,$$

где $\|\omega_n\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = o\left[\|P^0 u_n - \varphi(P_0 u_n)\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\right]$. Из равенства

$$\lambda_n P^0 \nabla^2 f(P_0 u_n + \varphi(P_0 u_n)) v_n + (1-\lambda_n) P^0 A v_n = -\lambda_n P^0 \omega_n,$$

где $v_n = P^0 u_n - \varphi(P_0 u_n)$, вытекает, что

$$\lambda_n (P^0 \nabla^2 f(P_0 u_n + \varphi(P_0 u_n)) v_n, v_n) =$$
$$= (\lambda_n - 1)(P^0 A v_n, v_n) - \lambda_n (P^0 \omega_n, v_n). \tag{3.18}$$

Но при достаточно больших n справедливы оценки с $\alpha_0 > 0$

$$(P^0 \nabla^2 f(P_0 u_n + \varphi(P_0 u_n)) v_n, v_n) \geqslant \alpha_0 \|v_n\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)},$$

$$(P^0 A v_n, v_n) \geqslant \alpha_0 \|v_n\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}, \qquad |(P^0 \omega_n, v_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha_0}{2} \|v_n\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)},$$

и из равенств (3.18) следует, что $v_n = 0$ при больших n. Поэтому при больших n справедливы равенства

$$(I + (1-\lambda_n) P_0 (\varphi'(P_0 u_n))^*) \nabla f(u_n) = 0;$$

а так как при больших n норма оператора $(\varphi'(P_0 u_n))^*$ мала, то при этих n справедливы равенства $\nabla f(u_n) = 0$ и, следовательно, $u_n = 0$. Мы пришли к противоречию.

Итак, для доказательства теоремы достаточно показать, что нуль — точка локального минимума функционала $g(u)$.

Третий этап. Так как $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, то уравнение $u - \varphi(P_0 u) = v$, где $\varphi(\cdot)$ — информативная функция, определяет неявную функцию $u = R(v)$ ($R(0) = 0$), которая является локальным диффеоморфизмом окрестности нуля пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Положим

$$h(v) = g(R(v)) = f(P_0 v + \varphi(P_0 v)) + 1/2\,(P^0 A P^0 v,\ P^0 v).$$

Нуль является критической точкой функционала $h(v)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что нуль реализует локальный минимум функционала $h(v)$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Поскольку

$$\nabla h(v) = P_0 (I + (\varphi'(P_0 v))^*)\, \nabla f(P_0 v + \varphi(P_0 v)) + P^0 A P^0 v,$$

то поле градиентов $\nabla h(v)$ расщепляемо: оно является прямой суммой двух полей: $\Phi_0 v_0 = P_0 (I + (\varphi'(v_0))^*)\, \nabla f(v_0 + \varphi(v_0))$, $v_0 \in H_0$ и $\Phi^0 v^0 = P^0 A v^0$ ($v^0 \in H^0$). По теореме [94] о вращении прямой суммы векторных полей справедливо равенство $\operatorname{ind}(0; h) = \operatorname{ind}(0; \Phi_0)\operatorname{ind}(0; \Phi^0)$. Но $\operatorname{ind}(0; h) = \operatorname{ind}(0; g) = \operatorname{ind}(0; f) = 1$ и $\operatorname{ind}(0; \Phi^0) = 1$. Поэтому $\operatorname{ind}(0; \Phi_0) = 1$. Но тогда, поскольку поле Φ_0 одномерно, $(\Phi_0 v_0, v_0) > 0$ при $v_0 \neq 0$. Отсюда следует, что 0 — точка локального минимума функции $f(v_0 + \varphi(v_0))$ ($v_0 \in H_0$). А так как форма $(P^0 A v^0, v^0)$ положительно определена на H^0, то нуль — это точка локального минимума в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функционала $h(v)$. Теорема доказана.

Условие (S) было введено в работах [94, 108]. Близкие к удовлетворяющим условию (S) классы операторов рассматривались в работах [87, 105]. Топологический индекс экстремалей одномерных вариационных задач изучался в работе [70]. В работе [113] приведен аналог теоремы 1.1 для частного класса вариационных задач. В работе [47] приведено следствие 1.1.

3

УПРАВЛЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Многочисленные явления в теории автоматического регулирования, механике, радиофизике, биологии, иммунологии, экономике, робототехнике и т. д. требуют для своего правильного качественного и количественного описания использовать уравнения с последействием. Одна из проблем, возникающих при этом, связана с оптимальным управлением и оцениванием при случайных возмущениях. В настоящей главе сформулированы общие условия оптимальности, исследована задача управления линейными и квазилинейными системами с квадратичным минимизируемым функционалом, установлены соотношения двойственности между управлением и наблюдением и приведены формулы для оптимальных оценок состояний систем с последействием. Ввиду громоздкости изложение ведется не для общего случая, а лишь для характерных ситуаций, позволяющих, однако, выявить основные методы исследования и специфику получаемых результатов, обусловленных учетом последействия.

1. Оптимальное управление системами с последействием

1.1. Общие условия оптимальности. Рассмотрим управляемую систему

$$dx(t) = f(t, x_t, u)\,dt + \sigma(t, x_t, u)\,d\xi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.1}$$

Здесь вектор $x(t) \in R_n$, где R_n — евклидово пространство размерности n, вектор $f \in R_n$ и матрица σ — заданные функции; $\xi(t) \in R_l$ — стандартный винеровский процесс [77]; моменты времени t_0 и T заданы. Символ x_t означает всю траекторию, предшествующую моменту t, т. е. $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \leqslant 0$. Решение уравнения (1.1) определяется начальным условием

$$x_{t_0} = x(t_0 + \theta) = \varphi(t_0 + \theta), \qquad \theta \leqslant 0, \tag{1.2}$$

где φ — заданная функция. Управление $u \in U$, где U — заданное множество из R_m, выбирается из условия минимума функционала

$$\mathrm{M}\left[F(x(T)) + \int_{t_0}^{T} F_1(t, x(t), u)\,dt\right] = \gamma^u(t_0, \varphi), \tag{1.3}$$

где F, F_1 — заданные скалярные функции; М — математическое ожидание.

Оптимальное управление u в задаче (1.1), (1.3) ищется в классе функционалов вида $u = u(t, x_t)$. Управление $u(t, x_t) \in U$ называется допустимым, если при этом управлении существует решение задачи (1.1), (1.2) и конечен функционал (1.3).

Обозначим через $\bar{\theta}$ независимую переменную, $\bar{\theta} < 0$. Рассмотрим класс D скалярных функционалов $V(t, x, \varphi(\bar{\theta}))$, таких, что для любой кусочно-непрерывной ограниченной функции $\psi(s) \in R_n$, $s < \infty$, и произвольных $t \geqslant t_0$, $x \in R_n$ функция $V_\psi(t, x) = V(t, x, \psi(t + \bar{\theta}))$ дважды непрерывно дифференцируема по x и имеет ограниченную производную по $t \in [t_0, T]$. Обозначим через L^u оператор, действующий в D по формуле

$$L^u V(t, x, \psi(t+\bar{\theta})) = L_0 V_\psi(t, x) + f^{\mathrm{T}}(t, \bar{\psi}_t, u)\, \partial V_\psi(t, x)/\partial x, \qquad (1.4)$$

$$L_0 V_\psi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(\frac{\partial^2 V_\psi}{\partial x^2}\right) \sigma(t, \bar{\psi}_t, u)\, \sigma^{\mathrm{T}}(t, \bar{\psi}_t, u) + \frac{\partial V_\psi(t, x)}{\partial t}.$$

Здесь т — знак транспонирования; Tr — след матрицы; $\bar{\psi}(t) = x$; $\bar{\psi}(t + \bar{\theta}) = \psi(t + \bar{\theta})$. Оператор L^u представляет собой инфинитезимальный оператор процесса (1.1).

Т е о р е м а 1.1. [50,52]. *Пусть существуют функционал $V_0(t, x, \psi(\bar{\theta}))$ и управление $u_0(t, \psi_t)$, удовлетворяющие при всех $t \in [0, T]$ и всех допустимых управлениях $u(t, x_t)$ условиям*

$$L^{u_0} V_0(t, \psi(t), \psi(t+\bar{\theta})) + F_1(t, \psi(t), u_0(t, \psi_t)) = 0,$$

$$L^u V_0(t, \psi(t), \psi(t+\bar{\theta})) + F_1(t, \psi(t), u(t, \psi_t)) \geqslant 0, \qquad (1.5)$$

$$V_0(T, \psi(T), \psi(T+\bar{\theta})) = F(\psi(T)).$$

Тогда управление u_0 является оптимальным. Соответствующее управлению u_0 значение критерия качества (1.3) *равняется*

$$\gamma^{u_0}(t_0, \varphi) = V_0(t_0, \varphi(0), \varphi(t+\bar{\theta})).$$

Приведенная теорема является аналогом метода динамического программирования для систем с последействием, а функционал V_0 — аналогом функции Беллмана. Иными словами, $V_0(t, \psi(t), \psi(t+\bar{\theta}))$ есть минимальное значение функционала (1.3) при условии, что движение системы начинается в момент времени t с начальным условием $x(t + \theta) = \psi(t + \theta)$. Несмотря на сложность сформулированных условий оптимальности, в ряде случаев, рассматриваемых ниже, они позволяют эффективно построить оптимальное управление.

1.2. Линейно-квадратичная задача. Пусть уравнения движения (1.1) линейны и имеют вид

$$dx(t) = [A(t)\, x(t-h) + B(t)\, u]\, dt + \sigma(t)\, d\xi(t). \qquad (1.6)$$

Функционал (1.3) квадратичный, причем

$$F = x^{\mathrm{T}} N_0 x, \qquad F_1 = x^{\mathrm{T}} N_1(t)\, x + u^{\mathrm{T}} N_2(t)\, u, \qquad (1.7)$$

где заданные матрицы N_i кусочно-непрерывны, ограничены и неотрицательно определены, а матрица $N_2 > 0$, т. е. положительно определена. В этом случае функционал V_0, удовлетворяющий условиям (1.5), естественно искать в виде квадратичной формы

$$V_0(t, x, \psi(t+\bar\theta)) = x^{\mathrm{T}} P(t) x + x^{\mathrm{T}} \int_{-h}^{0} Q(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + g(t) + \\ + \int_{-h}^{0} \psi^{\mathrm{T}}(\tau) Q^{\mathrm{T}}(t, \tau) x d\tau + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \psi^{\mathrm{T}}(\tau) R(t, \tau, \rho) \psi(\rho) d\tau\, d\rho. \quad (1.8)$$

В (1.8) матрицы P, Q, R и скалярная функция g подлежат определению. Подставим выражение (1.8) в соотношения (1.5) и приравняем нулю соответствующие формы от ψ. Получаем систему детерминированных уравнений ($\dot P(t) = dP(t)/dt$):

$$\begin{aligned} &\dot P(t) + Q(t, 0) + Q^{\mathrm{T}}(t, 0) - P(t) B_1(t) P(t) + N_1(t) = 0,\\ &R(t, 0, \tau) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) Q(t, \tau) - P(t) B_1 Q(t, \tau) = 0,\\ &0 \leqslant t \leqslant T,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \rho}\right) R(t, \tau, \rho) - Q^{\mathrm{T}}(t, \tau) B_1 Q(t, \rho) = 0, \qquad (1.9)\\ &\dot g(t) = -\operatorname{Tr} \sigma(t) \sigma^{\mathrm{T}}(t) P(t),\\ &B_1 = B N_2^{-1} B^{\mathrm{T}}, \qquad -h < \tau, \quad \rho \leqslant 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для системы уравнений (1.9) имеют вид

$$\begin{aligned} &P(T) = N_0, Q(T, \tau) = R(T, \tau, \rho) = g(T) = 0,\\ &A^{\mathrm{T}}(t) P(t) - Q^{\mathrm{T}}(t, -h) = 0, R(t, \rho, \tau) = R^{\mathrm{T}}(t, \tau, \rho), \qquad (1.10)\\ &2A^{\mathrm{T}}(t) Q(t, \tau) - R(t, -h, \tau) - R^{\mathrm{T}}(t, \tau, -h) = 0. \end{aligned}$$

Синтез оптимального управления u_0 в рассматриваемом случае есть линейный функционал, зависящий от реализовавшейся траектории движения на отрезке времени длины запаздывания:

$$u_0(t, x_t) = -N_2^{-1}(t) B^{\mathrm{T}}(t) \left[P(t) x(t) + \int_{-h}^{0} Q(t, s) x(t+s) ds\right] \quad (1.11)$$

Минимальное значение критерия качества (1.3), (1.7), соответствующее оптимальному управлению (1.11), равняется $V_0(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 + \bar\theta))$, где V_0 определяется через (1.8). Таким образом, решение линейно-квадратичной задачи управления (1.6), (1.3), (1.7) полностью определяется краевой задачей (1.9), (1.10). Отметим [50, 51], что при сделанных предположениях об N_i и кусочно-непрерывных матрицах $A(t)$ и $B(t)$ существует и притом единственное решение задачи (1.9), (1.10) в классе абсолютно непрерывных функций с ограниченной почти всюду производной.

Рассмотрим теперь некоторые способы построения точного и приближенного решения задачи (1.9), (1.10) для $h \geqslant 0$. Если $h = 0$, то $V_0(t, x, \psi(t+\overline{\theta})) = x^{\mathrm{T}}P(t)x + g(t)$ и краевая задача (1.9), (1.10) сводится к уравнению Риккати $\dot{P}(t) + A^{\mathrm{T}}P + PA - PB_1P + N_1 = 0$, $P(T) = N_0$ для матрицы P и квадратуре, определяющей $g(t)$ [101].

1.3. Приближенное решение линейно-квадратичной задачи. Приведем алгоритм последовательных приближений решения задачи (1.9), (1.10). Зададим нулевое приближение $P_0(t)$, $Q_0(t, \tau)$ произвольно, считая лишь, что эти функции непрерывны. Построим далее последовательность (P_i, Q_i, R_i, g_i), $i \geqslant 1$. Эта последовательность представляет собой решение задачи (1.9), (1.10), в которой нелинейные члены линеаризуются по следующему правилу:

$$
\begin{aligned}
&PB_1P \to P_{i-1}B_1P_i + P_iB_1P_{i-1} - P_{i-1}B_1P_{i-1},\\
&PB_1Q \to P_{i-1}B_1Q_i + P_iB_1Q_{i-1} - P_{i-1}B_1Q_{i-1}, \qquad (1.12)\\
&Q^{\mathrm{T}}B_1Q \to Q_i^{\mathrm{T}}B_1Q_{i-1} + Q_{i-1}^{\mathrm{T}}B_1Q_i - Q_{i-1}^{\mathrm{T}}B_1Q_{i-1}.
\end{aligned}
$$

Зададим теперь i-е приближение u_i к оптимальному управлению формулой (1.11), в которой вместо P и Q стоят P_{i-1} а Q_{i-1}. Соответствующее управлению u_i значение V_i критерия качества (1.3), (1.7) дается правой частью выражения (1.8), в котором P, Q, R, g заменены на P_i, Q_i, R_i, g_i. При этом решение (P_i, Q_i, R_i)-линеаризованной задачи выписывается в явном виде и зависит только от предшествующей итерации. Кроме того, $V_i(t, x, \psi(t+\overline{\theta})) \geqslant V_{i+1}(t, x, \psi(t+\overline{\theta}))$ для любых $i \geqslant 1$, $t \in [t_0, T]$, $x \in R_n$. Последовательность (P_i, Q_i, R_i, g_i) сходится к решению задачи (1.9), (1.10), а норма разности между этим решением и i-м приближением к нему есть величина порядка $1/i!$ (см. работу [51]).

1.4. Точные решения линейно-квадратичной задачи. Если в критерии качества (1.3), (1.7) матрица $N_1 = 0$ (т. е. управляющая сторона интересуется отклонением траектории от нуля только в момент окончания движения), то краевая задача (1.9), (1.10) допускает точное решение. Способ построения точного решения основан на применении метода динамического программирования [3] последовательно на отрезках $[T-(i+1)h,\ T-ih]$. Выпишем указанное решение. Обозначим через $B_2(t)$ матрицу, определяемую соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\dot{B}_2(t) = -B_2(t+h)A(t+h), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\\
&B_2(T) = I, \qquad B_2(s) \equiv 0, \qquad s > T.
\end{aligned}
$$

Здесь I — единичная матрица. Ясно, что $B_2(t)$ легко вычисляется в явном виде с помощью метода шагов. Матрицу P_1 определим как решение уравнения Бернулли

$$
\dot{P}_1(t) = P_1(t)B_2^{\mathrm{T}}(t)B_1(t)B_2(t)P_1(t), \quad P_1(T) = N_0, \qquad (1.13)
$$

Тогда решение P, Q, R задачи (1.9), (1.10) имеет вид

$$P(t) = B_2^{\mathrm{T}}(t)\, P_1(t)\, B_2(t), \quad Q(t, \tau) = -B_2^{\mathrm{T}}(t)\, P_1(t)\, \dot{B}_2(t+\tau), \tag{1.14}$$
$$R(t, \tau, \rho) = \dot{B}_2^{\mathrm{T}}(t+\tau)\, P_1(t)\, \dot{B}_2(t+\rho).$$

В единственной точке $t = T - h$ разрыва производной функции B_2 эта производная определяется по непрерывности слева. Справедливость формул (1.14) проверяется их подстановкой в уравнения (1.9), (1.10). Если матрица N_0 невырождена, то уравнение (1.13) сводится к линейному с помощью перехода к обратной матрице $P_1 \to P_1^{-1}$.

1.5. Приближенное управление квазилинейными системами. Точное построение синтеза оптимального управления, основанное на уравнениях (1.5) метода динамического программирования, сопряжено со значительными трудностями. Поэтому особую актуальность приобретают различные приближенные алгоритмы синтеза управления. Некоторые из них можно построить (и обосновать), если уравнения движения содержат малые параметры, обусловленные либо малостью нелинейных членов или шумов в управляющем устройстве, либо малостью внешних сил, действующих на систему. Наличие малых параметров в уравнениях движения позволяет развить процедуру приближенного синтеза, основанную на разложении функционала Беллмана в ряд по степеням малого параметра [52, 53]. Отметим, что обоснование этой процедуры для систем с последействием опирается на построение вспомогательных задач управления, решение которых как раз и совпадает с введенными последовательными приближениями.

Рассмотрим подробнее случай управляемой квазилинейной системы вида (1.1)

$$dx(t) = (\varepsilon f(t, x_t) + B(t)\, u)\, dt + \sigma(t)\, d\xi(t). \tag{1.15}$$

Минимизируемый функционал — квадратичный и определяется равенствами (1.3), (1.7).

Ввиду соотношений (1.4), (1.5) уравнение Беллмана в рассматриваемом случае (1.15), (1.3), (1.7)

$$\inf_u [L_0 V_\psi(t, x) + (\varepsilon f(t, \psi) + Bu)^{\mathrm{T}}\, \partial V_\psi(t, x)/\partial x +$$
$$+ x^{\mathrm{T}} N_1 x + u^{\mathrm{T}} N_2 u] = 0, \qquad V_\psi(T, x) = x^{\mathrm{T}} N_0 x, \tag{1.16}$$

откуда вытекает формула для оптимального управления

$$u_0(t, x_t) = -\frac{1}{2} N_2^{-1}(t)\, B^{\mathrm{T}}(t)\, \partial V_{x(t+\overline{\theta})}(t, x(t))/\partial x(t). \tag{1.17}$$

Представим искомое решение уравнения (1.17) в виде

$$V(t, x, \psi) = V^0(t, x, \psi) + \varepsilon V^1(t, x, \psi) + \ldots \tag{1.18}$$

Для определения коэффициентов этого разложения подставим его в уравнение (1.6) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε. Функция V^0, определяемая уравнением (1.16) при $\varepsilon = 0$, является функцией Беллмана линейно-квадратичной задачи (1.15), (1.3), (1.7) при $\varepsilon = 0$, не содержащей последействия, и вычисляется в явном виде. Она равняется $V^0 = x^{\mathrm{T}}P(t)x + g(t)$ (см., например, п. 1.2). Остальные приближения представляют собой решения уже линейных уравнений.

Для этих приближений можно записать следующее вероятностное представление:

$$V_{\psi}^{i}(t, x) = \mathrm{M}_{\overline{\psi}} \int_{t}^{T} S_i(\tau, y_\tau)\, d\tau. \tag{1.19}$$

Здесь $\mathrm{M}_{\overline{\psi}}$ — математическое ожидание, вычисляемое при услови что траектория процесса y_τ фиксирована при $\tau \leqslant t$ и совпадает с заданной функцией $\overline{\psi}$; процесс $y(\tau)$ определяется линейным стохастическим уравнением без последействия

$$dy(\tau) = -B_1(\tau) P(\tau) y(\tau)\, d\tau + \sigma(\tau)\, d\xi(\tau),\ \tau \geqslant t,$$
$$y(t) = x.$$

Наконец,

$$S_i(t, \overline{\psi}) = f^{\mathrm{T}}(t, \overline{\psi})\, \partial V_{\psi}^{i-1}(t, x)/\partial x -$$
$$- \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} (\partial V_{\psi}^{j}(t, x)/\partial x)^{\mathrm{T}} B_1(t)\, \partial V_{\psi}^{j-i}(t, x)/\partial x.$$

Представление (1.19) может быть использовано для вычисления коэффициентов разложения (1.18). Теперь для получения i-го приближения u_i к оптимальному управлению достаточно в правую часть уравнения (1.17) вместо V подставить i-ю частичную сумму из разложения (1.18). При этом ошибка по минимизируемому функционалу будет величиной порядка ε^{i+1}.

Замечание. Часто при рассмотрении задач управления уравнения системы берут содержащими в правых частях линейные слагаемые вида $A_1(t)x(t)$, например:

$$dx(t) = [A_1(t)x(t) + A(t)x(t-h) + B(t)u]\, dt +$$
$$+ \sigma(t)\, d\xi(t).$$

Ясно, однако, что это уравнение приводится к виду (1.6) с помощью замены переменных $y(t) = z(t)x(t)$, где квадратная матрица z определяется соотношениями $\dot{z}(t) = -z(t)A_1(t)$, $z(0) = I$.

2. Оценивание состояний систем с последействием

В этом разделе рассмотрена задача оценивания состояний линейных систем с последействием по результатам линейных наблюдений. Метод построения оптимальных оценок основан на сведении задачи оценивания к линейно-квадратичной задаче управления.

2.1. Фильтрация при одном запаздывании. Рассмотрим систему вида (1.6)

$$dx(t) = A(t)\,x(t-h_1)\,dt + \sigma_1(t)\,d\xi_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$x(s) = 0,\ s < 0,\ x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

За системой (2.1) проводятся непрерывные наблюдения, в результате которых измеряется вектор $y(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$dy(t) = g(t)\,x(t-h)\,dt + \sigma_2(t)\,d\xi_2(t), \tag{2.3}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \qquad y(0) = 0.$$

В уравнениях (2.1), (2.3) векторы $x(t) \in R_n$, $y(t) \in R_n$ и матрицы A, σ_1, g, σ_2 с кусочно-непрерывными элементами заданы, постоянные запаздывания h_1, h неотрицательны; через ξ_i обозначены стандартные винеровские процессы; гауссовская случайная величина x_0 такова, что $\mathrm{M}\,x_0 = 0$, $D_0 = \mathrm{M}\,x_0x_0^{\mathrm{T}} > 0$. Величины x_0, ξ_1, ξ_2 взаимно независимы. Наличие запаздывания h в наблюдениях (2.3) обусловлено конечностью времени, необходимого для проведения измерений и их обработки. Задача состоит в построении наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки $m(T)$ вектора $x(T)$ по измерениям $y(t)$ на отрезке $[0, T]$. Отметим, что $m(T)$ есть условное математическое ожидание $m(T) = \mathrm{M}\,x(T)/y_T$, где y_T — σ-алгебра, порожденная наблюдениями $y(s)$, $s \leqslant T$. Положим $D(T) = \mathrm{M}\,[x(T) - m(T)]\,[x(T) - m(T)]^{\mathrm{T}}$. Поскольку условное распределение вероятностей $x(T)$ при условии y_T гауссовское, то

$$m(T) = \int_0^T u(t)\,dy(t). \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.1)—(2.4) вытекает, что матрица $u(t)$, образующая ядро оценки (2.4), есть оптимальное управление линейной детерминированной системой

$$\dot{\alpha}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t+h_1)\,\alpha(t+h_1) + g^{\mathrm{T}}(t+h)\,u(t+h), \tag{2.5}$$

$$\alpha(\tau) = 0,\ \tau > T,\ \alpha(T) = I$$

с квадратичным минимизируемым функционалом J, равным

$$J = \operatorname{Tr} D(T) = \operatorname{Tr}\Big\{\alpha^{\mathrm{T}}(0)\,D_0\alpha(0) + \int_0^T [\alpha^{\mathrm{T}}(t)\,N_1(t)\,\alpha(t) +$$

$$+ u^{\mathrm{T}}(t)\,N_2(t)\,u(t)]\,dt\Big\} \to \min_u, \tag{2.6}$$

$$N_2 = \sigma_2\sigma_2^{\mathrm{T}} > 0,\ N_1 = \sigma_1\sigma_1^{\mathrm{T}}.$$

Функции A и g вне отрезка $[0, T]$ считаются равными нулю.

Решение задачи (2.5), (2.6) изложено в разд. 1. Используя его, запишем выражение для оценки $m(T)$ и матрицы ковариации $D(T)$. Имеем

$$\begin{aligned} u(t) = N_2(t)^{-1} g(t)\Big[P(t-h)\alpha(t-h) + \\ + \int_{-h_1}^{0} Q(t-h, \tau)\alpha(t-\tau-h)\,d\tau\Big], \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$D(T) = P(T), \quad T \geqslant t \geqslant h; \quad u(t) = 0, \quad 0 \leqslant t < h.$$

Матрицы P, Q, R удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\dot{P}(t) = Q(t, 0) + Q^{\mathrm{T}}(t, 0) + N_1(t) - P(t) B_0(t) P(t), \\ &R(t, 0, \tau) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) Q(t, \tau) - P(t) B_0(t) Q(t, \tau) = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right) R(t, \tau, \rho) + Q^{\mathrm{T}}(t, \tau) B_0(t) Q(t, \rho) = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$B_0(t-h) = g(t) N_2(t)^{-1} g^{\mathrm{T}}(t).$$

Граничные условия для уравнений (2.8) имеют вид

$$\begin{aligned} &P(0) = D_0, \ Q(0, \tau) = R(0, \tau, \rho) = 0, \ -h_1 < \tau, \rho \leqslant 0; \\ &A(t + h_1) P(t) - Q^{\mathrm{T}}(t, -h_1) = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T; \\ &2A(t + h_1) Q(t, \tau) - R(t, -h_1, \tau) - R^{\mathrm{T}}(t, \tau, -h_1) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Итак, построение оценки $m(T)$ и матрицы ковариации $D(T)$ состоит из следующих этапов: 1) решить задачу (2.8), (2.9), определив матрицы P и Q; 2) решить задачу (2.5) при управлении $u(t)$ из выражения (2.7), в которое подставлены найденные матрицы P и Q; 3) подставить найденные P, Q и α в соотношение (2.7), определив тем самым $u(t)$; 4) теперь $D(T)$ и $m(T)$ даются формулой (2.7) при вычисленном $u(t)$.

Рассмотрим некоторые ситуации, когда описанный алгоритм фильтрации допускает упрощения.

а) Если $\sigma_1 = 0$ (т. е. уравнения (2.1) — детерминированные), то задача (2.8), (2.9) допускает явное решение вида (1.14).

б) Случай $h_1 = 0$ и уравнения (2.1) справедливы при всех $t \geqslant -h$. Начальное условие имеет вид

$$x(0) = x_0, \ \mathrm{M}\, x_0 = m_0, \ \mathrm{M}\,(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^{\mathrm{T}} = D_0. \tag{2.10}$$

Определим матрицу $z(t, s)$ соотношениями $z(t, t) = I$, $\partial z(t, s)/\partial t = A(t) z(t, s)$. Тогда для матрицы ковариации $D(t)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \dot{D}(t) - DA^{\mathrm{T}} - AD = -Dz_1(t) D + Dz_1 \overline{\sigma}_1 + \\ + \overline{\sigma}_1 z_1 D + \sigma_1 \sigma_1^{\mathrm{T}} - \overline{\sigma}_1 z_1 \overline{\sigma}_1, \quad D(0) = D_0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь положено

$$z_1(t) = z^{\mathrm{T}}(t-h, t)\, g'(t)\, N_2(t)^{-1}\, g(t)\, z(t-h, t),$$

$$\overline{\sigma}_1 = \int_{t-h}^{t} z(t,s) N_1(s) z^{\mathrm{T}}(t,s)\, ds.$$

Уравнение для оптимальной оценки m (t) имеет вид

$$dm(t) - A(t) m(t) dt = \left(D(t) - \int_{t-h}^{t} \sigma_1(s)\, ds\right) z^{\mathrm{T}}(t, t-h)\, g^{\mathrm{T}}(t) \times$$

$$\times N_2(t)^{-1}(dy(t) - g(t) z(t-h, t) m(t) dt), \quad m(0) = m_0. \qquad (2.12)$$

в) Случай $h_1 = 0$ и уравнения (2.1) справедливы только при $t \geqslant 0$ с начальным условием (2.10). Тогда оптимальный фильтр описывается уравнениями (2.11), (2.12), перед правыми частями надлежит написать общий множитель $\chi(t-h)$, где $\chi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 0$.

2.2. Экстраполяция. Задача экстраполяции состоит в построении наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки будущего состояния системы (2.1) в момент времени $\tau > T$ по результатам наблюдений (2.3) вектора $y(t)$ на отрезке $[0, T]$. Решение задачи экстраполяции может быть получено из решения задачи фильтрации, приведенного в п. 2.1. Действительно, положим $g_0(t) = g(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и $g_0(t) = 0$ при $t > T$. Рассмотрим теперь вспомогательную задачу фильтрации вектора $x(\tau)$ [описываемого соотношениями (2.1), (2.2) при $0 \leqslant t \leqslant \tau$] по результатам наблюдений (2.3) на отрезке $[0, \tau]$, причем в уравнениях наблюдения (2.3) вместо $g(t)$ стоит $g_0(t)$. Так как случайные величины x_0, ξ_1, ξ_2 независимы, то решение введенной вспомогательной задачи фильтрации дает также решение и исходной задачи экстраполяции. Поэтому соотношения, определяющие решение задачи экстраполяции, т. е. определяющие условное математическое ожидание $m(\tau) = \mathrm{M}\, x(\tau) \mid y_T$ и матрицу $D(\tau) = \mathrm{M}\,[x(\tau) - m(\tau)]\,[x(\tau) - m(\tau)]^{\mathrm{T}}$, получаются из соответствующих формул п. 2.1, в которых всюду надлежит заменить T на τ, а $g(t)$ на $g_0(t)$.

2.3. Интерполяция. Задача интерполяции состоит в построении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки $x(\tau_0)$ в предшествующий момент $\tau_0 \in [0, T)$ по измерениям $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Процессы x и y задаются уравнениями (2.1)—(2.3). Оптимальная оценка $m(\tau_0) = \mathrm{M}\, x(\tau_0) \mid y_T$ по-прежнему имеет вид (2.4), т. е.

$$m(\tau_0) = \int_0^T v(t)\, dy(t). \qquad (2.13)$$

Матрица $v(t)$ в оценке (2.13) представляет собой оптимальное управление линейной системой

$$\dot{\alpha}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t+h_1)\, \alpha(t+h_1) + g^{\mathrm{T}}(t+h)\, v(t+h), \qquad (2.14)$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\alpha(s) = 0,\ s > T,\ \alpha(\tau_0) = I + \alpha(\tau_0 + 0) \qquad (2.15)$$

с минимизируемым квадратичным функционалом (2.6). Отметим, что $\alpha(t)$ имеет скачок величины I при $t = \tau_0$. Оптимальное управление v в задаче (2.14), (2.6) равняется $v = u + u_1$, где u определяется формулой (2.7). Для u_1 справедливы соотношения $u_1(t) = 0$, $0 \leqslant t < h$; $u_1(t) = N_2(t)^{-1} g(t) P_2(t)$, где матрица P_2 удовлетворяет уравнениям

$$\dot{P}_2(t) + P_2(t) B_0(t) P_2(t) = 0,$$
$$P_2(0) = 0, \; P_2(\tau_0 + 0) = P(\tau_0). \tag{2.16}$$

Выражение для матрицы ковариации $D(\tau_0)$ ошибки интерполяции имеет вид

$$D(\tau_0) = P(T) - \int_0^T P_2^{\mathrm{T}}(t) B_0(t) P_2(t)\, dt. \tag{2.17}$$

Ввиду соотношений (2.14)—(2.17) решение рассмотренной выше задачи фильтрации следует из решения задачи интерполяции при $\tau_0 = T$.

2.4. Оценивание при нескольких запаздываниях. Процедура построения оптимальной оценки вектора состояния системы путем исследования вспомогательной задачи оптимального управления оказывается эффективной и в целом ряде иных ситуаций; некоторые из них рассмотрены ниже. При этом изложенное выше показывает, что специфика конкретной задачи оценивания проявляется только в виде уравнений двойственной управляемой детерминированной системы. Приведем их для задачи оценивания $x(\tau_0)$, $0 \leqslant \tau_0 \leqslant T$, по измерениям $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, предполагая, что

$$dx(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i(t)\, x(t - h_i)\, dt + \sigma_1(t)\, d\xi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad h_i \geqslant 0,$$
$$dy(t) = \sum_{i=1}^{N} g_i(t)\, x(t - \tau_i)\, dt + \sigma_2(t)\, d\xi_2(t), \tag{2.18}$$
$$y(0) = 0, \; \tau_i \geqslant 0.$$

Начальное условие для уравнения (2.18) имеет вид (2.2). Искомая оценка определяется формулой (2.13), в которой матрица $v(t)$ есть оптимальное управление линейной детерминированной системой

$$\dot{\alpha}(t) = -\sum_{i=1}^{N} [A_i^{\mathrm{T}}(t + h_i)\, \alpha(t + h_i) + g_i^{\mathrm{T}}(t + \tau_i)\, v(t + \tau_i)] \tag{2.19}$$

с квадратичным минимизируемым функционалом (2.6). Начальные условия для $\alpha(t)$ и условия скачка при $t = \tau_0$ задаются соотношениями (2.15). Отметим, что запаздывания τ_i в наблюдениях приводят к сдвигу аргумента управления v в двойственной задаче (2.19), а запаздывания h_i в уравнениях движения — к сдвигу аргумента в двойственных переменных α. Способ решения линейно-квадратичной задачи (2.19), (2.6) аналогичен [50, 54]. Подобным же образом могут быть установлены оптимальные оценки при коррелированных, профильтрованных (цветных) и вырожденных возмущениях ξ_1 и ξ_2.

2.5. Фильтрация решений интегральных уравнений *. Предположим, что ненаблюдаемый процесс $x(t)$ описывается линейным интегральным уравнением

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (d_s K(t, s))\, x(s) + \int_0^t \sigma_1(s)\, d\xi_1(s), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (2.20)$$

с начальным условием (2.2), а наблюдения осуществляются в соответствии с уравнением (2.3). За исключением ядра $K(t, s)$, все параметры в (2.20), (2.3) те же, что и в п. 2.1. Элементы матрицы $K(t, s)$ — кусочно-непрерывные функции, имеющие равномерно по $t \in [0, T]$ ограниченную вариацию по $s \in [0, t]$. Кроме того, предполагается, что решение уравнения (2.20) представимо в виде

$$x(t) = z(t, 0)\, x_0 + \int_0^t z(t, s)\, \sigma_1(s)\, d\xi_1(s), \quad (2.21)$$

где матрица $z(t, t) = I$, $z(t, s) = 0$ при $t < s$. Оптимальная оценка $m(T)$ в рассматриваемом случае по-прежнему имеет вид (2.4), ядро оценки — матрица $u(t)$ — представляет собой оптимальное управление детерминированной системой

$$\alpha(s) = z(T, s) - \int_{s+h}^{T} u(t)\, g(t)\, z(t-h, s)\, dt \quad (2.22)$$

с минимизируемым функционалом (2.6). Отметим, что в силу соотношений (2.22), (2.6) при $h \geqslant T$ матрица $u(t) = 0$, т. е. $m(T) = 0$ и

$$\operatorname{Tr} D(T) = \operatorname{Tr}\Big[z(T, 0)\, D_0 z^{\mathrm{T}}(T, 0) + \int_0^T z(T, t)\, N_1(t)\, z^{\mathrm{T}}(T, t)\, dt\Big], \quad h \geqslant T.$$

Исследуем управление $u(t)$ при $T \geqslant h$. Ясно, что $u(t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant h$. Далее на основании необходимого условия оптимальности [102] оптимальное управление $u(t)$ в задаче (2.22), (2.6) равняется

$$u(t) = \Big[\alpha(0)\, D_0 z^{\mathrm{T}}(t-h, 0) + \int_0^{t-h} \alpha(s)\, N_1(s)\, z^{\mathrm{T}}(t-h, s)\, ds\Big]\, g^{\mathrm{T}}(t)\, N_2^{-1}(t). \quad (2.23)$$

---

* Результаты этого пункта получены совместно с Л. Е. Шайхетом.

Рассмотрим корреляционную матрицу R процесса $x(t)$, равную $R(t, \tau) = \mathrm{M}\, x(t)\, x^{\mathrm{T}}(\tau)$. С учетом соотношения (2.21)

$$R(t, \tau) = z(t, 0) D_0 z^{\mathrm{T}}(\tau, 0) + \int_0^{t \wedge \tau} z(t, s) N_1(s) z^{\mathrm{T}}(\tau, s)\, ds,$$

где $t \wedge \tau = \min(t, \tau)$. Положим еще $u(t) = v(t)\, g^{\mathrm{T}}(t)\, N_2^{-1}(t)$, $g_1 = g^{\mathrm{T}} N_2^{-1} g$. Тогда в силу формулы (2.23) для матрицы $v(t)$ получаем уравнение

$$v(t+h) = R(T, t) - \int_0^{T-h} v(s+h)\, g_1(s+h)\, R(s, t)\, ds, \quad t \geqslant 0. \tag{2.24}$$

При сделанных предположениях решение v интегрального уравнения (2.24) существует и единственно. Таким образом,

$$u(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant h; \quad u(t) = v(t)\, g^{\mathrm{T}}(t)\, N_2^{-1}(t), \quad t \geqslant h. \tag{2.25}$$

Подобно п. 2.1, если уравнения (2.20) — детерминированные (т. е. $\sigma_1 = 0$), то решение уравнения (2.24) можно найти в явном виде, а следовательно, найти в явном виде ядро $u(t)$ оценки (2.4) и ошибку оценивания. Именно в этом случае

$$u(t) = z(T, 0)\, D_1\, z^{\mathrm{T}}(t-h, 0)\, g^{\mathrm{T}}(t)\, N_2^{-1}(t),$$

$$D_1 = D_0 \left[I + \int_0^{T-h} z'(s, 0)\, g_1(s+h)\, z(s, 0)\, ds\, D_0 \right]^{-1}, \tag{2.26}$$

$$\operatorname{Tr} D(T) = \operatorname{Tr} z(T, 0)\, D_1\, z^{\mathrm{T}}(T, 0).$$

Формула (2.26) для $\operatorname{Tr} D(T)$ позволяет проследить зависимость ошибки оценивания от величины запаздывания в канале наблюдения (2.3). Пусть, например, матрица g_1 постоянна. Тогда

$$(d/dh) \operatorname{Tr} D(T) =$$
$$= \operatorname{Tr} [z(T, 0)\, D_1 z^{\mathrm{T}}(T-h, 0)\, g_1 z(T-h, 0)\, D_1 z^{\mathrm{T}}(T, 0)].$$

Правая часть последнего соотношения неотрицательна при $h \leqslant T$ и равна нулю при $h > T$. Значит, ошибка оценивания вектора $x(T)$ монотонно не убывает с ростом h, $h \leqslant T$, и постоянна по h при $h > T$.

З а м е ч а н и е. Всюду в этом разделе предполагалось, что распределение x_0 гауссовское. При этом линейная оценка (2.4) оказывалась оптимальной в среднеквадратическом. Если отказаться от этого предположения и считать только, что второй момент вектора x_0 конечен, то оценка (2.4) будет оптимальной в классе линейных.

2.6. О нелинейной фильтрации. Пусть уравнения движения системы и наблюдения — нелинейные с конечным последействием и имеют вид

$$dx(t) = A(t, x_t)\,dt + \sigma_1(t)\,d\xi_1(t), \ t \geqslant 0; \tag{2.27}$$

$$dy(t) = g(t, x_t)\,dt + \sigma_2(t)\,d\xi_2(t), \ y(0) = 0. \tag{2.28}$$

Здесь $x_t = x(t + \theta)$, $-h \leqslant \theta \leqslant 0$. Решение уравнения (2.27) определяется начальным условием (1.2) при $t_0 = 0$, в котором $\varphi(\theta)$ — случайный процесс. Предполагается, что $\varphi(\theta)$, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — взаимно независимы. В уравнениях (2.27), (2.28) матрицы σ_1, σ_2 и процессы ξ_1, ξ_2 те же, что и в уравнениях (2.1), (2.3). Функции A, g считаются такими, что решение задачи (2.27), (2.28), (2.2) существует и единственно.

Отметим, что задачи фильтрации с распределенным последействием в наблюдениях (2.28) возникают в некоторых вопросах слежения [114]. Поскольку процесс x_t марковский (см., например, [56]), то некоторые соотношения в задаче оценивания $x(t)$ по результатам измерений (2.28) можно получить, используя общую теорию фильтрации марковских процессов [109, 112]. Эффективность этих соотношений, однако, невелика по двум причинам: во-первых, они содержат математические ожидания функционалов типа $Mg(t, x_t)\,|\,y_t$, зависящих от предыстории движения $x(t + \theta)$, и, во-вторых, в эти соотношения входит инфинитезимальный оператор L процесса x_t, вид которого в общем случае неизвестен. Этот оператор уже встречался в разд. 1 при рассмотрении вопросов управления, причем для линейно-квадратичных задач управления и приводимых к ним задач линейного оценивания его удается конструктивно описать (см. п. 1.2). Кроме того, общие условия оптимальности (1.5), (1.6) позволили обосновать процедуру приближенного синтеза управления (п. 1.5). В связи с этим приведем некоторые соотношения нелинейной фильтрации [109, 111, 112] в системах с последействием (2.27), (2.28), которые, возможно, окажутся полезными при разработке приближенных алгоритмов оптимального оценивания.

Пусть $\gamma(x)$ — заданная функция. Положим $\pi_t(\gamma) = M\gamma(x(t))\,|\,y_t$. Тогда

$$d\pi_t(\gamma) = \pi_t[L\gamma(x(t))]\,dt + \pi_t[\gamma(x(t))\,\zeta(t)]\,N_2^{-1}d\omega(t), \tag{2.29}$$

где $\omega(t)$ — обновляющий процесс,

$$\omega(t) = y(t) - \int_0^t \pi_s(g(s, x_s))\,ds, \quad \zeta(t) = g^{\mathrm{T}}(t, x_t) - \pi_t(g^{\mathrm{T}}(t, x_t)).$$

По виду соотношение (2.29) подобно основному нелинейному стохастическому уравнению теории нелинейной фильтрации диффузионных процессов. В правой части соотношения (2.29) встречаются условные математические ожидания функционалов, зависящих от предыстории x_t, вида $r(t, x_t)$. Для них справедливо следующее представление:

$$\pi_t(r(t, x_t)) = \mathrm{M}r(t, x_t) \mid y_t = \mathrm{M}r(t, x_t) +$$
$$+ \int_0^t \pi_s [\mathrm{M}(r(t, x_t) \mid x_s) \zeta(s)] N_2^{-1}(s) d\omega(s), \tag{2.30}$$

откуда следует, что оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\pi_t(x(t+\theta))$ вектора $x(t+\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\pi_t(x(t+\theta)) = \pi_{t+\theta}(x(t+\theta)) +$$
$$+ \int_{t+\theta}^t \pi_s [x(t+\theta) \zeta(s)] N_2^{-1}(s) d\omega(s).$$

Для процесса $\pi_t(r(t, x))$ справедливо соотношение

$$d\pi_t(r(t, x_t)) = \pi_t[Lr(t, x_t)] dt + \pi_t[r(t, x_t) \zeta(t)] N_2^{-1}(t) d\omega(t).$$

4

ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ОТКАЗА ДЛЯ РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ

1. Постановка задачи

Важный раздел математической теории систем составляет изучение стохастических моделей, среди которых отметим класс моделей массового обслуживания, надежности, управления запасами и т. п. Для этих моделей достаточно актуальна следующая постановка задачи. Пусть работа изучаемой модели описывается регенерирующим процессом [49], т. е. процессом, «сшитым» из независимых одинаково распределенных циклов, которые далее будут именоваться также периодами регенерации. На каждом таком периоде может происходить событие, интерпретируемое в различных прикладных случаях как отказ системы, переполнение очереди, опустошение склада и т. д. Наступление события не зависит от поведения процесса на других периодах регенерации. Будем считать вероятность наступления указанного события на цикле малой величиной и интересоваться распределением времени наступления первого такого события в изучаемом регенерирующем процессе. Поскольку получение явного вида этого распределения представляет непреодолимые математические трудности, то значительное внимание в литературе [24, 92, 96] уделяется доказательству соответствующих предельных теорем. Если иметь в виду прикладные аспекты, то первостепенное значение имеют количественные оценки скоростей сходимости в данных теоремах. Классическими методами подобные оценки либо получаются в частных случаях, либо не обладают достаточной точностью.

Цель данной главы — нахождение количественных оценок в указанных предельных теоремах, обладающих достаточными точностью и общностью. При этом развивается новый метод доказательства самих предельных теорем, основанный на использовании свойств вероятностных метрик [38].

Перейдем к постановке задачи.

Пусть $(\Omega^c, \mathfrak{F}^c, \mathbf{P}^c)$ — некоторое вероятностное пространство, на котором определен «цикл», т. е. пара $(\zeta(\cdot, \omega^c), \theta(\omega^c))$, $\omega^c \in \Omega^c$. Здесь $\theta = \theta(\omega^c)$ — случайная величина (с.в.), которая, по предположению, считается конечной почти наверное и представляет собой длительность цикла (периода регенерации), а $\xi(\cdot, \omega^c)$ — случайный процесс, заданный на $[0, \theta(\omega^c))$. Определим событие $A \in \mathfrak{F}^c$, $P^c(A) = q$, $0 < q < 1$, и сопоставим каждому $\omega^c \in A$ величину $\eta(\omega^c) \leqslant \theta(\omega^c)$, которую назовем временем наступления A на цикле. Обозначим $F(x) = P^c(\theta \leqslant x)$ —

функцию распределения (ф.р.) величины θ; $T = \mathrm{E}^c\theta$, $T_s = \mathrm{E}^c\theta^s$, $s > 1$,— моменты величины θ. Нам потребуются также следующие условные распределения:

$$F_-(x) = P^c(\theta \leqslant x/\bar{A}),$$

$$F_+(x) = P^c(\theta \leqslant x/A),$$

$$G(x) = P^c(\eta \leqslant x/A),$$

где $\bar{A} = \Omega^c \setminus A$.

Изучаемый регенерирующий процесс $\xi(\cdot, \omega)$ конструируется из циклов следующим стандартным образом [49].

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ является прямым произведением счетного числа копий $(\Omega^c, \mathfrak{F}^c, P^c)$:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega^c, \mathcal{F}^c, P^c) \times (\Omega^c, \mathcal{F}^c, P^c) \times \ldots.$$

Если $t > 0$, $\omega = (\omega_1^c, \omega_2^c, \ldots)$ и $S_{k-1}(\omega) \leqslant t < S_k(\omega)$, $k \geqslant 1$, то положим

$$\xi(t, \omega) = \zeta(t - S_{k-1}(\omega), \omega_k^c),$$

где $S_0(\omega) \equiv 0$, $S_k(\omega) = \theta(\omega_1^c) + \ldots + \theta(\omega_k^c)$, $k \geqslant 1$.

Далее, для каждой точки $\omega = (\omega_1^c, \omega_2^c, \ldots)$, такой, что $\omega_1^c \notin \notin A, \ldots \omega_{k-1}^c \notin A$, $\omega_k^c \in A$, $k \geqslant 1$, положим

$$\nu(\omega) = k, \tag{1.1}$$

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \eta(\omega_1^c), & k = 1, \\ \theta(\omega_1^c) + \ldots + \theta(\omega_{k-1}^c) + \eta(\omega_k^c), & k > 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Равенствами (1.1) и (1.2) величины ν и τ определены почти всюду (по мере P). Эти величины имеют следующий смысл: ν — номер цикла, на котором впервые наступает событие A; τ — момент первого наступления события A в изучаемом регенерирующем процессе ξ. Будем далее интерпретировать наступление события A как отказ. Подобная интерпретация характерна для теории надежности [24]. Будем изучать предельное (при $q \to 0$) распределение нормированной с.в. τ. При этом оценки (как и в работе [24]) получаются в «равномерной» постановке. Иными словами, мы считаем, что с изменением q (при $q \to 0$) процесс ξ может меняться произвольным образом, лишь бы он оставался регенерирующим и были выполнены ограничения, рассматриваемые далее в этой главе.

Формула (1.2) неудобна для исследования из-за возможной зависимости величин $\theta(\omega_k^c)$ и $\nu(\omega)$, поэтому используем следующее легко доказываемое равенство:

$$\tau \overset{d}{=} \sum_{j<\nu} \theta_j^- + \eta^+, \tag{1.3}$$

где $\overset{d}{=}$ означает равенство по распределению; величины ν, θ_1^-, $\theta_2^-, \ldots, \eta^+$ независимы и

$$P(\nu = k) = (1-q)^{k-1} q, \; k \geqslant 1, \tag{1.4}$$

$$P(\theta_j^- \leqslant x) = F_-(x), \; j \geqslant 1, \tag{1.5}$$

$$P(\eta^+ \leqslant x) = G(x). \tag{1.6}$$

При естественных условиях и должным образом выбранном нормирующем множителе $\alpha(q)$ имеет место предельное соотношение [24, 96] ($\overset{d}{\to}$ — сходимость по распределению):

$$\alpha(q)\tau \underset{q\to 0}{\overset{d}{\to}} U,$$

где U — экспоненциально распределенная с.в.:

$$P(U \leqslant x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Наша цель — получить оценки вида

$$d(\alpha(q)\tau, U) \leqslant \varepsilon(q) \tag{1.8}$$

для некоторых простых [38] вероятностных метрик d, где $\varepsilon(q) \underset{q\to 0}{\to} 0$.
Ниже в качестве d рассматриваются две метрики — равномерная

$$\rho(X, Y) = \sup_x |P(X \leqslant x) - P(Y \leqslant x)| \tag{1.9}$$

и средняя

$$\zeta_1(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(X \leqslant x) - P(Y \leqslant x)| \, dx. \tag{1.10}$$

2. Обозначения. Метрики

Все рассматриваемые в работе вероятностные метрики имеют структуру

$$\mu(X, Y) = \sup_{f \in \mathfrak{F}} |\mathbf{E}f(X) - \mathbf{E}f(Y)|$$

и отличаются друг от друга лишь видом множества $\mathfrak{F}$, по которому берется sup.

а. Равномерная метрика ρ:

$$\mathfrak{F}_\rho = \{f : f(\cdot) = I_{(-\infty, x]}(\cdot), \; x \in (-\infty, +\infty)\},$$

где $I_B(\cdot)$ — индикатор множества B.

б. Метрика ζ_s $(1 < s \leqslant 2)$ [38]:

$$\mathfrak{F}_s = \{f : \; |f'(x) - f'(y)| \leqslant |x - y|^{s-1}, \; x, y \in (-\infty, \infty)\}.$$

в. Средняя метрика ζ_1 [46]:

$$\mathfrak{F}_1 = \{f : |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \; x, \; y \in (-\infty, \infty)\}.$$

Приведем ряд вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1 (свойство однородности порядка s для метрик ζ_s [38]). *Для любых с.в. X, Y, действительной постоянной $c \in (-\infty, \infty)$ и $1 \leqslant s \leqslant 2$ справедливо равенство*

$$\zeta_s(cX, cY) = |c|^s \zeta_s(X, Y).$$

Л е м м а 2 (свойство регулярности [38]). *Если $d = \rho$ или $d = \zeta_s$, $1 \leqslant s \leqslant 2$, то для любых независимых с.в. X, Y, W справедливо*

$$d(X + W, Y + W) \leqslant d(X, Y).$$

Ниже повсюду с.в. U имеет экспоненциальное распределение (1.7).

Л е м м а 3 (неравенства сглаживания). *Пусть X, Y, U, W — независимые неотрицательные с.в., величина W имеет плотность $p_W(x)$, ограниченную сверху числом $\bar{p}$. Тогда*

$$\rho(X + W, Y + W) \leqslant \bar{p}\zeta_1(X, Y), \tag{2.1}$$

$$\zeta_1(X + U, Y + U) \leqslant 2\zeta_s(X, Y), \ 1 < s \leqslant 2, \tag{2.2}$$

$$\rho(X + U + W, Y + U + W) \leqslant \max(1, \bar{p})\, \zeta_s(X, Y),$$
$$1 < s \leqslant 2. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\rho(X + W, Y + W) = \sup_x \left| \int_0^\infty P(X \leqslant x - y)\, p_W(y)\, dy - \right.$$
$$\left. - \int_0^\infty P(Y \leqslant x - y)\, p_w(y)\, dy \right| \leqslant \bar{p} \int_{-\infty}^{\infty} |P(X \leqslant u) -$$
$$- P(Y \leqslant u)|\, du = \bar{p}\zeta_1(X, Y).$$

Неравенство (2.1) доказано.

Для доказательства неравенства (2.2) заметим, что

$$\zeta_1(X + U, Y + U) = \sup |\mathrm{E}g(X) - \mathrm{E}g(Y)|,$$

где sup берется по всем функциям g вида

$$g(x) = \int_0^\infty f(x + y)\, \mathrm{e}^{-y}\, dy, \ f \in \mathcal{F}_1.$$

Поскольку $g'(x) = -f(x) + g(x)$, $|g'| \leqslant 1$, то $g/2 \in \mathfrak{F}_s$, $1 < s \leqslant 2$, и, следовательно, неравенство (2.2) доказано.

Аналогично доказывается неравенство (2.3).

Л е м м а 4 (аналог неравенств сглаживания). *Если X_i, Y, Z — независимые с.в., $S(q) = q \sum\limits_{i \leqslant \nu(q)} X_i$, $H(x) = \sum\limits_{i \geqslant 0} A_*^i(x)$, $A(x) = P(X_i \leqslant x)$, то для любого $\beta > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho(Y + S(q), Z + S(q)) \leqslant \frac{H(\beta)}{\beta}[\xi_1(Y, Z) + 2q\beta]. \tag{2.4}$$

Доказательство. Очевидно неравенство

$$\rho(Y+S(q),\ Z+S(q)) \leqslant \sup_t \int_0^t |P(Y\leqslant t-u) -$$
$$- P(Z\leqslant t-u)|\,dP(S(q)\leqslant u). \tag{2.5}$$

Разделим интервал $[0, \infty)$ на полуинтервалы длины βq: $[0, \beta q)$, $[\beta q, 2\beta q), \ldots, [n\beta q, (n+1)\beta q)$ и обозначим k-й полуинтервал I_k. Пусть $M_k = \sup\ \{\,|P(Y\leqslant x) - P(Z\leqslant x)|: x\in I_k\}$, а $x_k^* \in [(k-1)\beta q, k\beta q]$ — такая точка, что

$$M_k = \lim_{x\to x_k^*,\ x\in I_k} |P(Y\leqslant x) - P(Z\leqslant x)|. \tag{2.6}$$

Сконструируем две кусочно-постоянные функции $F_Y^q(t)$ и $F_Z^q(t)$ так, что

$$F_Y^q(t) = \lim_{x\to x_k^*,\ x\in I_k} P(Y\leqslant x),\ \text{если } t\in I_k,\ k=1, 2\ldots,$$

$$F_Z^q(t) = \lim_{x\to x_k^*,\ x\in I_k} P(Z\leqslant x),\ \text{если } t\in I_k,\ k=1, 2\ldots.$$

По построению,

$$\zeta_1(F_Y^q(\cdot), P(Y\leqslant\cdot)) \leqslant \beta q,\ \zeta_1(F_Z^q(\cdot),\ P(Z\leqslant\cdot))\leqslant \beta q. \tag{2.7}$$

Оценим интеграл в правой части неравенства (2.5) верхней интегральной суммой с помощью конструкции (2.6) и неравенства (2.7):

$$\rho(Y+S(q), Z+S(q)) \leqslant \sum_{k<t/\beta q} M_{[t/\beta q]-k}\, q \sum_{i\geqslant 1}(1-q)^{i-1}\times$$
$$\times (A_*^i(k\beta+\beta) - A_*^i(k\beta)) \leqslant \sum_{k<t/\beta q} M_{[t/\beta q]-k}\, qH(\beta) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{H(\beta)}{\beta}\sum_{k\geqslant 0} M_k q\beta = \frac{H(\beta)}{\beta}\zeta_1(F_Y^q, F_Z^q) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{H(\beta)}{\beta}[\zeta_1(Y, Z) + 2q\beta],$$

т. е. доказана справедливость неравенства (2.4).

Лемма 5 (очевидная). *Если с.в.* $\theta = 0$ *с вероятностью 1, то*

$$\zeta_1(X, \theta) = \mathrm{E}X$$

для любой с.в. X.

3. Оценки в предельной теореме Реньи

Обратимся сначала к задаче, представляющей самостоятельный интерес и составляющей содержание теоремы Реньи. Представленные ниже оценки являются обобщением и уточнением результатов работ [26, 27, 43].

Пусть X_i — независимые одинаково распределенные неотрицательные с.в., $EX_1 = 1$, $\nu(q)$ — «геометрическая» с.в. с распределением (1.4) и не зависящая от $\{X_i\}$. Теорема Реньи утверждает, что

$$S(q) = q \sum_{i \leqslant \nu(q)} X_i \xrightarrow[q \to 0]{d} U. \tag{3.1}$$

Найдем оценки скорости сходимости в соотношении (3.1) в метриках ζ_1 и ρ.

Ниже все переменные, имеющие различные обозначения или разные индексы, считаются без дополнительных оговорок независимыми, например: X_1, X_2, Y, U, $S(q)$, $\nu(q)$, $\nu(q/\alpha)$ и т. д. При этом величины, имеющие одинаковое обозначение и отличающиеся лишь нижними индексами, считаются одинаково распределенными, например: U, U_1, $U_2, \ldots$

Лемма 6. *Имеют место следующие равенства*:

(а) *При любых* $0 < q \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\nu(q) \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{\nu(q/\alpha)} \nu_i(\alpha), \tag{3.2}$$

$$S(q) \overset{d}{=} \frac{q}{\alpha} \sum_{i=1}^{\nu(q/\alpha)} S_i(\alpha). \tag{3.3}$$

(б) $$\Sigma(q) \equiv q \sum_{i \leqslant \nu(q)} U_i \overset{d}{=} U. \tag{3.4}$$

(в) *При любом* $n \geqslant 1$

$$\nu(q) \overset{d}{=} 1 + \delta_1 + \delta_1\delta_2 + \ldots + \delta_1 \ldots \delta_n + \delta_1 \ldots \delta_{n+1}\nu(q), \tag{3.5}$$

где

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \textit{с вероятностью} \quad q, \\ 1 & \textit{с вероятностью} \ 1 - q, \end{cases}$$

$$S(q) \overset{d}{=} qX_0 + q\delta_1 X_1 + \ldots q\delta_1 \ldots \delta_n X_n + \delta_1 \ldots \delta_{n+1} S(q). \tag{3.6}$$

Доказательство. Равенства (3.2) и (3.5) — хорошо известные свойства геометрического распределения, легко проверяемые непосредственным вычислением. Следствием их являются соответственно соотношения (3.3) и (3.6). Равенство (3.4) также хорошо известно и может быть проверено непосредственно.

Обозначим далее

$$A(x) = P(X \leqslant x), \ A_q(x) = P(qX \leqslant x) = A(x/q),$$

$$E(x) = P(U \leqslant x), \ E_q(x) = P(qU \leqslant x) = 1 - e^{-x/q},$$

$$R_q(x) = P(S(q) \leqslant x).$$

Оценку скорости сходимости в соотношении (3.1) тривиально можно найти, используя метрики ζ_s $(1 < s \leqslant 2)$ [43]:

$$\zeta_s(S(q), U) \leqslant q^{s-1} \zeta_s(X, U). \tag{3.7}$$

Однако получить из этого неравенства оценку в метриках ζ_1 и ρ, пользуясь только универсальными соотношениями между метриками, невозможно — необходимо использовать структуру задачи. Именно это и реализуется ниже в теоремах 1—4.

Найдем сначала оценки скорости сходимости в соотношении (3.1) в терминах метрики ζ_1.

Теорема 1. *При любом* $1 < s \leqslant 2$ *справедлива оценка*

$$\zeta_1 (S (q), U) \leqslant 2q\, \zeta_1 (X, U) + 2q^{s-1}\, \zeta_s (X, U) \equiv \varepsilon_1 (q). \tag{3.8}$$

Прежде чем доказывать теорему 1, обратим внимание, что в изучаемой ситуации необходимым и достаточным условием конечности величины $\zeta_s (X, U)$ является соотношение $\mathrm{E}X_i^s < \infty$ [38]. Поэтому, если это неравенство не выполняется, оценка (3.8) может стать тривиальной.

Более того, $\varepsilon_1 (q) \to 0$ тогда и только тогда, когда $q^{s-1} \zeta_s (X, U) \to 0$. В классической теореме Реньи распределение величины X не изменяется с изменением q, поэтому при условии существования $\mathrm{E}X^s$, $s > 1$, скорость сходимости $\varepsilon_1 (q)$ имеет порядок q^{s-1}. В общей ситуации схемы серий, когда с изменением q может меняться и распределение величины X, скорость сходимости может иметь иной порядок, определяемый не только сомножителем q^{s-1}, но и величиной $\zeta_s (X, U)$.

Оценка (3.8) является универсальной и фактически содержит всю необходимую информацию о сходимости $S (q)$ к U.

Доказательство теоремы 1. В силу (3.4), (3.6) и неравенства треугольника для ζ_1 при произвольном n справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} &\zeta_1 (S (q), U) = \zeta_1 (S (q), \textstyle\sum (q)) = \zeta_1 (qX_0 + q\delta_1 X_1 + \ldots \\ &\quad \ldots q\delta_1 \ldots \delta_n X_n + \delta_1 \ldots \delta_{n+1} S (q), \\ &qU_0 + q\delta_1 U_1 + \ldots q\delta_1 \ldots \delta_n U_n + \delta_1 \ldots \delta_{n+1} \Sigma (q)) \leqslant \\ &\quad \leqslant \zeta_1 (qX_0 + q\delta_1 X_1 + \ldots q\delta_1 \ldots \delta_n X_n + \delta_1 \ldots \delta_{n+1} S (q), \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &qU_0 + q\delta_1 X_1 + \ldots q\delta_1 \ldots \delta_n X_n + \delta_1 \ldots \delta_{n+1} \textstyle\sum (q)) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \zeta_1 (qU_0 + q\delta_1 X_1 + \ldots + q\delta_1 \ldots \delta_{j-1} X_{j-1} + \\ &\quad + q\delta_1 \ldots \delta_j X_j + \delta_1 \ldots \delta_{j+1} U, \\ &qU_0 + q\delta_1 X_1 + \ldots + q\delta_1 \ldots \delta_{j-1} X_{j-1} + q\delta_1 \ldots \delta_j U_j + \\ &\quad + \delta_1 \ldots \delta_{j+1} U) \equiv A + \sum_{j=1}^{n} B_j. \end{aligned}$$

Оценим отдельные слагаемые, пользуясь леммой 2:

$$\begin{aligned} A \leqslant \mathbf{P} (\delta_1 = 0)\, \zeta_1 (qX_0, qU_0) + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(\delta_1 = 1, \ldots \delta_j = 1, \delta_{j+1} = 0) \times \\ \times \zeta_1 (qX_0, qU_0) + \mathbf{P} (\delta_1 = 1, \ldots, \delta_{n+1} = 1) \left[\zeta_1 (qX_0, qU_0) + \right. \end{aligned}$$

$$+\zeta_1\left(S(q),\ \Sigma(q)\right)] \leqslant q^2\zeta_1(X,U)+q^2\zeta_1(X,U)\sum_{j=1}^{n}(1-q)^j+$$
$$+(1-q)^{n+1}[q\zeta_1(X,U)+\zeta_1(X,U)]=$$
$$=(q+(1-q)^{n+1})\zeta_1(X,U). \tag{3.10}$$

Далее, с помощью неравенства (2.2) получим оценку

$$B_j \leqslant P(\delta_1=1,\ldots,\delta_j=1)\{P(\delta_{j+1}=0)\zeta_1(qU_0+qX_j,\ qU_0+qU_j)+$$
$$+P(\delta_{j+1}=1)\zeta_1(qU_0+qU_j+U,\ qU_0+qX_j+U)\}\leqslant$$
$$\leqslant(1-q)^j\{q^2\zeta_1(X_j+U,\ U_j+U)+(1-q)\zeta_1(qX_j+$$
$$+U,\ qU_j+U)\}\leqslant(1-q)^j q^2\zeta_1(X,U)+2(1-q)^{j+1}\zeta_s(qX,qU)\leqslant$$
$$\leqslant(1-q)^j q\,[q\zeta_1(X,U)+2(1-q)q^{s-1}\zeta_s(X,U)]. \tag{3.11}$$

Подставляя оценки (3.10) и (3.11) в формулу (3.9) и переходя к пределу при $n\to\infty$, получим требуемое соотношение (3.8).

Оценки в терминах метрики ρ получаются несколько сложнее. Прежде чем формулировать соответствующее утверждение, проведем основные выкладки. Обозначим $\Delta_q(x)=R_q(x)-E(x)$. Тогда

$$|\Delta_q(x)|\leqslant|\mathbf{P}(qU_0+q\delta_1U_1+\ldots+q\delta_1\ldots\delta_nU_n+$$
$$+\delta_1\ldots\delta_{n+1}\Sigma(q)\leqslant x)-\mathbf{P}(qX_0+q\delta_1U_1+\ldots$$
$$\ldots+q\delta_1\ldots\delta_nU_n+\delta_1\ldots\delta_{n+1}S(q)\leqslant x)|+$$
$$+\Big|\sum_{j=1}^{n}\{\mathbf{P}(qX_0+q\delta_1U_1+\ldots+q\delta_1\ldots\delta_{j-1}U_{j-1}+q\delta_1\ldots\delta_jU_j+$$
$$+\delta_1\ldots\delta_{j+1}S(q)\leqslant x)-\mathbf{P}(qX_0+q\delta_1U_1+\ldots+q\delta_1\ldots$$
$$\ldots\delta_{j-1}U_{j-1}+q\delta_1\ldots\delta_jX_j+\delta_1\ldots\delta_{j+1}S(q)\leqslant x)\}\Big|\equiv$$
$$\equiv C+\Big|\sum_{j=1}^{n}D_j\Big|. \tag{3.12}$$

Оценим слагаемое C в формуле (3.12):

$$C\leqslant\Big|\mathbf{P}(\delta_1=0)(E_q(x)-A_q(x))+\sum_{j=1}^{n}(1-q)^j q\,(E_q*E_q^{*j}-$$
$$-A_q*E_q^{*j})(x)+(1-q)^{n+1}(E_q*E_q^{*n}*E-A_q*E_q^{*n}*R_q)(x)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant q\rho(X,U)+(1-q)^{n+1}+(1-q)\int_0^x|E_q(x-y)-$$
$$-A_q(x-y)|\sum_{j=1}^{\infty}q(1-q)^{j-1}E_q^{*j}(dy)=q\rho(X,U)+(1-q)^{n+1}+$$
$$+(1-q)\int_0^x|E_q(x-y)-A_q(x-y)|\,e^{-y}\,dy\leqslant$$
$$\leqslant q\rho(X,U)+(1-q)q\zeta_1(X,U)+(1-q)^{n+1}. \tag{3.13}$$

Далее, используя равенство

$$D_j = (1-q)^j \{q(A_q * E_q^{*(j-1)} * E_q - A_q * E_q^{*(j-1)} * A_q)(x) + \\ + (1-q)(A_q * E_q^{*(j-1)} * E_q * R_q - A_q * E_q^{*(j-1)} * A_q * R_q)(x)\}, \tag{3.14}$$

получим оценку

$$\left|\sum_{j=1}^{n} D_j\right| \leqslant (1-q)\,q\rho(qX, qU) + \left|\sum_{j=2}^{n}(1-q)^j qA_q * E_q^{*(j-1)} * \right. \\ \left. * (E_q - A_q)(x)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n}(1-q)^{j+1}A_q * E_q^{*(j-1)} * (E_q - A_q) * \right. \\ \left. * R_q(x)\right| \leqslant q\rho(X, U) + (1-q)^{n+1} + (1-q)^2\rho(qX + U_1, qU + \\ + U_1) + \frac{(1-q)^{n+2}}{q} + (1-q)^2 |A_q * (E_q - A_q) * R_q(x)| + \\ + \frac{(1-q)^3}{q}|A_q * E * (E_q - A_q) * R_q(x)| = L_n(x). \tag{3.15}$$

В случае, если величина $S(q)$ имеет плотность, ограниченную числом $\bar{p}$, то (см. лемму 3) справедливы оценки

$$|A_q * E * (E_q - A_q) * R_q(x)| \leqslant q^s \max(1, \bar{p})\,\zeta_s(X, U),\ 1 < s \leqslant 2, \tag{3.16}$$

$$|A_q * (E_q - A_q) * R_q(x)| \leqslant q\bar{p}\zeta_1(X, U). \tag{3.17}$$

Подставляя их в формулу (3.15), получаем из соотношений (3.12), (3.13), (3.15) при $n \to \infty$:

$$\rho(S(q), U) = \sup_x |\Delta_q(x)| \leqslant 2q(\rho(X, U) + \zeta_1(X, U)) + \\ + q\bar{p}\zeta_1(X, U) + q^{s-1}\max(1, \bar{p})\,\zeta_s(X, U) \equiv \varepsilon_2(q). \tag{3.18}$$

В результате справедлива

Теорема 2. *Если у величины $S(q)$ существует плотность, ограниченная числом $\bar{p}$, то справедлива оценка (3.18).*

Обратимся теперь к общему случаю. Оценим величину

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x):$$

$$L(x) \leqslant q(\rho(X, U) + \xi_1(X, U)) + \frac{1}{q}|A_q * E * (E_q - A_q) * \\ * (R_q - E)(x)| + \frac{1}{q}\rho(qX + U_1 + U_2, qU + U_1 + U_2) + \\ + \rho(qX + S(q), qU + S(q)). \tag{3.19}$$

Второе слагаемое в правой части (3.19) можно оценить с помощью неравенства

$$|A_q * (E_q - A_q) * (R_q - E) * E(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^x (R_q - E)(x-y)\, A_q * (E_q - A_q)(y)\, dy \right| +$$

$$+ \left| \int_0^x (R_q - E)(x-y) \int_0^y A_q * (E_q - A_q)(u)\, e^{-(y-u)}\, du\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant q\zeta_1(X, U)\,[\rho(S(q), U) + \zeta_1(S(q), U)]. \qquad (3.20)$$

Подставляя соотношение (3.20) в неравенство (3.19) и используя оценку (3.13) (при $n \to \infty$), получаем из соотношений (3.12):

$$\rho(S(q), U) \leqslant \zeta_1(X, U)\,[\rho(S(q), U) + \zeta_1(S(q), U)] + 2q\,[\rho(X, U) +$$
$$+ \zeta_1(X, U)] + \rho(qX + S(q), qU + S(q)) + q^{s-1}\zeta_s(X, U). \quad (3.21)$$

Вообще говоря, $\zeta_1(X, U) \leqslant 2$. Однако, если предположить, что $\zeta_1(X, U) < 1$ (а такой случай часто встречается в теории надежности [26]), то из неравенства (3.21) с помощью формулы (2.3) при $\beta = 1$ получается следующее утверждение.

Теорема 3. *Если* $\zeta_1(X, U) < 1$, *то при* $1 < s \leqslant 2$ *справедлива оценка*

$$\rho(S(q), U) \leqslant \frac{1}{1 - \zeta_1(X, U)}\,\{\zeta_1(X, U)\,\varepsilon_1(q) + 2q\,[\rho(X, U) +$$
$$+ \zeta_1(X, U)] + q^{s-1}\zeta_s(X, U) + qH(1)\,[\zeta_1(X, U) + 2]\} \equiv \varepsilon_3(q). \qquad (3.22)$$

Освободимся теперь от предположения $\zeta_1(X, U) < 1$. Для этой цели воспользуемся представлением величины $S(q)$ в виде (3.3). Пусть $\alpha > q$; обозначим $q' = q/\alpha$,

$$X_i' = S_i(\alpha), \quad S'(q') = q' \sum_1^{\nu(q')} X_i' \overset{d}{=} S(q).$$

Применим неравенство (3.21) для величин q', X_i', S':

$$\rho(S(q), U) = \rho(S'(q'), U) \leqslant \zeta_1(X', U)\,[\rho(S'(q'), U) + \zeta_1(S'(q'), U) +$$
$$+ 2q'\,[\rho(X', U) + \zeta_1(X', U)] + \rho(q'X' + S'(q'), q'U + S'(q')) +$$
$$+ (q')^{s-1}\zeta_s(X', U) \leqslant \zeta_1(S(\alpha), U)\,[\rho(S(q), U) + \zeta_1(S(q), U)] +$$
$$+ 2(q/\alpha)\,[\rho(X, U) + \zeta_1(S(\alpha), U)] + \rho\,((q/\alpha)S(\alpha) + S(q),$$
$$(q/\alpha)U + S(q)) + (q/\alpha)^{s-1}\zeta_s(S(\alpha), U). \qquad (3.23)$$

Воспользуемся неравенствами (2.3) (при $\beta = 1/\alpha$) и (3.7) для оценки последних двух слагаемых в правой части (3.23). Получим

$$\rho(S(q), U) \leqslant \zeta_1(S(\alpha), U)\,[\rho(S(q), U) + \zeta_1(S(q), U)] +$$
$$+ 2\,\frac{q}{\alpha}\,\rho(X, U) + \left[H\!\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{2}{\alpha}\right] q\zeta_1(S(\alpha), U) + 2qH\left(\frac{1}{\alpha}\right) +$$
$$+ q^{s-1}\zeta_s(X, U). \qquad (3.24)$$

Поскольку

$$\rho(S(q), U) \leqslant \sqrt{2\zeta_1(S(q), U)} \leqslant \sqrt{2\varepsilon_1(q)}, \tag{3.25}$$

далее будет предполагаться, что $\varepsilon_1(q) \to 0$ при $q \to 0$. Без ограничения общности рассмотрим такие значения q, для которых

$$2\varepsilon_1(q) < \gamma = \frac{1}{4}. \tag{3.26}$$

Выберем число α_0 из условия

$$\alpha_0 = \sup_{q<\alpha\leqslant 1} \left\{\alpha : 2[\alpha\zeta_1(X, U) + \alpha^{s-1}\zeta_s(X, U)] \leqslant \gamma = \frac{1}{4}\right\}, \tag{3.27}$$

т. е. в качестве α_0 берется решение уравнения

$$2[\alpha\zeta_1(X, U) + \alpha^{s-1}\zeta_s(X, U)] = \frac{1}{4},$$

а если решения на отрезке [0, 1] нет, то положим $\alpha_0 = 1$. Рассмотрим сначала случай

$$\zeta_1(S(\alpha_0), U) = 2[\alpha_0\zeta_1(X, U) + \alpha_0^{s-1}\zeta_s(X, U)] = \frac{1}{4}. \tag{3.28}$$

Тогда

$$\frac{1}{4} = 2\left[\frac{\alpha_0}{q} q\zeta_1(X, U) + \left(\frac{\alpha_0}{q}\right)^{s-1} q^{s-1}\zeta_s(X, U)\right] \leqslant \frac{\alpha_0}{q}\varepsilon_1(q),$$

т. е.

$$q/\alpha_0 \leqslant 4\varepsilon_1(q), \tag{3.29}$$

и при этом, очевидно,

$$(q/\alpha_0)\zeta_1(S(\alpha), U) \leqslant \varepsilon_1(q). \tag{3.30}$$

Кроме того [19],

$$H\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leqslant 1 + 2\left(\frac{1}{\alpha} + (2\mathrm{E}X^s)^{1/(s-1)}\right). \tag{3.31}$$

Выберем в неравенстве (3.24) $\alpha = \alpha_0$ и учтем неравенства (3.29), (3.30). Получим

$$\begin{aligned}\rho(S(q), U) \leqslant \frac{1}{4}[\rho(S(q), U) + \varepsilon_1(q)] + 8\varepsilon_1(q)\rho(X, U) + \\ + \left[q + 4\frac{q}{\alpha} + 2(2q^{s-1}\mathrm{E}X^s)^{\frac{1}{s-1}}\right]\zeta_1(S(\alpha), U) + \\ + 2q + 4\frac{q}{\alpha} + 2(2q^{s-1}\mathrm{E}X^s)^{\frac{1}{s-1}} + q^{s-1}\zeta_s(X, U).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Из этого соотношения находим

$$\begin{aligned}\rho(S(q), U) \leqslant \frac{1}{3}[\varepsilon_1(q)(83 + 16\rho(X, U)) + \\ + 8(1 + \zeta_1(X, U))(2q^{s-1}\mathrm{E}X^s)^{\frac{1}{s-1}} + 8q] \equiv \varepsilon_4(q).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Если же $\alpha_0 = 1$, то, полагая в формуле (3.24) $\alpha = 1$, получим оценку (3.22), которая с учетом неравенства $2\,[\zeta_1 (X, U) + \zeta_s (X, U)] < {}^1/_4$ показывает, что оценка (3.33) справедлива и в этом случае, как более грубая. Следовательно, доказана

Теорема 4. *Если выполнено неравенство* (3.26), *то справедлива оценка* (3.33).

Отметим, что правая часть (3.33) стремится к нулю, если $q^{s-1}\,\mathrm{E}X_q^s \xrightarrow[q\to 0]{} 0$. Более того, правая часть (3.33) может быть оценена сверху величиной $Cq^{s-1}\mathrm{E}X^s$, где константа C не зависит от $1 < s \leqslant 2$ и выписывается из явного вида (3.33), т. е.

$$\rho\,(S\,(q),\ U) \leqslant Cq^{s-1}\mathrm{E}X^s. \tag{3.34}$$

Хотя оценка (3.33) дает правильный порядок (при $q \to 0$) стремления к нулю величины $\rho\,(S\,(q),\ U)$, константы, содержащиеся в ней, вообще говоря, могут быть улучшены в рамках предлагаемого подхода, например, за счет выбора величины β (перед выводом формулы (3.24)), γ — в соотношениях (3.26) и уточнения неравенства (3.31). Существуют и другие возможности. Оценка (3.33) специально выведена в форме, позволяющей выявить минимальные (при существовании момента порядка $1 < s \leqslant 2$) условия сходимости. Важным резервом улучшения оценок является учет вида распределения величин X: примером соответствующего улучшения может служить неравенство (3.18). В данной главе проблема получения в каком-то смысле неулучшаемых оценок не решается. Другие оценки можно найти в работах [26, 27], а также получить их с помощью метода, предложенного Л. Ю. Клебановым [42].

Наиболее слабые условия сходимости (без предположения о существовании момента порядка $s > 1$) величины $S\,(q)$ к U рассматриваются ниже. Приведем соответствующее утверждение, доказательство которого содержится в разд. 6: *если*

$$\int\limits_{x/q}^{\infty} [1 - A\,(t)]\,dt \xrightarrow[q\to 0]{} 0 \quad \textit{при любом}\ x > 0,$$

то $\zeta_1\,(S\,(q),\ U) \to 0$, *а также* $\rho\,(S\,(q),\ U) \to 0$.

4. Оценки распределения времени τ

Обратимся к оценке искомой величины τ (см. формулы (1.3) — (1.6)). Пусть $T_s^- = \mathrm{E}\,(\theta_1^-)^s < \infty$, $s > 1$, $T^- = \mathrm{E}\theta_1^-$, $m = \mathrm{E}\eta^+ < \infty$. Введем

$$\tau_q = \frac{q}{T^-}\Big[\sum_{j<\nu}\theta_j^- + \eta^+\Big],\quad \bar{\tau}_q = \frac{q}{T^-}\sum_{j\leqslant\nu}\theta_j^-.$$

Имеем

$$\zeta_1\,(\tau_q,\ U) \leqslant \zeta_1\,(\bar{\tau}_q,\ U) + \zeta_1\,(\bar{\tau}_q,\ \tau_q) \leqslant \zeta_1\,(\bar{\tau}_q,\ U) + \frac{q}{T^-}\,\zeta_1\,(\theta_1^-,\ \eta^+). \tag{4.1}$$

Первое слагаемое в правой части (4.1) оценено в теореме 1, а второе — заведомо не превосходит величины $q\,(1 + m/T^-)$. Отсюда следует

Теорема 5. *Если* $T_s^- < \infty$, $1 < s \leqslant 2$, *то*

$$\zeta_1(\tau_q,\ U) \leqslant q\,(1 + m/T^-) + \varepsilon_1'(q), \tag{4.2}$$

где выражение для $\varepsilon_1'(q)$ *совпадает с* $\varepsilon_1(q)$ (см. (3.8)), *в котором вместо* X *следует писать* θ_1^-/T^-.

Следствие. *Если*

$$q\,m/T^- \to 0,\ q^{s-1}\,(T_s^-/(T^-)^s) \to 0,\ 1 < s \leqslant 2,$$

то и $\zeta_1(\tau_q,\ U) \to 0$.

Аналогично теореме 5 получается другая форма оценок. Именно, пусть θ_j^+, $j \geqslant 1$ — случайная величина с распределением F_+, $T^+ = \mathrm{E}\theta_1$, $T_s^+ = \mathrm{E}\,(\theta_1^+)^s$. Очевидно, $m \leqslant T^+$, $T_s^- = (1/(1 - q))\,(T_s - qT_s^+)$. Обозначим

$$\tau_q' = \frac{q}{T}\Big[\sum_{j<\nu}\theta_j^- + \eta^+\Big].$$

Теорема 6. *Если* $T_s^+ < \infty$, $1 < s \leqslant 2$, *то*

$$\zeta_1(\tau_q',\, U) \leqslant \frac{q}{(1-q)\,T}\,[2T + m\,(1-q) + T^+] + \varepsilon_1''(q),$$

где $\varepsilon_1''(q)$ *совпадает с* $\varepsilon_1(q)$, *в котором вместо* $\zeta_1(X,\ U)$ *подставлена величина* ζ', *а вместо* $\zeta_s(X,\, U)$ — *величина* ζ^s:

$$\zeta' = \zeta_1\Big(\frac{\theta}{T},\, U\Big) + \frac{2q\,(T + (1-q)\,T^+)}{(1-q)\,T},$$

$$\zeta^s = \zeta_s\Big(\frac{\theta}{T},\, U\Big) + \frac{q}{T^s\,(1-q)}\Big[T_s + T_s^+\,(1-2q) + s\,\frac{T_s - qT_s^+}{T - qT^+}\,(T - T^+)\Big].$$

Следствие. *Если* $qT^+/T \to 0$, $qT_s^+/T_s \to 0$ *и* $q^{s-1}\,(T_s/T^s) \to 0$, $1 < s \leqslant 2$, *то и* $\zeta_1(\tau_q',\, U) \to 0$.

Аналогичным образом можно получить оценку

$$\rho\,(\tau_q,\, U) \leqslant \rho\,(\bar{\tau}_q,\, U) + \rho\Big(U,\, U + \frac{q\eta^+}{T^-} - \frac{q\theta_1^-}{T^-}\Big). \tag{4.3}$$

Оценивая второе слагаемое в правой части при помощи леммы 3, а первое с помощью какой-либо из оценок (3.18), (3.22) или (3.33), придем к следующему утверждению.

Теорема 7. *Верна оценка*

$$\rho\,(\tau_q,\ U) \leqslant q\,(1 + m/T^-) + \varepsilon_\rho(q), \tag{4.4}$$

где $\varepsilon_\rho(q)$ *совпадает с одним из выражений для* $\varepsilon_2(q)$, $\varepsilon_3(q)$, $\varepsilon_4(q)$ (*при выполнении соответствующих условий*), *причем в них вместо* X *следует писать* θ_1^-/T^-.

Следствие. *Если*

$$q\frac{m}{T^-}\to 0,\quad q^{s-1}\frac{T_s^-}{(T^-)^s}\to 0,\quad 1<s\leqslant 2,$$

то $\rho(\tau_q, U)\to 0$.

5. Оценки с другими нормировками

В различных прикладных задачах может возникнуть необходимость использования оценок типа (4.2), (4.4) с другими нормировками. Рассмотрим нормированную случайную величину $q\tau/a(q)$. Если мы знаем оценку для $\zeta_1(q\tau/T^-, U)$ (например, 4.4)), то можем получить неравенство

$$\zeta_1\left(\frac{q\tau}{a(q)}, U\right)\leqslant\frac{T^-}{a(q)}\zeta_1\left(\frac{q\tau}{T^-}, U\right)+\zeta_1\left(U, \frac{T^-}{a(q)}U\right).$$

Второе слагаемое в этом неравенстве легко вычислить:

$$\zeta_1\left(U, \frac{T^-}{a(q)}U\right)=\int_0^\infty|\exp(-x)-\exp(-a(q)x/T^-)|\,dx=$$
$$=\left|1-\frac{T^-}{a(q)}\right|.$$

Таким образом,

$$\zeta_1\left(\frac{q\tau}{a(q)}, U\right)\leqslant\frac{T^-}{a(q)}\zeta_1\left(\frac{q\tau}{T^-}, U\right)+\left|1-\frac{T^-}{a(q)}\right|. \tag{5.1}$$

Аналогично можно получить оценку в равномерной метрике:

$$\rho\left(\frac{q\tau}{a(q)}, U\right)\leqslant\rho\left(\frac{q\tau}{T^-}, U\right)+\left|1-\frac{T^-}{a(q)}\right|\exp(-\tau^-/a(q)). \tag{5.2}$$

Оценки (5.1), (5.2) естественно применять при условии $\lim\limits_{q\to 0} T^-/a(q)=1$.

6. Наиболее слабые условия сходимости

Большой интерес представляют наиболее слабые условия сходимости нормированной величины τ к U. Эта задача была решена А. Д. Соловьевым [24, 96], который доказал две важные предельные теоремы.

Последовательность неотрицательных случайных величин W_n сходится к нулю, по Хинчину [24] (обозначение $W_n\xrightarrow{Kh}0$), если

$$\frac{1}{EW_n}\int_x^\infty P\{W_n>t\}\,dt\to 0\ \text{для любого}\ x>0.$$

Теорема 8. *Если* $\frac{q\varkappa}{\mathrm{E}\varkappa}\xrightarrow{Kh}0$, *то* $P\left\{\frac{q\tau}{\mathrm{E}\varkappa}>x\right\}\to e^{-x}$, где $\varkappa=\theta(1-\chi_A)+\eta^{+}\chi_A$, χ_A — *индикатор события* A.

Теорема 9. *Если* $\frac{q\theta}{T}\xrightarrow{Kh}0$, *то* $P\left\{\frac{q\tau}{T}>x\right\}\to e^{-x}$.

Покажем, что развиваемый метод позволяет получать не только оценки скорости сходимости, но и наиболее слабые условия сходимости. Именно, покажем, что из доказанных выше теорем следуют утверждения теорем 8, 9.

Применяя к формуле (4.3) лемму 3 и оценку (5.2), получим

$$\rho\left(\frac{q\tau}{\mathrm{E}\varkappa},U\right)\leqslant\rho\left(\frac{q\tau}{T^{-}},U\right)+\left|1-\frac{T^{-}}{\mathrm{E}\varkappa}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\rho(\overline{\tau}_q,U)+q+q\frac{m}{T^{-}}+\left|\frac{qm-qT^{-}}{qm+(1-q)T^{-}}\right|. \qquad (6.1)$$

В соответствии с леммой 2.3 книги [24] справедливость соотношения $q\varkappa/\mathrm{E}\varkappa\xrightarrow{Kh}0$ влечет за собой $\mathrm{E}(\varkappa\chi_A)/\mathrm{E}\varkappa\to0$. Так как $\mathrm{E}(\varkappa\chi_A)=qm$, $\mathrm{E}\varkappa=qm+(1-q)T^{-}$, то отсюда, в свою очередь, следует сходимость к нулю двух последних слагаемых в соотношениях (6.1).

Так как $\overline{\tau}_q=q\sum\limits_{i\leqslant\nu(q)}\theta_i^{-}/T^{-}$, т. е. τ_q представляется в виде нормированной суммы геометрического числа независимых одинаково распределенных слагаемых, то для оценки первого слагаемого в правой части формулы (6.1) можно применить метод работы [43]. Обозначим $X_i\equiv\theta_i^{-}/T^{-}$, $F(x)=\mathrm{P}(X\leqslant x)$. Предположим, что $F(x)<1$ для всех x. Если это не так, то X_i имеет все моменты. В этом случае решение задачи значительно упрощается и мы можем сразу применить оценку (3.34) при $s=2$.

Для произвольного m представим X в следующем рандомизированном виде:

$$X\overset{d}{=}\psi_m Y(m)+(1-\psi_m)Z(m),$$

где $\psi(m)$, $Y(m)$, $Z(m)$ независимы,

$$\psi_m=\begin{cases}1 \text{ с вероятностью } F(m),\\ 0 \text{ с вероятностью } 1-F(m),\end{cases}$$

$$\mathrm{P}(Y(m)\leqslant x)=\min\left(1,\frac{F(x)}{F(m)}\right),$$

$$\mathrm{P}(Z(m)\leqslant x)=\max\left(0,\frac{F(x)-F(m)}{1-F(m)}\right).$$

Аналогично рандомизируем величину U:

$$U\overset{d}{=}\psi_m U_1+(1-\psi_m)U_2.$$

Таким образом, имеем

$$\rho\left(q\sum_{i=1}^{\nu(q)}X_i,U\right)\leqslant\rho\left(q\sum_{i=1}^{\nu(q)}[\psi_m^{(i)}Y_i(m)+(1-\psi_m^{(i)})Z_i(m)],\right.$$

$$q\sum_{i=1}^{\nu(q)}[\psi_m^{(i)}Y_i(m)+(1-\psi_m^{(i)})U_2^{(i)}])+\rho\,(q\sum_{i=1}^{\nu(q)}[\psi_m^{(i)}Y_i(m)+$$
$$+(1-\psi_m^{(i)})U_2^{(i)}],\,q\sum_{i=1}^{\nu(q)}[\psi_m^{(i)}U_1^{(i)}+(1-\psi_m^{(i)})U_2^{(i)}])\equiv A+B. \tag{6.2}$$

Оценим слагаемое B:

$$B=\rho\left(q\sum_{i=1}^{\nu(q)}\Xi_i(m),U\right)\leqslant\rho\left(q\sum_{i=1}^{\nu(q)}\frac{\Xi_i(m)}{\gamma_m},U\right)+\rho(\gamma_m U,U), \tag{6.3}$$

где $\Xi_i(m)=\psi_m^iY_i(m)+(1-\psi_m^i)U_2^i$, $\mathrm{E}\Xi_i(m)=\gamma_m<1$, $\lim\limits_{m\to\infty}\gamma_m=1$.

По построению, $\Xi_i(m)$ имеет ограниченный второй момент. Следовательно, можно использовать оценку (3.34) и получить неравенство

$$\rho\left(q\sum_{i=1}^{\nu(q)}\frac{\Xi_i(m)}{\gamma_m},U\right)\leqslant c\mathrm{E}\left(\frac{\Xi_i(m)}{\gamma_m}\right)^2. \tag{6.4}$$

Будем далее букву c использовать для обозначения всех возникающих абсолютных постоянных, так как нас интересует лишь качественная сходимость. Тем не менее подчеркнем, что все эти постоянные допускают явную оценку. Легко видеть, что

$$\mathrm{E}\left(\frac{\Xi_i(m)}{\gamma_m}\right)^2\leqslant cm.$$

Следовательно,

$$B\leqslant cmq+(1-\gamma_m)e^{-\gamma_m}. \tag{6.5}$$

Слагаемое A в формуле (6.2) можно оценить следующим образом:

$$A\leqslant[1-F(m)]\frac{\rho(Z(m),U)}{q}\leqslant\frac{1-F(m)}{q}. \tag{6.6}$$

Итак, из формул (6.2), (6.6) получаем

$$\rho(\bar{\tau}_q,U)\leqslant cmq+\frac{1-F(m)}{q}+(1-\gamma_m)e^{-\gamma_m}. \tag{6.7}$$

Из соотношения $\frac{q\varkappa}{\mathrm{E}\varkappa}\xrightarrow{Kh}0$ следует, что $\frac{1-F(y/q)}{q}\to 0$ при $q\to 0$ для любого $y>0$. Возьмем $\varepsilon>0$ и положим $m=\varepsilon/cq$. Первое слагаемое в неравенстве (6.7) при этом будет равно ε, а остальные стремятся к нулю при $q\to 0$. В силу произвольности ε заключаем, что $\rho(\bar{\tau}_q,U)\to 0$ при $q\varkappa/E\varkappa\xrightarrow{Kh}0$.

Согласно формуле (6.1) $\rho(q\tau/E\varkappa,U)\to 0$ при $q\varkappa/\mathrm{E}\varkappa\to 0$, т. е. получаем утверждение, эквивалентное теореме 8. Совершенно аналогично может быть получено утверждение, эквивалентное теореме 9.

Сравним наши оценки с полученными ранее оценками О. Сахобова и А. Д. Соловьева. В работах [24, 92] приведены оценки типа полученных в теореме 7 для следующего частного случая: цикл регенерации слагается из двух независимых частей, при этом его длина θ является суммой двух величин: ψ (с экспоненциальным распределением, имеющим параметр λ) и φ (с произвольным распределением, имеющим конечное среднее), событие A может наступить только на отрезке φ. Пусть $m = (1/\lambda) + t_1$, $T^- = (1/\lambda) + t_2$, $P(\varphi^- \leqslant x) = P(\varphi \leqslant x \mid \bar{A})$. Обозначим $t_0 = (1-q)\, t_2 + qt_1$. Оценка, приведенная в работе [24], следующая:

$$\exp(-\lambda qx) \leqslant P(\tau > x) \leqslant \exp(-\lambda qx) + \lambda t_0. \tag{6.8}$$

Из теоремы 7, применяя справедливую в данном случае оценку (3.18) и пользуясь тем, что $\rho\left(\frac{\theta^-}{T^-}, U\right) \leqslant \frac{2\lambda t_2}{1+\lambda t_2}$,

$$\zeta_1\left(\frac{\theta^-}{T^-}, U\right) \leqslant \frac{2\lambda t_2}{1+\lambda t_2}, \qquad \zeta_s\left(\frac{\theta^-}{T^-}, U\right) \leqslant$$

$$\leqslant s\Gamma(s)\left[1 - \frac{1}{(1+\lambda t_2)^s}\right] + \frac{\lambda^s E(\varphi^-)^s}{(1+\lambda t_2)^s} \equiv \zeta(s),$$

получим оценку

$$\left| P(\tau > x) - \exp\left(-\frac{\lambda qx}{1+\lambda t_2}\right)\right| \leqslant \frac{q\lambda t_1}{1+\lambda t_2} + q^{s-1}\zeta(s) + q\frac{11\lambda t_2}{(1+\lambda t_2)}. \tag{6.9}$$

Отметим, что $qt_1 \leqslant t_0$ по определению, а в «непатологических» случаях $qt_1/t_0 \to 0$ при $q \to 0$. Более того, если все-таки $qt_1 = t_0$, то $t_2 = 0$, $\zeta(s) = 0$, т. е. оценка (6.8) является предельным случаем оценки (6.9).

Для наглядности сравним полученные оценки с оценками О. Сахобова и А. Д. Соловьева в одном конкретном случае модели холодного резервирования с восстановлением (числа резервных элементов r). Предположим что время жизни элементов распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 1$, а время ремонта постоянно и равно $\varepsilon > 0$. Моментом отказа считается момент времени, когда впервые в отказовом состоянии находятся оба элемента. В этом случае можно проверить, что

$$q = \frac{\varepsilon^r}{r!} + o(\varepsilon^r); \qquad t_2 = \varepsilon, \qquad t_1 = \frac{\varepsilon}{1-q} = \varepsilon + o(\varepsilon);$$

$$t_0 = (1-\varepsilon)\,\varepsilon + \varepsilon e^{\varepsilon} = 2\varepsilon + o(\varepsilon); \; \zeta(2) = 2\varepsilon e^{-1} + o(\varepsilon).$$

Тогда правая часть оценки (6.9) равна $(12 + 2e^{-1})\frac{\varepsilon^{r+1}}{r!} o + (\varepsilon^{r-1}) \approx$ $\approx 13\,\varepsilon^{r+1}/r!$.

Величина λt_0, характеризующая точность оценки (6.8) О. Сахобова и А. Д. Соловьева, равна $2\varepsilon + o(\varepsilon)$.

Оценка (3.33) аналогична по форме оценке, получаемой из неравенства Эссеена [24], однако она найдена при более слабых условиях ($s \leqslant 2$).

5

СИСТЕМЫ, ОХВАТЫВАЮЩИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Глава относится к разделу математической теории систем, позволяющей учитывать гистерезисные эффекты. Построение этой теории было начато М. А. Красносельским и его учениками; основные результаты изложены в монографии [65]. В главе используется терминология из этой монографии и ряд изложенных в ней результатов. Глава посвящена теории нового класса систем с гистерезисом. Этот новый класс охватывает реологические модели гистерезиса, в частности известные модели А. Ю. Ишлинского [40], В. В. Новожилова — Ю. И. Кадашевича [41], Айвена, Прандтля и др. Описание этих моделей и соответствующую библиографию можно найти в книге [81].

Для построения и изучения пространств состояний, соответствий вход — выход и вход — состояние (см., например, [44, 78]) рассматриваемых нелинейных систем в главе широко используется аппарат теории графов (в изложении, принятом в книге [93]).

1. Реологические модели

1.1. Описание моделей. Рассмотрим на плоскости горизонтально расположенный элемент AB (рис. 10), конец A которого закреплен, а к концу B приложена переменная сила $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$. Положительным направлением действия этой силы будем считать направление от A к B. Под действием силы $u(t)$ элемент может деформироваться. Пусть $x_A(t)$ и $x_B(t)$ $(t \geqslant t_0)$ — абсциссы соответствующих концов, а x_0 — длина недеформированного элемента, которому приписано направление от A к B. Изменение длины (деформацию) направленного элемента при $t \geqslant t_0$ будем характеризовать величиной $x(t) = x_B(t) - x_A(t) - x_0$.

В случае упругого элемента Гука величины x и u связаны соотношением $u(t) = kx(t)$, $t \geqslant t_0$, где $k > 0$ — коэффициент упругости. Для пластического элемента $u(t) \in [-\tau, \tau]$, $t \geqslant t_0$, и при абсолютно непрерывных деформациях почти всюду выполняются соотношения $\dot{x}(t) \geqslant 0$ при $u(t) = \tau$; $\dot{x}(t) = 0$ при $|u(t)| < \tau$; $\dot{x}(t) \leqslant 0$ при $u(t) = -\tau$. Величина $\tau > 0$ называется пределом текучести. Упругий и пластический элементы изображены схематически на рис. 11.

Обозначим через Δ плоскость с декартовой системой координат $O\xi$, $O\eta$. Реологическая модель представляет собой (рис. 12) расположенную на плоскости Δ систему параллельных оси $O\xi$ жестких невесомых стержней $S_1, \ldots, S_m$, каждая пара которых либо никак не соединена, либо соединена некоторыми параллельными оси $O\eta$ невесомыми упругими и пластическими элементами. Пусть все участвующие в модели направленные элементы E_i, $i = 1, \ldots, n$ занумерованы так, что первые p ($p < n$) элементов пластические, а остальные упругие. Каждый из стержней может перемещаться таким образом, чтобы координата ξ любой его точки оставалась постоянной.

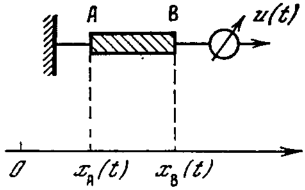


Рис. 10

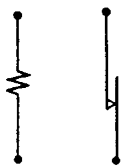


Рис. 11

Пусть стержень S_1 закреплен, а к стержню S_m приложена действующая по оси $O\eta$ сила $\sigma(t)$, $t \geqslant t_0$. Обозначим через η_m^0 ординату стержня S_m модели в нулевом состоянии (т. е. состоянии, в котором $\sigma = 0$ и все элементы модели недеформированы и ненапряжены), а через $\eta_m(t)$ — переменную ординату этого стержня. Общую деформацию реологической модели будем характеризовать величиной $\varepsilon(t) = \eta_m(t) - \eta_m^0$.

Описание функционирования реологической модели заключается в построении и изучении законов, связывающих переменные $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$.

1.2. Уравнения. Поставим в соответствие рассматриваемой модели направленный граф G так, что стержню S_i соответствует вершина s_i, элементу E_j — ребро e_j. Направление каждого ребра графа определяется направлением соответствующего элемента, модели. Через G_0 обозначим граф, полученный добавлением к G произвольно направленного ребра e_{n+1} между вершинами s_1 и s_m. Усилие в элементе E_j, $j = 1, \ldots, n$, и его деформацию соответственно обозначим $u_j(t)$ и $x_j(t)$; положим $u_{n+1}(t) = \sigma(t)$ и $x_{n+1}(t) = \varepsilon(t)$.

При всех $t \geqslant t_0$ сумма приложенных к каждому стержню сил равна нулю, а деформация присоединенных к фиксированной паре стержней элементов одинакова. Поэтому

$$\sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{il} u_l(t) = 0, \quad \sum_{l=1}^{n+1} \beta_{jl} x_l(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n_k, \tag{1.1}$$

где n_k — число контуров, а $\{\alpha_{il}\}$ и $\{\beta_{jl}\}$ — соответственно матрица вершин (инциденций) и контурная матрица направленного графа G_0. Величины $u_i(t)$ и $x_i(t)$, $t \geqslant t_0$, связаны при $i = p + 1, \ldots, n$ соотношениями

$$u_i(t) = k_i x_i(t), \tag{1.2}$$

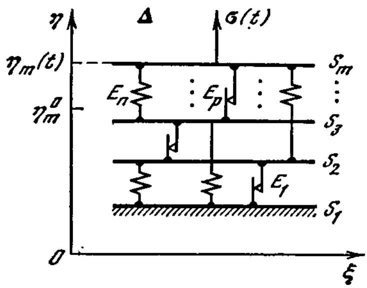


Рис. 12

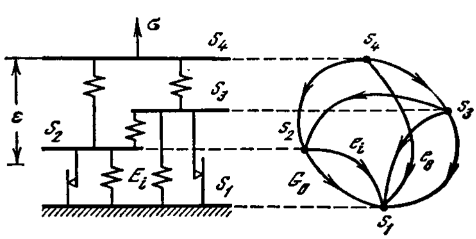


Рис. 13

где $k_i > 0$ — коэффициент упругости упругого элемента E_i, а при $i = 1, \ldots, p$ — соотношениями

$$|u_i(t)| \leqslant \tau_i, \begin{cases} \dot{x}_i(t) \geqslant 0, & \text{если } t \in \{\xi : u_i(\xi) = \tau_i\} \\ \dot{x}_i(t) = 0, & \text{если } t \in \{\xi : |u_i(\xi)| < \tau_i\} \\ \dot{x}_i(t) \leqslant 0, & \text{если } t \in \{\xi : u_i(\xi) = -\tau_i\}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\tau_i > 0$ — соответствующий предел текучести. Предполагается, что функции $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, p)$ — абсолютно непрерывные, а соотношения (1.3) выполняются почти всюду.

Граф G_0 и векторы $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_p\}$, $k = \{k_{p+1}, \ldots, k_n\}$ полностью определяют геометрическую структуру и параметры рассматриваемой модели, функционирование которой описывается соотношениями (1.1)—(1.3).

На рис. 13 приведена реологическая модель простейшего варианта гистерезисных нелинейностей Новожилова — Кадашевича и граф G_0, отвечающий этому варианту.

1.3. Системы Λ *и* V. Пусть задан некоторый направленный граф G_0 с вершинами s_i $(i = 1, \ldots, m)$, ребрами e_j $(j = 1, \ldots, n + 1)$, и n_k контурами и пусть $\{\alpha_{iq}\}$ и $\{\beta_{jq}\}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n_k;\ q = 1, \ldots, n + 1)$,— соответственно его матрица вершин и контурная матрица. Пусть j-му ребру графа соотнесена пара абсолютно непрерывных функций $\{u_j(t), x_j(t)\}$ — его состояние — и пусть, наконец, заданы векторы $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_p\}$, $k = \{k_{p+1}, \ldots, k_n\}$ $(p < n)$ с положительными компонентами.

Обозначим через $\Lambda = \Lambda(G_0, \tau, k)$ (через $V = V(G_0, \tau, k)$) определяемую графом G_0 и векторами τ, k систему со скалярными абсолютно непрерывными входом $u(t)$ и выходом $x(t)$ $(t \geqslant t_0)$ (соответственно входом $x(t)$ и выходом $u(t)$). Состояние обеих систем при каждом $t \geqslant t_0$ определяется вектором $Y(t) = \{U(t), X(t)\} = \{u_1(t), \ldots, u_n(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, составленным из состояний ребер графа $G = G_0 \setminus e_{n+1}$, а функционирование описывается соотношениями (1.1)—(1.3) при $u_{n+1}(t) = u(t)$ и $x_{n+1}(t) = x(t)$. Введенные системы охватывают функционирование реологических моделей. Ниже будут изучаться пространства возможных состояний, множества допустимых входов, соответствия вход — выход и вход — состояние этих систем.

Вход $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$ (вход $x(t)$) назовем Y^0-допустимым для системы Λ (для системы V), а вектор $Y^0 \in R^{2n}$ — ее возможным состоянием, если найдется такой скаляр x^0 (соответственно скаляр u^0), что функции $Y(t) \equiv Y^0$, $x_{n+1}(t) \equiv x^0$, $u_{n+1}(t) \equiv u(t_0)$ (соответственно функции $Y(t) \equiv Y^0$, $u_{n+1}(t) \equiv u^0$, $x_{n+1}(t) \equiv x(t_0)$) при $t \geqslant t_0$ удовлетворят соотношениям (1.1)—(1.3). Пространства возможных состояний этих систем непусты (им принадлежит, например, вектор $\{0, 0\} \in R^{2n}$ при $u^0 = x^0 = 0$).

Система называется детерминированной, если ее переменное состояние (принадлежащее пространству возможных состояний) и выход однозначно определяются заданным возможным начальным состоянием и допустимым входом. Детерминированность введенных систем будет изучаться в терминах свойств графа G_0.

Обозначим через s^* и s_* вершины, инцидентные входо-выходному ребру e_{n+1}. Пусть система Λ (или система V) детерминирована и пусть граф G_0 не совпадает со своим максимальным циклически связным подграфом G_0^*, содержащим вершины s^* и s_* (напомним, что граф называется циклически связным, если любые его две вершины находятся в некотором контуре). Тогда состояния ребер из $G_0 \setminus G_0^*$ не меняются ни при каком входе $u(t)$ (соответственно входе $x(t)$). Поэтому без ограничения общности граф G_0 можно считать циклически связным. Отсюда, в частности, вытекает связность графа $G = G_0 \setminus e_{n+1}$.

Обозначим через G_p подграф графа G, составленный из ребер e_i, $i = 1, \ldots, p$, и инцидентных им вершин. Всюду ниже предполагается, что множество ребер подграфа G_p не содержит сечения графа G_0, т. е. что граф $G_0 \setminus G_p$ связный. Если отказаться от этого предположения, то, как показывают примеры, при изучении детерминированности введенных систем необходимо учитывать не только геометрические свойства графа G_0, но и соотношения между компонентами векторов τ, k, что усложняет формулировки. Графы, отвечающие моделям Прандтля, Прагера, Айвена, А. Ю. Ишлинского, В. В. Новожилова — Ю. И. Кадашевича и др. [40, 41, 81], удовлетворяют сделанным предположениям.

2. Свойства систем Λ

2.1. Теорема детерминированности. В этом пункте приводится сформулированный в терминах свойств графов G_p и G критерий детерминированности введенных в п. 1.3 систем $\Lambda(G_0, \tau, k)$; вводится вспомогательный преобразователь M.

Теорема 2.1. *Система $\Lambda = \Lambda(G_0, \tau, k)$ детерминирована, если и только если подграф G_p не содержит ни контуров, ни сечения графа G.*

Доказательство этой теоремы вынесено в разд. 3.

Для недетерминированной системы Λ фиксированным начальному состоянию Y^0 и Y^0-допустимому входу $u(t)$ при $t \geqslant t_0$ может отвечать континуум различных переменных состояний $Y_\xi(t)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, для которых $Y_\xi(t_0) = Y^0$. Ниже рассматриваются только детерминированные системы.

Введем обозначения $X_p = \{x_1, \ldots, x_p\}$, $U_p = \{u_1, \ldots, u_p\}$, $Y_e = \{U_e, X_e\} = \{u_{p+1}, \ldots, u_n, x_{p+1}, \ldots, x_n\}$. Векторы $\{U_p, X_p\}$ и $\{U_e, X_e\}$ описывают состояния ребер подграфов G_p и $G_e = G \setminus G_p$ соответственно.

Определим вспомогательный преобразователь M. Для этого перепишем соотношения (1.1)—(1.3) в эквивалентной форме.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда при* $t \geqslant t_0$ *соотношения* (1.1)—(1.2) *эквивалентны соотношениям*

$$Y_e(t) = c_e u(t) - A_e X_p(t), \tag{2.1}$$

$$U_p(t) = cu(t) - AX_p(t), \tag{2.2}$$

$$x(t) = \mu u(t) + (f, X_p(t)), \tag{2.3}$$

при некоторых скаляре μ, *векторах* c_e, $c = \{c_i\}$, $f \in R^p$, *матрице* A_e *размера* $2(n-p) \times p$ *и симметрической положительно определенной матрице* $A = \{a_{ij}\}$ *порядка* p.

Скаляр, векторы и матрицы, участвующие в формулировке леммы, явно строятся по вектору k и матрице вершин графа G_0. Доказательство леммы 2.1 приведено в разд. 3.

Подставляя выражение (2.2) в (1.3), получаем соотношения

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) \geqslant 0, & \text{если } t \in \left\{\xi : c_i u(\xi) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} x_j(\xi) = \tau_i\right\} \\ \dot{x}_i(t) = 0, & \text{если } t \in \left\{\xi : \left| c_i u(\xi) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} x_j(\xi)\right| < \tau_i\right\} \\ \dot{x}_i(t) \leqslant 0, & \text{если } t \in \left\{\xi : c_i u(\xi) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} x_j(\xi) = -\tau_i\right\}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\left| c_i u(t) - \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j(t)\right| \leqslant \tau_i, \qquad t \geqslant t_0; \qquad i = 1, \ldots, p,$$

эквивалентные соотношениям (1.3).

Введем теперь преобразователь M со скалярными абсолютно непрерывными входом $u(t)$ и выходом $x(t)$, $t \geqslant t_0$. Состояние этого преобразователя при каждом $t \geqslant t_0$ определяется точкой $\{u(t), X_p(t)\} \in R^{p+1}$, а функционирование описывается соотношениями (2.3), (2.4).

Если детерминирована система Λ, то детерминирован и отвечающий ей преобразователь M; обратно: из детерминированности M вытекает детерминированность Λ. Входо-выходные соответствия преобразователя M и системы Λ совпадают, а переменное состояние $Y(t)$ системы получается из переменного состояния $\{u(t), X_p(t)\}$ при помощи линейных операций (2.1), (2.2). Ниже свойства систем Λ изучаются в терминах свойств преобразователя M.

2.2. Возможные состояния и допустимые входы. Пусть преобразователь M детерминирован. Множество $\Omega(M)$ его возможных состояний $\{u, X_p\}$ представляет собой призму в R^{p+1}, сечения которой плоскостями $u = \text{const}$ — это невырожденные p-мерные параллелепипеды. Действительно, из соотношений (2.4) вытекает, что вектор $\{u, X_p\} \in R^{p+1}$ является возможным состоянием преобразователя, если и только если покомпонентно выполнены неравенства

$$-\tau \leqslant cu - AX_p \leqslant \tau. \tag{2.5}$$

Уравнения $-AX_p + cu = \pm\tau$ задают p пар параллельных p-мерных плоскостей в R^{p+1}, образующих границу призмы. При каждом фиксированном u соотношения (2.5) определяют p-мерный параллелепипед, лежащий в основании этой призмы. Его невырожденность вытекает из невырожденности (см. лемму 2.1) матрицы A.

Обозначим через $\Pi(M)$ ортогональную проекцию призмы $\Omega(M)$ на R^p вдоль оси Ou. Множество $\Pi(M)$ представляет собой призму в R^p, в основании которой лежит невырожденный выпуклый $(p-1)$-мерный многогранник. Пусть $X_p^0 \in \Pi(M)$. Абсолютно непрерывный вход $u(t)$, $t \geqslant t_0$ назовем X_p^0-допустимым (или просто допустимым) для преобразователя M, если $\{u(t_0), X_p^0\} \in \Omega(M)$. Рассмотрим в R^{p+1} коллинеарную оси Ou прямую, проходящую через точку $\{0, X_p^0\}$. Пересечение этой прямой с множеством $\Omega(M)$ непусто и представляет собой некоторый отрезок. Через $\Delta_1(X_p^0) \leqslant \Delta_2(X_p^0)$ обозначим координаты его концов на оси Ou. Вход $u(t)$ является X_p^0-допустимым, если и только если $\Delta_1(X_p^0) \leqslant u(t_0) \leqslant \Delta_2(X_p^0)$. Множество X_p^0-допустимых входов непусто при каждом $X_p^0 \in \Pi(M)$.

2.3. Непрерывные входы. Детерминированность преобразователя M означает, что для каждых вектора $X_p^0 \in \Pi(M)$ и допустимого абсолютно непрерывного входа $u(t)$, $t \geqslant t_0$, существует единственная абсолютно непрерывная вектор-функция $X_p(t)$ при $t \geqslant t_0$, удовлетворяющая соотношениям (2.4) и условиям $\{u(t), X_p(t)\} \in \Omega(M)$, $X_p(t_0) = X_p^0$. Поэтому можно ввести однозначные операторы

$$X_p(t) = \Phi[t_0, X_p^0]\, u(t),\ x(t) = M[t_0, X_p^0]\, u(t),\ t \geqslant t_0, \tag{2.6}$$

описывающие соответствия вход — состояние и вход — выход детерминированного преобразователя M. Эти операторы определены на допустимых абсолютно непрерывных входах; их значения — абсолютно непрерывные функции. В раз. 3 будет доказана

Теорема 2.2. *Операторы* (2.6) *допускают продолжение по непрерывности на множество всех непрерывных допустимых входов.*

Это продолжение осуществляется при помощи предельной конструкции. Опишем ее (см., например, [65]). Пусть $u(t)$, $t \geqslant$

$\geqslant t_0$,— непрерывная X_p^0-допустимая функция, а $u_n(t)$, $t \geqslant t_0$; $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность X_p^0-допустимых абсолютно непрерывных входов, равномерно на каждом конечном промежутке сходящаяся к $u(t)$. Пусть $X_p^n(t) = \Phi[t_0, X_p^0]\, u_n(t)$, $t \geqslant t_0$; $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, как будет показано в разд. 3, последовательность $X_p^n(t)$ сходится к некоторой непрерывной при $t \geqslant t_0$ функции, которая не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $u_n(t)$. Непрерывная вектор-функция $\{u(t), X_p(t)\}$ объявляется переменным состоянием преобразователя M, отвечающим непрерывному входу $u(t)$. Выход $x(t)$, отвечающий этому входу, получается из равенства (2.3).

Сохраним за продолженными операторами те же обозначения. Ниже будет изучаться функционирование преобразователя M, а следовательно, и системы Λ на множестве допустимых непрерывных входов. Теорема 2.1 о детерминированности системы Λ остается справедливой и на этом множестве входов.

2.4. Свойства преобразователя M. Установим сначала связи преобразователя M с многомерным люфтом [65]. Пусть c и A — вектор и матрица из формулы (2.2).

Теорема 2.3. *Если непрерывный вход $u(t)$ допустим, то*

$$\Phi[t_0, X_p^0]\, u(t) = A^{-1/2} L[t_0, A^{1/2} X_p^0]\, (A^{-1/2} c u(t)), \quad t \geqslant t_0,$$

где $L = L(Z)$ — многомерный люфт с характеристикой-многогранником $Z = \{z \in R^p\colon -\tau \leqslant A^{1/} z \leqslant \tau\}$.

Доказательство вынесено в разд. 3.

Ряд свойств многомерного люфта [65] переносится в силу теоремы 2.3 на преобразователь M. В частности, преобразователь M статичен, виброкорректен, для него при каждых $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t$ справедливо полугрупповое равенство

$$\Phi[t_0, X_p^0]\, u(t) = \Phi[t_1, \Phi[t_0, X_p^0]\, u(t_1)]\, u(t).$$

Операторы (2.6) непрерывны как операторы в пространстве $C[t_0, t_1]$ при каждом $t_1 \geqslant t_0$; они непрерывно зависят от $X_p^0 \in \Pi(M)$. Более того, эти операторы удовлетворяют условию Липшица

$$\|\Phi[t_0, X_p']\, u_1(t) - \Phi[t_0, X_p'']\, u_2(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma(\Phi)\, \|u_1 - u_2\|_{C[t_0, t]} + \|X_p' - X_p''\|$$

с некоторой константой $\gamma(\Phi)$. Приведенная в книге [65] процедура построения оценок на константу Липшица для многомерного люфта позволяет получать (по матрице A) аналогичные оценки на $\gamma(\Phi)$.

Из конвергентности многомерного люфта вытекает конвергентность преобразователя M. Это означает, что для каждых $X_p', X_p'' \in \Pi(M)$ и допустимого входа $u(t)$, $t \geqslant t_0$ скалярная функция $\alpha(t) = \|\Phi[t_0, X_p']\, u(t) - \Phi[t_0, X_p'']\, u(t)\|$ монотонна и не возрастает при $t \geqslant t_0$. Из свойств многомерного люфта также следует, что при периодическом входе $u(t)$, $t \geqslant t_0$, функции $X_p(t)$ и $x(t)$, определяемые операторами (2.6), предельно периодичны. Для каждого ω-периодического входа $u(t)$, $t \geqslant t_0$, существует начальное состояние $\{u(t_0), X_p^0\} \in \Omega(M)$, которому при $t \geqslant t_0$ отвечают ω-периодические выход и переменное состояние.

Остановимся на одном специальном свойстве преобразователя M.

Преобразователь M назовем ε_0-конвергентным, если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждых допустимого входа $u(t)$, $t \geqslant t_0$, и X_p', $X_p'' \in \Pi(M)$ из справедливости при некотором $t_1 \geqslant t_0$ соотношения $|u(t_1) - u(t_0)| = \varepsilon_0$ вытекает равенство $\Phi[t_0, X_p']\, u(t) = \Phi[t_0, X_p'']\, u(t)$, $t \geqslant t_1$. Многомерный люфт с характеристикой-многогранником не обладает свойством ε_0-конвергентности (он даже не строго конвергентен; см. [65]) на множестве допустимых вектор-функций. Поэтому в связи с теоремой 2.3 можно было бы ожидать, что и произвольный преобразователь M таким свойством не обладает, но это не так.

Теорема 2.4. *Преобразователь M является ε_0-конвергентным, если и только если вектор $A^{-1}c$ не имеет нулевых компонент.*

Доказательство приведено в разд. 3.

Свойство ε_0-конвергентности полезно при анализе управляемости преобразователя M. Преобразователь M называется управляемым [65], если для каждых X_p', $X_p'' \in \Pi(M)$ найдется такой X_p'-допустимый вход $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что $\Phi[t_0, X_p']\, u(t_1) = X_p''$.

Многомерный люфт управляем на множестве допустимых вектор-функций, а преобразователь M не всегда управляем. Это следует уже из неуправляемости преобразователя, отвечающего блок-схеме из параллельно соединенных одномерных люфтов [65].

Преобразователь M^*, определяемый соотношениями (2.3), (2.4) при $X_p^0 \in \Pi(M^*) \subset \Pi(M)$, называют управляемым сужением преобразователя M на множестве $\Omega(M^*) = \{\{u, X_p\} \in \Omega(M)\colon X_p \in \Pi(M^*)\}$, если из $X_p^0 \in \Pi(M^*)$ вытекает включение $\Phi[t_0, X_p^0]\, u(t) \in \Pi(M^*)$ при $t \geqslant t_0$ для каждого X_p^0-допустимого входа $u(t)$ и если M^* управляем. Если, кроме того, для каждого $X_p^0 \in \Pi(M)$ найдется X_p^0-допустимый вход $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, для которого $\Phi[t_0, X_p^0]\, u(t_1) \in \Pi(M^*)$, то преобразователь M^* называется вполне управляемым сужением преобразователя M.

Теорема 2.5. *Пусть преобразователь M обладает свойством ε_0-конвергентности. Тогда он имеет единственное вполне управляемое сужение.*

Доказательство теоремы 2.5 вынесено в разд. 3.

Преобразователь M, не обладающий свойством ε_0-конвергентности, в одних случаях может иметь единственное вполне управляемое сужение, а в других — континуум различных управляемых сужений.

Говорят, что преобразователь обладает фильтрующим свойством (см., например, [29]), если его выход, отвечающий каждому допустимому непрерывному входу, на каждом конечном промежутке имеет ограниченную вариацию. Многомерный люфт обладает фильтрующим свойством [65].

Теорема 2.6. *Преобразователь M обладает фильтрующим свойством, если и только если в графе G_p есть путь от s^* к s_*.*

Доказательство этой теоремы приведено в разд. 3.

3. Доказательства теорем 2.1—2.6

3.1. Доказательство леммы 2.1. Пусть граф G_p не содержит контуров. Тогда в G_0 существует дерево T_p, содержащее G_p и не содержащее ребра e_{n+1}. Не ограничивая общности, можно считать это дерево составленным из ветвей e_i, $i = 1, \ldots, m-1$. Кроме того, пусть каждому основному сечению графа G_0 относительно дерева T_p приписаны номер и направление определяющей его ветви, а каждому основному контуру — номер и направление обхода, совпадающие с номером и направлением образующей его хорды. Тогда матрица $\mathcal{A}_{T_p}$ основных сечений и матрица $\mathcal{B}_{T_p}$ основных контуров имеют вид

$$\mathcal{A}_{T_p} = [\,|I_1|\,|\mathcal{A}|\,|\alpha|\,], \qquad \mathcal{B}_{T_p} = \left[\,\left|\begin{matrix}\mathcal{B}\\ \beta\end{matrix}\right|\,|I_2|\,\right],$$

где I_1 и I_2 — единичные матрицы порядка $m-1$ и $n-m+2$ соответственно; $\mathcal{A}$ — матрица размера $(m-1)\times(n-m+2)$; $\mathcal{B}$ — матрица размера $(n-m+2)\times(m-1)$; а α и β — столбец и строка соответствующих длин, отвечающие входо-выходному ребру e_{n+1}. Из теории графов известно [93], что $\mathcal{A} = -\mathcal{B}^{\mathrm{T}}$ и $\alpha = -\beta^{\mathrm{T}}$, где т — знак транспонирования. Матрица $\mathcal{A}$ и вектор α явно строятся [93] по матрице вершин графа G_0.

Лемма 3.1 [93]. *Соотношения* (1.1) *эквивалентны соотношениям*

$$\mathcal{A}_{T_p}\begin{bmatrix}U\\ u\end{bmatrix} = 0, \qquad \mathcal{B}_{T_p}\begin{bmatrix}X\\ x\end{bmatrix} = 0.$$

Так как $G_p \subset T_p$, то $p \leqslant m-1$. Ниже рассматривается случай $p < m-1$; более простой случай $p = m-1$ рассматривается аналогично. Введем обозначения: $\{U_1, X_1\} = \{u_{p+1}, \ldots, u_{m-1}, x_{p+1}, \ldots, x_{m-1}\}$, $\{U_2, X_2\} = \{u_m, \ldots, u_n, x_m, \ldots, x_n\}$. Вектор $\{U_1, X_1\}$ описывает состояние ребер подграфа $T_p \setminus G_p$, а вектор $\{U_2, X_2\}$ — подграфа $G \setminus T_p$. В силу леммы 3.1, соотношений (1.2) и свойств матриц $\mathcal{A}_{T_p}$, $\mathcal{B}_{T_p}$ соотношения (1.1) можно переписать в виде

$$U_p + \mathcal{A}_1 K_2 X_2 + \alpha_1 u = 0, \quad K_1 X_1 + \mathcal{A}_2 K_2 X_2 + \alpha_2 u = 0, \qquad (3.1)$$

$$K_2 X_2 - K_2 \mathcal{A}_1^{\mathrm{T}} X_p - K_2 \mathcal{A}_2^{\mathrm{T}} X_1 = 0, \quad (\alpha_1, X_p) + (\alpha_2, X_1) = x, \qquad (3.2)$$

где $K_1 = \{k_{i+p}\delta_{ij}\}$, $i,\ j = 1,\ldots, m-p+1$; $K_2 = \{k_{r+m-1}\delta_{rs}\}$, $r, s = 1,\ldots, n-m+1$; $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \alpha_1, \alpha_2$ — блоки соответствующих размеров матрицы $\mathcal{A}_{T_p}$ [28]; δ_{ij} — символ Кронекера. Из второго уравнения (3.1) и первого уравнения (3.2) вытекает, что

$$D_1X_e = \begin{bmatrix} \cdot & K_1 & \mathcal{A}_2K_2 \\ & -(\mathcal{A}_2K_2)^{\mathrm{T}} & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 u \\ K_2\mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}X_p \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

откуда в силу равенства (1.2) и положительной определенности матрицы D_1 следует формула (2.1).

Подставляя X_1 из второго уравнения (3.1) в первое уравнение (3.2), получаем соотношение

$$D_2X_2 = (K_2 + (\mathcal{A}_2K_2)^{\mathrm{T}} K_1^{-1} (\mathcal{A}_2K_2))\, X_2 = K_2\mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}X_p - K_2\mathcal{A}_2^{\mathrm{T}}K_1^{-1}\alpha_2 u.$$

Матрица D_2 невырождена. Поэтому $X_2 = D_2^{-1}K_2\mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}X_p - D_2^{-1}K_2\mathcal{A}_2^{\mathrm{T}}K_1^{-1}\alpha_2 u$. Подставляя это выражение в первое из уравнений (3.2), получаем равенство $U_p + \mathcal{A}_1K_2D_2^{-1}K_2\mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}X_p + u\,(\alpha_1 - D_1K_2D_2^{-1}K_2\mathcal{A}_2K_1^{-1}\alpha_2) = 0$, откуда и следует формула (2.2). Подставляя X_1 из соотношений (3.3) во второе соотношение (3.2), получаем формулу (2.3), в которой

$$\mu = \alpha_3^{\mathrm{T}}D_1^{-1}\alpha_3, \tag{3.4}$$

где $\alpha_3 = \{\alpha_2,\ 0\} \in R^{n-p}$.

Таким образом, если граф G_p не содержит контуров, то соотношения (1.1)—(1.2) и (2.1)—(2.3) эквивалентны. Симметрическая матрица $A = (\mathcal{A}_1K_2)\,D_2^{-1}(\mathcal{A}_1K_2)^{\mathrm{T}}$ неотрицательно определена. Покажем, что она невырождена, если подграф G_p не содержит сечения графа G. Действительно, из связности графа $G \setminus G_p$ вытекает существование в нем некоторого дерева графа G, а деревья графа находятся во взаимно однозначном соответствии с невырожденными подматрицами порядка $m-1$ матрицы $\mathcal{A}_{T_p}$ (см. [93]). Поэтому ранг матрицы, образованной столбцами матрицы $\mathcal{A}_{T_p}$ с номерами от $p+1$ до n, равен $m-1$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{rank}\ \mathcal{A}_1 = p$ и, следовательно, матрица A невырождена. Лемма доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2.1. Покажем, что в условиях этой теоремы преобразователь M детерминирован. Напомним, что нормальным конусом $K_Z\,(y)$ в точке $y \in Z$ ограниченного замкнутого выпуклого тела $Z \subset R^p$ называется множество $\{z \in R^p\colon (z,\ \xi - y) \leqslant 0,\ \xi \in Z\}$ (если $y \in \mathrm{int}\ Z$, то $K_Z\,(y) = 0$). Положим $Z_0 = \{y \in R^p\colon\ -\tau \leqslant y \leqslant \tau\}$ и перепишем соотношения (2.4) в виде $\dot{X}_p\,(t) \in K_{Z_0}\,(cu\,(t) - AX_p\,(t))$, $cu\,(t) - AX_p\,(t) \in Z_0$. Применяя к этим соотношениям матрицы $A^{-1/2}$ и $A^{1/2}$, получаем включения

$$A^{-1/2}cu\,(t) - A^{1/2}X_p\,(t) \in A^{-1/2}Z_0, \quad A^{1/2}\dot{X}_p\,(t) \in$$
$$\in A^{1/2}K_{Z_0}\,(cu\,(t) - AX_p\,(t)). \tag{3.5}$$

Так как $BK_Z(y) = K_{B^{-1}Z}(B^{-1}y)$, где B — симметрическая невырожденная матрица, то первое из включений (3.5) можно записать следующим образом: $A^{1/2}\dot{X}_p(t) \in K_{A^{-1/2}Z_0}(A^{-1/2}cu(t) - A^{1/2}X_p(t))$. Поэтому включения

$$z(t) \in Z, \ v(t) \in \dot{z}(t) + K_Z(z(t)), \ t \geqslant t_0, \tag{3.6}$$

где $z(t) = A^{-1/2}cu(t) - A^{1/2}X_p(t)$, $Z = A^{-1/2}Z_0 = \{y \in R^p: -\tau \leqslant A^{1/2}y \leqslant \tau\}$, $v(t) = A^{-1/2}c\dot{u}(t)$ эквивалентны соотношениям (2.4).

Функция $v(t)$, $t \geqslant t_0$, суммируема на каждом конечном промежутке. Покажем, что многозначный оператор K_Z, сопоставляющий точке $y \in Z$ конус $K_Z(y)$, максимально монотонен. Тогда [106] соотношения (3.6) при каждом $y_0 \in Z$ имеют единственное абсолютно непрерывное решение $y(t) \in Z$ $(t \geqslant t_0; \ y(t_0) = y_0)$, откуда вытекает детерминированность преобразователя M.

Многозначный оператор K_Z максимально монотонен, если и только если [106] при каждых $y_1 \in K_Z(\xi_1)$, $y_2 \in K_Z(\xi_2)$ $(\xi_1, \xi_2 \in Z)$ справедливо неравенство $(y_1 - y_2, \xi_1 - \xi_2) \geqslant 0$ и множество значений оператора $I + K_Z$, где I — единичный оператор, совпадает с R^p. Справедливость неравенства $(y_1 - y_2, \xi_1 - \xi_2) = (y_1, \xi_1 - \xi_2) + (y_2, \xi_2 - \xi_1) \geqslant 0$ вытекает из определения нормального конуса. Рассмотрим множество значений оператора K_Z. Тело $Z \subset R^p$ — это невырожденный p-мерный параллелепипед. Обозначим через $\pi_i^{\pm}$ плоскости $\sum a_{ij}^{(1/2)} x_j = \pm \tau_i$, образующие границу ∂Z, а через l_i, $i = 1, \ldots, p$, — внешние нормали к π_i^+. Набор $l_1, \ldots, l_p$ образует базис в R^p. Поэтому для каждого $y \in R^p$, $y \neq 0$, справедливо представление $y = \sum \lambda_i(y) l_i$, $\sum |\lambda_i| \neq 0$. Рассмотрим $z = z(y) \in \partial Z$, принадлежащий всем плоскостям π_i^+, π_j^- с номерами i, j, для которых $\lambda_i(y) > 0, \lambda_j(y) < 0$. Тогда $y \in K_Z(z(y))$. Если $y = 0$, то $y \in K_Z(z)$ для всех $z \in \operatorname{int} Z$. Поэтому множество значений оператора K_Z (и тем более оператора $I + K_Z$) совпадает с R^p, откуда и вытекает его максимальная монотонность.

Таким образом, в условиях теоремы 2.1 преобразователь M и, следовательно, система Λ детерминированы. Докажем необходимость условий этой теоремы.

Пусть система Λ детерминирована, а граф $G \setminus G_p$ не является связным. Так как (см. п. 1.3) граф $G_0 \setminus G_p$ связный, то в графе G_0 есть сечение, составленное из ребер e_i, $i \in \omega \subset \{1, \ldots, p\}$, подграфа G_p и ребра e_{n+1}. Поэтому при некоторых λ, $\lambda_i \in \{-1, 1\}$, $i \in \omega$, справедливо равенство $\lambda u + \sum_{i \in \omega} \lambda_i u_i = 0$, откуда вытекает оценка $|u| \leqslant \tau_1 + \ldots + \tau_p$ входов системы. Последняя оценка противоречит детерминированности системы Λ.

Пусть теперь граф $G \setminus G_p$ связный, а граф G_p содержит контуры. Удалим из G_p минимально возможное число ребер так, чтобы оставшийся граф $G_p^* \subset G_p$ не имел контуров. В силу связности

$G \setminus G_p$ в G можно выбрать дерево T, содержащее подграф G_p^* и не содержащее подграф $G_p \setminus G_p^* \neq \phi$. Подграф $T \subset G$ является также деревом графа G_0 в силу его циклической связности.

Перенумеруем ребра графа G так, чтобы ребрам из G_p^* отвечали номера от 1 до q, ребрам из $T \setminus G_p^*$ — номера от $q+1$ до $m-1$, ребрам из $G_p \setminus G_p^*$ — номера от m до r, $m \leqslant r$, и номера от $r+1$ до n — остальным ребрам графа G. Поступая так же, как и при доказательстве леммы 2.1, запишем соотношения (1.1) в виде

$$u_i + \sum_{l=m}^{r} \alpha_{il} u_l + \sum_{l=r+1}^{n} \alpha_{il} k_l x_l + \alpha_{i,\,n+1} u = 0, \quad i = 1, \ldots, q;$$

$$k_j x_j + \sum_{l=m}^{r} \alpha_{jl} u_l + \sum_{l=r+1}^{n} \alpha_{jl} k_l x_l + \alpha_{j,\,n+1} u = 0, \quad j = q+1, \ldots, m-1; \tag{3.7}$$

$$x_{s+m-1} - \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_{ls} x_s = 0, \quad s = 1, \ldots, n-m+2,$$

где $\{\alpha_{ij}\}$ — матрица основных сечений графа G_0 относительно дерева T. Если $q = m-1$, то в системе (3.7) отсутствует вторая группа уравнений; если же $q < m-1$, то $\alpha_{ij} = 0$ при $i = q+1, \ldots, m-1$, $j = m, \ldots, r$.

Пусть при $t = t_0$ система Λ находится в нулевом состоянии Y^0 (см. п. 1.1). Рассмотрим вектор-функцию $Y(t)$, $t \geqslant t_0$, с компонентами $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$; $u_j(t) \equiv 0$, $j = q+1, \ldots, m-1$; $r+1, \ldots, n$, $u_s(t) = -\sum_{l=m}^{r} \alpha_{sl} v_l(t)$, $s = 1, \ldots, q$; $u_l(t) = v_l(t)$, $l = m, \ldots, r$, где $v_l(t)$ — абсолютно непрерывные функции, при $t \geqslant t_0$ удовлетворяющие условиям

$$v_l(t_0) = 0, \quad |\dot{v_l}(t)| < \tau_l, \quad \Big|\sum_{i=m}^{r} \alpha_{ji} v_i(t)\Big| < \tau_j, \quad j = 1, \ldots, q.$$

Тогда $Y(t)$, $t \geqslant t_0$, построенная по каждому такому набору $v_l(t)$, $l = m, \ldots, r$, удовлетворяет условию $Y(t_0) = Y^0$ и соотношениям (3.7), а следовательно, и соотношениям (1.1)—(1.3) при входе $u(t) \equiv 0$. Поэтому система Λ не является детерминированной. Теорема доказана.

3.3. Доказательства теорем 2.2 и 2.3. Докажем сначала справедливость утверждения теоремы 2.3 на множестве абсолютно непрерывных входов.

Пусть $X_p^0 \in \Pi(M)$ и $u(t)$, $t \geqslant t_0$, — X_p^0-допустимый абсолютно непрерывный вход. Переменное состояние преобразователя M, отвечающее этому входу, при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет (см. п. 3.2) соотношениям

$$A^{-1/2} cu(t) - A^{1/2} X_p(t) \in Z, \quad A^{1/2} \dot{X}_p(t) \in K_Z(A^{-1/2} cu(t) - A^{1/2} X_p(t)). \tag{3.8}$$

В силу первого из включений (3.8) из X_p^0-допустимости входа $u(t)$ преобразователя M вытекает $A^{1/2}X_p^0$-допустимость входа $A^{-1/2}cu(t)$ для преобразователя $L = L(Z)$ — многомерный люфт [65]. Входо-выходные соответствия последнего преобразователя на таком входе описываются задачей

$$\dot{y}(t) = P[K_Z(A^{-1/2}cu(t) - y(t))](A^{-1/2}cu(t)), \quad y(t_0) = \\ = A^{1/2}X_p^0, \tag{3.9}$$

где P — оператор, который относит точке $\xi \in R^p$ ближайшую к ней точку $P[K]\xi$ конуса $K \subset R^p$. Из единственности решений уравнений (3.8) и (3.9) вытекает равенство $y(t) = A^{1/2}X_p(t)$, $t \geqslant t_0$, что и требовалось доказать.

Так как на множестве абсолютно непрерывных входов многомерный люфт с характеристикой многогранником удовлетворяет условию Липшица [65], то этому условию удовлетворяет и преобразователь M. Отсюда вытекает (см., например, [65]) корректность описанной в п. 2.3 предельной конструкции и, следовательно, справедливость теорем.

3.4. Доказательство теоремы 2.4. Обозначим через $L(Z, h)$ где $h = A^{-1/2}c$, многомерный люфт, отвечающий в смысле теоремы 2.3 преобразователю M. Покажем, что отсутствие у вектора $A^{-1}c$ нулевых компонент является критерием ε_0-конвергентности преобразователя $L(Z, h)$ на множестве кусочно монотонных абсолютно непрерывных входов. Отсюда в силу теорем 2.2 и 2.3 вытекает справедливость утверждения теоремы 2.4. Доказательство проведем в несколько этапов.

1°. Покажем, что точка $\gamma_0^+ \in \partial Z$ (точка $\gamma_0^- \in \partial Z$), в которой $h \in K_Z(\gamma_0^+)$ (соответственно $-h \in K_Z(\gamma_0^-)$), единственна, если и только если $A^{-1}c$ не имеет нулевых компонент. Доказательство одинаково для γ_0^+ и γ_0^-; рассмотрим γ_0^+.

Нормали l_i к плоскостям π_i^+, $i = 1, \ldots, p$ составляют (см. п. 3.2) базис в R^p. Поэтому $h = \Sigma\lambda_i l_i$, причем $\Sigma\,|\lambda_i| \neq 0$, так как $h \neq 0$. Вектор l_i представляет собой i-й столбец матрицы $A^{1/2}$, а $h = A^{-1/2}c$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^{(-1/2)} c_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_{ij}^{(1/2)}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

откуда $\lambda = A^{-1}c$, где $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \in R^p$.

Обозначим через $\omega \in R^p$ некоторый вектор с компонентами ω_i из множества $\{-1, 0, 1\}$, а через $\gamma(\omega)$ — грань тела Z, образованную пересечением плоскостей π_i^+, π_j^- с номерами i, j, для которых $\omega_i = 1$, $\omega_j = -1$, $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. Пусть $\omega^0 = \{\omega_i^0\}$ — тот вектор, для которого $\omega_i^0 = \operatorname{sgn}\lambda_i$ при $\lambda_i \neq 0$ и $\omega_i^0 = 0$ при $\lambda_i = 0$, где $\lambda = A^{-1}c$. Тогда $h \in K_Z[\gamma(\omega^0)]$, и из условия $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$, вытекает, что $h \in K_Z[\gamma_0^+]$, где $\gamma_0^+ = \gamma(\omega^0)$ — вершина параллелепипеда Z. Вершины γ_0^+ и $\gamma_0^- = \gamma(-\omega^0)$ единственным образом определяются знаками компонент вектора λ. Если же вектор λ имеет $q < p$ нулевых компонент, то h принадлежит нормальному конусу тела Z в каждой точке его q-мерной грани $\gamma(\omega^0)$.

2°. Пусть $u(t)$ — неограниченный при $t \geqslant t_0$ кусочно монотонный абсолютно непрерывный вход. Покажем, что $hu(t_1) - \xi(t_1) \in \gamma(\omega^0)$ (или $hu(t_1) - \xi(t_1) \in \gamma(-\omega^0)$), где $\xi(t) = L[t_0, \xi^0](hu(t))$ при некотором $t_1 \geqslant t_0$. Ограничимся случаем монотонно возрастающего входа (переход к кусочно монотонным входам осуществляется при помощи полугруппового равенства). Предположим противное. Это означает, что $hu(t) - \xi(t) \notin \gamma(\omega^0) \cup \gamma(-\omega^0)$ при всех $t \geqslant t_0$. Справедливы оценки

$$\|h\|\,|u(t) - u(t_0)| \leqslant \|hu(t) - \xi(t)\| + \|hu(t_0) - \xi(t_0)\| +$$

$$+ \|\xi(t) - \xi(t_0)\| \leqslant 2d + \left\|\int_{t_0}^{t} \dot{\xi}(s)\,ds\right\| =$$

$$= 2d + \left\|\int_{t_0}^{t} P[K_Z(hu(s) - \xi(s))]\,h\dot{u}(s)\,ds\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2d + \int_{t_0}^{t} |\dot{u}(s)|\,\|P[K_Z(hu(s) - \xi(s))]\,h\|\,ds, \quad d = \operatorname{diam} Z.$$

Так как $hu(t) - \xi(t) \notin \gamma(\omega^0) \cup \gamma(-\omega^0)$ при $t \geqslant t_0$, то $h \notin K_Z(hu(t) - \xi(t))$ и $\|P[K_Z(hu(t) - \xi(t))]h\| \leqslant \alpha\|h\|$, где $0 \leqslant \alpha < 1$. Поэтому

$$\|h\|\,|u(t) - u(t_0)| \leqslant 2d + \alpha\|h\| \int_{t_0}^{t} |\dot{u}(s)|\,ds,$$

откуда в силу монотонности входа $u(t)$ следует оценка

$$|u(t) - u(t_0)| \leqslant 2d / \|h\|\,(1 - \alpha),$$

что невозможно.

3°. Пусть $\omega_i^0 \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда $\gamma(\pm\omega^0) = \gamma_0^{\pm}$ в силу 1°. Если при некотором $t_1 \geqslant t_0$ величина $|u(t_1) - u(t_0)|$ достаточно велика, то в силу 2° при $t = t_1$ справедливо одно из включений: $hu(t_1) - \xi(t_1) \in \gamma_0^+$ или $hu(t_1) - \xi(t_1) \in \gamma_0^-$. Из этих включений и конвергентности преобразователя $L(Z, h)$ вытекает его ε_0-конвергентность.

Пусть теперь у вектора ω^0 есть q, $q < p$, нулевых компонент. Тогда $h \in K_Z(y)$ в каждой точке $y \in \gamma(\omega^0)$ его q-мерной грани $\gamma(\omega^0)$. Различным начальным состояниям ξ_1^0, ξ_2^0 и допустимому монотонному неограниченно возрастающему входу $u(t)$, $t \geqslant t_0$, для которых $hu(t_0) - \xi_1^0$, $hu(t_0) - \xi_2^0 \in \gamma(\omega^0)$, отвечают выходы

$$\xi_1(t) = L[t_0, \xi_1^0](hu(t)) = \xi_1^0 + h(u(t) - u(t_0)),$$

$$\xi_2(t) = L[t_0, \xi_2^0](hu(t)) = \xi_2^0 + h(u(t) - u(t_0)).$$

Так как $\| \xi_1 (t) - \xi_2 (t) \| = \| \xi_1^0 - \xi_2^0 \|$ при $t \geqslant t_0$, то преобразователь $L (Z, h)$ не обладает свойством ε_0-конвергентности. Теорема доказана.

3.5. Доказательства теорем 2.5 и 2.6. Пусть преобразователь M обладает свойством ε_0-конвергентности. Рассмотрим соответствующий ему (см. п. 3.4) преобразователь $L (Z, h)$. Для каждого начального состояния ξ^0 этого преобразователя можно указать такой ξ^0-допустимый вход $v (t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что изображающая точка $hu (t) - L [t_0, \xi^0] (hu (t))$ при $t = t_1$ принадлежит вершине γ_0^+ параллелепипеда Z (см. п. 3.4). Поэтому преобразователь $L (Z, h)$ имеет вполне управляемое сужение L^* на множестве $\Omega (L^*)$ всех состояний $\{hu (t), L [t_0, \xi (\gamma_0^+)] (hu (t))\}$ при всех допустимых входах $u (t)$ и всех $t \geqslant t_0$, где $\xi (\gamma_0^+) = L [t_0, \xi^0] (hv (t_1))$. Это вполне управляемое сужение единственно. Следовательно, на соответствующих множествах единственное вполне управляемое сужение имеет и преобразователь M. Теорема 2.5 доказана.

Докажем теорему 2.6. Так как [65] преобразователь $L (Z, h)$ обладает фильтрующим свойством, то преобразователь M обладает этим свойством, если и только если величина μ в формуле (2.3) равна нулю. Покажем, что необходимым и достаточным условием этого является существование в G_p пути между вершинами s^* и s_*. Доказательство проведем для случая $p < m - 1$ (более простой случай $p = m - 1$ рассматривается аналогично).

Пусть в графе G_p есть путь от s^* к s_*. Тогда $\alpha_2 = 0$ (см. п. 3.1). Действительно, в предположении противного в основное сечение, определяемое некоторой ветвью e_i, $p + 1 \leqslant i \leqslant m - 1$, входит ребро e_{n+1} и не входят ветви e_j, $j = 1, \ldots, p$. Пусть это сечение разбивает граф G_0 на два изолированных связных подграфа G_1 и G_2. Тогда либо $s^* \in G_1$, а $s_* \in G_2$, либо $s^* \in G_2$, а $s_* \in G_1$. Но это невозможно, так как в подграфе G_p есть путь от s^* к s_* и ребра этого подграфа не входят в рассматриваемое сечение. Поэтому из равенства (3.4) следует, что $\mu = 0$.

Пусть теперь $\mu = 0$. Тогда из соотношений (2.3) и (3.2) вытекает существование в G_0 контура, составленного из ребер подграфа G_p и ребра e_{n+1}, и, следовательно, существование в G_p пути между вершинами s^* и s_*. Теорема доказана.

4. Свойства систем V

4.1. Теорема детерминированности. Т е о р е м а 4.1. *Система V (G_0, τ, k) детерминирована, если и только если подграф G_p не содержит ни пути между вершинами s^* и s_*, ни контуров.*

Доказательство излагается ниже.

Для недетерминированной системы V, как и для недетерминированной системы Λ, решения уравнений (1.1)—(1.3) не единственны.

Л е м м а 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда* *при* $t \geqslant t_0$ *соотношения* (1.1), (1.2) *эквивалентны соотношениям*

$$Y_e(t) = \tilde{c}_e x(t) - \tilde{A}_e U_p(t), \tag{4.1}$$

$$X_p(t) = \tilde{c} x(t) - \tilde{A} U_p(t), \tag{4.2}$$

$$u(t) = \tilde{\mu} x(t) + (\tilde{f},\ U_p(t)), \tag{4.3}$$

при некоторых скаляре $\tilde{\mu}$, *векторах* $\tilde{c}_e$, $\tilde{c} = \{\tilde{c}_i\}$, $\tilde{f} \in R^p$, *матрице* $\tilde{A}_e$ *размера* $2(n-p) \times p$ *и симметрической положительно определенно матрице* $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}$ *порядка* p.

Доказательство. Граф G_0 имеет дерево $T_e \in G \setminus G_p$, составленное из ветвей e_i, $i = q+1, \ldots, n, n+1$. Матрицы $\mathcal{A}_{T_e}$ и $\mathcal{B}_{T_e}$ основных сечений и основных контуров графа G_0 относительно дерева T_e обладают теми же свойствами, что и матрицы $\mathcal{A}_{T_p}$ и $\mathcal{B}_{T_p}$ (см. п. 3.1). Поэтому (аналогично (3.2)—(3.3)) при $q > p$ соотношения (1.1) можно переписать в виде

$$X_p + \mathcal{B}_1 \tilde{K}_2 U_2 + \beta_1 x = 0,\ \tilde{K}_1 U_1 + \mathcal{B}_2 \tilde{K}_2 U_2 + \beta_2 x = 0,$$

$$U_2 - \mathcal{B}_2^{\mathrm{T}} U_1 - \mathcal{B}_1^{\mathrm{T}} U_p = 0,\ (\beta_1, U_p) + (\beta_2, U_1) = u,$$

где $U_1 = \{u_{p+1}, \ldots, u_q\}$; $U_2 = \{u_{q+1}, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, β_1, β_2 — блоки соответствующих размеров, на которые разбита матрица $\mathcal{B}_{T_e} = [I \mathcal{B} \beta]$, а $\tilde{K}_1 = \{k_{p+i}^{-1} \delta_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, q-p$; $\tilde{K}_2 = \{k_{q+r}^{-1} \delta_{rs}\}$, $r, s = 1, \ldots, n-q$. Из этих соотношений вытекают равенства (4.1)—(4.3). Приведем выражение для $\tilde{A}$ и $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{A} = (\mathcal{B}_1 \tilde{K}_2) \tilde{D}_2^{-1} (\mathcal{B}_1 \tilde{K}_2)^{\mathrm{T}},\ \tilde{\mu} = \beta_3^{\mathrm{T}} \tilde{D}_1^{-1} \beta_3, \tag{4.4}$$

где $\tilde{D}_2 = \tilde{K}_2 + (\mathcal{B}_2 \tilde{K}_2)^{\mathrm{T}} \tilde{K}_1^{-1} (\mathcal{B}_2 \tilde{K}_2)$, $\beta_3 = \{\beta_2, 0\} \in R^{n-p}$,

$$\tilde{D}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & (\mathcal{B}_2 \tilde{K}_2) \\ -(\mathcal{B}_2 \tilde{K}_2)^{\mathrm{T}} & \tilde{K}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}$ положительно определена, если и только если граф G_p не содержит ни контуров, ни пути от s^* к s_*. Для доказательства этого утверждения в графе G_0 выбирается дерево $T \subset G_p \cup T_e$, содержащее подграф G_p и ребро e_{n+1}. Затем, аналогично доказательству утверждения о положительной определенности матрицы A (см. п. 3.1) рассматриваются соотношения (4.4) и блоки матрицы $\mathcal{B}_{T_e}$, отвечающие ветвям и хордам этого дерева. Лемма доказана.

Подставляя (4.2) в (1.3), получаем соотношения

$$\left(\tilde{c}_i \dot{x}(t) - \sum_{j=1}^{p} \tilde{a}_{ij} \dot{u}_j(t)\right) \begin{cases} \geqslant 0, & \text{если } t \in \{\xi : u_i(\xi) = \tau_i\} \\ = 0, & \text{если } t \in \{\xi : |u_i(\xi)| < \tau_i\} \\ \leqslant 0, & \text{если } t \in \{\xi : u_i(\xi) = -\tau_i\}, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$|u_i(t)| \leqslant \tau_i,\ i = 1, \ldots, p;\ t \geqslant t_0.$$

Соотношения (4.1)—(4.3), (4.5) эквивалентны соотношениям (1.1)—(1.3).

Через W обозначим преобразователь со скалярными абсолютно непрерывными входом $x(t)$ и выходом $u(t)$, $t \geqslant t_0$, состояние которого при каждом $t \geqslant t_0$ определяется вектором $\{x(t), U_p(t)\} \in R^{p+1}$, а функционирование описывается соотношениями (4.3), (4.5).

Ниже свойства систем V изучаются в терминах свойств преобразователя W аналогично тому, как в разд. 2 это было сделано для систем Λ и преобразователя M.

4.2. Возможные состояния и допустимые входы. Множество возможных состояний $\{x, U_p\} \in R^{p+1}$ детерминированного преобразователя W представляет собой прямую призму $\Omega(W)$, в основании которой лежит невырожденный прямой p-мерный параллелепипед. Действительно, из соотношений (4.5) вытекает, что вектор $\{x, U_p\}$ — возможное состояние преобразователя W, если и только если $-\tau \leqslant U_p \leqslant \tau$. Эти неравенства и задают параллелепипед, лежащий в основании $\Omega(W)$.

Образующие призмы коллинеарны вектору $\{1, 0, \ldots, 0\} \in R^{p+1}$. Поэтому ее ортогональная проекция на R^p вдоль оси Ox имеет вид $\Pi(W) = \{z \in R^p\colon -\tau \leqslant z \leqslant \tau\}$. Следовательно, при каждом $U_p^0 \in \Pi(W)$ каждый абсолютно непрерывный вход допустим для преобразователя W.

4.3. Непрерывные входы. Для каждых вектора $U_p^0 \in \Pi(W)$ и абсолютно непрерывного входа $x(t)$, $t \geqslant t_0$, соотношения (4.5) определяют единственную абсолютно непрерывную вектор-функцию $U_p(t)$, $t \geqslant t_0$, для которой $U_p(t) \in \Pi(W)$ при $t \geqslant t_0$ и $U_p(t_0) = U_p^0$. Поэтому определены однозначные операторы

$$U_p(t) = \Psi[t_0; U_p^0]\, x(t), \quad u(t) = W[t_0, U_p^0]\, x(t), \quad t \geqslant t_0, \qquad (4.6)$$

описывающие соответствия вход — состояние и вход — выход детерминированного преобразователя W. Эти операторы действуют в пространстве абсолютно непрерывных функций.

Аналогично теореме 2.2 доказывается

Теорема 4.2. *Операторы* (4.6) *допускают продолжение по непрерывности на множество всех непрерывных входов.*

Сохраним за продолженными операторами (4.6) те же обозначения. Для распространенной на множество всех непрерывных входов системы V остается справедлива теорема 4.1.

4.4. Свойства преобразователя W. Установим связи преобразователя W с многомерным упором [65]. Такие связи позволяют перенести многие свойства многомерного упора на преобразователь W подобно тому, как это было сделано в п. 2.4 для многомерного люфта и преобразователя M. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{c}$ —матрица и вектор из равенства (4.2).

Теорема 4.3. *На множестве непрерывных входов справедливо равенство*

$$\Psi[t_0, U_p^0]\, x(t) = \tilde{A}^{-1/2}\Gamma[t_0, \tilde{A}^{1/2}U_p^0]\, (\tilde{A}^{-1/2}\tilde{c}x(t)), \quad t \geqslant t_0,$$

где $\Gamma = \Gamma(\tilde{Z})$ — *многомерный упор с характеристикой-многогранником*

$$\tilde{Z} = \{z \in R^p: \ -\tau \leqslant \tilde{A}^{1/2}z \leqslant \tau\}.$$

Доказательство этой теоремы приведено ниже.

Как и преобразователь M, преобразователь W статичен, виброкорректен, обладает полугрупповым свойством и свойством конвергентности; операторы (4.6) удовлетворяют условию Липшица по переменным $x(t)$ и U_p^0. Выход и переменное состояние преобразователя W предельно периодичны при каждом периодическом входе. Для любого периодического входа найдется начальное состояние, которому отвечают периодические выход и переменное состояние.

Аналогично теореме 2.4 доказывается

Т е о р е м а 4.4. *Преобразователь W является ε_0-конвергентным, если и только если вектор $\tilde{A}^{-1}\bar{c}$ не имеет нулевых компонент.*

Д о к а з а т е л ь с т в а теорем 4.1 и 4.3. Докажем необходимость условий теоремы 4.1. Пусть граф G_p содержит либо путь между вершинами s^* и s_*, либо контур. Тогда (см. доказательство леммы 4.1) матрица $\tilde{A}$ вырождена. Не ограничивая общности, можно считать, что ее максимальная невырожденная подматрица $\tilde{A}_0$ расположена в левом верхнем углу матрицы $\tilde{A}$, т. е. $\tilde{A}_0 = \{\tilde{a}_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, p_1 < p$.

Пусть при $t = t_0$ состояние преобразователя W описывается вектором $\{x^0, u_1^0, \ldots, u_p^0\} \in \Omega(W)$, таким, что $|u_i^0| < \tau_i$, $i = 1, \ldots, p$. Рассмотрим вход $x(t) \equiv x^0$, $t \geqslant t_0$ и абсолютно непрерывные функции $v_i(t)$, для которых $v_i(t_0) = u_i^0$, $|v_i(t)| < \tau_i$, $t \geqslant t_0$; $i = p_1 + 1, \ldots, p$, а функции

$$v_j(t) = u_j^0 - \sum_{l=1}^{p_1} \sum_{r=p_1+1}^{p} \tilde{a}_{jl}^{(-1)}(p_1)\,\tilde{a}_{lr}\,(v_r(t) - u_r^0), \quad t \geqslant t_0;\ j = 1, \ldots, p,$$

где $\tilde{a}_{jr}^{(-1)}(p_1)$ — элементы матрицы $\tilde{A}_0^{-1}$, удовлетворяют оценкам $|v_j(t)| < \tau_j$. Вектор-функция $\{x(t), v_1(t), \ldots, v_p(t)\}$, $t \geqslant t_0$, построенная по каждому такому набору функций $v_i(t)$, $i = p_1 + 1, \ldots, p$, удовлетворяет (4.5) и начальному условию $\{x(t_0), v_1(t_0), \ldots, v_p(t_0)\} = \{x^0, u_1^0, \ldots, u_p^0\}$. Следовательно, преобразователь W не является детерминированным.

Для доказательства достаточности перепишем соотношения (4.5) в виде $\bar{c}\dot{x}(t) - \tilde{A}U_p(t) \in K_Z(U_p(t))$, $U_p(t) \in Z_0$, $t \geqslant t_0$. Поступая так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, получаем эквивалентные (4.5) соотношения

$$y(t) \in \tilde{Z}, \quad w(t) \in \dot{y}(t) + K_{\tilde{Z}}(y(t)), \quad t \geqslant t_0, \tag{4.7}$$

где $\tilde{Z} = \tilde{A}^{-1/2}Z_0$, $w(t) = \tilde{A}^{-1/2}\bar{c}\dot{x}(t)$, $y(t) = \tilde{A}^{1/2}U_p(t)$. Детерминированность преобразователя W вытекает (см. п. 3.2) из максимальной монотонности оператора $K_{\tilde{Z}}$. Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 4.3 воспользуемся тождеством $y \equiv P\,[K_Z\,(\xi)]\,y + P\,[K_Z^*\,(\xi)]\,y$, где P — введенный в п. 3.3 проектор, а $K_Z^*\,(\xi) = \{z \in R^\nu\colon (z, \quad u) \leqslant 0,\ u \in K_Z\,(\xi)\}$ — касательный конус тела Z в точке ξ, и перепишем (4.7) в виде

$$\tilde{A}^{1/2}\dot{z}(t) = P\,[K^*_{\tilde{Z}}(\tilde{A}^{1/2}z(t))]\,(\tilde{A}^{-1/2}\tilde{c}\dot{x}(t)),\ t \geqslant t_0.$$

Это уравнение описывает [65] функционирование многомерного упора с характеристикой $\tilde{Z}$. Теорема доказана.

Как и преобразователь M, преобразователь W неуправляем. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2.5, и теорема 4.4. приводят к следующему утверждению об управляемости.

Теорема 4.5. *Пусть преобразователь W обладает свойством ε_0-конвергентности. Тогда он имеет единственное вполне управляемое сужение.*

Преобразователь W в отличие от преобразователя M *фильтрующим свойством* не обладает.

5. Связь систем Λ и V

Ниже рассматриваются вопросы, связанные с обратимостью систем Λ и V; вводятся дуальные этим системам системы Λ' и V'.

5.1. Компенсаторы. Пусть фиксированы удовлетворяющие требованиям п. 1.3 граф G_0 и векторы τ, k, для которых выполнены условия теорем 2.1 и 4.1. Тогда детерминированы обе системы: $\Lambda = \Lambda\,(G_0, \tau, k)$ и $V = V\,(G_0, \tau, k)$; их пространства возможных состояний совпадают.

Пусть возможному начальному состоянию Y^0 и допустимому входу $v\,(t)$, $t \geqslant t_0$, отвечают выход $w\,(t)$, $t \geqslant t_0$, и переменное состояние системы Λ. Функции $Y\,(t)$, $u_{n+1}\,(t) = v\,(t)$, $x_{n+1}\,(t) = w\,(t)$ при $t \geqslant t_0$ удовлетворяют соотношениям (1.1)—(1.3). Поэтому $w\,(t)$ — допустимый вход на систему V, которому соответствует то же переменное состояние $Y\,(t)$ и выход $v\,(t)$. Таким образом, для каждых допустимых $u\,(t)$ и $x\,(t)$ при $t \geqslant t_0$ справедливы равенства

$$W\,[t_0, U_\nu^0]\,M\,[t_0, X_l^0]\,u\,(t) \equiv u\,(t),\ M\,[t_0, X_l^0]\,W\,[t_0, U_\nu^0]x\,(t) \equiv$$
$$\equiv x\,(t),$$

где векторы X_p^0 и U_ν^0 составлены из соответствующих компонент вектора Y^0. В этом случае [65] преобразователь W (преобразователь M) называют компенсатором преобразователя M (соответственно преобразователя W) или говорят, что системы Λ и V взаимнообратны: $\Lambda^{-1} = V$, $V^{-1} = \Lambda$.

Пусть μ и $\tilde{\mu}$ — скаляры из соотношений (2.3) и (4.3) соответственно.

Теорема 5.1. *Пусть фиксированы G_0, τ, k и пусть детерминирована система $\Lambda\,(G_0, \tau, k)$ (система $V\,(G_0, \tau, k)$). Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

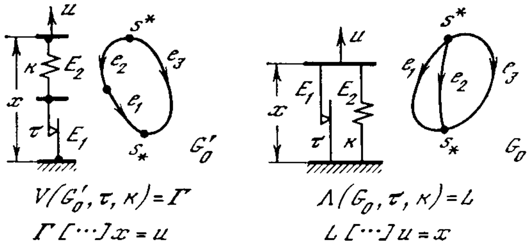


Рис. 14

1°. *Система* Λ (*соответственно система* V) *имеет компенсатор.*

2°. *Детерминирована система* V (*соответственно система* Λ).

3°. $\mu \neq 0$ (*соответственно* $\widetilde{\mu} \neq 0$).

Если детерминированы обе системы Λ *и* V, *то* $\Lambda = V^{-1}$ *и* $V = \Lambda^{-1}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы осталось показать эквивалентность утверждений 2° и 3°. Величина μ в формуле (2.3) равна нулю (см. п. 3.5), если и только если подграф G_p содержит путь между вершинами s^* и s_*. Отсюда и из теоремы 4.1 для системы Λ вытекает эквивалентность 2° и 3°.

Пусть теперь система $V = V(G_0, \tau, k)$ детерминирована, а система $\Lambda = \Lambda(G_0, \tau, k)$ недетерминирована. Тогда граф G_p содержит сечение графа G. Ограничимся случаем, когда $p < q$. Предположим, что $\beta_2 \neq 0$ (см. п. 4.1). Тогда в контур, определяемый некоторой хордой e_i, $p + 1 \leqslant i \leqslant q$, входит ветвь e_{n+1} и основное сечение, проходящее через эту ветвь, содержит хорду $e_i \notin G_p$. Но, с другой стороны, в G_p есть сечение графа $G = G_0 \setminus e_{n+1}$, и поэтому основное сечение, кроме ветви e_{n+1}, содержит лишь хорды из G_p. Таким образом, $\beta_2 = 0$ и в силу соотношений (4.4) $\widetilde{\mu} = 0$.

Пусть $\widetilde{\mu} = 0$. Тогда (см. лемму 4.1) справедливо равенство $u(t) = (\bar{f}, U_p(t))$. Поэтому в G_0 есть контур, составленный из ребер подграфа G_p и ребра e_{n+1}, т. е. граф G_p содержит путь от s^* к s_*. Теорема доказана.

5.2. Дуальные системы. Пусть граф G_0 планарен. Тогда он имеет дуальный граф G_0' (см., например, [93, 97]). Систему $\Lambda' = \Lambda(G_0', \tau, k)$ (систему $V' = V(G_0', \tau, k)$) назовем дуальной системе $\Lambda = \Lambda(G_0, \tau, k)$ (соответственно системе $V = V(G_0, \tau, k)$).

Приведем одно утверждение о дуальных системах.

Теорема 5.2. *Пусть граф* G_0 *планарен. Тогда система* $\Lambda = \Lambda(G_0, \tau, k)$ (*система* $V = V(G_0, \tau, k)$) *детерминирована, если и только если детерминирована система* V' (*система* Λ').

Если граф G_0 отвечает одномерному люфту, то детерминирована система $\Lambda(G_0, \tau, k)$, но не система $V(G_0, \tau, k)$. Граф G_0', дуальный G_0, отвечает одномерному упору, для которого детерминирована система $V(G_0', \tau, k)$, но не $\Lambda(G_0', \tau, k)$. В этом смысле преобразователи одномерные, люфт и упор дуальны (рис. 14).

Для моделей Айвена, Новожилова — Кадашевича детерминированы обе ε_0-конвергентные системы Λ и V.

6 СИСТЕМЫ С СИЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В математической теории систем успешно применяют методы нелинейного функционального анализа. Эти методы позволили получить важные результаты при анализе различных классов систем (см., например, [25, 44, 78, 99] и имеющуюся там библиографию). Наиболее полно исследованы системы, содержащие линейные звенья и нелинейные звенья с плавно изменяющимися характеристиками. В большой мере изучены системы с разрывными функциональными звеньями, когда допустима их трактовка как звеньев с многозначными выпуклыми характеристиками. В последние годы развиты методы исследования систем, содержащих различные гистерезисные нелинейности.

Специальные сложности возникают при изучении систем, содержащих звенья гистерезисной [65] природы, характеристики которых разрывны или содержат участки быстрого изменения. Нелинейности с указанными свойствами ниже называются сильными. К сильным нелинейностям относятся различные неидеальные реле, обобщенные люфты с быстро изменяющимися характеристиками и др. Для систем с сильными нелинейностями затруднено применение подходов, связанных с линеаризацией или использованием принципа сжимающих отображений; сложна проблема корректности и грубости режимов. Сходные проблемы возникают при анализе систем с разрывными функциональными нелинейностями, когда их трактовка как звеньев с многозначными выпуклыми характеристиками недопустима по физическим соображениям.

В главе изложены пути применения идей нелинейного анализа к исследованию систем с сильными нелинейностями.

1. Динамика осциллятора с сильной нелинейностью

1.1. Рассмотрим систему, которая описывается уравнением

$$\ddot{x} + x = y(t) + b \sin t, \quad y(t) \in \Gamma x(t). \tag{1.1}$$

Здесь Γ — многозначный оператор с непрерывными входами и измеримыми равномерно ограниченными в совокупности выходами, описывающий входо-выходные соответствия сильной нелинейности типа реле с гистерезисом, обобщенного люфта с насыщением и т. п. Определения этих звеньев и их простейшие свойства будут приведены в следующих пунктах; детально они исследованы в монографии [65]. Решением уравнения (1.1) считается функция с абсолютно непрерывной производной, удовлетворяющая почти всюду соотношениям (1.1). Уравнения типа (1.1) описывают ферромагнитное трение при колебаниях маятника в неоднородном магнитном поле, некоторые модели теории катастроф и др. Они интересны также как модельная система, на примере которой будут продемонстрированы особенности режимов в системах с сильными нелинейностями и методы исследования, учитывающие эти особенности.

В настоящем пункте изучается диссипативность уравнения (1.1).

Пару неубывающих функций $\gamma_-(x)$, $\gamma_+(x)$ назовем правильной, если, во-первых, существуют такие x_-, x_+ и y_-, y_+, что

$$\gamma_-(x) = \gamma_+(x) = y_-\ (x \leqslant x_-),\quad \gamma_-(x) = \gamma_+(x) = y_+,\quad x \geqslant x_+, \tag{1.2}$$

и, во-вторых, $\gamma_-(x) \leqslant \gamma_+(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_+(x) - \gamma_-(x)]\,dx = \gamma_0 > 0. \tag{1.3}$$

Оператор Г назовем согласованным с парой $\gamma_-(x)$, $\gamma_+(x)$, если при некотором $M > 0$ для функции $x(t)$, невозрастающей (неубывающей) на промежутке $[t_0, t_1]$, из соотношений $x(t_0) \geqslant M$, $x(t_1) \leqslant -M$ (соответственно $x(t_0) \leqslant -M$, $x(t_1) \geqslant M$) вытекает справедливость для каждой функции $y(t) \in \Gamma x(t)$ при почти всех $t \in [t_0, t_1]$ равенства $y(t) = \gamma_+(x(t))$ (соответственно $y(t) = \gamma_-(x(t))$). Операторы, соответствующие реле с гистерезисом, обобщенному люфту с насыщением, звену Прейзаха — Гилтая с финитным носителем меры и т. п., согласованы с правильными парами функций.

Пусть Г — оператор, согласованный с правильной парой. Для входов $x(t)$, близких к синусоидальным и имеющим достаточно большую амплитуду, петля гистерезиса, описываемая в координатах x, y уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t) \in \Gamma x(t)$, обегается против хода часовой стрелки. Поэтому [103] слагаемое $\Gamma x(t)$ в уравнении (1.1) способствует уменьшению амплитуды колебаний решения. С другой стороны, резонансное слагаемое в $b \sin t$ способствует неограниченному возрастанию амплитуды колебаний. Сравнение интенсивности этих факторов с математической точки зрения может трактоваться как вопрос о диссипативности уравнения (1.1). Напомним, что уравнение (1.1) называют диссипативным, если при некотором $\rho > 0$ для всех $r > 0$ верно соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|x(0)|+|\dot{x}(0)| \leqslant r} |x(t)| \leqslant \rho.$$

Т е о р е м а 1.1. *Пусть оператор Г согласован с правильной парой $\gamma_-(x)$, $\gamma_+(x)$. Тогда уравнение (1.1) диссипативно при доста-*

точно малых b. Уравнение (1.1) *не обладает свойством диссипативности при $b > b_1$, где*

$$b_1 = (2/\pi)(x_+ - x_-), \tag{1.4}$$

а числа x_-, x_+ определяются равенствами (1.2).

Доказательство отнесено в разд. 3. Утверждение теоремы 1.1 остается верным, если рассмотреть более общее, чем (1.1), уравнение $\ddot{x} + x = y(t) + b\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любая гладкая 2π-периодическая функция; нужно только определить число b_1 не равенством (1.4), а равенством

$$b_1 = \frac{2(x_+ - x_-)}{\pi^2}\left(\int_0^{2\pi} \varphi(t)\sin t\,dt + \int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos t\,dt\right)^{1/2}.$$

Аналогичное утверждение может быть установлено для более широких классов нелинейностей, включающих модель Прейзаха — Гилтая с нефинитным носителем меры.

В силу теоремы 1.1 влияние сильной нелинейности на динамику осциллятора даже с качественной точки зрения отличается от влияния линейного вязкого трения — вязкое трение подавляет тенденцию к неограниченному возрастанию амплитуды колебаний осциллятора под действием резонансной внешней силы любой амплитуды.

1.2. Под реле с пороговыми числами α, β, $\alpha < \beta$, понимается звено $R = R(\alpha, \beta)$ с непрерывными входами $x(t)$, $t \geqslant 0$, и кусочно постоянными выходами со значениями ± 1, множество $Rx(t)$ допустимых выходов $y(t)$, $t \geqslant 0$, которого при входе $x(t)$ удовлетворяет следующим ограничениям. Во-первых, из неравенства $x(t) \geqslant \beta$ следует равенство $y(t) = 1$, а из неравенства $x(t) \leqslant \alpha$ — равенство $y(t) = -1$. Во-вторых, из соотношений $y(t_0) = 1$, $x(t) > \alpha$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, следует равенство $y(t_1) = 1$, а из соотношений $y(t_0) = -1$, $x(t) < \beta$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— равенство $y(t_1) = -1$.

Исследуем фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} + x = y(t) + b\sin t, \quad y(t) \in R\,x(t), \tag{1.5}$$

где b — малый параметр. Из теоремы 1.1 следует

Т е о р е м а 1.2. *Фазовая траектория $\{x(t), \dot{x}(t)\}$ каждого решения уравнения* (*1.5*) *после некоторого периода установления склеена из слабо возмущенных кусков двух раскручивающихся с инкрементом $b/2$ спиралей, центры которых расположены поочередно в точках $\{-1, 0\}$ и $\{1, 0\}$; в моменты переключения с первой спирали на вторую* (*со второй на первую*) *функция $x(t)$ впервые на соответствующем этапе изменения принимает значение β* (*соответственно значение α*).

Из теоремы 1.2 следует, в частности, отсутствие при малых b уравнения (1.5) 2π-периодических решений и вообще решений с периодами, меньше чем $O(1/b)$. Отметим еще один известный результат.

Лемма 1.1. *Пусть $\alpha = -\beta$. Тогда уравнение (1.5) имеет при $b = 4/\pi$ континуум 2π-периодических решений, заданных формулой*

$$x(t) = -\alpha\cos t + (\gamma + 2/\pi)\sin t - (2/\pi)\, t\cos t + \\ + (\cos t - 1)\operatorname{sign}(t), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \ \gamma \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Если $\alpha = -\beta \geqslant 1$, то других 2π-периодических решений уравнение (1.5) *не имеет.*

1.3. Изучим 2π-периодические решения уравнения

$$\ddot{x} + x = b\sin t + y(t), \ y(t) \in R^{\square}x(t), \tag{1.7}$$

где $R^{\square} = R^{\square}(-\alpha, \alpha)$ — овыпукливание [65] реле $R(-\alpha, \alpha)$, $\alpha \geqslant 1$. Оператор $R^{\square}$ — это выпуклозначный и полунепрерывный сверху многозначный оператор, сопоставляющий непрерывному входу $x(t)$, $t \geqslant 0$, совокупность $R^{\square}x(t)$ функций $y(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющих следующим требованиям. Во-первых, $\{x(t), y(t)\} \in \Omega$, $t \geqslant 0$, где Ω — объединение прямоугольника $\{\{x, y\}: : |x| \leqslant \alpha, |y| \leqslant 1\}$ и лучей $\{\{x, -1\}: x < -1\}$, $\{\{x, 1\}: x > 1\}$. Во-вторых, если $x(t) > -1$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то функция $y(t)$ не убывает на $[t_1, t_2]$, а если $x(t) < 1$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то функция $y(t)$ не возрастает на $[t_1, t_2]$.

Введем при $0 < b < 4/\pi$ 2π-периодические функции $x_0(t;\ b)$, $x_1(t;\ b)$, $x_2(t;\ b)$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} &x_0(t; b) = -\alpha\cos t + \frac{b}{2}\sin t - \frac{b}{2}t\cos t + \\ &\quad + \frac{\pi b}{4}(\cos t - 1)\operatorname{sign} t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \\ &x_1\left(t + \frac{\pi - \tau}{2};\ b\right) = -(1+\alpha)\cos t + \left(\frac{b}{2}\sin\frac{\tau}{2}\right)\sin t - \\ &\quad - \frac{b}{2}t\cos\left(t + \frac{\pi - \tau}{2}\right) + 1 + \\ &\quad + \frac{\pi b}{4\sin(\tau/2)}(\cos t - 1)(\operatorname{sign} t + 1), \ \tau - 2\pi \leqslant t \leqslant \tau, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$x_2(t) = -x_1(t - \pi),$$

где $\tau = \tau(b)$, $0 < b < 4/\pi$, однозначно определяется соотношениями

$$\arccos\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \leqslant \tau \leqslant \pi, \ b = 2\,\frac{\alpha - 1 + (\alpha + 1)\cos\tau}{\sin(\tau/2)(\sin\tau + \tau - 2\pi)}.$$

Определим также 2π-периодические функции $y_0(t;\ b)$, $y_1(t;\ b)$, $y_2(t;\ b)$ равенствами

$$\begin{aligned} &y_0(t; b) = -\frac{\pi b}{4}\operatorname{sign} t, \ -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \\ &y_1\left(t + \frac{\pi - \tau}{2};\ b\right) = 1 - \left(\frac{\pi b}{4}\sin\frac{\tau}{2}\right)(1 + \operatorname{sign} t), \ \tau - 2\pi \leqslant t \leqslant \tau, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$y_2(t;\ b) = -y_1(t - \pi).$$

Л е м м а 1.2. *Справедливы следующие утверждения. При* $b > 4/\pi$ *уравнение* (1.7) *не имеет* 2π*-периодических решений. При* $b = 4/\pi$ *уравнение* (1.7) *имеет континуум* 2π*-периодических решений, определенных формулой* (1.6), *и не имеет других* 2π*-периодических решений. При* $0 < b < 4/\pi$ *уравнение* (1.7) *имеет ровно три* 2π*-периодических решения, определенных формулами* (1.8); *соответствующие выходы преобразователя* $R^{\square}$ *определяются формулами* (1.9).

1.4. Рассмотрим вопрос о структуре множества 2π-периодических решений уравнения

$$\ddot{x} + x = b \sin t + y(t), \quad y(t) \in \Gamma x(t), \tag{1.10}$$

при близких к $R^{\square}$ операторах Г. Как и в п. 1.1, предполагается, что выходы оператора Г при непрерывных входах $x(t)$, $t \geqslant 0$, измеримы и равномерно ограничены в совокупности.

Будем употреблять для суммируемых на $[0, 2\pi]$ функций $y(t)$ и для имеющих на $[0, 2\pi]$ абсолютно непрерывную производную функций $x(t)$ обычные обозначения

$$\| y(t) \|_{L_1} = \int_0^{2\pi} |y(t)|\, dt, \quad \| x(t) \|_{W_1^2} = \| x(t) \|_{L_1} + \| \ddot{x}(t) \|_{L_1}.$$

При каждом $r > 0$ введем уклонение $\chi = \chi(\Gamma, R^{\square}; r)$ оператора Г от оператора $R^{\square}$ равенством

$$\chi = \sup_{\substack{\|x(t)\|_{W_1^2} \leqslant r \\ y(t) \in \Gamma x(t)}} \; \inf_{\substack{\|x_1(t)\|_{W_1^2} < \infty \\ y_1(t) \in R^{\square} x_1(t)}} \{ \| x(t) - x_1(t) \|_{W_1^2} + \| y(t) - y_1(t) \|_{L_1} \}.$$

Пусть T_0 — множество троек $\{b, x(t), y(t)\}$, удовлетворяющих соотношениям (1.7) и равенствам $x(0) = x(2\pi)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$.

Т е о р е м а 1.3. *Каждым* $\varepsilon > 0$, $r > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$, *что из* $\chi(\Gamma, R^{\square}; r) < \delta$ *вытекает справедливость для каждого* 2π*-периодического при* $t \geqslant 0$ *решения уравнения* (1.10) *неравенства* $| b - b_1 | + \| x(t) - x_1(t) \|_{W_1^2} + \| y(t) - y_1(t) \|_{L_1} < \varepsilon$ *для некоторой тройки* $\{b_1, x_1(t), y_1(t)\} \in T_0$.

Теорема 1.3 проста, мы не останавливаемся на ее доказательстве.

Центральным для нас является вопрос о существовании 2π-периодических решений уравнения (1.10), близких к 2π-периодическим решениям уравнения (1.7). Ясно, что при $b = 0$ близких решений может не быть. При $b > 0$ вопрос о корректности 2π-периодических решений уравнения (1.7) удалось решить положительно при естественных дополнительных предположениях о структуре оператора Г.

Многие технические, физические и т. п. объекты удается трактовать как системы P с банаховым пространством состояний Ω, операторами вход — состояние $Q[\omega_0]$, $\omega_0 \in \Omega$, и отображениями состояние — выход Φ: $\Omega \to R^1$. Операторы $Q[\omega_0]$, $\omega_0 \in \Omega$, сопоставляют, как обычно, непрерывному входу $x(t)$, $t \geqslant 0$, переменное состояние $\omega(t) = Q[\omega_0]\,x(t)$; мы не требуем обязательного выполнения равенства $\omega(0) = \omega_0$. При каждом $\omega_0 \in \Omega$ обозначим через $P[\omega_0]$ отображение вход — выход, заданное равенством $P[\omega_0]\,x(t) = \Phi(Q[\omega_0]\,x(t))$, а через $\overline{P}$ — многозначный оператор, сопоставляющий входу $x(t)$ множество $\overline{P}x(t) = \{P[\omega_0]\,x(t)\colon \omega_0 \in \Omega\}$.

Систему P называют автономной, если при любых $t_0 > 0$, $\omega_0 \in \Omega$ верно равенство $Q[\omega_1]\,v(t - t_0) = Q[\omega_0]\,x(t)$, где $\omega_1 = Q[\omega_0]x(t)$, $v(t) = x(t + t_0)$. Систему P называют физически реализуемой, если из $x(t) = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, следует при каждом $\omega_0 \in \Omega$ равенство $Q[\omega_0]\,x(t) = Q[\omega_0]v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Автономную и физически реализуемую систему P назовем нормальной, если выполнены следующие три условия. Во-первых, отображение $x(t) \to Q[\omega_0]x(t)$ непрерывно по ω_0 и удовлетворяет условию Липшица по входу $x(t)$, трактуемому как элемент пространства $C(\tau)$ непрерывных на $[0, \tau]$ скалярных функций. Во-вторых, отображение Φ удовлетворяет условию Липшица и равномерно ограничено. В-третьих, каждому $r > 0$ отвечает такое компактное множество $K(r) \subset \Omega$, что при любых $\omega_0 \in \Omega$, $\tau > 0$, из $\|x(t)\|_{C(\tau)} \leqslant r$ следует включение $Q[\omega_0]x(\tau) \in K(r)$.

Т е о р е м а 1.4. *Любым $\varepsilon > 0$, $0 < b_1 < b_2 < 4/\pi$ отвечают $\delta > 0$, $r_0 > 0$, обладающие следующим свойством. Для нормальной системы P из неравенства $\chi(R^{\square}, \overline{P}; r_0) < \delta$ следует, что уравнение*

$$\ddot{x} + x = y(t) + b \sin t, \quad y(t) \in \overline{P}\,x(t), \tag{1.11}$$

имеет при каждом $b \in [b_1, b_2]$ по крайней мере три решения $z_0(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$, для которых $\|z_i(t) - x_i(t)\|_{W_1^2} < \varepsilon$, а функции $x_i(t)$ определяются формулами (1.9).

Т е о р е м а 1.5. *Любым $\varepsilon > 0$ и $1 < r_1 < r_2 < \infty$ отвечают $\delta > 0$ и $r_0 > 0$, обладающие следующим свойством. Для нормальной системы P из неравенства $\chi(\overline{P}, R^{\square}; r_0) < \delta$ следует, что уравнение* (1.11) *имеет на каждой сфере $\|x(t)\|_{C(2\pi)} = r \in [r_1, r_2]$ при некотором $b \in [4/\pi - \varepsilon, 4/\pi + \varepsilon]$ по крайней мере одно 2π-периодическое решение.*

Схема доказательства теоремы 1.4 изложена в разд. 3; теорема 1.5 доказывается аналогично. Аналоги теорем 1.3—1.5 верны для более сложных уравнений с сильными нелинейностями; более громоздким становится лишь предварительное изучение вспомогательного предельного уравнения, аналогичного уравнению (1.7).

Характерной особенностью решений, существование которых утверждается в теореме 1.4, является то, что они не являются близкими режимам, реализуемым в «идеальной» релейной системе (1.5); это роднит их с интенсивно изучаемыми в настоящее время (см., например, [7]) «французскими утками». Еще больше на «французских уток» похожи периодические решения, возникающие при анализе колебаний осциллятора с сильной нелинейностью, возникающей при описании известного S-эффекта [65]. Соответствующий анализ может быть проведен по изложенной выше схеме.

1.5. Рассмотрим примеры нелинейных звеньев, для анализа уравнений с которыми применимы сформулированные выше результаты.

а. Обобщенный люфт. Построим по правильной паре (см. п. 1.1) функций $\gamma_-(x)$, $\gamma_+(x)$, удовлетворяющих условию Липшица, систему $L = L(\gamma_-, \gamma_+)$ с множеством $\Omega = R^1$ допустимых состояний и отображение состояние — выход $\Phi(\omega) \equiv \omega$. Непрерывную функцию $\omega(t) = Q[\omega_0]\,x(t)$ определим так, что, во-первых,

$$\omega(0) = \begin{cases} \gamma_-(\omega_0), & \text{если } \omega_0 < \gamma_-(x(0)), \\ \omega_0, & \text{если } \gamma_-(x(0)) \leqslant \omega_0 \leqslant \gamma_+(x(0)), \\ \gamma_+(\omega_0), & \text{если } \omega_0 > \gamma_+(x(0)); \end{cases}$$

во-вторых, верны неравенства $\gamma_-(x(t) \leqslant \omega(t) \leqslant \gamma_+(x(t))$, $t \geqslant 0$, и, в-третьих, из $\gamma_-(x(t)) \leqslant \omega(t_0) \leqslant \gamma_+(x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, следует равенство $\omega(t) = \omega(t_0)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Описанная система эквивалентна обобщенному люфту [65] с характеристиками $\gamma_-(x)$, $\gamma_+(x)$. При описании магнитных сердечников употребляются обобщенные люфты, отвечающие функциям $\gamma_-(x)$, $\gamma_+(x)$, графики которых «близки» к графикам функций $\operatorname{sign}(x-1)$, $\operatorname{sign}(x+1)$. Теоремы 1.3—1.5 позволяют изучить множество 2π-периодических решений соответствующих уравнений (1.11).

б. Преобразователи Прейзаха — Гилтая. Множество выходов неидеального реле $R(\alpha, \beta)$ при входе $x(t)$, $t \geqslant 0$, состоит не более чем из двух функций, одна из которых всюду не превосходит другую. Обозначим меньшую из них через $R[0; \alpha, \beta]\,x(t)$, а большую — через $R[1; \alpha, \beta]\,x(t)$. Пусть на полуплоскости $\alpha \leqslant \beta$ задана нормированная мера μ с непрерывной плотностью относительно лебеговской меры, причем носитель меры μ лежит в треугольнике $-\rho \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \rho$. Обозначим через Π проектор в пространстве $\Omega = L_2(0, 2\rho)$ на выпуклое и замкнутое множество F функций $\omega(r)$, удовлетворяющих условию Липшица с постоянной 1.

Будем трактовать функции $\omega = \omega(r)$ как состояния некоторого преобразователя $\Gamma = \Gamma(\mu)$. Отображение состояние — выход определим формулой $\Phi(\omega(r)) = 2\mu\,\{(\alpha, \beta)\colon \alpha + \beta \leqslant \omega(\beta - \alpha)\} - 1$. Переменное состояние $\omega(t; r)$, $t \geqslant 0$, отвечающее непрерывному входу $x(t)$, $t \geqslant 0$, и состоянию $\omega_0(r)$, определим равенством

$$\omega(t; r) = \sup\{r_1\colon R\,[a(r, r_1); (r_1 - r)/2, (r_1 + r)/2]\,x(t) = 1\},$$

где $a(r, r_1) = 0$ при $r_1 < \Pi\omega_0(r)$ и $a_0(r, r_1) = 1$ при $r > \Pi\omega_0(r)$.

Описанный преобразователь эквивалентен преобразователю

$2S(\mu) - 1$,где $S(\mu)$ — максимальное почти управляемое сужение преобразователя Прейзаха — Гилтая, порожденного мерой μ. Приведенное описание отличается от изложенного в книге [65], чтобы обеспечить нормальность системы. В теории ферромагнетизма используют (см., например, [110]) системы $\Gamma(\mu)$, отвечающие (после нормировки) мерам μ, удовлетворяющим условию $\varepsilon > \mu\{\{\alpha, \beta\}: |\alpha + 1|, |\beta - 1| < \varepsilon\}$, где ε — малый параметр. Для анализа соответствующего уравнения (1.10) применимы теоремы 1.3 — 1.5.

2. Корректные режимы в системах с сильными нелинейностями

2.1. В разд. 1 описана ситуация, когда все периодические режимы в «безобидной» на первый взгляд системе являются точками функциональных пространств, в окрестности которых (точек) описывающие нелинейность операторы изменяются весьма быстро. В этой ситуации периодические режимы, как правило, либо неустойчивы, либо имеют «сверхмалую» зоны захвата (см., например, [36]); форма периодического решения зависит от «происхождения» сильной нелинейности: системы с обобщенным люфтом и S-преобразователем приводят к совершенно разным периодическим режимам. Представляет интерес выделение классов систем с сильными нелинейностями, в которых заведомо есть корректные (не зависящие от «происхождения» нелинейности, имеющие достаточно большие зоны захвата и т. д.) периодические режимы. Достаточно широкие классы таких систем удалось выделить при помощи приводимых ниже теорем о неподвижных точках монотонных операторов.

2.2. Обозначим через E банахово пространство с нормальным конусом K (см., например, [61]). Соотношение $y - x \in K$ запишем в виде $x \leqslant y$ или $y \geqslant x$. Если $x_-, x_+ \in E$ и $x_- \leqslant x_+$, то множество $\langle x_-, x_+\rangle = \{z\colon x_- \leqslant z \leqslant x_+\}$ назовем конусным отрезком. Пусть фиксирован ненулевой элемент $u_0 \in K$. Будем писать $y > x \pmod{u_0}$, если при малых $\gamma > 0$ верно неравенство $y \geqslant x + \gamma u_0$.

Пусть нелинейный (возможно, разрывный) оператор A действует в E и монотонен (из $x \leqslant y$ следует $Ax \leqslant Ay$). Неподвижную точку x_* оператора A назовем u_0-корректной, если в каждой ее окрестности найдутся точки x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям $x_1 \leqslant x_* \leqslant x_2$, $x_1 < Ax_2 \pmod{u_0}$ и $x_2 > Ax_2 \pmod{u_0}$.

Приведем простое утверждение, демонстрирующее роль u_0-корректных точек. Оператор A_1 назовем δ-близким к A на конусном отрезке $\langle x_-, x_+\rangle$, если

$$A(x - \delta u_0) - \delta u_0 \leqslant A_1 x \leqslant A(x + \delta u_0) + \delta u_0.$$

Из обычной теоремы Биркгофа (см., например, [61]), вытекает

Лемма 2.1. *Пусть неподвижная точка $x_* \in \langle x_-, x_+\rangle$ оператора A является u_0-корректной. Тогда каждому $\varepsilon > 0$ отве-*

чает такое $\delta > 0$, что любой δ-близкий к A компактный и монотонный оператор A_1 имеет по крайней мере одну неподвижную точку x_{**}, удовлетворяющую неравенству $\| x_{**} - x_* \| < \varepsilon$.

Основной результат параграфа можно грубо сформулировать следующим образом. Монотонный оператор имеет по крайней мере одну u_0 -корректную неподвижную точку, если он имеет не более чем счетное множество неподвижных точек.

2.3. Точку x_* назовем u_0-полукорректной для оператора A, если она удовлетворяет следующим двум требованиям. Во-первых, в любой окрестности точки x_* существует точка y, для которой $Ay > y \pmod{u_0}$, $x_* \geqslant Ay$. Во-вторых, можно указать элемент w, удовлетворяющий неравенствам $w > x_* \pmod{u_0}$, $w \geqslant Aw$, и число $\varepsilon > 0$, такие, что из соотношений $Az > z \pmod{u_0}$, $w \geqslant z$, $\| z - x_* \| < \varepsilon$ следует неравенство $x_* \geqslant z$.

Теорема 2.1 [82]. *Пусть A — монотонный и компактный оператор. Пусть справедливы неравенства $Ax_- > x_- \pmod{u_0}$, $Ax_+ < x_+ \pmod{u_0}$, $x_- \leqslant x_+$. Тогда существует u_0-полукорректная точка $x_* \in \langle x_-, \; x_+ \rangle$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть операторы $A_n x = Ax - (1/n)\, u_0$, $n = 1, 2, \ldots$ Операторы A_n монотонные и компактные. Кроме того, при больших n они преобразуют конусной отрезок $\langle x_-, x_+ \rangle$ в себя. Следовательно, в силу теоремы Биркгофа оператор A_n имеет в конусном отрезке $\langle x_-, x_+ \rangle$ наибольшую неподвижную точку x_n. Вследствие компактности A последовательность x_n сходится к некоторой точке $x_* \in \langle x_-, x_+ \rangle$. Точка x_* будет u_0-полукорректной для оператора A.

Примеры показывают, что u_0-полукорректная точка может не быть неподвижной точкой оператора A. Однако при естественных дополнительных предположениях u_0-полукорректная точка не только является неподвижной, но и обладает полезными дополнительными свойствами. Нам понадобятся некоторые определения. Оператор A называют u_0-фокусирующим (на конусном отрезке $\langle x_-, x_+ \rangle$), если существует такая положительная непрерывная функция $\gamma(\rho)$, $\rho > 0$, что из неравенства $x_- \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_+$ следует неравенство $Ax_2 - Ax_1 \geqslant \gamma(\| x_1 - x_2 \|)\, u_0$. Монотонный оператор A назовем u_0-правильным, если при каждом $x \in E$ справедливо равенство

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \{y : y = Az, \; \| z - x \| \leqslant 1/n\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{y : y = Az, \; x - (1/n)\, u_0 \leqslant z \leqslant x + (1/n)\, u_0\}.$$

Свойством u_0-правильности обладает каждый монотонный оператор, если K телесен и u_0 — его внутренний элемент; u_0-правильны многие интегральные операторы в пространствах L_p.

Теорема 2.2. *Пусть оператор A является u_0-фокусирующим и u_0-правильным. Тогда каждая его u_0-полукорректная точка является неподвижной точкой и точкой непрерывности оператора A.*

Эта теорема очевидна. Сформулируем основной результат раздела.

Теорема 2.3. *Пусть u_0-фокусирующий и u_0-правильный* *оператор A компактен. Пусть в достаточно малой окрестности его u_0-полукорректной точки x_* лежит не более счетного числа других u_0-полукорректных точек. Тогда x_* — это u_0-корректная неподвижная точка оператора A.*

Доказательство см. в разд. 3.

2.4. Перейдем к примеру. Пусть $R = R(\alpha, \beta)$ — реле, описанное в п. 1.3. Рассмотрим задачу о периодических решениях уравнения

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + \eta x = y(t) + \varphi(t), \; y(t) \in Rx(t), \tag{2.1}$$

где $\varphi(t)$ — вещественная аналитическая 2π-периодическая функция и выполнено неравенство $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\xi^2 > 4\eta$. Анализ задачи разобьем на несколько этапов.

а. Переход к интегральному уравнению. Введем оператор R_1, сопоставляющий непрерывному 2π-периодическому входу $x(t)$ наибольшую 2π-периодическую функцию из множества $Rx(t)$. Оператор R_1 обладает свойством монотонности по отношению к конусу функций с неотрицательными значениями. Пусть $\eta_1 \in (0, 1)$ *и* $\xi^2 > 4(\eta + \eta_1)$. Обозначим $G(\tau)$ импульсно-частотную характеристику (см., например, [25]) звена с передаточной функцией $W(p) = 1/(p^2 + \xi p + \eta + \eta_1)$. Функция $G(\tau)$ строго положительна. Рассмотрим действующий в пространстве $C = C(\tau)$ оператор

$$Ax(t) = \int_0^{2\pi} G(t-s)\,[R_1x(s) + \eta_1 x(s) + \varphi(s)]\,ds. \tag{2.2}$$

Обозначим через $u_0 = u_0(t)$ функцию из C, тождественно равную единице. Из определений вытекает

Лемма 2.2. *Оператор* (2.2) *монотонен, компактен, u_0-фокусирующий и u_0-правильный. Каждое решение операторного уравнения $x = Ax$, $x \in C$, является 2π-периодическим решением уравнения* (2.1).

б. Выделение u_0-полукорректных точек и исследование их свойств. Из неравенства $\eta_1 < 1$ следуют при достаточно большом M неравенства $Ax_- > x_- \pmod{u_0}$, $Ax_+ < x_+ \pmod{u_0}$, где $x_- = -Mu_0$, $x_+ = Mu_0$. Поэтому из теорем 2.1, 2.2 и леммы 2.2 следует

Лемма 2.3. *Оператор A имеет u_0-полукорректные точки; каждая из этих точек является 2π-периодическим решением уравнения* (2.1) *и точкой непрерывности оператора A.*

Элементарный дополнительный анализ позволяет установить следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для каждой u_0-полукорректной точки $x_*(t)$ как из соотношений $x(t-0) = \alpha + 0$, $R_1x(t_0) = 1$, так и из соотношений $x(t-0) = \beta - 0$, $R_1(x(t_0) - 0) = -1$ следует неравенство $|\dot{x}(t)| > \gamma$.*

в. А н а л и з и з о л и р о в а н н о с т и u_0-п о л у к о р р е к т н ы х т о ч е к. Пусть $x_*(t)$ — некоторая u_0-полукорректная неподвижная точка оператора (2.2). Без ограничения общности можно считать выполненными неравенства $x_*(0) \neq \alpha$, $x_*(0) \neq \beta$. Обозначим через R_2 оператор, сопоставляющий каждому близкому к $x_*(t)$ входу $x(t)$ единственную функцию, удовлетворяющую соотношениям $y(t) \in R\,x(t)$, $y(0) = R_1x(0)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + hx = y(t) + \varphi(t),\ y(t) = R_2x(t). \tag{2.3}$$

В окрестности точки $\{x_*(0),\ \dot{x}_*(0)\}$ определен соответствующий оператор сдвига П за время 2π. Непосредственно проверяется, что произведение собственных чисел линеаризации этого оператора сдвига равно $e^{-\xi\pi} < 1$. Поэтому линеаризация отображения $F: \{x, \dot{x}\} \to \Pi\{x, \dot{x}\} - \{x, \dot{x}\}$ имеет в точке $\{x_*(0),\ \dot{x}_*(0)\}$ не более чем однократное вырождение. С другой стороны, в силу леммы 2.4 отображение F аналитично в окрестности точки $\{x_*(0),$ $\dot{x}_*(0)\}$. Поэтому множество решений уравнения $F(x, \dot{x}) = \{x, \dot{x}\}$ в достаточно малой окрестности точки $\{x_*(0),\ \dot{x}_*(0)\}$ является аналитической кривой без вырождений или состоит из единственной точки $\{x_*(0),\ \dot{x}_*(0)\}$. Первый случай противоречит u_0-полукорректности неподвижной точки u_0. Таким образом, доказана

Л е м м а 2.5. *Каждая u_0-полукорректная точка оператора A является изолированной u_0-корректной точкой оператора A.*

г. А н а л и з у с т о й ч и в о с т и u_0-к о р р е к т н ы х р е ш е н и й. С помощью конструкций, использованных в работе [68], доказывается

Л е м м а 2.6. *Каждая u_0-корректная неподвижная точка оператора* (2.2) *является устойчивым по Ляпунову решением уравнения* (2.3).

д. П р и б л и ж е н н о е п о с т р о е н и е u_0-к о р р е к т н ы х р е ш е н и й. Зафиксируем строго убывающую и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел σ_k. Определим операторы $A_kx(t) = Ax(t) + (-1)^k\sigma_ku_0(t)$, $x(t) \in C$. Построим последовательность функций $v_n(t)$ по следующему правилу. Пусть $v_0(t)$ — такая функция из C, что $Av_0(t) \leqslant v_0(t)$. Если уже найдена функция $v_{k-1}(t)$, то определим $v_k(t)$ как первую функцию в последовательности $w_j(t) = A_kw_{j-1}(t)$, $w_0(t) = v_{k-1}(t)$, для которой справедливо соотношение $(-1)^k[A_kw_j(t) - w_j(t)] \leqslant$ $\leqslant (\sigma_k - \sigma_{k+2})\,u_0(t)$. Последовательность $v_n(t)$ называется построенной с помощью челночных итераций по начальному приближению $v_0(t)$ и последовательности σ_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Из леммы 2.5 и конструкций, использованных в работе [67], следует

Л е м м а 2.7. *Каждая построенная с помощью челночных итераций последовательность $v_n(t)$ сходится к u_0-корректной неподвижной точке оператора A. При этом выполнены неравенства* $v_{2k-1} \leqslant v_{2k+1}$, $v_{2k} \leqslant v_{2k-2}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Метод челночных итераций удобен для реализации на ЭВМ.

е. В ы в о д ы. Из результатов, полученных в пунктах *а — д*, вытекает

Т е о р е м а 2.4. *Оператор* (2.2) *имеет u_0-корректные неподвижные точки, для приближенного построения которых применим метод челночных итераций. Каждая u_0-корректная неподвижная точка оператора* (2.2) *является 2π-периодическим устойчивым по Ляпунову решением уравнения* (2.1).

Из теоремы 2.4. и леммы 2.1 следует, что близкие к $x_*(t)$ периодические решения есть у уравнений вида

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + \eta x = y(t) + \varphi(t),\ y(t) \in \bar{P}x(t),$$

где $\bar{P}$ — многозначный оператор, порожденный близкой к $R^{\square}(\alpha, \beta)$ монотонной системой (типа обобщенного люфта, звена Прейзаха — Гилтая, S-преобразователя и т. п.). Решения возмущенного уравнения, близкие к u_0-корректным неподвижным точкам оператора (2.2), обладают естественными модификациями свойства устойчивости по Ляпунову и различных свойств корректности. Разумеется, у возмущенного уравнения, как и у уравнения (2.1), могут быть периодические режимы, не являющиеся u_0-корректными неподвижными точками соответствующего интегрооператорного уравнения.

Изложенная схема исследования применима для анализа и других дифференциально операторных и интегрооператорных уравнений с сильными нелинейностями, обладающими свойствами монотонности.

3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Установим сначала диссипативность уравнения (1.1) при малых b. В полярных координатах уравнение (1.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\dot{r} = -y(t)\sin\varphi - b\sin t\sin\varphi,\\ &\dot{\varphi} = 1 + (1/r)\,(y(t)\cos\varphi + b\sin t\cos\varphi), \qquad (3.1)\\ &y(t) \in \Gamma x(t),\ \ x(t) = r(t)\cos[\varphi(t)]. \end{aligned}$$

В переменных r, $\psi = t - \varphi$ система (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} &\dot{r} = -y(t)\sin(t+\psi) - b\sin t\sin(t+\psi),\\ &\dot{\psi} = (1/r)\,[y(t)\cos(t+\psi) + b\sin t\cos(t+\psi)], \qquad (3.2)\\ &y(t) \in \Gamma x(t),\ x(t) = r(t)\cos[t+\psi(t)]. \end{aligned}$$

Ниже будут встречаться функции $x(t)$, для которых все функции из множества $\Gamma x(t)$ совпадают на некотором промежутке $[t_0, T]$ с одной и той же функцией $z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. В этом случае будем употреблять обозначение $z(t) = \Gamma_0 x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

При фиксированном T и достаточно большом r_0 решение уравнения (3.2) при начальных условиях

$$r(t_0) = r_0,\ \psi(t_0) = \psi_0 \qquad (3.3)$$

единственно на промежутке $[t_0, T]$ и удовлетворяет уравнениям

$$\dot r = -\Gamma_0 x(t)\sin(t+\psi) - b\sin t\sin(t+\psi),$$
$$\dot\psi = (1/r)(\Gamma_0 x(t)\cos(t+\psi) + b\sin t\cos(t+\psi)), \qquad (3.4)$$
$$x(t) = r(t)\cos[t+\psi(t)].$$

Решение задачи (3.4), (3.3) обозначим через $r(t, t_0, r_0, \psi_0)$, $\psi(t, t_0, r_0, \psi_0)$, $t \in [t_0, T]$. Введем функции

$$f_1(r, \psi) = -\gamma_0/2\pi r + (b/2)\cos\psi,$$
$$g_1(r, \psi) = (1/2r)(b_1 + b\sin\psi),$$

где γ_0 и b_1 определяются равенствами (1.3) и (1.4). Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\dot r = f_1(r, \psi), \quad \dot\psi = g_1(r, \psi). \qquad (3.5)$$

Решения уравнений (3.5) при начальном условии (3.3) обозначим через $r_1(t, t_0, r_0, \psi_0)$, $\psi_1(t, t_0, r_0, \psi_0)$. Как показывает простая выкладка, существует такое $\gamma_1 > 0$, что при достаточно большом r_0 верна оценка

$$|\psi_1(t_0+2\pi, t_0, r_0, \psi_0) - \psi(t_0+2\pi, t_0, r_0, \psi_0)| < \gamma_1/r_0^2. \qquad (3.6)$$

Поэтому при любом $\gamma_2 > 0$ найдется такое $b_2 > 0$, что при $b < b_2$ и при достаточно большом r_0 верно соотношение

$$|r_1(t_1, t_0, r_0, \psi_0) - r(t_1, t_0, r_0, \psi_0)| < \gamma_2/r_0, \qquad (3.7)$$

где $t_1 = 2\pi - (b_1 + b\sin\psi_0)/r_0$. Кроме того, из (3.6) и определения диссипативности следует неравенство

$$|\psi_1(t_1, t_0, r_0, \psi_0) - \psi(t_1, t_0, r_0, \psi_0)| < \gamma_3/r_0^2, \qquad (3.8)$$

где γ_3 — положительная константа.

Положим $E(r, \psi) = r(b_1 + b\sin\psi)^{-1}$. Пусть $\dot E(r, \psi)$ — производная функции $E(r, \psi)$ в силу системы (3.5). Так как $\dot E(r, \psi) = -\gamma_0/(2\pi r)$, то

$$E(r_1(t_1, t_0, r_0, \psi_0), \psi_1(t_1, t_0, r_0, \psi_0)) \leqslant E(r_0, \psi_0) - (\gamma_0 t_1)/(2\pi r_0). \qquad (3.9)$$

Из (3.7)—(3.9) следует при малых b и больших r_0 неравенство

$$E(r(t_1, t_0, r_0, \psi_0), \psi(t_1, t_0, r_0, \psi_0)) \leqslant E(r_0, \psi_0) - (\gamma_0 t_1)/(4\pi r_0). \qquad (3.10)$$

Значит, уравнение (1.1) диссипативно. Первое утверждение теоремы 1.1 доказано.

Для доказательства недиссипативности уравнения (1.1) при $b > b_1$ достаточно проверить, что векторное поле сдвига вдоль траекторий уравнения (1.1) за время 2π имеет на сферах достаточно большого радиуса с центром в начале координат нулевое вращение (см., например, [64]). В силу указанных выше оценок для этого, в свою очередь, достаточно установить такое же свойство уравнения, заданного в координатах r, ψ соотношениями (3.5),— это проверяется непосредственно.

3.2. Схема доказательства теоремы 1.4. В условиях теоремы при любых $\omega_0 \in \Omega$, $x_0 \in R^1$, $p_0 \in R^1$ определенно, единственно вправо и нелокально продолжимо вправо решение задачи

$$\ddot{x} + x = P[\omega_0]\, x(t) + b \sin t,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = p_0. \qquad (3.11)$$

Производную решения $x(t, x_0, p_0, \omega_0)$ обозначим через $p(t, x_0, p_0, \omega_0)$, а соответствующую функцию $Q[\omega_0]\, x(t, x_0, p_0, \omega_0)$ — $\omega(t, x_0, p_0, \omega_0)$. Рассмотрим в пространстве $E = R^1 \times R^1 \times \Omega$ отображение A, сопоставляющее тройке $\{x_0, p_0, \omega_0\}$ тройку $A\{x_0, p_0, \omega_0\} = \{x(2\pi, x_0, p_0, \omega_0), p(2\pi, x_0, p_0, \omega_0), \omega(2\pi, x_0, p_0, \omega_0)\}$. Неподвижные точки отображения A определяют начальные значения 2π-периодических решений уравнения (3.11).

Положим $D(\varepsilon, r, x_0, p_0) = \{\{x, p, \omega\};\ |x - x_0| < \varepsilon,\ |p - p_0| < \varepsilon,\ \|\omega\| < r\}$, где $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $x_0 \in R^1$, $p_0 \in R^1$. Из формул (1.10) и теоремы 1.3 следует, что при достаточно большом r каждому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta = \delta(\varepsilon)$, обладающее следующим свойством. Если система P удовлетворяет оценке $\chi(\overline{P}, R^{\sqsupset}, r) < \delta$, то при $b \in [b_1, b_2]$ на границе каждого из множеств

$$D_i(\varepsilon, r, b) = D(\varepsilon, r, x_i(0, b), \dot{x}_i(0, b)),\ i = 0, 1, 2,$$

нет неподвижных точек оператора A.

Для доказательства теоремы остается установить соотношения $\gamma_0(b) = -1$, $\gamma_1(b) = 1$, $\gamma_2(b) = 1$, где $\gamma_i(b)$ — вращение векторного поля $I - A$ на границе ∂D_i области D_i (см. [64]). Последние равенства достаточно установить при $b = b_1$. Для этого могут быть использованы различные технические приемы. Ограничимся нестрогим, но легко формализуемым объяснением того, почему при малых b_1 верны равенства $\gamma_0(b_1) = -1$, $\gamma_1(b_1) = 1$, $\gamma_2(b_1) = 1$.

Из теоремы 1.1 следует равенство $\gamma_0(b_1) + \gamma_1(b_1) + \gamma_2(b_1) = 1$. Поэтому остается установить соотношения

$$\gamma_0(b_1) + \gamma_1(b_1) = 0,\ \gamma_0(b_1) + \gamma_2(b_1) = 0. \qquad (3.12)$$

Остановимся только на первом из них.

Рассмотрим семейство задач

$$\ddot{x} + x = y(t) + b_1 \sin t + \lambda,\ y(t) \in \overline{P}\, x(t),$$

где λ — положительный параметр. Если оператор $\overline{P}$ близок к $R^{\sqsupset}$, то решения последней задачи близки к решениям идеализированной задачи

$$\ddot{x} + x = y(t) + b_1 \sin t + \lambda, \qquad y(t) \in R^{\sqsupset} x(t). \qquad (3.13)$$

Периодические решения уравнения (3.13) при малых b_1 устроены следующим образом. Существуют два изолированных и в соответствующем смысле непрерывно эволюционирующих по λ решения $x_0(t, b_1, \lambda)$ и $x_1(t, b_1, \lambda)$. Эти решения определены при $\lambda \in [0, 1 - \mu(b_1)]$, где $\mu(b_1) \to 0$ при $b_1 \to 0$, и совпадают при $\lambda = 0$ с функциями $x_0(t, b_1)$ и $x_1(t, b_1)$. Обе функции $x_0(t, b_1, \lambda)$ и $x_1(t, b_1, \lambda)$ при малых b_1 и $\lambda = 1 - \mu(b_1)$ близки к некоторой функции $x_1(t)$, причем при $\lambda > 1$ в окрестности функции $x_1(t)$ нет 2π-периодических решений задачи (3.13). Поскольку изолированные решения $x_0(t, b_1, \lambda)$ и $x_1(t, b_1, \lambda)$ «аннигилировали» при λ, приблизительно равном 1, то близкие к ним множества 2π-периодических решений невозмущенной задачи имеют противоположные индексы при всех $\lambda \in [0, 1 - \mu(b_1)]$. Отсюда вытекает первое из соотношений (3.12).

Удобной особенностью этой схемы рассуждений является то, что при ее реализации не приходится вводить индексов 2π-периодических решений идеализированной задачи (1.7).

3.3. Доказательство теоремы 2.3. Достаточно при каждом $\varepsilon > 0$ построить точку $y_* = y_*(\varepsilon)$, для которой

$$y_* \geqslant x_*, \; \| y_* - x_* \| < \varepsilon, \; A_* < y_* \, (\mathrm{mod}\, u_0). \tag{3.14}$$

Пусть P_1 — это замкнутая выпуклая оболочка множества $A\langle x_*, w\rangle$, где w — элемент, фигурирующий в определении u_0-полукорректной точки. Рассмотрим, далее, выпуклое компактное множество

$$P_2 = \{x \in \langle x_*, w\rangle \colon x = y + \mu u_0 \; (\mu \geqslant 0, \; y \in P_1)\}. \tag{3.15}$$

Построим такую положительную непрерывную функцию $\gamma_0(\rho)$, $\rho > 0$, чтобы выполнялись оценки $x - x_* \geqslant \gamma_0(\| x - x_* \|) \, u_0$, $x \in P_2$, $x \neq x_*$. Тогда существует такое $\sigma > 0$, что из соотношений $x \in P_2$, $\varphi \in K^*$, $\varphi(u_0) = 1$, $\varphi(x) - \varphi(x_*) < \sigma$ следует неравенство $\| x - x_* \| \leqslant \varepsilon$. Здесь и ниже K^* — конус неотрицательных на K линейных функционалов [64]. Зафиксируем функционал $\varphi \in K^*$, удовлетворяющий равенству $\varphi(u_0) = 1$, и число $\delta < \sigma$ так, чтобы в множестве $\{x \geqslant x_* \colon \varphi(x) = \varphi(x_*) + \delta\}$ не было u_0-полукорректных точек оператора A. Рассмотрим множество P, являющееся пересечением P_2 и гиперплоскости, заданной равенством $\varphi(x) = \varphi(x_*) + \delta$. По определению, для всех $y \in P$ верны соотношения $y \geqslant x_*$, $\| y - x_* \| \leqslant \varepsilon$. Поэтому существование элемента y_*, удовлетворяющего соотношениям (3.14), будет доказано, если мы построим элемент z_*, для которого справедливы соотношения

$$z_* \in P, \; A_- z_* \leqslant z_* \, (\mathrm{mod}\, u_0), \tag{3.16}$$

где $A_- x = \lim A(x - n^{-1} u_0)$.

Обозначим через $A^{\square}$ овыпукливание оператора A. Достаточно рассмотреть случай, когда точка x_* не принадлежит никакому множеству $A^{\square} w$, $w \in P$. Построим непрерывное отображение

$$h_1(x) = \begin{cases} x_* + (\delta - \varphi(x)) u_0, & \text{если } \varphi(x) \leqslant \varphi(x_*) + \delta, \\ x_* + \delta (\varphi(x) - \varphi(x_*))^{-1} (x - x_*), & \text{если } \varphi(x) > \varphi(x_*) + \delta, \end{cases}$$

Поясним геометрический смысл отображения $h_1(x)$. Если $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_*) + \delta$, то $h_1(x)$ — это точка пересечения гиперплоскости $\varphi(x) = \varphi(x_*) + \delta$ и параллельной вектору u_0 прямой, проходящей через точку x. Если же $\varphi(x) > \varphi(x_*) + \delta$, то $h_1(x)$ — это точка пересечения гиперплоскости $\varphi(x) = \varphi(x_*) + \delta$ прямой, проходящей через точки x и x_*. Из определений следует соотношение $h_1(P_2) \subset P$.

Введем теперь многозначное отображение $h(w) = h_1(A^{\square}w)$. Так как $h_1(x) \in P$ при $x \in P_2$, то $h : P \to P$. Отображение $h(w)$ не является выпуклозначным, однако можно установить существование такой точки $w_* \in P$, что $w_* \in h(w_*)$, т. е. существование таких точек w_*, z_0, для которых верны соотношения

$$w_* \in h(z_0),\ z_0 \in A^{\square}w_*. \tag{3.17}$$

Остается доказать неравенство

$$A_-(w_*) < w_* \pmod{u_0}. \tag{3.18}$$

Допустим, что $\varphi(z_0) > \varphi(x_*) + \delta$. Тогда в силу соотношений (3.16)

$$z_0 \geqslant w_* + \frac{\gamma_0(\|z_0 - x_*\|)}{\|z_0 - x_*\|}\|z_0 - w_*\| u_0$$

и, следовательно, при некотором $\varkappa > 0$ верно неравенство $A_+(w_*) \geqslant w_* + \varkappa u_0$, где $A_+(z) = \lim A(z + n^{-1}u_0)$. Поэтому элемент $w_1 = w_* + (\varkappa/2)u_0$ лежит в конусном отрезке $\langle x_*, w_0\rangle$ и $Aw_1 > w_1 \pmod{u_0}$, что противоречит определению u_0 - полукорректной точки. Таким образом, $\varphi(z_0) \leqslant \varphi(x_*) + \delta$.

Если выполнено строгое неравенство $\varphi(z_0) < \varphi(x_*) + \delta$, то неравенство (3.18) следует из соотношений (3.17) и определения отображения $h(x)$. Пусть теперь $\varphi(z_0) = \varphi(x_*) + \delta$. Допустим, что $A_-(w_*) = w_*$. Тогда либо $A_-(w_*) = A_+(w_*) = w_*$, либо $A_*(w_*) > w_* \pmod{u_0}$. Первый случай невозможен, так как P не содержит u_0-полукорректных точек, а второй противоречит u_0-полукорректности точки x_*. Следовательно, $A_-(w_*) \neq w_*$; в этом случае из (3.17) следуют соотношения $w_* \in A^{\square}(w_*)$ и $w_* \neq A_-(w_*)$. Поэтому верно неравенство (3.18). Теорема 2.3 доказана.

7

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

В главе выясняется, какие асимптотические оценки (оценки «на бесконечности») нелинейностей гарантируют существование периодических режимов и возможность их приближенного построения методом гармонического баланса. Для этого доказывается новый общий принцип исследования квазилинейных операторных уравнений. Выясняется, что условия предложенного принипа не улучшаемы по отношению к некоторому естественному общему классу нелинейных задач. Общий принцип применим по стандартным схемам не только к задаче о вынужденных колебаниях, но и к разнообразным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Предлагаемый метод имеет две особенности. Во-первых, его условия не гарантируют существование общей априорной оценки норм решений. Во-вторых, условия принципа отражают в явном виде зависимость между допустимыми характеристиками роста (на бесконечности) нелинейностей и поведением в нуле неубывающих перестановок собственных функций основного линейного оператора задачи, отвечающих ведущим собственным значениям.

Оценки нелинейностей содержат линейные слагаемые и подчиненные им нелинейные слагаемые. Если отбросить в предлагаемых оценках подчиненные нелинейные слагаемые, то оставшийся класс допустимых задач будет содержать линейные уравнения резонансного типа. В обычной ситуации при «приближении к резонансным оценкам» нормы решений нелинейных задач могут неограниченно возрастать и при выходе на «резонансные оценки» решения могут исчезать. Указанные в главе подчиненные нелинейные слагаемые в оценках нелинейностей обеспечивают «безопасный подход» к резонансным оценкам и даже переход через них.

1. Разрешимость уравнений в условиях, когда нормы решений не имеют общей априорной оценки

1.1. Изучаемые уравнения. Ниже через Ω обозначается множество, на котором задана счетно аддитивная мера, причем $\operatorname{mes}\Omega < \infty$. Через $L_2 = L_2(\Omega, R^m)$ обозначается пространство вектор-функций $x(t): \Omega \to R^m$ с обычным скалярным произведением

$$[x_1, x_2] = [x_1(t), x_2(t)] = \int_\Omega (x_1(t), x_2(t))\, d\mu(t).$$

Здесь (x_1, x_2) — скалярное произведение в R^m; через $|x|$ обозначается норма элемента $x \in R^m$; через $\|x\|$ или $\|x(t)\|$ — норма в L_2 вектор-функции $x(t) \in L_2$.

Изучается уравнение

$$x(t) = A\mathfrak{f}x(t), \tag{1.1}$$

в котором A — линейный вполне непрерывный в L_2 оператор, а нелинейный оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(t) = f[t, x(t)] \tag{1.2}$$

порожден непрерывной по x и измеримой по t функцией $f(t, x)$, $t \in \Omega$, $x \in R^m$ со значениями в R^m, для которой

$$|f(t, x)| \leqslant c|x| + a(t), \tag{1.3}$$

где $a(t) \in L_2$. В этих условиях (см., например, [98]) оператор $A\mathfrak{f}$ действует в L_2 и вполне непрерывен.

Относительно линейного оператора A будем предполагать, что у него есть инвариантные ортогональные подпространства E_0, $E_1 \subset L_2$, первое из которых конечномерно. Ортогональные проекторы на E_0 и E_1 обозначим через P и Q. Пусть $P + Q = I$, где I — единичный оператор, и

$$\|APx\| \leqslant \lambda_0 \|Px\|, \ \|AQx\| \leqslant \lambda_1 \|Qx\|, \ x \in L_2, \tag{1.4}$$

причем $0 < \lambda_1 < \lambda_0$. В этих условиях $\|A\| \leqslant \lambda_0$ и $\|A\mathfrak{f}x\| \leqslant c\lambda_0\|x\| + c_1$. Поэтому разрешимость уравнения (1.1) вытекает (в силу принципа Шаудера) из оценки $\lambda_0 c < 1$, причем для решений $x(t) \in L_2$ очевидна оценка $\|x(t)\| \leqslant (1 - \lambda_0 c)^{-1} c_1$. Наша цель — указать менее ограничительные условия на $f(t, x)$, гарантирующие разрешимость уравнения (1.1).

1.2. Формулировка теоремы. Для каждой измеримой функции $f(t)$: $\Omega \to R^m$ через $g(\tau; f)$, $0 \leqslant \tau < \operatorname{mes} \Omega$, обозначим неубывающую непрерывную справа перестановку (см., например, [37]) неотрицательной функции $|f(t)|$. Перестановка $g(\tau; f)$ в естественном смысле обратна функции

$$\chi(\delta; f) = \operatorname{mes}\{t : t \in \Omega, \ |f(t)| \leqslant \delta\}, \tag{1.5}$$

т. е.

$$g(\tau; f) = \sup\{\delta : \chi(\delta; f) \leqslant \tau\}. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(u_*)$ класс ограниченных суперпозиционно измеримых (см., например, [65]) функций $\Phi(t, u)$, $t \in \Omega$, $u \in R^1$, $u \geqslant 0$, которые при $u \geqslant u_* > 0$ непрерывны, не возрастают по u, неотрицательны и, наконец, при каждом $u \geqslant u_*$ положительны при $t \in \Omega_0 \subset \Omega$, $\operatorname{mes} \Omega_0 > 0$. Множество Ω_0 определяется функцией $\Phi(t, u)$ и не зависит от u.

Теорема 1.1. *Пусть верна оценка*

$$|f(t, x)| \leqslant k|x| - \Psi(t, |x|), \ (t \in \Omega, \ x \in R^m), \tag{1.7}$$

причем функция $\Psi(t, u)$ *ограничена, а функция*

$$\Phi_0(t; u) = u\Psi(t, u), \quad t \in \Omega, \quad u \geqslant 0, \tag{1.8}$$

принадлежит некоторому классу $\mathfrak{M}(u_*)$ *и при каждом* $R > 0$ *и любом* $u_0 \geqslant u_*$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{e(t)\in E_0, \|e\|=1} \frac{\chi(\delta; e)}{\int\limits_\Omega \Phi_0[t, u_0 + R\delta^{-1}|e(t)|]\, d\mu(t)} = 0. \tag{1.9}$$

Тогда найдется такое зависящее только от подпространства E_0, *функции* $\Psi(t, u)$ *и величин* λ_0 *и* λ_1 *число* $k_0 > \lambda_0^{-1}$, *что из* $k < k_0$ *и условия* (1.7) *вытекает существование у уравнения* (1.1) *по крайней мере одного решения в некотором шаре* $\|x\| \leqslant \rho$ *пространства* L_2. *Число* ρ *зависит только от* E_0, $\Psi(t, u)$, λ_0, λ_1, k_0. *Если* $k \leqslant \lambda_0^{-1}$, *то множество всех решений уравнения* (1.1) *допускает общую априорную оценку.*

Доказательство излагается в разд. 2 и 3.

При проверке равенства (1.9) удобно использовать миноранты $e_m(t) = e_m(t, e)$ и мажоранты $e_M(t) = e_M(t, e)$ функций $|e(t)|$, где $e(t) \in F_0$ и $\|e\| = 1$, т. е. функции, для которых

$$0 \leqslant e_m(t) \leqslant |e(t)| \leqslant e_M(t), \qquad t \in \Omega. \tag{1.10}$$

Из (1.10) вытекает справедливость оценок

$$g(\tau; e_m) \leqslant g(\tau; e) \leqslant g(\tau; e_M), \ \chi(\delta; e_M) \leqslant \chi(\delta, e) \leqslant \chi(\delta; e_m). \tag{1.11}$$

Поэтому условие (1.9) заведомо выполнено, если

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{e(t)\in E_0, \|e\|=1} \frac{\chi(\delta; e_m)}{\int\limits_\Omega \Phi_0[t, u_0 + R\delta^{-1}|e_M(t)|]\, d\mu(t)} = 0 \tag{1.12}$$

при некоторых минорантах $e_m(t)$ и мажорантах $e_M(t)$.

Пусть функция Φ_0 зависит лишь от переменной u (и не зависит от t). Тогда из равенства

$$\int\limits_\Omega \Phi_0[u_0 + R\delta^{-1}|e(t)|]\, d\mu(t) = \int\limits_0^{\mathrm{mes}\,\Omega} \Phi_0[u_0 + R\delta^{-1} g(\tau; e)]\, d\tau \tag{1.13}$$

вытекает, что

$$\int\limits_\Omega \Phi_0[u_0 + R\delta^{-1}|e(t)|]\, d\mu(t) = \int\limits_0^\infty \Phi_0[u_0 + R\delta^{-1}\xi]\, d\chi(\xi; e). \tag{1.14}$$

Поэтому условие (1.9) может быть записано в виде

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{e(t)\in E_0, \|e\|=1} \frac{\chi(\delta; e)}{\int\limits_0^\infty \Phi_0[u_0 + R\delta^{-1}\xi]\, d\chi(\xi; e)} = 0. \tag{1.15}$$

Отметим одно из огрублений условия (1.15). Из $\| e \| = 1$ и известного неравенства Чебышева $\operatorname{mes}\{t : | e(t) | \geqslant \nu\} \leqslant \nu^{-2}$ вытекает оценка

$$\int_\Omega \Phi_0 [u_0 + R\delta^{-1} | e(t) |]\, d\mu(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\{t: |e(t)| < \nu\}} \Phi_0 [u_0 + R\delta^{-1} | e(t) |]\, d\mu(t) \geqslant$$

$$\geqslant \Phi_0 [u_0 + R\delta^{-1}\nu] \operatorname{mes}\{t : | e(t) | < \nu\} \geqslant$$

$$\geqslant \Phi_0 [u_0 + R\delta^{-1}\nu] (\operatorname{mes}\Omega - \nu^{-2}),$$

из которой при $\nu = \sqrt{2}\,(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}$ вытекает, что

$$\int_\Omega \Phi_0 [u_0 + R\delta^{-1} | e(t) |]\, d\mu(t) \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes}\Omega\Phi_0 (u_0 + R\nu\delta^{-1}).$$

Значит, равенство (1.15) справедливо при каждом $R > 0$, если

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\sup\limits_{e(t)\in E_0,\ \|e\|=1} \chi(\delta; e)}{\Phi_0 (u_0 + R\delta^{-1})} = 0. \tag{1.16}$$

1.3. Особый случай. Пусть

$$| e(t) | \geqslant \gamma > 0 \qquad (t \in \Omega;\ e(t) \in E_0,\ \| e \| = 1). \tag{1.17}$$

Тогда

$$\chi(\delta; e) = 0 \qquad (0 \leqslant \delta < \gamma;\ e(t) \in E_0,\ \| e \| = 1) \tag{1.18}$$

и поэтому равенство (1.9) выполнено при любой функции $\Phi_0(t, u)$ из каждого класса $\mathfrak{M}(u_*)$.

1.4. Степенные оценки. Продолжим рассмотрение случая, когда функция (1.8) не зависит от t. Исследуем различные ситуации, в которых функции $\chi(\delta; e)$, $e(t) \in E_0$, $\| e \| = 1$, удовлетворяют общей оценке

$$\chi(\delta; e) \geqslant \begin{cases} c_1\delta^\alpha \text{ при } 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0, \\ c_1\delta_0^\alpha \text{ при } \delta_0 < \delta, \end{cases} \tag{1.19}$$

либо оценке

$$\chi(\delta; e) \leqslant c_2\delta^\beta,\ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0. \tag{1.20}$$

а. Пусть верна оценка (1.20), в которой $c_2 > 0$ и $\beta > 0$. Тогда для справедливости равенства (1.16) достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{z\to\infty} z^\beta \Phi_0(z) = \infty, \tag{1.21}$$

т. е. из соотношений (1.20) и (1.21) вытекает справедливость равенства (1.9).

б. Пусть верны обе оценки (1.19) и (1.20), в которых $c_1, c_2 > 0$ и $\alpha = \beta > 0$. В этом случае условие (1.15) выполнено, если

$$\int\limits_{u_*}^{\infty} z^{\alpha}\,\Psi(z)\,dz = \infty, \tag{1.22}$$

где $\Psi(z) = \Psi(t, z)$ — функция из оценки (1.7).

в. Пусть верны обе оценки (1.19) и (1.20), причем $c_1, c_2 > 0$ и $\alpha > \beta > 0$. Тогда условие (1.15) заведомо выполнено, если

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{\alpha-\beta} \int\limits_0^{\delta^{-1}} \Phi_0(u_0 + z)\, z^{\alpha-1}\,dz = \infty. \tag{1.23}$$

Если здесь для вычисления предела можно применить правило Лопиталя, то условие (1.23) записывается в виде равенства (1.21). Конечно, условие (1.23) менее ограничительно, чем (1.21).

В этом пункте использовались общие оценки всех функций $\chi(\delta; e)$, где $e \in E_0$ и $\|e\| = 1$. Пусть в условии (1.7) функция $\Psi(t, x)$ от t не зависит. Положим [58]

$$\chi_{\text{нижн}}(\delta) = \inf_{e(t)\in E_0,\ \|e\|=1} \chi(\delta; e); \qquad \chi_{\text{верхн}}(\delta) = \sup_{e(t)\in E_0,\ \|e\|=1} \chi(\delta; e). \tag{1.24}$$

Тогда для справедливости эквивалентного условию (1.9) равенства (1.15) достаточно справедливости соотношения

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\chi_{\text{верхн}}(\delta)}{\int\limits_0^{\infty} \Phi_0(u_0 + R\delta^{-1}\xi)\,d\chi_{\text{нижн}}(\xi)} = 0. \tag{1.25}$$

Справедливость этого равенства доказывается проще, чем справедливость равенства (1.15). Однако равенство (1.25) в общем случае предъявляет к функции $\Phi_0(u)$ более жесткие требования, чем равенство (1.15). Уже в простейшем примере, когда $\Omega = [0, 1]$ и двумерное подпространство E_0 состоит из линейных функций $e(t) = \alpha + \beta t$, условие (1.15) выполнено, если

$$\int\limits_0^{\infty} \Phi_0(z)\,dz = \infty, \tag{1.26}$$

а для справедливости (1.25) требуется выполнение равенства

$$\lim_{z\to\infty} z\Phi_0(z) = \infty. \tag{1.27}$$

1.5. Отсутствие априорной оценки норм решений. Рассмотрим уравнение (1.1) частного вида в пространстве $L_2 = L_2(\Omega, R^1)$ скалярных функций. Пусть размерность подпространства E_0 нечетна, $Ae = \lambda_0 e$ при всех $e \in E_0$ и справедливо равенство

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{e(t)\in E_0,\ \|e\|=1} \chi(\delta; e) = 0. \tag{1.28}$$

Пусть

$$f(t, x) = kx - h(t, x), \quad t \in \Omega, x \in R^1, \tag{1.29}$$

где $h(t, x)$ непрерывна по x, измерима по t, ограничена и удовлетворяет оценке

$$xh(t, x) \geqslant \gamma > 0, \ t \in \Omega, \ |x| \geqslant u_*. \tag{1.30}$$

Тогда для функции $f(t, x)$ верна оценка (1.7), причем функцию (1.8) можно считать равной γ при $u \geqslant u_*$. Поэтому (1.28) можно рассматривать как условие (1.9) для уравнения (1.1). В силу теоремы 1.1 найдется такое $k_0 > \lambda_0^{-1}$, что при $k \leqslant k_0$ уравнение

$$x(t) = A[kx(t) - h(t, x)] \tag{1.31}$$

имеет решения в L_2. Покажем, что среди решений уравнений (1.31) есть функции сколь угодно больших норм. Этим будет доказано, что в условиях теоремы 1.1 нельзя гарантировать общую априорную оценку норм решений уравнения (1.1).

Положим

$$B(k)\, x(t) = kAx(t) - Ah[t, x(t)], \ x(t) \in L_2. \tag{1.32}$$

Оператор $B(k)$ вполне непрерывен по совокупности переменных $x(t) \in L_2$ и $k \in [0, k_0]$. Из ограниченности функции $h(t, x)$ вытекает равенство

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{0\leqslant k\leqslant k_0,\, \|x\|=\rho} \frac{B(k)\, x - kAx}{\|x\|} = 0. \tag{1.33}$$

Таким образом, оператор $B(k)$ имеет асимптотическую производную (см., например, [64]) на бесконечности, равную kA. Но тогда из теоремы М. А. Красносельского [64] об асимптотических точках бифуркации вытекает, что на каждой сфере $\|x\| = \rho$ достаточно большого радиуса ρ при некотором $k = k(\rho)$ уравнение (1.31) имеет решение $x_\rho(t) \in L_2$, причем $k(\rho) \to \lambda_0^{-1}$ при $\rho \to \infty$. Следовательно, $k(\rho) \to \lambda_0^{-1}$ при достаточно больших ρ, и наше утверждение доказано.

1.6. Замечание. Попытаемся обосновать естественность условия (1.9).

Пусть $\dim E_0 = 1$, $e_0 \in E_0$ и $\|e_0\| = 1$. Тогда условие (1.9) примет вид

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\chi(\delta; e_0)}{\int\limits_\Omega \Phi_0[t, u_0 + R\delta^{-1}|e_0(t)|]\, d\mu(t)} = 0, \quad u_0 \geqslant u_*, \ R > 0. \tag{1.34}$$

Пусть $e_0(t)$ ограничена, $\chi(0; e_0) = 0$, $\chi(\delta; e_0) > 0$ при $\delta > 0$ и при некоторых $\delta_0 > 0$, $\beta > 1$ верна оценка

$$\chi(2\delta; e_0) \geqslant \beta\chi(\delta; e_0), \ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0. \tag{1.35}$$

При каждом $\beta \in (1, 2^\alpha)$, где $\alpha > 0$, и соответствующем $\delta_0 = \delta_0(\beta)$ оценка (1.35) верна, например, для функций $\chi(\delta; e_0)$ вида δ^α.

$\delta^\alpha \ln \delta^{-1}$ и т. д. Зададимся ограниченной неотрицательной функцией $\Psi_0(t, u)$, $t \in \Omega$, $u \geqslant u_* > 0$, непрерывной по u и измеримой по t. Пусть при каждом $u \geqslant u_*$ функция $\Psi_0(t, u)$ положительна при $t \in \Omega_0 \subset \Omega$, где Ω_0 — множество положительной меры. Пусть, далее, функция $\Phi_0(t, u) = u\Psi_0(t, u)$ при $u \geqslant u_*$ не возрастает по переменной u и при некоторых $\gamma > 0$, $u_0 > u_*$ верна оценка

$$\gamma\Phi_0(t, u) \leqslant \Phi_0(t, u_0 + u), \quad u \geqslant u_*. \tag{1.36}$$

Оценка (1.36) легко устанавливается, например, для функций $\Phi_0(t, u)$ вида e^{-u}, $u^{-\alpha}$, $u^{-\alpha} \ln u$, $\alpha > 0$ и др.

Обозначим через $\mathfrak{B}[\Psi_0]$ класс уравнений (1.1) с линейными операторами A, удовлетворяющими оценками (1.4), и с нелинейностями (1.2), определенными функциями $f(t, x)$, удовлетворяющими оценке (1.7), в которой $k = \lambda_0^{-1}$, а функция $\Psi(t, u)$ ограничена и при $u \geqslant u_0$ совпадает с $\Psi_0(t, u)$. Пусть каждое уравнение из $\mathfrak{B}[\Psi_0]$ разрешимо в L_2. В разд. 3 будет показано (см. п. 3.3), что при некотором $R > 0$ в этом случае справедливо равенство

$$\varliminf_{\delta\to 0} \frac{\chi(\delta; e_0)}{\int\limits_\Omega \Phi_0[t, u_0 + R\delta^{-1}|e_0(t)|]\, d\mu(t)} = 0. \tag{1.37}$$

Равенство (1.37) отличается от (1.34) лишь использованием нижнего предела, т. е. разрешимость всех уравнений из $\mathfrak{B}[\Psi_0]$ влечет справедливость «почти такого» равенства, как условие (1.9) теоремы 1.1.

2. Оценки норм решений функциональных неравенств

2.1. Функции, согласованные с подпространством. Назовем функцию $\Phi(t, u)$ согласованной с подпространством E_0, если существует такая положительная невозрастающая функция $\alpha(u)$, $u \geqslant 0$, что при каждом $\beta > 0$ для всех решений $x(t) \in L_2$ неравенства

$$\| Qx(t) \|^2 \leqslant -\beta \int\limits_\Omega \Phi[t, |x(t)|]\, d\mu(t) + \beta\alpha(\|x\|) \tag{2.1}$$

справедлива общая априорная оценка

$$\| x(t) \| \leqslant c = c(\beta) < \infty. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть функция $\Phi(t, u)$ принадлежит некоторому классу $\mathfrak{M}(u_0)$ (см. п. 1.2) и при каждом $R > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{e(t)\in E_0,\ \|e\|=1} \frac{\chi(\delta; e)}{\int\limits_\Omega \Phi[t, u_0 + R\delta^{-1}|e(t)|]\, d\mu(t)} = 0. \tag{2.3}$$

Тогда функция $\Phi(t, u)$ согласована с подпространством E_0.

Эта теорема доказывается в последующих пунктах разд. 2.

2.2. Оценка снизу нелинейного функционала. Доказательство теоремы 2.1 состоит из нескольких этапов. Ниже используются обозначения из разд. 1. Положим

$$a = \sup_{t\in\Omega,\, u\geqslant 0} |\Phi(t, u)|. \tag{2.4}$$

Каждой функции $x = x(t) \in L_2$ сопоставим множество

$$G[x] = \{t : t \in \Omega, \ |Px(t)| < u_0 + |Qx(t)|\}$$

и докажем справедливость оценки

$$\int_\Omega \Phi[t, |x(t)|]\, d\mu(t) \geqslant$$
$$\geqslant \int_\Omega \Phi[t, u_0 + 2|Px(t)|]\, d\mu(t) - 2a \operatorname{mes} G[x]. \tag{2.5}$$

Пусть $t \overline{\in} G[x]$, т. е. $|Px(t)| \geqslant u_0 + |Qx(t)|$. Тогда $|x(t)| \geqslant \geqslant |Px(t)| - |Qx(t)| \geqslant u_0$ и $|x(t)| \leqslant |Px(t)| + |Qx(t)| \leqslant \leqslant 2|Px(t)| - u_0 \leqslant 2|Px(t)| + u_0$. Поэтому из монотонности по переменной u (при $u \geqslant u_0$) функции $\Phi(t, u)$ вытекает, что

$$\Phi[t, |x(t)|] \geqslant \Phi[t, u_0 + 2|Px(t)|], \quad t \overline{\in} G[x], \tag{2.6}$$

откуда вытекает оценка

$$\int_\Omega \Phi[t, |x(t)|]\, d\mu(t) = \int_{\Omega\setminus G[x]} \Phi[t, |x(t)|]\, d\mu(t) +$$
$$+ \int_{G[x]} \Phi[t, |x(t)|]\, d\mu(t) \geqslant \int_\Omega \Phi[t, u_0 + 2|Px(t)|]\, d\mu(t) +$$
$$+ \int_{G[x]} \{\Phi[t, |x(t)|] - \Phi[t, u_0 + 2|Px(t)|]\}\, d\mu(t).$$

Поэтому для доказательства оценки (2.5) остается заметить, что

$$\int_{G[x]} \{\Phi[t, |x(t)|] - \Phi[t, u_0 + 2|Px(t)|]\}\, d\mu(t) \leqslant 2a \operatorname{mes} G[x].$$

2.3. Второй этап доказательства теоремы 2.1. Пусть $\alpha(u)$ ($u \geqslant 0$) — некоторая положительная невозрастающая функция.

Лемма 2.1. *Пусть функция $x(t) \in L_2$ удовлетворяет неравенству (2.1) и пусть*

$$\|Px(t)\| \geqslant 2\sqrt{\beta(a \operatorname{mes}\Omega + \alpha(0))}, \tag{2.7}$$

где a — число (2.4). Тогда

$$\int_\Omega \Phi[t, u_0 + 2|Px(t)|]\, d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant 2a\chi\left(\frac{u_0 + \sqrt{2\alpha\beta}}{\|Px\|}; \frac{Px}{\|Px\|}\right) + \alpha\left(\frac{1}{2}\|Px\|\right). \tag{2.8}$$

Доказательство. Из неравенства (2.1) вытекает, что $\| Q x\|^2 \leqslant \beta(a \operatorname{mes} \Omega + \alpha(0))$. Поэтому из (2.7) следует оценка $\| x(t) \| \geqslant \| Px \| - \sqrt{\beta(a \operatorname{mes}\Omega + \alpha(0))} \geqslant {}^1/_2 \| Px\|$, в силу которой

$$\alpha(\| x \|) \leqslant \alpha\left(\frac{1}{2} \| Px \|\right). \tag{2.9}$$

Положим $\Omega_1[x] = \{t : t \in \Omega, \ | Qc(t) | > \sqrt{2a\beta}\}$. Тогда

$$G[x] \setminus \Omega_1[x] = \{t : t \in \Omega, | Px(t) | < u_0 + | Qx(t) |, \ | Qx(t) | \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2a\beta}\} \subset \{t : t \in \Omega, \ | Px(t) | < u_0 + \sqrt{2a\beta}\}.$$

Следовательно,

$$G[x] \subset \Omega_1[x] \cup \{t : t \in \Omega, | Px(t) | < u_0 + \sqrt{2a\beta}\};$$

поэтому

$$\operatorname{mes} G[x] \leqslant \operatorname{mes}\{t : t \in \Omega, \ | Qx(t) | > \sqrt{2a\beta}\} + \\ + \operatorname{mes}\{t : t \in \Omega, \ | Px(t) | \leqslant u_0 + \sqrt{2a\beta}\}$$

и, далее,

$$\operatorname{mes} G[x] \leqslant \operatorname{mes}\{t : t \in \Omega, | Qx(t) | > \sqrt{2a\beta}\} + \chi\left(\frac{u_0 + \sqrt{2a\beta}}{\| Px \|}; \frac{Px}{\| Px \|}\right).$$

Если оценить первое слагаемое в правой части при помощи уже применявшегося неравенства Чебышева, то получится неравенство

$$\operatorname{mes} G[x] \leqslant \frac{\| Qx \|^2}{2a\beta} + \chi\left(\frac{u_0 + \sqrt{2a\beta}}{\| Px \|}; \frac{Px}{\| Px \|}\right). \tag{2.10}$$

Из соотношений (2.4) и (2.5) вытекает, что

$$\int_\Omega \Phi[t, | x(t) |] \, d\mu(t) \geqslant \int_\Omega \Phi[t, u_0 + 2 | Px(t) |] \, d\mu(t) - \frac{\| Qx \|^2}{\beta} - \\ - 2a\chi\left(\frac{u_0 + \sqrt{2a\beta}}{\| Px \|}; \frac{Px}{\| Px \|}\right)$$

и в силу (2.1)

$$\int_\Omega \Phi[t, u_0 + 2 | Px(t) |] \, d\mu(t) \leqslant \alpha(\| x \|) + 2a\chi\left(\frac{u_0 + \sqrt{2\alpha\beta}}{\| Px \|}; \frac{Px}{\| Px \|}\right).$$

Отсюда и из неравенства (2.9) вытекает справедливость оценки (2.8).

2.4. *Построение функции* $\alpha(u)$. Положим

$$\Gamma(u; x) = \frac{1}{1+u} \int_\Omega \Phi[t, u_0 + u^2 | x(t) |] \, d\mu(t), \ \ u \geqslant 0, \ \ x(t) \in L_2.$$

Пусть заданы сходящиеся последовательности чисел $u_n \geqslant 0$ и функций $x_n(t) \in L_2$, а u_* и $x_*(t)$ — их пределы. Так как $\Phi(t, u)$

непрерывна по u (при $u \geqslant u_0$) и измерима по t, то последовательность функций $\Phi\,[t,\ u_0 + u_n^2 \mid x_n(t) \mid]$ сходится по мере к функции $\Phi\,[t,\ u_0 + u_*^2 \mid x_*(t) \mid]$. Из равномерной ограниченности функции $\Phi\,(t,\ u)$ вытекает возможность предельного перехода в равенстве

$$\Gamma(u_n;\, x_n) = \frac{1}{1+u_n} \int\limits_{\Omega} \Phi\,[t,\, u_0 + u_n^2 \mid x_n(t) \mid]\, d\mu(t).$$

Таким образом, функционал $\Gamma\,(u;\ x)$ непрерывен по совокупности переменных. Так как единичная сфера в E_0 компактна, то определена функция

$$\alpha(u) = \min_{e(t)\in E_0,\ \|e\|=1} \Gamma(u;\, e),\quad u \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Функция (2.11) положительна и не возрастает.

В силу монотонности функции $\Phi\,(t,\ u)$ по u при каждой $x\,(t) \in L_2$ и любых $R,\ R_1 > 0$ справедлива оценка

$$\Gamma(R_1 u;\, x) \leqslant \frac{1}{1+R_1 u} \int\limits_{\Omega} \Phi\,[t,\, u_0 + Ru \mid x(t) \mid]\, d\mu(t),\quad u \geqslant RR_1^{-2}.$$

Поэтому

$$\alpha(R_1 u) \leqslant \frac{1}{1+R_1 u} \int\limits_{\Omega} \Phi\,[t,\, u_0 + Ru \mid e(t) \mid]\, d\mu(t),\quad u \geqslant RR_1^{-2},$$

$$e(t) \in E_0,\quad \| e \| = 1. \tag{2.12}$$

2.5. Завершение доказательства теоремы 2.1. Рассмотрим функции $x\,(t) \in L_2$, удовлетворяющие неравенству (2.1), в котором $\alpha\,(u)$ — это функция (2.11). В силу неравенства (2.1)

$$\| Qx\,(t) \|^2 \leqslant \beta\,(a \operatorname{mes} \Omega + \alpha\,(0)). \tag{2.13}$$

Поэтому для доказательства теоремы 2.1 достаточно установить существование априорной оценки норм в L_2 проекций $Px\,(t)$ указанных функций Такую априорную оценку достаточно установить для функций, удовлетворяющих неравенству (2.7).

Пусть для функции $x\,(t) \in L_2$ справедливы неравенства (2.1) и (2.7). В силу леммы 2.1 для этой функции верна оценка (2.8). Положим

$$e(t) = \frac{Px(t)}{\|Px\|},\qquad \delta_0 = \delta_0(\beta) = \frac{u_0 + \sqrt{2a\beta}}{\|Px\|},$$

$$R = R(\beta) = 2(u_0 + \sqrt{2a\beta}),\qquad R_1 = R_1(\beta) = \frac{1}{4} R.$$

Тогда формула (2.8) запишется в виде

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\,[t,\, u_0 + R\delta_0^{-1} \mid e(t) \mid]\, d\mu(t) \leqslant 2a\chi(\delta_0;\, e) + \alpha(R_1\delta_0^{-1}). \tag{2.14}$$

Предположим дополнительно, что $\| Px(t) \| \geqslant 8$. Тогда $\delta_0^{-1} \geqslant RR_1^{-2}$. Поэтому из соотношений (2.12) и (2.14) вытекает оценка

$$\left(1 - \frac{1}{1 + R_1\delta_0^{-1}}\right) \int_\Omega \Phi[t, u_0 + R\delta_0^{-1} | e(t) |] \, d\mu(t) \leqslant 2a\chi(\delta_0; e),$$

которую удобно переписать в виде

$$\frac{\chi(\delta_0; e)}{\int_\Omega \Phi[t, u_0 + R\delta_0^{-1} | e(t) |] \, d\mu(t)} \geqslant \frac{R_1\delta_0^{-1}}{2a(1 + R_1\delta_0^{-1})}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\chi(\delta_0; e)}{\int_\Omega \Phi[t, u_0 + R\delta_0^{-1} | e(t) |] \, d\mu(t)} \geqslant \frac{2}{5a}. \tag{2.15}$$

Воспользуемся теперь условием (2.3) теоремы 2.1. Из этого условия следует существование такого $\delta_* = \delta_*(\beta) > 0$, что

$$\sup_{e(t) \in E_0, \|e\| = 1} \frac{\chi(\delta; e)}{\int_\Omega \Phi[t, u_0 + R\delta^{-1} | e(t) |] \, d\mu(t)} < \frac{2}{5a}, \quad \delta \leqslant \delta_*.$$

Поэтому из (2.15) вытекает неравенство $\delta_0 > \delta_*$, т. е. верна оценка $\| Px \| < \delta_*^{-1}(u_0 + \sqrt{2a\beta})$.

Таким образом, для каждого решения $x(t)$ неравенства (2.1), в котором функция $\alpha(u)$ определена равенством (2.11), справедлива оценка

$$\| Px(t) \| \leqslant \max \{2\sqrt{\beta(a \operatorname{mes} \Omega + \alpha(0))}, 8, (u_0 + \sqrt{2a\beta})\delta_*^{-1}\}.$$

Теорема 2.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1

3.1. Леммы. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Положим

$$b = \sup_{t \in \Omega, u \geqslant 0} | \Psi(t, u) |, \tag{3.1}$$

где $\Psi(t, u)$ — функция из условия (1.7), и

$$u_0 = \max \{u_*, b\lambda_0\}, \tag{3.2}$$

где $u_* > 0$ — число, определяющее класс $\mathfrak{M}(u_*)$, которому принадлежит функция (1.8). Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(t, u) = \begin{cases} -b^2 - 2bu_0\left(\frac{1}{\lambda_0} + 1\right) & \text{при } 0 \leqslant u < u_0, \\ \frac{1}{\lambda_0}\Phi_0(t, u) & \text{при } u_0 \leqslant u. \end{cases} \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнено неравенство* (1.7) *и*

$$\frac{1}{\lambda_0} \leqslant k \leqslant \frac{1}{\lambda_0} + 1. \tag{3.4}$$

Тогда

$$|f(t,x)|^2 \leqslant k^2x^2 - \Phi(t,|x|),\ t \in \Omega,\ u \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Возведя (1.7) в квадрат, получим

$$|f(t,x)|^2 \leqslant k^2x^2 - 2k|x|\Psi(t,|x|) + |\Psi(t,|x|)|^2. \tag{3.6}$$

Поэтому справедливость оценки (3.5) при $|x| < u_0$ вытекает из неравенства (3.4) и определения числа (3.1).

Пусть $|x| \geqslant u_0$. Тогда неравенство (3.6) можно записать в виде

$$|f(t,x)|^2 \leqslant k^2x^2 - \Phi(t,|x|) - 2\left(k - \frac{1}{\lambda_0}\right)|x|\Psi(t,|x|) -$$
$$- \frac{\Psi(t,|x|)}{|x|}\left[\frac{1}{\lambda_0}|x|^2 - \Phi(t,|x|)\right].$$

Но при $|x| \geqslant u_0$ функция $\Psi(t, |x|)$ принимает неотрицательные значения и в силу (3.4) $2(k - 1/\lambda_0)\ |x|\,\Psi(t, |x|) \geqslant 0$, $|x| \geqslant u_0$. Кроме этого, при $|x| = u_0$ справедливо неравенство $\Phi(t, |x|) \leqslant \lambda_0^{-1}u_0^2$ и, так как при $u \geqslant u_0$ функция u^2 растет, а функция $\Phi(t, u)$ не возрастает, то

$$\frac{\Psi(t,|x|)}{|x|}\left[\frac{1}{\lambda_0}x^2 - \Phi(t,|x|)\right] \geqslant 0,\ |x| \geqslant u_0.$$

Значит, и при $|x| \geqslant u_0$ верна оценка (3.6). Лемма 3.1 доказана.

Функция (3.3) принадлежит классу $\mathfrak{M}(u_0)$. Из условий теоремы 1.1 вытекает, что для нее выполнено равенство (2.3). В силу теоремы 2.1 функция (3.3) согласована с подпространством E_0. Обозначим через $\alpha(u)$ фиксированную соответствующую функции (3.3) положительную невозрастающую функцию, участвующую в неравенствах (2.1).

Обозначим через X множество функций $x(t) \in L_2$, для каждой из которых

$$x = \mu A \mathfrak{F} x \tag{3.7}$$

при некотором $\mu = \mu(x) \in [0, 1]$ и

$$\|\mathfrak{F}x\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_0^2}\|x\|^2 - \int_\Omega \Phi[t, |x(t)|]\,d\mu(t) + \alpha(\|x\|). \tag{3.8}$$

Лемма 3.2. *Справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant c(\beta) < \infty,\ x(t) \in X, \tag{3.9}$$

где $c(\beta)$ — функция из (2.2), а

$$\beta = \lambda_0^2\lambda_1^2/(\lambda_0^2 - \lambda_1^2). \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть $x \in X$, т. е.

$$x = \mu A \mathfrak{F} x, \tag{3.11}$$

где $\mu \in [0, 1]$, и справедлива оценка (3.8). Из (3.11) вытекает, что

$$\| x \|^2 = \mu^2 \| AP\mathfrak{F}x \|^2 + \frac{\mu^2\lambda_0^2}{\lambda_1^2} \| AQ\mathfrak{F}x \|^2 + \mu^2 \frac{\lambda_1^2 - \lambda_0^2}{\lambda_1^2} \| AQ\mathfrak{F}x \|^2,$$

и так как $Qx = \mu AQ\mathfrak{F}x$, то

$$\| x \|^2 = \mu^2 \| AP\mathfrak{F}x \|^2 + \frac{\mu^2\lambda_0^2}{\lambda_1^2} \| AQ\mathfrak{F}x \|^2 + \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\right) \| Qx \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| AP\mathfrak{F}x \|^2 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2} \| AQ\mathfrak{F}x \|^2 + \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\right) \| Qx \|^2.$$

Отсюда и из оценок (1.4) вытекает неравенство

$$\| x \|^2 \leqslant \lambda_0^2 \| P\mathfrak{F}x \|^2 + \lambda_0^2 \| Q\mathfrak{F}x \|^2 + \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\right) \| Qx \|^2,$$

или, что то же, неравенство

$$\| x \|^2 + \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2} \| Qx \|^2 \leqslant \lambda_0^2 \| \mathfrak{F}x \|^2.$$

Так как справедлива оценка (3.8), то

$$\| x \|^2 + \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2} \| Qx \|^2 \leqslant \| x \|^2 -$$

$$- \lambda_0^2 \int_\Omega \Phi [t, | x(t) |] \, d\mu(t) + \lambda_0^2 \alpha (\| x \|),$$

т. е. справедливо неравенство (2.1), в котором число β определено равенством (3.10). Но функция (3.3) согласована с E_0, а функция $\alpha(u)$ выбиралась так, чтобы для решений неравенства (2.1) была верна оценка (2.2). Значит, $\| x(t) \| \leqslant c(\beta)$. Лемма 3.2 доказана.

В условиях леммы 3.2 оператор $\mathfrak{F}$ — это не обязательно оператор суперпозиции.

3.2. Завершение доказательства теоремы 1.1. Положим $\rho = c(\beta)$, где $c(\beta)$ — число из оценки (3.9), а β определено формулой (3.10). Определим действующий в L_2 непрерывный оператор

$$\mathfrak{F}x = \begin{cases} f[t, x(t)], & \text{если } \| x(t) \| \leqslant \rho, \\ (1 + \rho - \| x \|) f[t, x(t)], & \text{если } \rho < \| x(t) \| < \rho + 1, \\ 0, & \text{если } \rho + 1 \leqslant \| x(t) \|. \end{cases} \quad (3.12)$$

Для вполне непрерывного оператора $A\mathfrak{F}$ очевидна оценка

$$\| A\mathfrak{F}x \| \leqslant \lambda_0 \sup_{\|x\| \leqslant \rho+1} \| f(t, x(t)) \| = d < \infty, \quad x \in L_2.$$

Поэтому из принципа Шаудера вытекает разрешимость в L_2 уравнения

$$x = A\mathfrak{F}x \tag{3.13}$$

при любом действующем в L_2 непрерывном операторе суперпозиции $\mathfrak{f}$, определяющем оператор (3.12).

Положим

$$k_0 = \min\left\{1 + \frac{1}{\lambda_0}, \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{\alpha(\rho+1)}{(\rho+1)^2}}\right\}.$$

Тогда число k_0 удовлетворяет, кроме условия (3.4), дополнительному неравенству

$$(k_0^2 - 1/\lambda_0^2)(\rho + 1)^2 \leqslant \alpha(\rho + 1), \tag{3.14}$$

где $\alpha(u)$ — функция из неравенства (2.1).

Покажем, что в условиях теоремы 1.1 при $k \leqslant k_0$ уравнение (1.1) разрешимо в L_2. Разрешимость очевидна при $k < 1/\lambda_0$; поэтому будем считать, что $1/\lambda_0 \leqslant k \leqslant k_0$. Нам достаточно показать, что решения соответствующего уравнения (3.13) лежат в шаре $\|x\| \leqslant \rho$. Тогда в силу (3.12) они являются решениями уравнения (1.1).

Пусть решение $x_*(t)$ уравнения (3.13) лежит в слое $\rho < \|x\| < \rho + 1$. Тогда $x_*(t)$ является решением уравнения (3.7), где $\mu = 1 + \rho - \|x_*\|$. При этом в силу леммы 3.1

$$\|f[t, x_*(t)]\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_0^2}\|x_*\|^2 - \int_\Omega \Phi[t, |x_*(t)|]\, d\mu(t) + \left(k^2 - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)\|x_*\|^2,$$

откуда, из неравенства (3.14) вытекает оценка

$$\|f[t, x_*(t)]\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_0^2}\|x_*\|^2 - \int_\Omega \Phi[t, |x_*(t)|]\, d\mu(t) + \alpha(\rho + 1).$$

Но из монотонности функции $\alpha(u)$ вытекает оценка $\alpha(\rho + 1) \leqslant \alpha(\|x_*\|)$. Поэтому

$$\|f[t, x_*(t)]\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_0^2}\|x_*\|^2 - \int_\Omega \Phi[t, |x_*(t)|]\, d\mu(t) + \alpha(\|x_*\|)$$

и в силу леммы 3.2 $\|x_*\| \leqslant c(\beta) = \rho$. Мы пришли к противоречию. В множестве $\|x\| \geqslant \rho + 1$ уравнение (3.13) решений не имеет, так как $A\mathfrak{F}x = 0$ при $\|x\| \geqslant \rho + 1$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что при $k \leqslant \lambda_0^{-1}$ множество решений уравнения (1.1) допускает общую априорную оценку. Пусть $k \leqslant \lambda_0^{-1}$. Тогда в силу леммы 3.1 справедлива оценка (3.8) (даже без слагаемого $\alpha(\|x\|)$ в правой части), а в силу леммы 3.2 для всех решений уравнения (1.1) верна оценка (3.9).

Теорема 1.1 полностью доказана.

В условиях теоремы 2.1 предполагалось, что равенство (1.9) справедливо при каждом $u_0 \geqslant u_*$. Из доказательства ясно, что используется лишь справедливость равенства (1.9) при том значении u_0, которое определено формулой (3.2).

3.3. Доказательство равенства (1.37). Для упрощения выкладок будем считать, что $\lambda_0 = 1$ и

$$\Psi_0(t, u_0) < u_*/2, \qquad t \in \Omega \tag{3.15}$$

Определим при каждом $k = 1, 2, \ldots$ функцию $g_k(t, u)$, которая при каждом $t \in \Omega$ непрерывна по u, на промежутках $[0, u_*]$ и $[u_0, \infty)$ совпадает соответственно с $-k$ и $\Psi_0(t, u)$, а на $[u_*, u_0]$ линейна по u. В силу соотношения (3.15)

$$u - g_k(t, u) \geqslant \min(1, u_*/2) = c_1 > 0, \; u \geqslant 0. \tag{3.16}$$

Рассмотрим при каждом $k = 1, 2, \ldots$ уравнение

$$x(t) = Pf_k[t, x(t)], \tag{3.17}$$

в котором P — это ортогональный проектор $Px = (x, e_0)\, e_0$ на подпространство E_0, а

$$f_k(t, x) = [|x| - g_k(t, |x|)] \operatorname{sign} e_0(t).$$

Каждое уравнение (3.17) принадлежит классу $\mathfrak{B}[\Psi_0]$ и, по предположению, имеет в L_2 решение $x_k(t)$. В силу (3.17) $x_k = \xi_k e_0(t)$ и

$$\xi_k = \int_\Omega \{|x_k(t)| - g_k[t, |x_k(t)|]\} \; |e_0(t)|\, d\mu(t). \tag{3.18}$$

Из соотношений (3.16) и (3.18) вытекает оценка

$$\xi_k \geqslant c_1 \int_\Omega |e_0(t)|\, d\mu(t) = c_2 > 0. \tag{3.19}$$

Поэтому равенство (3.18) можно переписать в виде

$$\int_\Omega g_k[t, \xi_k |e_0(t)|]\, |e_0(t)|\, d\mu(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.20}$$

Пусть $\Omega_k = \{t : \xi_k\, |e_0(t)| > u_*\}$. Так как

$$\int_\Omega \Phi_0[t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant \int_{\Omega_k} \Phi_0[t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant$$

$$\geqslant \xi_k \int_{\Omega_k} \Psi_0[t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, |e_0(t)|\, d\mu(t),$$

то в силу оценки (1.36)

$$\int_\Omega \Phi_0[t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant \gamma \xi_k \int_{\Omega_k} \Psi_0[t, \xi_k |e_0(t)|]\, |e_0(t)|\, d\mu(t)$$

и, по определению функции $g_k(t, u)$,

$$\int_{\Omega} \Phi_0 [t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant \gamma \xi_k \int_{\Omega_k} g_k [t, \xi_k |e_0(t)|]\, |e_0(t)|\, d\mu(t).$$

Следовательно, из равенства (3.20) вытекает оценка

$$\int_{\Omega} \Phi_0 [t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant$$

$$\geqslant -\gamma \xi_k \int_{\Omega \setminus \Omega_k} g_k [t, \xi_k |e_0(t)|]\, |e_0(t)|\, d\mu(t),$$

т. е. оценка

$$\int_{\Omega} \Phi_0 [t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant k \gamma \xi_k \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |e_0(t)|\, d\mu(t). \qquad (3.21)$$

Если бы существовала ограниченная подпоследовательность $\xi_{k(j)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ то из оценки $\xi_{k(j)} \leqslant \eta < \infty$ неравенств (3.19) и (3.21) вытекало бы, что

$$\int_{\Omega} \Phi_0 [t, u_0 + c_2 |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant k(j)\, \gamma c_2 \int_{\Omega^*} |e_0(t)|\, d\mu(t),$$

где $\Omega^* = \{t : \eta\, |e_0(t)| \leqslant u_*\}$. Последняя оценка не может выполняться при всех j, так как левая ее часть конечна, $k(j) \to \infty$, а интеграл в правой части оценки положителен (так как, по предположению, $\chi(0; e_0) = 0$ и $\chi(\delta; e_0) > 0$ при $\delta > 0$). Значит,

$$\lim_{k \to \infty} \xi_k = \infty. \qquad (3.22)$$

В силу оценки (3.21)

$$\int_{\Omega} \Phi_0 [t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant k \gamma \xi_k \int\limits_{\left\{t:\, \frac{u_*}{2} < \xi_k |e_0(t)| \leqslant u_*\right\}} |e_0(t)|\, d\mu(t) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k \gamma u_*}{2} \operatorname{mes} \left\{ t : \frac{u_*}{2\xi_k} < |e_0(t)| \leqslant \frac{u_*}{\xi_k} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k \gamma u_*}{2} \left[\chi\left(\frac{u_*}{\xi_k}; e_0 \right) - \chi\left(\frac{u_*}{2\xi_k}; e_0 \right) \right].$$

Но в силу соотношений (1.35) и (3.22) при достаточно больших k справедливо неравенство

$$\chi\left(\frac{u_*}{\xi_k}; e_0 \right) - \chi\left(\frac{u_*}{2\xi_k}; e_0 \right) \geqslant (\beta - 1)\, \chi\left(\frac{u_*}{2\xi_k}; e_0 \right).$$

Поэтому при больших k справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \Phi_0 [t, u_0 + \xi_k |e_0(t)|]\, d\mu(t) \geqslant \frac{k \gamma u_* (\beta - 1)}{2}\, \chi\left(\frac{u_*}{2\xi_k}; e_0 \right),$$

т. е. оценка

$$\frac{\chi(\delta_k; e_0)}{\int\limits_\Omega \Phi_0[t, u_0 + R\delta_k^{-1} \mid e_0(t) \mid] \, d\mu(t)} \leqslant \frac{2}{k\gamma u_*(\beta - 1)}, \tag{3.23}$$

в которой $\delta_k = {}^1/_2\, u_* \xi_k^{-1}$, $R = u_*/2$. Из неравенства (3.23) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\chi(\delta_k; e_0)}{\int\limits_\Omega \Phi_0[t, u_0 + R\delta_k^{-1} \mid e_0(t) \mid] \, d\mu(t)} = 0.$$

Из последнего равенства вытекает (1.37), так как из $\xi_k \to \infty$ следует, что $\delta_k \to 0$. Равенство (1.37) доказано.

4. Вынужденные колебания

4.1. Задача о вынужденных колебаниях. Рассмотрим систему, которая описывается (см., например, [25]) уравнением

$$L(d/dt)\, x = M(d/dt)\, f(t, x). \tag{4.1}$$

Пусть степени вещественных многочленов

$$L(p) = p^l + a_1 p^{l-1} + \ldots + a_l, \quad M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m \tag{4.2}$$

связаны условием $l > m$. Предполагается, что функция $f(t, x)$ непрерывна по x, измерима и T-периодична по переменной t. Нас будут интересовать нелокальные условия существования T-периодических решений уравнения (4.1) и возможность их приближенного построения методом гармонического баланса (см., например, [20, 85, 89]).

Предположим, что числа $\omega_k i$, где

$$\omega_k = 2k\pi T^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

не являются корнями уравнения $L(p) = 0$. Тогда T-периодические решения уравнения (4.1) совпадают с решениями нелинейного интегрального уравнения

$$x(t) = \int\limits_0^T G(t - s; T)\, f[s, x(s)]\, ds, \tag{4.4}$$

где $G(u; T)$ — импульсно-частотная характеристика [89] линейного звена с дробно рациональной передаточной функцией

$$W(p) = M(p) \,/\, L(p). \tag{4.5}$$

Задача о T-периодических решениях уравнения (4.1) эквивалентна задаче о решении операторного уравнения

$$x = Afx, \tag{4.6}$$

где $\mathfrak{f}$ — оператор суперпозиции (1.2), а

$$Ax(t)=\int_0^T G(t-s;\,T)\,x(s)\,ds. \qquad (4.7)$$

Простая проверка показывает, что оператор A действует и вполне непрерывен в пространстве $L_2 = L_2$ ([0, T], R^1). Оператор (4.7) вполне непрерывен как оператор из L_2 в пространство C^{l-m-1} функций, непрерывных вместе с производными до порядка $l - m - 1$ и как оператор из пространства C непрерывных функций в пространство C^{l-m}.

Во всех построениях этого раздела предполагается, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет оценке

$$|f(t,x)| \leqslant a\,|x| + b, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \; x \in R^1. \qquad (4.8)$$

Поэтому оператор $A\mathfrak{f}$ вполне непрерывен в пространстве L_2.

Пусть $H_0 \subset L_2$ — одномерное подпространство функций-констант, а H_k, $k = 1, 2, \ldots$ — двумерное подпространство с базисом из функций $\cos \omega_k t$ и $\sin \omega_k t$. Подпространства H_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ взаимно ортогональны и инвариантны для оператора (4.7); их прямая сумма совпадает со всем пространством L_2. При каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено равенство

$$\|Ax\| = |W(\omega_k i)|\,\|x\|, \qquad x \in H_k. \qquad (4.9)$$

Поэтому

$$\|A\| = \|A\|_{L_2\to L_2} = w(T) = \max_{k=0,1,2,\ldots} |W(\omega_k i)|. \qquad (4.10)$$

Из принципа Шаудера следует, что неравенство $aw(T) < 1$ влечет существование по крайней мере одного T-периодического решения у уравнения (4.1). Теорема 1.1 позволяет установить более сильный результат.

4.2. Метод гармонического баланса. Обозначим через R_N ортогональный проектор в L_2 на $(2N+1)$-мерное подпространство тригонометрических многочленов

$$x_N(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{N} (\xi_k \cos \omega_k t + \eta_k \sin \omega_k t). \qquad (4.11)$$

В методе гармонического баланса приближенное решение (приближение порядка N) ищется в виде многочлена (4.11). Для отыскания его коэффициентов составляется функция $R_N f[t, x_N(t)]$ и уравнение (4.1) заменяется «приближенным» уравнением

$$L(d/dt)\,x_N(t) = M(d/dt)\,R_N f[t, x_N(t)l]. \qquad (4.12)$$

Уравнение (4.12) — это система из $2N+1$ скалярных уравнений с $2N+1$ неизвестными (коэффициентами ξ_k и η_k).

Уравнение (4.12) эквивалентно операторному уравнению

$$x = AR_N\mathfrak{f}x. \qquad (4.13)$$

Метод гармонического баланса называется реализуемым, если при каждом N уравнение (4.12) разрешимо. Метод гармонического баланса реализуем в шаре радиуса ρ, если при каждом N уравнение (4.12) имеет решения в шаре $\| x \| \leqslant \rho$ пространства L_2.

Обозначим через $F \subset L_2$ множество всех решений уравнения (4.6), а через $F(\rho)$ — часть множества F, лежащую в шаре $\| x \| \leqslant \leqslant \rho$. Аналогично, через F_N обозначим множество решений уравнения (4.13), а через $F_N(\rho)$ — часть множества F_N, лежащую в шаре $\| x \| \leqslant \rho$. Каждое из множеств $F(\rho)$ и $F_N(\rho)$ компактно в C^{l-m-1}; тем более они компактны в C и L_2.

Метод гармонического баланса называют сходящимся по норме пространства B, если F, $F_N \in B$ и хаусдорфово уклонение $\theta(F_N, F; B)$ в B множества F_N от множества F стремится к нулю при $N \to \infty$. Метод гармонического баланса приближенного построения T-периодических решений уравнения (4.1) сходится в шаре $\| x \| \leqslant \rho$ в L_2 по норме пространства B, если $F(\rho)$, $F_N(\rho) \in \in B$ и $\theta(F_N(\rho), F(\rho); B) \to 0$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{x_N \in F_N(\rho)} \min_{x \in F(\rho)} \| x - x_N \|_B = 0. \tag{4.14}$$

Если $aw(T) < 1$, то [56] метод гармонического баланса реализуем, все множества F и F_N лежат в шаре радиуса $\| x \| \leqslant \rho = b\sqrt{T}\,[1 - aw(T)]^{-1}$ и метод сходится в этом шаре по норме пространства C^{l-m-1}. Теорема 1.1 позволяет установить более точные результаты.

4.3. Леммы. Установим оценку функций (1.5), соответствующих нормированным решением дифференциального уравнения

$$y^{(k)} + q_1(t)\, y^{(k-1)} + \ldots + q_k(t)\, y = 0 \tag{4.15}$$

с непрерывными на промежутке $\Omega = [0, T]$ коэффициентами.

Пусть J — некоторый промежуток, лежащий на Ω. Сопоставим каждой измеримой на Ω функции $x(t)$ функцию

$$\chi_J(\delta; x) = \operatorname{mes}\{t : t \in J,\ | x(t) | \leqslant \delta\}. \tag{4.16}$$

При $J = \Omega$ функция (4.16) превращается в функцию $\chi(\delta; e)$.

Лемма 4.1. *Для каждой $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$, любого промежутка $J \subset \Omega$, и каждого $\delta_* > 0$ (при котором $\chi_J(\delta_*; x) > 0$) существуют такие точки $\tau_{xr}(\delta_*, J) \subset J$ $(r = 0, 1, \ldots, k - 1)$, что*

$$| x^{(r)}(\tau_{xr}(\delta_*, J)) | \leqslant 2^{r(r+1)} [\chi_J(\delta_*, x)]^{-r} \delta_*. \tag{4.17}$$

Доказательство. Возможность выбора точки $\tau_{x0}(\delta_*, J)$ вытекает из условия $\chi_J(\delta; x) > 0$. Воспользуемся принципом индукции. Допустим, что при $r = r_0 < k - 1$ точки $\tau_{xr}(\delta_*, J)$ могут быть выбраны при каждом $\delta_* > 0$ и для каждого промежутка J. Опишем способ построения точек $\tau_{xr}(\delta_*, J)$ при $r = r_0 + 1$.

Разобьем промежуток $J \subset \Omega$ на три непересекающиеся и последовательно примыкающие друг к другу промежутка J_1, J_2 и J_3 так, чтобы выполнялись равенства $\chi_{J_1}(\delta_*; x) = \chi_{J_3}(\delta_*; x) =$

$= {}^1/_4\ \chi_J\ (\delta_*;\ x)$ и $\chi_{J_2}\ (\delta_*;\ x) = {}^1/_2\chi_J\ (\delta_*;\ x)$. По предположению индукции найдутся такие точки $\tau_1 = \tau_{xr_0}\ (\delta_*, J_1) \subset J_1$, $\tau_3 = \tau_{xr_0}\ (\delta_*, J_3) \subset J_3$, что

$$| x^{(r_0)} (\tau_1) |, | x^{(r_0)} (\tau_3) | \leqslant 2^{r_0(r_0+1)} \left[\frac{1}{4} \chi_J (\delta_*; x) \right]^{-r_0} \delta_*.$$

При этом $| \tau_1 - \tau_3 | \geqslant \text{mes}\ J_2 \geqslant {}^1/_2\chi_J\ (\delta_*;\ x)$, и поэтому

$$\left| \frac{x^{(r_0)} (\tau_1) - x^{(r_0)} (\tau_3)}{\tau_1 - \tau_3} \right| \leqslant 2^{r_0^2+3r_0+1} [\chi_J [\delta_*; x)]^{-r_0-1} \delta_*.$$

Из этого неравенства и формулы конечных приращений вытекает существование точки $\tau \in J$, такой, что

$$| x^{(r_0+1)} (\tau) | \leqslant 2^{(r_0+1)(r_0+2)} [\chi_J (\delta_*; x)]^{-r_0-1} \delta_*.$$

Для завершения шага индукции достаточно положить $\tau_{x(r_0+1)} (\delta_*, J) = \tau$. Лемма 4.1 доказана.

Обозначим через E_0 множество решений уравнения (4.15), а через S_0 — множество функций $e\ (t) \in E_0$, $\| e \| = 1$.

Л е м м а 4.2. *Пусть* $k > 1$. *Существует такое* $c > 0$, *что*

$$\chi (\delta, e) \leqslant c\delta^{\frac{1}{k-1}},\ \delta > 0; \qquad e\,(t) \in S_0. \tag{4.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\gamma\ (t,\ e) = \max\ \{| e\ (t) |,\ | e'\ (t) |, \ldots, | e^{(k-1)}\ (t) |\}. \tag{4.19}$$

Функция (4.19) непрерывна по совокупности переменных $t \in \Omega$, $e \in S_0$ и положительна. Так как значения каждой переменной принадлежат компакту, то $\gamma\ (t,\ e) > 2\gamma_0 > 0$, $t \in \Omega$, $e \in S_0$.

Допустим, что утверждение леммы 4.2 неверно. Тогда найдутся последовательности функций $e_n\ (t) \in S_0$ и положительных чисел δ_n, для которых

$$\text{mes}\,\{t\colon t \in \Omega, | e_n (t) | \leqslant \delta_n\} \geqslant n\delta_n^{\frac{1}{k-1}}. \tag{4.20}$$

Из этого неравенства следует оценка $\delta_n \leqslant T^{k-1}n^{-k+1}$, $n = 1, 2, \ldots$; поэтому $\delta_n \to 0$. Последовательность функций $e_n\ (t)$ можно считать сходящейся к некоторой функции $e_*\ (t) \in S_0$ равномерно вместе с производными до порядка $k - 1$.

Так как $\gamma\ (t,\ e) > 2\gamma_0$, то открытые множества

$$\Pi_j = \{t : | e_*^{(j)}\ (t) | > 2\gamma_0\},\quad j = 0, 1, \ldots, k - 1 \tag{4.21}$$

покрывают промежуток Ω. Но промежуток Ω компактен, поэтому можно построить конечное покрытие открытого промежутка $(0, T)$ системой содержащихся в $(0,\ T)$ открытых промежутков $J_1, \ldots, J_m$, каждый из которых содержится в одном из множеств (4.21). По построению, каждому j отвечает такое $q_j \in \{0, 1, \ldots$ $\ldots, k - 1\}$, что $| e_*^{(q_j)}\ (t) | > 2\gamma_0$, $t \in J_j$. Отсюда следует существование такого n_0, что

$$| e_n^{(q_j)}\ (t) | > \gamma_0,\ t \in J_j,\ j = 1, \ldots, m,\ n \geqslant n_0. \tag{4.22}$$

В силу соотношений (4.20) при каждом $n = 1, 2, \ldots$ в покрытии $J_1, \ldots, J_m$ найдется такой промежуток $J(n)$, что

$$\operatorname{mes}\{t\colon t \in J(n),\ |e_n(t)| \leqslant \delta_n\} \geqslant \frac{n}{m}\,\delta_n^{\frac{1}{k-1}}.$$

Следовательно, существует бесконечная последовательность индексов $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ и один фиксированный промежуток J_{i_0} из покрытия $J_1, \ldots, J_m$, для которых

$$\operatorname{mes}\{t : t \in J_{i_0},\ |e_{n_j}(t)| \leqslant \delta_{n_j}\} \geqslant \frac{n_j}{m}\,\delta_{n_j}^{\frac{1}{k-1}},$$

или, что то же (см. (4.16)),

$$\chi_{J_{i_0}}(\delta_{n_j}; e_{n_j}) \geqslant \frac{n_j}{m}\,\delta_{n_j}^{\frac{1}{k-1}}. \tag{4.23}$$

В силу леммы 4.1 из неравенства (4.23) вытекает существование таких точек

$\tau_{rj} \in J_{i_0}$ $(r = 0, \ldots, k-1;\ j = 1, 2, \ldots)$, что

$$|e_{n_j}^{(r)}(\tau_{rj})| \leqslant c\delta_{n_j}^{1-\frac{r}{k-1}} n_j^{-r},\quad c = 2^{r(r+1)}m^r.$$

С другой стороны, в силу соотношений (4.22)

$$|e_{n_j}^{(q_{i_0})}(t)| > \gamma_0,\quad t \in J_{i_0},\ j = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому

$$\gamma_0 < c\delta_{n_j}^{1-\frac{q_{i_0}}{k-1}} n_j^{-q_{i_0}},\quad j = 1, 2, \ldots.$$

Последняя оценка противоречит положительная числа γ_0 (так как предел правой части равен нулю). Лемма 4.2 доказана.

4.4. Подпространство E_0 тригонометрических многочленов. Обозначим через $E_0 \subset L_2$ линейную оболочку подпространств H_k с теми индексами k, при которых $|W(\omega_k i)| = w(T)$, где $w(T)$ — число (4.10). Так как $W(\omega_k i) \to 0$ при $k \to \infty$, то подпространство E_0 конечномерно. Очевидно равенство

$$\|Ax\| = w(T)\,\|x\|,\quad x \in E_0. \tag{4.24}$$

Обозначим через E_1 ортогональное в L_2 дополнение к E_0. Из определения оператора A вытекает оценка

$$\|Ax\| \leqslant \lambda_1 \|x\|,\ x \in E_1, \tag{4.25}$$

где

$$\lambda_1 = \max_{k=0,1,\ldots;\ |W(\omega_k i)| \neq |w(T)|} |W(\omega_k i)|. \tag{4.26}$$

Максимум в правой части (4.26) достигается, так как $W(\omega_k i) \to 0$; по этой же причине $\lambda_1 < w(T)$. Соотношения (4.24) и (4.25) можно рассматривать как условие (1.4), в котором $\lambda_0 = w(T)$.

Чтобы применить теорему 1.1 к исследованию уравнений (4.6) и (4.13) задачи о существовании вынужденных T-периодических режимов и методе гармонического баланса, нужно уметь оценивать функции (1.5), построенные по нормированным функциям $e(t) \in E_0$. Подпространсто E_0 — это множество решений некоторого линейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка $\dim E_0$ с постоянными коэффициентами. Можно показать, что $\dim E_0 \leqslant 2l$, причем примеры показывают неулучшаемость этой оценки. Из леммы 4.2 вытекает

Теорема 4.1. *Существует такое $c_1 > 0$, что*

$$\chi(\delta; e) \leqslant c_1 \delta^{\frac{1}{2l-1}}, \quad \delta \geqslant 0; \quad e(t) \in E_0, \quad \|e\| = 1. \tag{4.27}$$

4.5. Теоремы о вынужденных колебаниях. В этом пункте продолжается изучение уравнения (4.1) и предполагается, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию (1.7) (в котором $\Omega = [0, T]$). Пусть $\Omega_0 \subset [0, T]$ — то множество положительной меры, на котором положительна функция (1.8) при $u \geqslant u_*$. Пусть

$$\Psi(t, u) \geqslant \Psi_1(u), \quad t \in \Omega_0, \quad u \geqslant u_*, \tag{4.28}$$

где $\Psi_1(u)$ положительна и функция $\Phi_1(u) = u\Psi_1(u)$ не возрастает.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условие*

$$\lim_{u\to\infty} u^{\frac{2l}{2l-1}} \Psi_1(u) = \infty. \tag{4.29}$$

Тогда существует $k_0 > [w(T)]^{-1}$, такое, что при $k < k_0$ уравнение (4.1) имеет по крайней мере одно $l - m - 1$ раз непрерывно дифференцируемое T-периодическое решение.

Теорема 4.3. *Пусть выполнеы условия теоремы 4.2. Тогда метод гармонического баланса приближенного построения T-периодических решений уравнения (4.1) реализуем.*

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы 4.2 и $k \leqslant [w(T)]^{-1}$. Тогда метод гармонического баланса приближенного построения T-периодических решений уравнения (4.1) сходится вместе с производными до порядка $l - m - 1$.*

Разрешимость в пространстве L_2 уравнений (4.6) и (4.13) в условиях теорем 4.2 и 4.3 непосредственно вытекает из теорем 1.1 и 4.1. Поэтому для доказательства теорем 4.2 и 4.3 остается заметить, что линейный интегральный оператор (4.8) действует из L_2 в пространство C^{l-m-1}. Для установления сходимости метода гармонического баланса в условиях теоремы 4.4 без изменения применимы конструкции, изложенные в работе [59].

4.6. Ослабление ограничения (4.29). В теореме 4.1 не учитывается размерность подпространства E_0.

Если $\dim E_0 = 1$, то условие (4.29) становится излишним — достаточно, чтобы функции $\Psi_1(u)$ была положительной при $u \geqslant u_*$.

Пусть $\dim E_0 > 1$. Тогда в силу леммы 4.2 справедливы оценка

$$\chi(\delta; e) \leqslant c_1 \delta^{\frac{1}{\dim E_0 - 1}}, \quad \delta \geqslant 0; e(t) \in E_0, \| e \| = 1;$$

поэтому (4.29) можно заменить менее ограничительным условием

$$\lim_{u \to \infty} u^{\frac{\dim E_0}{\dim E_0 - 1}} \Psi_1(u) = \infty. \tag{4.30}$$

Если $\dim E_0 = 2$, то (4.30) может быть заменено еще менее ограничительным условием

$$\int_{u_*}^{\infty} u \Psi_1(u)\, du = \infty. \tag{4.31}$$

Последнее утверждение также выводится из теоремы 1.1. Нам не удалось выяснить, можно ли в случаях, когда $\dim E_0 > 2$, заменить условие (4.30) аналогичным (4.31) предположением

$$\int_{u_*}^{\infty} u^{\frac{1}{\dim E_0 - 1}} \Psi_1(u)\, du = \infty.$$

В заключение заметим, что в условиях теоремы 4.2 (без дополнительного предположения $k \leqslant [w(T)]^{-1}$) метод гармонического баланса реализуем и сходится в некотором шаре $\| x \| \leqslant \rho$.

5. Дополнительные замечания

5.1. Задача с запаздыванием. Теорема 1.1 без изменений доказательства переносится на операторное уравнение $x = A\mathfrak{F}x$ с оператором $\mathfrak{F}$, допускающим такие же оценки, как и значения оператора суперпозиции. Это позволяет установить аналоги теорем 4.2—4.4 для задачи о T-периодических решениях уравнения вида

$$L(d/dt)\, x = M(d/dt)\, f[t, x(t), \quad x(t - h_1), \ldots, x(t - h_r)]. \tag{5.1}$$

Для этого достаточно положить [62]

$$S_h x(t) = \begin{cases} x(t-h) & \text{при } h < t \leqslant T, \\ x(t - h + T) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant h \end{cases} \tag{5.2}$$

и свести задачу о T-периодических решениях уравнения (5.1) к задаче о разрешимости в L_2 операторного уравнения

$$x(t) = Af[t, x, S_{h_1} x, \ldots, S_{h_r} x]. \tag{5.3}$$

Уравнения метода гармонического баланса будут иметь вид

$$x(t) = AR_N f[t, x, S_{h_1} x, \ldots, S_{h_r} x]. \tag{5.4}$$

5.2. Уравнения с неограниченными операторами. Теорема 1.1 обобщается и на некоторые классы уравнения $x = A\mathfrak{F}x$ с операторами $\mathfrak{F}$, которые определены лишь на плотных в L_2 множествах и не обладают свойством непрерывности. Наиболее важен, по-видимому, тот случай, когда линейный оператор A обладает настолько «хорошими» свойствами, что из них следует полная непрерывность в L_2 оператора $\mathfrak{F}A$. В этом случае можно от уравнения $x = A\mathfrak{F}x$ перейти к эквивалентному уравнению $y = \mathfrak{F}Ay$ и для доказательства его разрешимости применить теорему 2.1 и конструкции из разд. 3. Такой подход позволяет получить признаки существования T-периодических режимов и возможности их приближенного построения для уравнений вида

$$L\,(d/dt)\,x = M\,(d/dt)\,f\,(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{l-m-1}), \tag{5.5}$$

описывающих системы, в которых управление синтезируется не только по выходу $x\,(t)$ линейного звена, но и по производным этого выхода.

5.3. Другие классы задач. Изложенные конструкции применимы и в случаях, когда нелинейности одновременно содержат запаздывания, производные, выходы звеньев с гистерезисом и т. д. Они применимы и в задачах нейтрального типа (см., например, [57, 91]).

5.4. Топологический индекс множества решений. При доказательстве теоремы 1.1 был использован вспомогательный оператор (3.12). Было показано, что вполне непрерывный оператор $A\mathfrak{F}$ преобразует все L_2 в некоторое компактное множество, а его неподвижные точки лежат в шаре $\|x\| \leqslant \rho$. Поэтому вращение векторного поля $x - A\mathfrak{F}x$ на сфере $\|x\| = \rho$ равно 1. Но на сфере $\|x\| = \rho$ значения оператора (3.12) совпадают со значениями оператора (1.2). Следовательно, вращение γ векторного поля $x - A\mathfrak{f}x$ на сфере $\|x\| = \rho$ также равно 1.

Равенство $\gamma = 1$ по общим схемам может быть использовано для оценок числа решений, получения признаков существования ненулевых решений, обоснования применимости различных проекционных процедур и др.

8

КРИТЕРИИ КОНЕЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Анализ задач математической теории систем связан с изучением структуры множества решений нелинейных уравнений (см., например [1, 25, 86]). Как правило, нелинейные уравнения сложны для исследования и их приходится каким-либо способом «упрощать». В одних случаях это приводит к правильным выводам о строении множества решений исходных уравнений, в других — к ложным. Часто интерес представляют малые решения уравнений. В этом случае распространенным способом упрощения уравнений является их усечение, т. е. отбрасывание в степенных разложениях левых частей слагаемых высоких степеней. Переход к усеченным уравнениям аналогичен анализу устойчивости по первому приближению, анализу бифуркаций в нелинейных задачах переходом к линеаризованным уравнениям и др. (см., например, [25, 71, 86]). В главе изучается вопрос о допустимости усечения при исследовании систем вещественных нелинейных уравнений.

1. Конечная определенность уравнений

1.1. Рассмотрим систему вещественных нелинейных уравнений

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_m(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in R^n$, $f_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и функции $f_j(x)$ определены в окрестности нуля.

Будем считать, что система уравнений (1.1) недоопределена, т. е. $m < n$. Наряду с (1.1) рассмотрим систему

$$\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = \ldots = \tilde{f}_m(x) = 0, \tag{1.2}$$

где $\tilde{f}_j(0) = 0$. Скажем, что множества $f^{-1}(0)$ и $\tilde{f}^{-1}(0)$ решений систем (1.1) и (1.2) локально (в окрестности нуля) топологически эквивалентны, если найдутся окрестности U и $\tilde{U}$ точки $x = 0$ и гомеоморфизм φ окрестности U на $\tilde{U}$, такой, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi\{f^{-1}(0) \cap U\} = \tilde{f}^{-1}(0) \cap \tilde{U}$.

Локально топологически эквивалентные множества решений систем (1.1) и (1.2) в окрестности нуля не только гомеоморфны между собой, но и одинаково вложены в R^n. Например, множества решений уравнений $z^{p_1} + u^{q_1} = 0$, $z^{p_2} + u^{q_2} = 0$, где z и u — комплексные числа (каждое из этих уравнений можно трактовать как систему двух вещественных уравнений с четырьмя вещественными неизвестными), локально гомеоморфны между собой (и гомеоморфны окрестности нуля в R^2). Однако при $p_1q_2 \neq p_2q_1$ множества решений этих уравнений по-разному вложены в R^4 (см., например, [79]), и поэтому не являются топологически эквивалентными в окрестности нуля.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение и $|\cdot|$ — отвечающая ему норма в R^n. Класс $j_0^r(f)$ эквивалентности, состоящий из отображений $\tilde{f}$, для которых $\tilde{f}(x) - f(x) = o(|x|^r)$, называют струей порядка r отображения f (в точке $x = 0$). Отображение $f: R^n \to R^m$ принадлежит классу гладкости C^k, если все его компоненты f_j имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно.

Пусть $f \in C^k$, $r \leqslant k$. Назовем r-усечением отображения $f(x)$ векторный многочлен $f^{(r)}(x)$, являющийся отрезком разложения Тейлора в нуле отображения $f(x)$, в котором удержаны только слагаемые степени, не превосходящей r.

1.2. Отбросим в уравнениях $x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 - x_2^9 = 0$, $x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 - x_2^8 = 0$ слагаемые выше четвертой степени, т. е. проведем 4-усечение левых частей. Тогда усеченное уравнение $x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_1^4 + x_2^4 = (x_1 - x_2^2)^2 + x_1^4 = 0$ имеет единственное решение $x_1 = x_2 = 0$. Первое из полных уравнений также имеет единственное решение ($x_1 = x_2 = 0$), а второе полное уравнение — континуум решений ($x_1 = x_2^2$). Таким образом, усечение уравнений не всегда допустимо.

1.3. Пусть в системе (1.1) $f_j \in C^k$. Скажем, что система уравнений (1.1) в окрестности нуля топологически r-определена в классе C^k, ($k \geqslant r$), если множество решений каждой системы уравнений (1.2), удовлетворяющей условию $\tilde{f} \in j_0^r(f) \cap C^k$, локально топологически эквивалентно множеству решений системы (1.1). Очевидно, r-определенность системы уравнений (1.1) — это свойство струи $j_0^r(f)$, а поскольку струя $j_0^r(f)$ может быть отождествлена с усечением $f^{(r)}(x)$ отображения $f(x)$, то r-определенность — это фактически свойство многочлена $f^{(r)}(x)$. Систему уравнений называют конечноопределенной, если она r-определена при некотором r.

Если уравнения (1.1) r-определены, то множества малых решений уравнений (1.1) и усеченных уравнений

$$f_1^{(r)}(x) = f_2^{(r)}(x) = \ldots = f_m^{(r)}(x) = 0 \tag{1.3}$$

топологически устроены одинаково: эти множества «одинаково расположены» в окружающем пространстве, имеют одинаковое число компонент связности в $R^n \setminus \{0\}$ и т.д.

Если уравнения (1.1) не r-определены, то множества решений систем (1.1) и (1.3) могут иметь различную топологическую структуру и применять усечение (при данном r), вообще говоря, нельзя.

1.4. Понятие r-определенности уравнений родственно понятию простоты решений. Топологическая r-определенность уравнений означает, что все множество малых решений устойчиво в указанном выше смысле по отношению к операции усечения. Во многих задачах важно знать, однако, что устойчиво (в определенном смысле) не все множество малых решений, а лишь некоторые фиксированные малые решения. Важный класс таких устойчивых (в частности, по отношению к операции усечения) решений составляют так называемые простые решения [63].

Обозначим через $Df(x)$ матрицу Якоби $(\partial f_i/\partial x_j)$ отображения $f(x)$. Пусть ранг матрицы $Df(0)$ равен m, т. е. максимально возможный. Тогда по теореме о неявной функции множество малых решений уравнений (1.1) образует $(n-m)$-мерное топологическое подмногообразие R^n, проходящее через нуль. Таково же множество малых решений уравнений (1.3), где $r=1$. Следовательно, уравнения (1.1) 1-определены и при их исследовании можно проводить операцию 1-усечения, т. е. линеаризацию.

Более сложен случай, когда ранг матрицы Якоби $Df(0)$ меньше m. При этом большинство признаков конечной определенности уравнений основано на следующем замечании: уравнения (1.1) r-определены, если векторный многочлен $f^{(r)}(x)$ r-достаточен в смысле теории особенностей [2]. Критерии r-достаточности, они же — достаточные условия r-определенности, приведены, например, в монографии [2]. Полученные таким образом достаточные условия не позволяют ответить на вопрос о конечной определенности, например, «вырожденного» уравнения $(x_1^2+x_2^2)^2=0$; из приводимых ниже теорем будет видно, что это уравнение 4-определено.

Необходимые и достаточные условия конечной определенности уравнений получены в работах [34, 35]. Эти условия требуют проверки некоторых соотношений для бесконечного числа функций — левых частей уравнений (1.1). Ниже излагаются другие, как нам кажется, более конструктивные критерии конечной определенности вещественных уравнений.

2. Формулировка критерия конечной определенности

2.1. Пусть сопряженная к $Df(x)$ матрица $Df(x)^*$ состоит из m векторов-столбцов $\nabla f_j(x)$ градиентов функций $f_j(x)$.

Сопоставим отображению $f(x)$ нелинейные функционалы

$$\Phi(f;\ x,\ y) = |f(x)|^2 |y|^2 + |Df(x)^* y|^2 |x|^2, \tag{2.1}$$

$$\Psi(f;\ x,\ y) = |f(x)|\,|y| + |Df(x)^* y|\,|x| - |(Df(x)^* y,\ x)|. \tag{2.2}$$

Эти функционалы определены при малых $x\in R^n$ и всех $y\in R^m$.

Т е о р е м а 2.1. *Система* (1.1) *в окрестности нуля топологически r-определена в классе C^{r+1}, $r\geqslant 1$, если и только если*

$$|y|^{-2}\,|x|^{-(2r+2)}\,\Phi(f^{(r)};\ x,\ y)\to\infty \text{ при } x\to 0,\ x\neq 0 \tag{2.3}$$

равномерно по $y \neq 0$, *т. е. равномерно по* $y \neq 0$

$$|y|^{-1}|x|^{-(r+1)} \Psi(f^{(r)}; x, y) \to \infty \text{ при } x \to 0, x \neq 0. \qquad (2.4)$$

Теорема 2.2. *Система* (1.1) *в окрестности нуля топологически r-определена в классе* C^r, $r \geqslant 2$, *если и только если*

$$|y|^{-2}|x|^{-2r}\Phi(f^{(r)}; x, y) \geqslant q^2 > 0 \qquad (2.5)$$

при $y \neq 0$ *и малых* $x \neq 0$, *т. е. при этих значениях* y *и* x

$$|y|^{-1}|x|^{-r}\Psi(f^{(r)}; x, y) \geqslant q > 0. \qquad (2.6)$$

2.2. В качестве примера применения сформулированных теорем рассмотрим задачу о малых автоколебаниях в системе, описываемой уравнением $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \omega^2 x + p(\varepsilon, x, \dot{x}) = 0$. Пусть ε — малый параметр, функция $p(\varepsilon, x, y)$ гладкая и $p(\varepsilon, 0, 0) = p'_x(\varepsilon, 0, 0) = p'_y(\varepsilon, 0, 0) = 0$. Изменением масштаба времени и «растяжением» параметра ε рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{\pi}\dot{x} + x + \frac{1}{\omega^2} p\left(\frac{\lambda\omega}{\pi}, x, \omega\dot{x}\right) = 0. \qquad (2.7)$$

Пусть $x = x(t, \lambda, \xi, \eta)$ — решение уравнения (2.7), удовлетворяющее начальным условиям $x(0, \lambda, \xi, \eta) = \xi$, $x'_t(0, \lambda, \xi, \eta) = \eta$. Тогда существование периодических решений периода T уравнения (2.7) в силу принципа Пуанкаре—Андронова [1, 62] равносильно разрешимости недоопределенной системы нелинейных уравнений

$$x(T, \lambda, \xi, \eta) = \xi, \quad x'_t(T, \lambda, \xi, \eta) = \eta. \qquad (2.8)$$

Левые части уравнений (2.8) легко вычисляются (см., например, [62]). С точностью до квадратичных членов по переменным $\tau = T - 2\pi$ и λ, ξ, η они имеют вид $x(T, \lambda, \xi, \eta) = \xi + \lambda\xi + \tau\eta + \ldots$, $x'_t(T, \lambda, \xi, \eta) = \eta - \tau\xi + \lambda\eta + \ldots$. Следовательно, можно рассмотреть усеченную систему уравнений

$$\lambda\xi + \tau\eta = 0, \quad \tau\xi - \lambda\eta = 0. \qquad (2.9)$$

Множество решений уравнений (2.9) состоит из двух плоскостей в пространстве четверок $\{\tau, \lambda, \xi, \eta\}$, имеющих единственную общую точку — нуль.

Уравнения (2.9) 2-определены. Действительно, обозначим вектор $\{\tau, \lambda, \xi, \eta\}$ через X, введем вспомогательный вектор $Y = \{u, v\}$ и положим $f_1(X) = \lambda\xi + \tau\eta$, $f_2(X) = \tau\xi - \lambda\eta$. Тогда

$$\Phi(f; X, Y) = \{(\lambda\xi + \tau\eta)^2 + (\tau\xi - \lambda\eta)^2\}(u^2 + v^2) + \{(\lambda u + \tau v)^2 + (\tau u - \lambda v)^2 + (\xi u - \eta v)^2 + (\eta u + \xi v)^2\}(\tau^2 + \lambda^2 + \xi^2 + \eta^2).$$

После приведения подобных членов получаем $\Phi(f; X, Y) = \{(\tau^2 + \lambda^2)(\xi^2 + \eta^2) + |X|^4\}|Y|^2 \geqslant |X|^4|Y|^2$. Следовательно, по теореме 2.2 уравнения (2.9) 2-определены в классе C^2. Тогда множество малых решений системы уравнений (2.8) состоит из двух двумерных поверхностей, пересекающихся только в точке $\tau = \lambda = \xi = \eta = 0$. Существование одной поверхности решений системы (2.8) очевидно — это поверхность $\xi = \eta = 0$, отвечающая тривиальному периодическому решению $x(t) \equiv 0$ уравнения (2.7). Существование второй проходящей через точку $\tau = \lambda = \xi = \eta = 0$ поверхности решений системы уравнений (2.8), отличной от поверхности $\xi = \eta = 0$, говорит о том, что уравнения (2.8) имеют решения со сколь угодно малыми $\tau = T - 2\pi$ и λ и малыми ненулевыми ξ и η. Значит, уравнение (2.7) обладает малыми ненулевыми периодическими решениями при некоторых сколь угодно малых значениях параметра λ (ср. [48, 66]).

2.3. Так как функционалы (2.1) и (2.2) однородны по y, то можно считать, что в условиях (2.3)—(2.6) $|y| = 1$. Однородность функционалов (2.1) и (2.2) по y позволяет упростить формулировки теорем 2.1 и 2.2 в случае, когда (1.1) — одно уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{2.10}$$

Положим в этом случае $\Phi_0(f;\ x) = f^2(x) + |x|^2 |\nabla f(x)|^2$, $\Psi_0(f;\ x) = |f(x)| + |x|\,|\nabla f(x)| - |(x, \nabla f(x))|$.

Теорема 2.3. *Уравнение* (2.10) *в окрестности нулевого решения топологически r-определено в* C^{r+1} $(r \geqslant 1)$, *если и только если* $|x|^{-(2r+2)}\Phi_0(f^{(r)};\ x) \to \infty$ *при* $x \to 0$, $x \neq 0$ *или, что то же,* $|x|^{-(r+1)}\Psi_0(f^{(r)};\ x) \to \infty$ *при* $x \to 0$, $x \neq 0$.

Теорема 2.4. *Уравнение* (2.10) *в окрестности нулевого решения топологически r-определено в* C^r $(r \geqslant 2)$, *если и только если* $|x|^{-2r}\Phi_0(f^{(r)};\ x) \geqslant q^2 > 0$ *при малых* $x \neq 0$ *или, что то же,* $|x|^{-r}\Psi_0(f^{(r)};\ x) \geqslant q > 0$ *при малых* $x \neq 0$.

2.4. Положительность функционала $\Phi(f^{(r)}; x, y)$ при $y \neq 0$ и малых $x \neq 0$ означает, что $|Df^{(r)}(x)^* y| > 0$ при каждом $y \neq 0$ и всех малых ненулевых решениях уравнений (1.3), т. е. невырождена производная отображения $f^{(r)}(x)$ на решениях уравнений (1.3). Значит, неравенство $\Phi(f^{(r)}; x, y) > 0$ $(x, y \neq 0)$ можно трактовать как условие регулярности [90] малых ненулевых решений усеченной системы уравнений (1.3). Поэтому условия (2.3) и (2.5) можно назвать условиями «квалифицированной» регулярности малых ненулевых решений усеченной системы уравнений.

Аналогично, положительность функционала $\Psi(f^{(r)}; x, y)$ при $y \neq 0$ и малых $x \neq 0$ означает, что при каждом $y \neq 0$ и всех малых ненулевых решениях x уравнений (1.3) выполняется неравенство $|Df^{(r)}(x)^* y|\,|x| > |(Df^{(r)}(x)^* y, x)|$. Это неравенство является алгебраической записью условия трансверсальности пересечения множества малых ненулевых решений усеченных уравнений (1.3) со сферами $|x| = \varepsilon$ [90]. Поэтому условия (2.4) и (2.6) можно назвать условиями «квалифицированной» трансверсальности.

Структура множества малых решений одного полиномиального уравнения n переменных изучена в [79]. В общем случае конечно-определенных уравнений анализ структуры множества малых решений проведен в работах [34, 35]. Необходимые нам сведения приведены в леммах 3.3 и 3.5.

2.5. Кратностью векторного многочлена $p(x)$ относительно функционала (2.1) назовем число

$$\varkappa(p) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \sup_{|y|=1,\, |x|=\varepsilon} \frac{\ln \Phi(p; x, y)}{\ln \varepsilon}.$$

Условие (2.3) эквивалентно условию $\varkappa(f^{(r)}) < 2r + 2$, а условие (2.5) — условию $\varkappa(f^{(r)}) \leqslant 2r$. Поэтому для применения теорем 2.1—2.4 достаточно уметь вычислять $\varkappa(f^{(r)})$. Вычисление $\varkappa(f^{(r)})$ можно провести с помощью метода диаграммы Ньютона [63] и некоторых алгебраических конструкций, описанных в книге [79].

3. Начало доказательства теоремы 2.1

3.1. Докажем, что условие (2.3) эквивалентно условию (2.5), а условие (2.4) — условию (2.6).

Лемма 3.1. *Пусть g: $R^n \to R^m$ — многочлен, $g(0) = 0$. Тогда найдется $q > 0$, такое, что при $y \neq 0$ и малых $x \neq 0$ справедливы неравенства $q\Phi(g; x, y) \leqslant \Psi^2(g; x, y) \leqslant 2\Phi(g; x, y)$.*

Применив эту лемму к многочлену $g(x) = f^{(r)}(x)$, получаем требуемые эквивалентности. Для доказательства леммы 3.1 понадобится

Лемма об отборе кривых [79]. *Пусть $g_1(x), \ldots, g_{k+l}(x)$ $(x \in R^n)$ — вещественные многочлены. Если x_0 — точка из замыкания множества $U = \{x \in R^n$: $g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0,\ g_{k+1}(x) > 0, \ldots, g_{k+l}(x) > 0\}$, то существует вещественно-аналитическая кривая p: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to R^n$ $(\varepsilon > 0)$, такая, что $p(0) = x_0$, $p(t) \in U$ при $0 < t < \varepsilon$.*

Доказательство леммы 3.1. Неравенство $\Psi^2(g; x, y) \leqslant 2\Phi(g; x, y)$ очевидно. Неравенство $q\Phi(g; x, y) \leqslant \Psi^2(g; x, y)$ докажем от противного. Если оно не верно, то найдутся $x_i \to 0$ $(x_i \neq 0)$ $y_i \neq 0$ и $\psi_i \to 0$, такие, что $\varphi_i^2 = \Phi(g; x_i, y_i) > 0$ и $\Psi^2(g; x_i, y_i) = \psi_i^2 \Phi(g; x_i, y_i)$. В силу однородности последнего равенства по y_i без ограничения общности можно считать, что $|y_i| = 1$ и $y_i \to y_*$, $|y_*| = 1$.

Запишем систему полиномиальных равенств и неравенств:

$$\begin{gathered}\Phi(g; x, y) = \varphi^2, \quad |g(x)|^2 |y|^2 = u^4, \\ |Dg(x)^* y|^2 |x|^2 = v^4, \quad (Dg(x)^* y, x)^2 = w^4, \\ |x|^2 > 0, \quad |y|^2 > 0, \quad \varphi > 0, \quad \psi > 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Множество, выделяемое соотношениями (3.1), непусто, и точка $x = \varphi = \psi = u = v = w = 0$, $y = y_*$ принадлежит его замыканию. Следовательно, по лемме об отборе кривых найдутся вещественно-аналитические функции $x(t)$ ($x(0)=0$, $x(t)\neq 0$ при $0<t<\varepsilon$), $y(t)$ ($y(0)=y_*$), $\varphi(t)$ ($\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$ при $0<t<\varepsilon$) и $\psi(t)$ ($\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$ при $0<t<\varepsilon$), такие что $\Phi[g; x(t), y(t)]=\varphi^2(t)$, $\Psi[g; x(t), y(t)]=\psi(t)\varphi(t)$ или, что то же в силу (2.1) и (2.2),

$$|g[x(t)]|^2\,|y(t)|^2+|Dg[x(t)]^*y(t)|^2\,|x(t)|^2=\varphi^2(t) \tag{3.2}$$

и соответственно

$$|g[x(t)]|\,|y(t)|+|Dg[x(t)]^*y(t)|\,|x(t)|-\\ -|(Dg[x(t)]^*y(t),\ x(t))|=\psi(t)\varphi(t). \tag{3.3}$$

Из этого равенства вытекает оценка

$$|g[x(t)]|\,|y(t)|\leqslant\psi(t)\varphi(t), \tag{3.4}$$

откуда в силу равенства (3.2)

$$|Dg[x(t)]^*y(t)|\,|x(t)|\geqslant\varphi(t)\sqrt{1-\psi^2(t)}. \tag{3.5}$$

Из формулы (3.3) следует, что $|Dg[x(t)]^*y(t)|\,|x(t)|-|(Dg[x(t)]^*y(t),\ x(t))|\leqslant\psi(t)\varphi(t)$. Разделив обе части этого неравенства на $|Dg[x(t)]^*y(t)|\,|x(t)|$, получаем в силу неравенства (3.5) оценки

$$0\leqslant 1-\frac{|(Dg[x(t)]^*y(t),x(t))|}{|Dg[x(t)]^*y(t)|\,|x(t)|}\leqslant\frac{\psi(t)}{\sqrt{1-\psi^2(t)}}. \tag{3.6}$$

Из аналитичности функций $x(t)$, $y(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ вытекают равенства

$$x(t)=x_*t^p+o(t^p),\ x_*\neq 0,\ p\geqslant 1, \tag{3.7}$$

$$y(t)=y_*+O(t),\ |y_*|=1, \tag{3.8}$$

$$\varphi(t)=\varphi_*t^q+o(t^q),\ \varphi_*>0,\ q\geqslant 1, \tag{3.9}$$

$$\psi(t)=\psi_*t^s+o(t^s),\ \psi_*>0,\ s\geqslant 1. \tag{3.10}$$

Поскольку $g(x)$ — многочлен, то функции $Dg[x(t)]^*y(t)$ и $g[x(t)]$ также аналитичны, причем $g[x(t)]\to 0$ при $t\to 0$. Поэтому в силу неравенств (3.4)—(3.6)

$$g[x(t)]=g_*t^k+o(t^k),\ g_*\neq 0,\ k\geqslant 1, \tag{3.11}$$

$$Dg[x(t)]^*y(t)=d_*t^l+o(t^l),\ d_*\neq 0,\ l\geqslant 0. \tag{3.12}$$

Подставляя теперь равенства (3.8)—(3.11) в соотношение (3.4), получаем $|g_*t^k+o(t^k)|\,|y_*+O(t)|\leqslant[\varphi_*t^q+o(t^q)][\psi_*t^s+o(t^s)]$, откуда (так как $g_*, y_*, \varphi_*, \psi_*\neq 0$) следует неравенство

$$k\geqslant q+s. \tag{3.13}$$

Подставляя равенства (3.8)—(3.10) и (3.12) в формулу (3.5), получаем $|d_*t^l+o(t^l)|\,|x_*t^p+o(t^p)|\geqslant(\varphi_*t^q+o(t^q))\sqrt{1-O(t)}$, откуда (так как d_*, x_*, $\varphi_* \neq 0$) следует неравенство

$$q \geqslant l + p. \tag{3.14}$$

Наконец, подставляя равенства (3.7), (3.10) и (3.12) в соотношения (3.6), получаем

$$0 \leqslant 1 - \frac{|(d_* t^l + o(t^l), x_* t^p + o(t^p))|}{|d_* t^l + o(t^l)| \cdot |x_* t^p + o(t^p)|} \leqslant c(\psi_* t^s + o(t^s)),$$

откуда

$$0 \leqslant 1 - \frac{|(d_*, x_*)|}{|d_*||x_*|} + O(t) \leqslant O(t).$$

Следовательно, $|(d_*, x_*)| = |d_*||x_*|$; поэтому $d_* = \lambda x_*$, где $\lambda \neq 0$ (поскольку d_*, $x_* \neq 0$) и в силу равенства (3.12)

$$Dg[x(t)]^* y(t) = \lambda x_* t^l + o(t^l). \tag{3.15}$$

Оценим теперь функцию $z(t) = (g[x(t)], y(t))$. Так как

$$z'(t) = (Dg[x(t)]x'(t), y(t)) + (g[x(t)], y'(t)) =$$
$$= (x'(t), Dg[x(t)]^* y(t)) + (g[x(t)], y'(t)),$$

то из формул (3.7), (3.8), (3.11) и (3.15) вытекают равенства

$$z'(t) = (p x_* t^{p-1} + O(t^p), \lambda x_* t^l + o(t^l)) + (g_* t^k + o(t^k), O(1)) =$$
$$= \lambda p |x_*|^2 t^{p+l-1} + O(t^{p+l}) + O(t^k).$$

Здесь в силу соотношений (3.13) и (3.14) $k \geqslant p + l + s$. Следовательно, $O(t^k) = o(t^{p+l})$, и потому $z'(t) = \lambda p |x_*|^2 t^{p+l-1} + O(t^{p+l})$. Проинтегрировав обе части последнего уравнения, получаем

$$(g[x(t)], y(t)) = \int_0^t z'(s)\,ds = \lambda \frac{p}{p+l} |x_*|^2 t^{p+l} + o(t^{p+l}). \tag{3.16}$$

Из очевидного соотношения $(g[x(t)], y(t)) \leqslant |g[x(t)]||y(t)|$ и неравенств (3.16), (3.8) и (3.11) вытекает оценка

$$\lambda \frac{p}{p+l} |x_*|^2 t^{p+l} + o(t^{p+l}) \leqslant |g_* t^k + o(t^k)||y_* + O(t)|.$$

Поскольку здесь x_*, g_*, $y_* \neq 0$, то $k \leqslant p + l$. С другой стороны, в силу соотношений (3.13) и (3.14) $k \geqslant p + l + s \geqslant p + l + 1$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3.1 обобщает известное [79] утверждение о том, что в окрестности изолированного особого решения вещественного алгебраического уравнения множество решений является многообразием, трансверсальным малым сферам с центром в особом решении.

3.2. Покажем в этом пункте, что из условия (2.4) следует r-определенность системы уравнений (1.1) в классе C^{r+1}.

Л е м м а 3.2. *Пусть* $F(x, \lambda) = f^{(r)}(x) + \lambda\theta(x)$, *где* $|x| < \varepsilon$, $\lambda \in R^1$. *Пусть* $f^{(r)}(x)$ *удовлетворяет условию* (2.4), $\theta \in j_0^r(0) \cap$

$\cap C^{r+1}$. *Тогда для каждого* $R > 0$ *найдется* $\varepsilon(R) > 0$, *такое, что* $\Psi[F(\cdot, \lambda); x, y] > 0$ *при* $|x| \leqslant \varepsilon(R)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ *и* $|\lambda| \leqslant R$.

Лемма 3.3. *Пусть* $\theta \in C^2$ *и* $\Psi[F(\cdot, \lambda); x, y] > 0$ *при* $|x| < \varepsilon_0$ $(x \neq 0)$, $y \neq 0$ *и* $|\lambda| \leqslant R$. *Тогда*

а) *множество ненулевых решений* x *каждого уравнения*

$$F(x, \lambda) = 0, \quad -R < \lambda < R, \tag{3.17}$$

лежащих в шаре $|x| < \varepsilon_0$, *является подмногообразием* R^n;

б) *множество решений* x *каждого уравнения* (3.17), *лежащих на сфере* $|x| = \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$, *является подмногообразием сферы*,

в) *множество решений* $\{x, \lambda\}$ *уравнения* (3.17), *лежащих на цилиндре* $|x| = \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$, $-R < \lambda < R$, *является подмногообразием цилиндра.*

Многообразия решений, существование которых утверждается в лемме 3.3, принадлежат классу гладкости C^2; они могут быть пустыми.

Пусть в окрестности некоторого решения $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$ уравнения (3.17) определены вектор-функция $\varphi_x(x, \lambda)$ со значениями в R^m и вещественная функция $\varphi_\lambda(x, \lambda)$ (обе класса гладкости C^1).

Лемма 3.4. *Пусть отображение* $F(x, \lambda)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.3. *Если* $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$ — *решение уравнения* (3.17) *и* $|x^\alpha| < \varepsilon_0$, $x^\alpha \neq 0$, $-R < \lambda^\alpha < R$, *то система линейных уравнений* $\{D_x F(x, \lambda)\} w = \varphi_x(x, \lambda)$, $(x, w) = \varphi_\lambda(x, \lambda)$ *имеет в некоторой окрестности точки* $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$ *решение* $w = w^\alpha(x, \lambda)$ *класса гладкости* C^1.

Положим $B_\varepsilon = \{x\colon |x| \leqslant \varepsilon\}$. Множество лежащих на сфере $|x| = \varepsilon$ решений x (при фиксированном λ) уравнения (3.17) обозначим $N_{\varepsilon,\lambda}(F)$. Через $K_{\varepsilon,\lambda}(F)$ обозначим конус над $N_{\varepsilon,\lambda}(F)$ с вершиной в нуле: $K_{\varepsilon,\lambda}(F) = \{x\colon x = tu,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ u \in N_{\varepsilon,\lambda}(F)\}$.

Лемма 3.5. *Пусть отображение* $F(x, \lambda)$ *удовлетворяет условиям леммы 3.3, где* $R > 1$. *Тогда*

а) *при каждом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *и* $\lambda \in (-R, R)$ *существует гомеоморфизм шара* B_ε *на себя, оставляющий неподвижным нуль и отображающий конус* $K_{\varepsilon,\lambda}(F)$ *на множество* $\{F(\cdot, \lambda)\}^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$;

б) *при каждом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существует гомеоморфизм сферы* $|x| = \varepsilon$ *на себя, отображающий* $N_{\varepsilon,0}(F)$ *на* $N_{\varepsilon,1}(F)$.

Достаточность условия (2.4) для r-определенности системы уравнений (1.1) вытекает из лемм 3.2—3.5. Действительно, положим $\theta(x) = \tilde{f}(x) - f^{(r)}(x)$, где $\tilde{f} \in j_0^r(f) \cap C^{r+1}$. Тогда отображение θ удовлетворяет условиям леммы 3.2, а значит, для отображения $F(x, \lambda)$ (построенному по θ) справедливы утверждения лемм 3.3—3.5. Так как $F(x, 0) = f^{(r)}(x)$, $F(x, 1) = \tilde{f}(x)$, то из леммы 3.5 вытекает существование для каждого малого ε искомого гомеоморфизма шара B_ε на себя, оставляющего неподвижным нуль и отображающего множество $\{f^{(r)}\}^{-1}(0) \cap B_\varepsilon = \{F(\cdot, 0)\}^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$ на множество $\tilde{f}^{-1}(0) \cap B_\varepsilon = \{F(\cdot, 1)\}^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$.

Структура множества решений системы уравнений (1.1) при выполнении условия (2.4) описывается леммами 3.3 и 3.5.

Доказательства лемм 3.3 и 3.5 почти дословно повторяют некоторые рассуждения из монографии [79]. Приведем эти доказательства для полноты изложения.

3.3. Доказательство леммы 3.2. По условию леммы $\theta \in j_0^r(0) \cap \cap C^{r+1}$. Поэтому $|\theta(x)| \leqslant c|x|^{r+1}$, $|D\theta(x)| \leqslant c|x|^r$, и так как

$$\Psi[F(\cdot, \lambda); x, y] = |f^{(r)}(x) + \lambda\theta(x)||y| + |Df^{(r)}(x)^* y + \lambda D\theta(x)^* y||x| - |(Df^{(r)}(x)^* y, x) + \lambda(D\theta(x)^* y, x)|,$$

то

$$\Psi[F(\cdot, \lambda); x, y] \geqslant \Psi(f^{(r)}; x, y) - |\lambda|\{|\theta(x)||y| + |D\theta(x)^* y||x| + |(D\theta(x)^* y, x)|\},$$

откуда вытекает оценка $\Psi[F(\cdot, \lambda); x, y] \geqslant \Psi(f^{(r)}; x, y) - \bar{c}|x|^{r+1}|y|$. Остается воспользоваться формулой (2.4). Лемма 3.2 доказана.

3.4. Доказательство леммы 3.3. По условию на решениях $\{x, \lambda\}$ уравнения (3.17) выполняется неравенство

$$|D_xF(x, \lambda)^* y||x| > |(D_xF(x, \lambda)^* y, x)|, \quad y \neq 0, \tag{3.18}$$

а значит, и подавно — неравенство $|D_xF(x, \lambda)^* y| > 0$ $(y \neq 0)$. Последнее неравенство — это условие линейной независимости в точке $\{x, \lambda\}$ столбцов матрицы $D_xF(x, \lambda)^*$. Следовательно,

$$\operatorname{rank} D_xF(x, \lambda) = \operatorname{rank} D_xF(x, \lambda)^* = m, \tag{3.19}$$

если $F(x, \lambda) = 0$. Значит, при $|\lambda| < R$ каждое ненулевое решение $x \in B_{\varepsilon_0}$ уравнения (3.17) регулярно. Отсюда следует [90] утверждение а леммы.

Неравенство (3.18) означает, что вектор x не является линейной комбинацией векторов-столбцов $\nabla_x F_j(x, \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ матрицы $D_xF(x, \lambda)^*$. Поскольку в силу соотношения (3.19) эти векторы линейно независимы между собой, то линейно независимы и векторы $\nabla_x F_1(x, \lambda), \ldots, \nabla_x F_m(x, \lambda), 2x$. Следовательно, матрица $Q_x(x, \lambda) = \{\nabla_x F_1(x, \lambda), \ldots, \nabla_x F_m(x, \lambda), 2x\}$ имеет ранг $m + 1$. Значит, ранг матрицы $Q(x, \lambda) = \{\nabla F_1(x, \lambda), \ldots, \nabla F_m(x, \lambda), \nabla|x|^2\}$, получающейся из матрицы $Q_x(x, \lambda)$ добавлением строки производных по λ функций $F_1(x, \lambda), \ldots, F_m(x, \lambda), |x|^2$, также равен $m + 1$:

$$\operatorname{rank} Q_x(x, \lambda) = \operatorname{rank} Q(x, \lambda) = m + 1. \tag{3.20}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$F_1(x, \lambda) = \ldots = F_m(x, \lambda) = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon^2, \tag{3.21}$$

где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $|\lambda| < R$. В силу равенства (3.20) при каждом $\lambda \in (-R, R)$ решение x системы (3.21) регулярно. Следовательно, множество таких решений [т. е. множество решений уравнения

(3.17), лежащих на сфере $|x| = \varepsilon$] является подмногообразием сферы [90]. Утверждение б леммы доказано.

В силу равенства (3.20) каждое решение $\{x, \lambda\}$ системы уравнений (3.21) регулярно. Следовательно, множество решений уравнения (3.17), лежащих на цилиндре $|x| = \varepsilon$, $-R < \lambda < R$, является подмногообразием этого цилиндра. Утверждение в доказано. Лемма 3.3 полностью доказана.

3.5. Доказательство леммы 3.4. Рассматриваемую систему линейных уравнений представим в виде

$$Q_x(x, \lambda)^* w = \varphi(x, \lambda), \tag{3.22}$$

где $\varphi(x, \lambda) = \{\varphi_x(x, \lambda), 2\varphi_\lambda(x, \lambda)\}$, матрица $Q_x(x, \lambda)$ введена в п. 3.4. Если $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$ — решение уравнения (3.17), то в силу равенства (3.20) ранг матрицы $Q_x(x^\alpha, \lambda^\alpha)^*$ максимален и равен $m + 1$. Следовательно, $\operatorname{rank} Q_x(x, \lambda)^* = m + 1$ в некоторой окрестности точки $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$. В этом случае в той же окрестности линейно независимы некоторые $m + 1$ столбцов матрицы $Q_x(x, \lambda)^*$. Можно считать, что линейно независимы столбцы с номерами $1, 2, \ldots, m + 1$. Добавив к системе (3.22) еще $n - m - 1$ уравнений

$$w_{m+2} = \ldots = w_n = 0 \tag{3.23}$$

(здесь играет роль предположение $n > m$), получим систему (3.22) (3.23) из n линейных уравнений с n неизвестными. Ранг матрицы этой системы равен n в окрестности точки $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$. Значит, в некоторой окрестности этой точки существует и единственно решение $w = w^\alpha(x, \lambda)$ системы уравнений (3.22), (3.23). Лемма доказана.

3.6. Доказательство леммы 3.5. Построим на множестве $B_\varepsilon \setminus \{0\}$ гладкое класса C^1 векторное поле $v(x)$, обладающее следующими свойствами: $(v(x), x) > 0$, т. е. векторы $v(x)$ образуют острые углы с x; $\{D_x F(x, \lambda)\} v(x) = 0$ при $F(x, \lambda) = 0$, т. е. векторы $v(x)$ касательны к многообразию решений уравнения (3.17).

Сперва определим поле $v(x)$ локально. Если $x^\alpha \in B_\varepsilon \setminus \{0\}$ и $x^\alpha \overline{\in} \{F(\cdot, \lambda)\}^{-1}(0) \setminus \{0\}$, то положим $v^\alpha(x) = x$ в некоторой окрестности U^α точки x^α, такой, что $U^\alpha \cap \{F(\cdot, \lambda)\}^{-1}(0) = \phi$. Если $x^\alpha \in \{F(\cdot, \lambda)\}^{-1}(0) \setminus \{0\}$, то в качестве $v^\alpha(x)$ возьмем гладкое класса C^1 решение системы линейных уравнений $\{D_x F(x, \lambda)\} v = 0$, $(v, x) = 1$, определяемое леммой 3.4.

Выберем теперь бесконечно дифференцируемое разбиение единицы $\{\gamma^\alpha\}$ на $B_\varepsilon \setminus \{0\}$, подчиненное покрытию $\{U^\alpha\}$ [90]. Тогда гладкое класса C^1 векторное поле $v(x) = \sum\limits_\alpha \gamma^\alpha(x) v^\alpha(x)$ определено на $B_\varepsilon \setminus \{0\}$ и обладает на этом множестве требуемыми свойствами.

Рассмотрим на $B_\varepsilon \setminus \{0\}$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v(x)}{2(v(x), x)}. \tag{3.24}$$

По построению поля $v(x)$ правая часть этого уравнения определена и гладкая на $B_\varepsilon \setminus \{0\}$. Следовательно, для каждого $\xi \in B_\varepsilon \setminus \setminus \{0\}$ однозначно определено решение $x = X(\xi, t)$ уравнения (3.24), проходящее при $t = 0$ через точку ξ [т. е. $X(\xi, 0) \equiv \xi$].

Из уравнения (3.24) следует, что $\{|X(\xi, t)|^2\}'_t \equiv 1$, откуда $|X(\xi, t)|^2 = |\xi|^2 + t$. В силу последнего равенства решение $X(\xi, t)$ при $|\xi| \leq \varepsilon$ определено по t на отрезке $-|\xi|^2 < t \leqslant \leqslant \varepsilon^2 - |\xi|^2$.

Положим $S_\varepsilon = \{x\colon |x| = \varepsilon\}$. Так как векторы $v(x)$ касательны к многообразию $\{F(\cdot, \lambda)\}^{-1}(0) \setminus \{0\}$, то вся траектория $x = X(\xi, t)$ лежит на этом многообразии. В силу единственности решений уравнения (3.24) отображение $\{\xi, t\} \mapsto X(\xi, t - \varepsilon^2)$ гомеоморфно отображает множество $S_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2]$ на $B_\varepsilon \setminus \{0\}$. Из перечисленных свойств отображения $X(\xi, t)$ видно, что отображение φ: $tx \mapsto X(x, t\varepsilon^2 - \varepsilon^2)$, $\varphi(0) = 0$, где $x \in N_{\varepsilon,\lambda}(F)$, $0 < t \leqslant \leqslant 1$, является гомеоморфизмом шара B_ε на себя, оставляющим неподвижным нуль и отображающим конус $K_{\varepsilon,\lambda}(F)$ на множество $\{F(\cdot, \lambda)\}^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$. Утверждение а леммы доказано.

Перейдем к утверждению б. Определим на цилиндре $C_\varepsilon = S_\varepsilon \times (-R, R)$ в $R^n \times R^1$ гладкое касательное к C_ε векторное поле $w(x, \lambda) = \{w_x, 1\}$ ($w_x \in R^n$), обладающее свойством $\{DF(x, \lambda)\}\, w(x, \lambda) = 0$ при $F(x, \lambda) = 0$, где D обозначает полную производную отображения $F(x, \lambda)$ по x и λ. Это свойство означает, что векторы $w(x, \lambda)$ касательны к многообразию решений уравнения (3.17). Условие касательности вектора $w(x, \lambda)$ к C_ε равносильно тождеству $(w_x(x, \lambda), x) \equiv 0$.

Компоненту w_x поля $w(x, \lambda)$ сначала построим локально. Положим $N_\varepsilon = F^{-1}(0) \cap C_\varepsilon$. Если $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\} \in C_\varepsilon$ и $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\} \overline{\in} N_\varepsilon$, то положим $w_x^\alpha(x, \lambda) = 0$ в некоторой окрестности U^α на C_ε точки $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$, не пересекающейся с N_ε. Если $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\} \in N_\varepsilon$, то поступим следующим образом. Условия касательности вектора $w(x, \lambda)$ к C_ε и к $F^{-1}(0)$ равносильны уравнениям

$$(w_x(x, \lambda), x) = 0, \ \{D_x F(x, \lambda)\}\, w_x(x, \lambda) + \theta(x) = 0. \tag{3.25}$$

По лемме 3.4 существует гладкое класса C^1 (в некоторой окрестности на C_ε точки $\{x^\alpha, \lambda^\alpha\}$) отображение $w_x^\alpha(x, \lambda)$, удовлетворяющее уравнениям (3.25). Выберем бесконечно дифференцируемое разбиение единицы $\{\gamma^\alpha\}$ на C_ε, подчиненное покрытию $\{U^\alpha\}$ [90]. Тогда формула $w_x(x, \lambda) = \sum\limits_\alpha \gamma^\alpha(x, \lambda)\, w_x^\alpha(x, \lambda)$ определит компоненту w_x векторного поля w на всем C_ε. Построенное отображение $w(x, \lambda)$ гладкое, класса C^1; оно удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям.

Рассмотрим на C_ε систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = w_x(x, \lambda), \ d\lambda/dt = 1. \tag{3.26}$$

По построению поля w для каждого $\{\xi, \lambda\} \in C_\varepsilon$ определено и единственно решение $\{x, \lambda\} = \{X(\xi, \eta, t), \ \Lambda(\xi, \eta, t)\}$ системы (3.26), проходящее при $t = 0$ через точку $\{\xi, \eta\}$.

Так как $\Lambda(\xi, \eta, t) = \eta + t$, то каждое решение $\{X, \Lambda\}$ определено по t на отрезке $-R - \lambda < t < R - \lambda$. Отображение

$$\{\xi, \eta\} \mapsto \{X(\xi, \eta, t), \Lambda(\xi, \eta, t)\} \tag{3.27}$$

переводит сферу $S_\varepsilon \times \{\lambda\}$ в сферу $S_\varepsilon \times \{\lambda + t\}$. В силу единственности и непрерывной зависимости решений системы (3.26) от начальных данных отображение $x \mapsto X(x, 0, 1)$ определено на S_ε и является гомеоморфизмом сферы S_ε на себя.

Заметим, наконец, следующее. Так как поле w касательно к многообразию $N_\varepsilon \subset C_\varepsilon$, то из $\{\xi, \eta\} \in N_\varepsilon$ следует принадлежность всей траектории $\{x, \lambda\} = \{X(\xi, \eta, t), \Lambda(\xi, \eta, t)\}$ многообразию N_ε. Следовательно, отображение (3.27) при $\lambda = 0$, $t = 1$ переводит сечение $N_{\varepsilon, 0}(F)$ многообразия N_ε гиперпространством $\lambda = 0$ на сечение $N_{\varepsilon, 1}(F)$ многообразия N_ε гиперпространством $\lambda = 1$.

Таким образом, отображение $X(x, 0, 1)$ является искомым гомеоморфизом сферы S_ε на себя, отображающим $N_{\varepsilon,0}(F)$ на $N_{\varepsilon, 1}(F)$. Лемма 3.5 доказана.

4. Окончание доказательства теоремы 2.1

4.1. Доказательство необходимости условия (2.3) для r-определенности системы (1.1) проведем по следующей схеме. В предположении, что система (1.1) r-определена, но условие (2.3) не выполняется, существуют отображения $g, h \in j_0^r(f) \cap C^{r+1}$ обладающие свойствами:

а) множество $g^{-1}(0) \setminus \{0\}$ в окрестности нуля является топологическим многообразием,

б) множество $h^{-1}(0) \setminus \{0\}$ не является топологическим многообразием в каждой точке некоторой последовательности $\{x_i\}$, такой, что $h(x_i) = 0$, $x_i \to 0$.

Так как свойство множества быть топологическим многообразием является топологическим инвариантом, то не существует гомеоморфизма, отображающего окрестность нуля в $h^{-1}(0)$ на окрестность нуля в $g^{-1}(0)$ и оставляющего неподвижным нуль. Это противоречит r-определенности системы (1.1).

Описанная схема близка по идее к доказательству соответствующих утверждений из работ [34, 35].

4.2. Существование требуемого отображения g вытекает из приводимой ниже леммы 4.1.

Порядком регулярности многочлена $\varphi(x) = \sum \varphi_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ называется наименьшее значение степеней $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ его ненулевых ($\varphi_\alpha \neq 0$) мономов $\varphi_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Решение x_0 уравнения $f(x) = 0$, где $f\colon R^n \to R^m$, называется регулярным, если $\operatorname{rank} Df(x_0) = \min\{n, m\}$; это решение называется особым, если $\operatorname{rank} Df(x_0) < \min\{n, m\}$ [79].

Л е м м а 4.1. *Пусть $\varphi\colon R^n \to R^m$ $(n > m)$ — многочлен. Существует многочлен $\psi\colon R^n \to R^m$ сколь угодно большого порядка* *регулярности, такой, что уравнение*

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x) + \psi(x) = 0 \qquad (4.1)$$

не имеет ненулевых особых решений в некоторой окрестности нуля.

Доказательство. Отображение $\psi(x)$ будем искать в виде $\psi(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^k \psi_*$, где $k \geqslant 0$ — произвольное целое число, ψ_* — вектор из R^m. Обозначим через $\varphi_p(x)$ сужение многочлена $\varphi(x)$ на сферу $\tilde{S}_p = \{x: |x| = 1/p\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Множество критических значений отображения $\varphi_p(x)$ на $\tilde{S}_p$ обозначим G_p. Это множество состоит из конечного числа точек [79] (или пусто). Следовательно, мера Лебега объединения $G = \bigcup\limits_p \{p^{2^k} G_p\}$ равна нулю. Тогда найдется вектор $\psi_* \in R^m$, такой, что $(-\psi_*) \overline{\in} G$.

Поскольку функция $\psi(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^k \psi_*$ постоянна на каждой сфере $\tilde{S}_p$, то нуль не является критическим значением сужения отображения $g(x) = \varphi(x) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^k \psi_*$ на $\tilde{S}_p$. Другими словами, каждое решение уравнения (4.1), рассматриваемого как уравнение на многообразии $\tilde{S}_p$, регулярно. Тогда регулярно каждое лежащее на $\tilde{S}_p$ решение уравнения (4.1), рассматриваемого как уравнение уже во всем пространстве R^n (здесь существенно то, что $\dim \tilde{S}_p = n - 1 \geqslant \dim R^m$).

Показано, что решения уравнения (4.1), лежащие на сферах $\tilde{S}_p$, регулярны. Поэтому регулярны вообще все малые ненулевые решения уравнения (4.1). Действительно, в предположении противного найдется последовательность $\{x_i\}$ особых решений уравнения (4.1), сходящаяся к нулю. Но тогда по лемме об отборе кривых существует кривая, состоящая из ненулевых особых решений уравнения (4.1), проходящая через нуль. Эта кривая обязана пересечь все сферы $\tilde{S}_p$ с достаточно большими номерами p. Но этого не может быть по построению отображения $g(x)$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, все достаточно малые ненулевые решения уравнения (4.1) регулярны. Лемма 4.1 доказана.

Из леммы 4.1 вытекает, что множество $g^{-1}(0) \setminus \{0\}$ является многообразием в окрестности нуля. Следовательно, это многообразие либо пусто, либо имеет размерность $n - m$ [90].

4.3. Лемма 4.2. *Пусть отображение $f^{(r)}(x)$ не удовлетворяет условию* (2.3). *Тогда найдутся такие $x_i \to 0$ $(x_i \neq 0)$, $y_i \neq 0$ и однородный многочлен θ: $R^n \to R^m$ степени $r + 1$, что для отображения $h(x) = f^{(r)}(x) + \theta(x)$ выполняются при некоторых $\delta > 0$ и $c < \infty$ оценки*

$$|h(x_i)| \leqslant c\,|x_i|^{r+1+\delta}, \quad |Dh(x_i)^* y_i| \leqslant c\,|y_i|\,|x_i|^{r+\delta}. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Рассмотрим класс H многочленов вида $\eta(x) = (x, v)^p (x, w)^q u$, где $p + q = r + 1$; $u \in R^m$; $v, w \in R^n$. Так как для каждого такого многочлена справедливо равенство $D\eta(x) z = \{p(x, v)^{p-1} (x, w)^q (z, v) + q(x, v)^p (x,$

$w)^{q-1}(z, w)\} u$, то в силу тождества $(D\eta(x)^* y, z) \equiv (y, D\eta(x) z)$ справедливо также равенство

$$(D\eta(x)^* y, z) = (p(x, v)^{p-1}(x, w)^q (y, u) v + \\ + q(x, v)^p (x, w)^{q-1}(y, u) w, z).$$

Поэтому $D\eta(x)^* y = p(x, v)^{p-1}(x, w)^q (y, u) v + q(x, v)^p (x, w)^{q-1}(y, u) w$. Ниже последняя формула понадобится в двух случаях:

$$D\{(x, v)^{r+1} u\}^* y = (r+1)(x, v)^r (y, u) v, \tag{4.3}$$

$$D\{(x, v)^r (x, w) u\}^* y = r(x, v)^{r-1}(x, w)(y, u) v + (x, v)^r (y, u) w. \tag{4.4}$$

Построим вначале многочлен $\eta_1(x) \in H$ так, чтобы отображение $h(x) = f^{(r)}(x) + \eta_1(x)$ удовлетворяло второму неравенству (4.2). Так как для $f^{(r)}(x)$ не выполняется условие (2.3), то по лемме об отборе кривых найдутся аналитические функции

$$x(t) = ut^\alpha + o(t^\alpha), \quad u \neq 0, \quad \alpha \geqslant 1 \text{ — целое}, \tag{4.5}$$

$$y(t) = v + O(t), \quad |v| = 1, \tag{4.6}$$

для которых справедливы оценки

$$|f^{(r)}[x(t)]| \leqslant c\,|x(t)|^{r+1}, \tag{4.7}$$

$$|Df^{(r)}[x(t)]^* y(t)| \leqslant c\,|x(t)|^r. \tag{4.8}$$

Функция $Df^{(r)}[x(t)]^* y(t)$ аналитическая. Если она тождественно равна нулю, то достаточно положить $\eta_1(x) \equiv 0$. Пусть

$$Df^{(r)}[x(t)]^* y(t) = zt^\gamma + o(t^\gamma), \quad z \neq 0, \quad \gamma \geqslant 1 \text{ — целое}. \tag{4.9}$$

Из соотношений (4.8) и (4.5) вытекает неравенство $\gamma \geqslant \alpha r$. Если $\gamma > \alpha r$, то второе из неравенств (4.2) выполняется при $\eta_1(x) \equiv 0$ и $\delta = (\gamma - \alpha r)/\alpha$. Осталось рассмотреть случай, когда

$$\gamma = \alpha r. \tag{4.10}$$

Здесь имеются две возможности: $(u, z) \neq 0$ и $(u, z) = 0$.

а. Пусть $(u, z) \neq 0$. Положим $\eta_1(x) = \rho(x, z)^{r+1} v$, где $\rho \in R^1$. В силу (4.3) $D\eta_1(x)^* y = \rho(r+1)(x, z)^r (y, v) z$, а в силу соотношений (4.5), (4.6), (4.9) и (4.10) справедливы следующие равенства:

$$\{Df^{(r)}[x(t)] + D\eta_1[x(t)]\}^* y(t) = \\ = zt^{\alpha r} + o(t^{\alpha r}) + \rho(r+1)(ut^\alpha + o(t^\alpha), z)^r (v + \\ + O(t), v) z = zt^{\alpha r} + \rho(r+1)(u, z)^r (v, v) zt^{\alpha r} + o(t^{\alpha r}).$$

Если выбрать $\rho = -\{(r+1)(u, z)^r (v, v)\}^{-1}$, то для отображения $f^{(r)}(x) + \eta_1(x)$ будет верна вторая оценка (4.2) с $\delta = \delta_1 = 1/\alpha r$.

б. Пусть $(u, z) = 0$. Положим $\eta_1(x) = \rho(x, z)(x, u)^r v$, где $\rho \in R^1$. В силу (4.4) $D\eta_1(x)^* y = \rho(x, u)^r (y, v) z + \rho r(x,$

$u)^{r-1}(x, z)(y, v)u$, а вследствие выполнения соотношений (4.5), (4.6), (4.9), (4.10)

$$\{Df^{(r)}[x(t)] + D\eta_1[x(t)]\}^* y(t) = zt^{\alpha r} + o(t^{\alpha r}) + \rho(ut^{\alpha} + o(t^{\alpha}), u)^r (v + O(t), v) z + \rho r (ut^{\alpha} + o(t^{\alpha}), u)^{r-1}(ut^{\alpha} + o(t^{\alpha}), z)(v + O(t), v) u.$$

В последнем слагаемом сомножитель $(ut^{\alpha} + o(t^{\alpha}), z)$, по предположению, имеет порядок $O(t^{\alpha+1})$, поэтому все последнее слагаемое имеет порядок $O(t^{\alpha r+1})$. Следовательно,

$$\{Df^{(r)}[x(t)] + D\eta_1[x(t)]\}^* y(t) = \{1 + \rho(u, u)^r (v, v)\} t^{\alpha r} z + O(t^{\alpha r+1}).$$

Если выбрать $\rho = -\{(u, u)^r (v, v)\}^{-1}$, то для отображения $f^{(r)}(x) + \eta_1(x)$ и элементов $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, где $t_i \to 0$, $t_i \neq 0$, справедлива вторая оценка (4.2) с $\delta = \delta_1 = 1/\alpha r$.

Итак, отображение $\eta_1(x)$ построено. Отображение $\theta(x)$ будем искать в виде $\theta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$ выбирая $\eta_2(x)$ так, чтобы не нарушалось второе из неравенств (4.2) и чтобы было выполнено первое из этих неравенств. Обозначим отображение $f^{(r)}(x) + \eta_1(x)$ через $h_1(x)$. Тогда, по построению,

$$|Dh_1[x(t)]^* y(t)| \leqslant \bar{c}\,|x(t)|^{r+\delta_1}, \tag{4.11}$$

$$|h_1[x(t)]| \leqslant \bar{c}\,|x(t)|^{r+1}. \tag{4.12}$$

Функция $h_1[x(t)]$ аналитична. Если она тождественно равна нулю, то достаточно положить $\eta_2(x) \equiv 0$. Пусть

$$h_1[x(t)] = wt^{\mu} + o(t^{\mu}) \quad (w \neq 0,\ \mu \geqslant 1 \text{ — целое}), \tag{4.13}$$

$$Dh_1[x(t)]^* y(t) = O(t^{\nu}) \quad (\nu \geqslant 1 \text{ — целое}). \tag{4.14}$$

Из (4.11), (4.14) и (4.5) вытекает неравенство

$$\nu \geqslant \alpha r + 1, \tag{4.15}$$

а в силу соотношений (4.12), (4.13) и (4.5) $\mu \geqslant \alpha(r + 1)$. Если $\mu > \alpha(r + 1)$, то неравенства (4.2) выполняются при $\eta_2(x) \equiv 0$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, где $\delta_2 = [\mu - \alpha(r + 1)]/\alpha$. Поэтому нуждается в рассмотрении только случай, когда

$$\mu = \alpha(r + 1). \tag{4.16}$$

Оценим величину $(h_1[x(t)], y(t))$. С одной стороны, в силу равенств (4.6) и (4.13)

$$(h_1[x(t)], y(t)) = (wt^{\mu} + o(t^{\mu}), v + O(t)) = (w, v)t^{\mu} + O(t^{\mu+1}). \tag{4.17}$$

С другой стороны,

$$(h_1[x(t)], y(t)) = \int_0^t (Dh_1[x(s)]\,x'(s), y(s))\,ds + \int_0^t (h_1[x(s)], y'(s))\,ds = \int_0^t (x'(s), Dh_1[x(s)]^* y(s))\,ds + \int_0^t (h_1[x(s)], y'(s))\,ds,$$

откуда, используя разложения подынтегральных функций по степеням s и интегрируя полученные соотношения, получаем равенства

$$(h_1[x(t)], y(t)) = \int_0^t (\alpha u s^{\alpha-1} + O(s^\alpha), O(s^\nu))\, ds +$$
$$+ \int_0^t (w s^\mu + o(s^\mu), O(1))\, ds = O(t^{\alpha+\nu}) + O(t^{\alpha+\nu+1}) +$$
$$+ O(t^{\mu+1}) + o(t^{\mu+1}).$$

Из этих равенств в силу (4.15) и (4.16) вытекает, что $(h_1[x(t)], y(t)) = O(t^{\mu+1})$. Поэтому в силу (4.17)

$$(w, v) = 0. \tag{4.18}$$

Положим теперь $\eta_2(x) = \rho(x, u)^{r+1} w$, где $\rho = -(u, u)^{-(r+1)}$. Тогда в силу (4.13) и (4.5) $h_1[x(t)] + \eta_2[x(t)] = wt^{\alpha(r+1)} + o(t^{\alpha(r+1)}) - (u, u)^{-(r+1)}(ut^\alpha + o(t^\alpha), u)^{r+1} w$, откуда $h_1[x(t)] + \eta_2[x(t)] = O(t^{\alpha(r+1)+1})$. Значит, для отображения $h(x) = h_1(x) + \eta_2(x)$ и любой последовательности $x_i = x(t_i)$, где $t_i \to 0$, $t_i \neq 0$, справедлива первая из оценок (4.2) с $\delta = 1/\alpha(r+1)$.

Осталось проверить справедливость второй оценки (4.2). В силу (4.3) $D\eta_2(x)^* y = \rho(r+1)(x, u)^r (y, w) u$, и потому (см. (4.5), (4.6), (4.14))

$$Dh[x(t)]^* y(t) = \{Dh_1[x(t)] + D\eta_2[x(t)]\}^* y(t) = O(t^\nu) +$$
$$+ \rho(r+1)(ut^\alpha + o(t^\alpha), u)^r (v + O(t), w) u.$$

Так как в силу (4.18) сомножитель $(v + O(t), w)$ во втором слагаемом имеет порядок $O(t)$, то все второе слагаемое имеет порядок $O(t^{\alpha r+1})$. Поэтому в силу (4.15) $Dh[x(t)]^* y(t) = O(t^{\alpha r+1})$.

Итак, для построенного отображения $h(x)$ и любой последовательности пар $\{x_i, y_i\}$, где $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $t_i \to 0$, $t_i \neq 0$ выполняются неравенства (4.2) с $\delta = \min\{1/\alpha(r+1), 1/\alpha r\}$. Лемма доказана.

4.4. Лемма 4.3. *Пусть φ: $R^n \to R^m$ $(n > m)$ — отображение класса гладкости C^{l+1} $(l \geqslant 0)$ в некоторой окрестности нуля. Пусть для некоторых $x_i \to 0$ $(x_i \neq 0)$, $y_i \neq 0$ верны оценки*

$$|\varphi(x_i)| \leqslant \rho |x_i|^{l+1+\delta}, \tag{4.19}$$

$$|D\varphi(x_i)^* y_i| \leqslant \rho |y_i| |x_i|^{l+\delta}, \tag{4.20}$$

где $\delta > 0$, $\rho < \infty$. Тогда существует отображение h: $R^n \to R^m$, такое, что $h \in j_0^{l+1}(\varphi) \cap C^{l+1}$ и для бесконечного числа индексов i справедливы утверждения:

а) *отображение $h(x)$ аналитично при $|x - x_i| < {}^1/_4 |x_i|$;*

б) $h(x_i) = 0$, $\operatorname{rank} Dh(x_i) < m$.

Доказательство. Обозначим через σ: $R^n \to R^m$ определенную на R^n бесконечно дифференцируемую функцию, для которой $\sigma(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$ и $\sigma(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$. Отображение $h(x)$ будем искать в виде $h(x) = \varphi(x) - \psi(x) - \theta(x)$, где $\psi(x)$ построим так, чтобы отображение $\varphi(x) - \psi(x)$ было аналитичным, а $\theta(x)$ построим так, чтобы для $h(x)$ были справедливы утверждения а и б.

Обозначим через $\varphi^{(l+1)}(x)$ $(l+1)$-усечение отображения $\varphi(x)$. Положим $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi^{(l+1)}(x)$. Отображение $\varphi^{(l+1)}(x)$ аналитично (как многочлен). Отображение $\psi(x)$ является величиной более высокого порядка малости в нуле, чем $|x|^{l+1}$, а отображение $D\psi(x)$ является величиной более высокого порядка малости, чем $|x|^l$. Поэтому из (4.14) и (4.20) вытекают неравенства

$$|\varphi^{(l+1)}(x_i)| \leqslant |x_i|^{l+1}\nu(|x_i|), \tag{4.21}$$

$$|D\varphi^{(l+1)}(x_i)^* y_i| \leqslant |x_i|^l |y_i| \nu(|x_i|), \tag{4.22}$$

где $\nu(t) \to 0$ при $t \to 0$. Положим

$$\theta_i(x) = \left\{\varphi^{(l+1)}(x_i) + \frac{(x - x_i, D\varphi^{(l+1)}(x_i)^* y_i)}{|y_i|^2} y_i\right\} \sigma\left[\frac{2(x - x_i)}{|x_i|}\right]. \tag{4.23}$$

По определению функции $\sigma(x)$ справедливо тождество

$$\theta_i(x) \equiv \varphi^{(l+1)}(x_i) + \frac{(x - x_i, D\varphi^{(l+1)}(x_i)^* y_i)}{|y_i|^2} y_i, \tag{4.24}$$

если $|x - x_i| < 1/4 |x_i|$. Следовательно, при этих значениях x функция $\theta_i(x)$ аналитична и

$$\theta_i(x_i) = \varphi^{(l+1)}(x_i), \quad D\theta_i(x_i)^* y_i = D\varphi^{(l+1)}(x_i)^* y_i. \tag{4.25}$$

По определению функции $\sigma(x)$ шар $B^i = \{x: |x - x_i| \leqslant 1/2 |x_i|\}$ содержит носитель функции $\sigma[2(x - x_i)/|x_i|]$. Поэтому из соотношений (4.21)—(4.23) вытекает, что при $x \in B^i$

$$\left|\frac{\partial^{l_1+l_2+\ldots+l_n}\theta_i(x)}{\partial x_1^{l_1}\cdot\partial x_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{l_n}}\right| \leqslant C_{l_1+l_2+\ldots+l_n}(\rho)|x_i|^{l+1-(l_1+l_2+\ldots+l_n)}\nu(|x_i|), \tag{4.26}$$

а при $x \overline{\in} B^i$

$$\frac{\partial^{l_1+l_2+\ldots+l_n}\theta_i(x)}{\partial x_1^{l_1}\cdot\partial x_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{l_n}} = 0. \tag{4.27}$$

Можно считать выполненными неравенства $3|x_{i+1}| < |x_i|$. Тогда

$$B^i \cap B^j = \emptyset \text{ при } i \neq j. \tag{4.28}$$

Определим отображение $\theta(x)$ с помощью ряда

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(x). \tag{4.29}$$

Это определение корректно, поскольку при каждом i в силу (4.28) от нуля может отличаться лишь одно слагаемое ряда (4.29). Отсюда следует также бесконечная дифференцируемость отображения $\theta(x)$ при каждом ненулевом x. При этом, поскольку выполняются соотношения (4.26)—(4.28),

$$\left|\frac{\partial^{l_1+l_2+\ldots+l_n}\theta(x)}{\partial x_1^{l_1}\cdot\partial x_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{l_n}}\right|\leqslant C_{l_1+l_2+\ldots+l_n}(\rho)\,|x_i|^{l+1-(l_1+l_2+\ldots+l_n)}\nu(|x_i|)$$

при $|x|\leqslant {}^3/_2\,|x_i|$. Следовательно, частные производные отображения $\theta(x)$ до порядка $l+1$ включительно стремятся к нулю при $x\to 0$. Значит, $\theta\in j_0^{l+1}(0)\cap C^{l+1}$. Поэтому для отображения $h(x)=\varphi(x)-\psi(x)-\theta(x)=\varphi^{(l+1)}(x)-\theta(x)$ выполняется соотношение $h\in j_0^{l+1}(\varphi)\cap C^{l+1}$.

В силу формул (4.28), (4.29) и (4.24)

$$\theta(x)=\theta_i(x)=\varphi^{(l+1)}(x_i)+\frac{(x-x_i,\,D\varphi^{(l+1)}(x_i)^*\,y_i)}{|y_i|^2}\,y_i$$

при $|x-x_i|<{}^1/_4\,|x_i|$. Следовательно, отображение $h(x)=\varphi^{(l+1)}(x)-\theta(x)$ аналитично при $|x-x_i|<{}^1/_4\,|x_i|$ и для него с учетом равенств (4.25) справедливы соотношения $h(x_i)=0$, $Dh(x_i)^*y_i=0$. Последнее из этих равенств означает, что $\operatorname{rank} Dh(x_i)<m$.

Итак, для отображения $h(x)$ справедливы утверждения а и б леммы. Лемма 4.3 доказана.

4.5. Лемма 4.4. *Пусть $\varphi\colon R^n\to R^m$ $(n>m)$. Пусть для некоторых $x_i\to 0$ $(x_i\neq 0)$ отображение $\varphi(x)$ аналитично в окрестности x_i и $\varphi(x_i)=0$, $\operatorname{rank} D\varphi(x_i)<m$. Тогда для каждого целого $l\geqslant 1$ найдется отображение $\psi\colon R^n\to R^m$, такое, что $\psi(x_i)=0$, $\psi\in j_0^l(0)\cap C^l$ и для бесконечного числа индексов i множество решений уравнения $\varphi(x)+\psi(x)=0$ гомеоморфно в окрестности точки x_i множеству малых решений уравнения $\sum\limits_{j=1}^{n-m+1}\gamma_{ij}\xi_j^2=0$, $\xi_j\in R^1$, где $\gamma_{i1},\gamma_{i2},\ldots,\gamma_{in-m+1}\neq 0$.*

Доказательство. Отображение $\psi(x)$ сначала построим в окрестности точки x_i. Компонента $\varphi_j(x)$ в силу аналитичности отображения $\varphi(x)$ и условия $\varphi(x_i)=0$ допускает представление

$$\varphi_j(x_i+u)=\sum a_{jp}u_p+\sum b_{jpq}u_pu_q+c_j(u),\quad j=1,2,\ldots,m,$$

где $c_j(u)=O(|u|^3)$. Здесь матрица $A=(a_{jp})$ совпадает с $D\varphi(x_i)$. Проведем некоторые замены переменных в пространстве-прообразе R^n и пространстве-образе R^m, упрощающие вид отображения $\varphi(x)$ в окрестности точки x_i.

Выберем невырожденные матрицы G_i и H_i так, чтобы отображение $\theta(v)=G_i\varphi(x_i+H_iv)$ приняло вид

$$\theta_l(v)=v_l+\sum\theta_{lpq}v_pv_q+O(|v|^3),\quad 1\leqslant l\leqslant k,$$

$$\theta_l(v)=\sum\theta_{lpq}v_pv_q+O(|v|^3),\quad k+1\leqslant l\leqslant m,$$

где $k = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} D\varphi(x_i) < m$. С помощью коэффициентов квадратичной формы $\sum \rho_{mrq} v_p v_q$ образуем вспомогательную квадратичную форму $\Theta(v_m, \ldots, v_n) = \sum_{p,\, q \geqslant m} \theta_{mpq} v_p v_q$. Обозначим через F_i матрицу линейного преобразования $v = F_i w$, осуществляющего замену переменных $v_l = w_l$, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, $v_l = \sum_{j \geqslant m} f_{lj} w_j$, $m \leqslant l \leqslant n$, где коэффициенты f_{lj} выбраны так, чтобы привести форму $\Theta(v_m, \ldots, v_n)$ к главным осям. Тогда отображение

$$\eta(w) = G_i \varphi(x_i + H_i F_i w) \tag{4.30}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} &\eta_l(w) = w_l + O(|w|^2),\ 1 \leqslant l \leqslant k,\\ &\eta_l(w) = O(|w|^2),\ k+1 \leqslant l \leqslant m-1,\\ &\eta_m(w) = \sum_{j=m}^{n} s_j w_j^2 + \sum \eta_{mpq} w_p w_q + O(|w|^3), \end{aligned} \tag{4.31}$$

где числа s_j принимают одно из трех значений: 0, -1, 1, и где $\eta_{mpq} = 0$ при $p, q \geqslant m$.

Рассмотрим отображение $\mu(w)$ вида

$$\begin{aligned} &\mu_l(w) = 0,\ 1 \leqslant l \leqslant k,\ \mu_l(w) = w_l,\ k+1 \leqslant l \leqslant m-1,\\ &\mu_m(w) = \sum w_j^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

В последнем уравнении суммирование ведется только по тем индексам j, для которых $s_j = 0$; если таких индексов нет, то $\mu_m(w) \equiv 0$.

Положим, наконец,

$$\psi_i(x) = \varepsilon_i G_i^{-1} \mu\,[F_i^{-1} H_i^{-1}(x - x_i)], \tag{4.33}$$

где $\varepsilon_i \neq 0$ выберем так, чтобы при $|x - x_i| \leqslant {}^1/_2\,|x_i|$ для всех $p, q = 1, 2, \ldots, n$ выполнялись неравенства

$$|\psi_i(x)| \leqslant |x_i|^{l+2},\ \left|\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x_p}\right| \leqslant |x_i|^{l+1},\ \left|\frac{\partial^2 \psi_i(x)}{\partial x_p\, \partial x_q}\right| \leqslant |x_i|^l.$$

Можно считать выполненными неравенства $3\,|x_{i+1}| < |x_i|$. Положим $\psi(x) = \sum \psi_i(x)\, \sigma\,[2(x - x_i)/|x_i|]$, где $\sigma(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, введенная при доказательстве леммы 4.3. Из рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 4.3, вытекает, что $\psi \in j_0^l(0) \cap C^l$, причем

$$\psi(x) = \psi_i(x) \quad \text{при } |x - x_i| < \frac{1}{4}|x_i| \tag{4.34}$$

и, значит, $\psi(x_i) = \psi_i(x_i)$. В силу (4.34) уравнение $\varphi(x) + \psi(x) = 0$ в окрестности точки x_i принимает вид $\varphi(x) + \psi_i(x) = 0$; его левая часть аналитична в окрестности точки x_i. Умножая слева обе части последнего уравнения на невырожденную матрицу G_i

и производя замену переменных $x = x_i + H_iF_iw$, получим эквивалентное уравнение $G_i\varphi(x_i + H_iF_iw) + G_i\psi_i(x_i + H_iF_iw) = 0$, которое в силу (4.30)—(4.33) можно записать в виде системы

$$w_l + O(|w|^2) = 0,\ 1 \leqslant l \leqslant k,\ \varepsilon_i w_l + O(|w|^2) = 0,$$
$$k + 1 \leqslant l \leqslant m - 1, \tag{4.35}$$
$$\sum_{j=m}^{n} \gamma_j w_j^2 + \sum \eta_{mpq} w_p w_q + O(|w|^3) = 0,$$

где

$$\eta_{mpq} = 0 \text{ при } p, q \geqslant m;\ \varepsilon_i \neq 0;\ \gamma_m, \ldots, \gamma_n \neq 0. \tag{4.36}$$

Левые части уравнений (4.35) аналитичны при малых w. Следовательно, по теореме о неявной функции из первых $m - 1$ уравнений можно выразить $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}$ как аналитические функции от остальных переменных: $w_1 = W_1(w_m, \ldots, w_n), \ldots, w_{m-1} = W_{m-1}(w_m, \ldots, w_n)$, причем $W_l(w_m, \ldots, w_n) = O(w_m^2 + \ldots + w_n^2)$ $(l = 1, 2, \ldots, m - 1)$. Подставляя полученные выражения для $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ в последнее уравнение системы (4.35), получим

$$\sum_{j=m}^{n} \gamma_j w_j^2 + W_m(w_m, \ldots, w_n) = 0, \tag{4.37}$$

где в силу (4.36) аналитическая функция $W_m(w_m, \ldots, w_n)$ есть величина не ниже третьего порядка малости в точке $w_m = \ldots = w_n = 0$. Поэтому по теореме Морса [90] в окрестности точки $w = 0$ множество решений уравнения (4.37) (а значит, и системы уравнений (4.35), а тогда — и векторного уравнения (4.34)) гомеоморфно множеству малых решений уравнения $\sum_{j=m}^{n} \gamma_j w_j^2 = 0$. Лемма 4.4. доказана.

4.6. Вернемся к построению отображения h, обладающего свойством б из п. 4.1. Пусть для $f^{(r)}(x)$ не выполнено условие (2.3). Возьмем в качестве h отображение из струи $j_0^r(f) = j_0^r(f^{(r)})$, определяемое леммами 4.2, 4.3 и леммой 4.4 для случая $l = r + 1$. Тогда $h \in C^{r+1}$ и в окрестности каждой точки x_i некоторой последовательности $\{x_i\}$ $(x_i \to 0)$ ненулевых решений уравнения

$$h(x) = 0 \tag{4.38}$$

множество решений этого уравнения гомеоморфно вырожденной квадратичной поверхности малых решений уравнения вида

$$\sum_{j=1}^{n-m+1} \gamma_{ij}\xi_j^2 = 0,\ \gamma_{ij} \neq 0. \tag{4.39}$$

4.7. Нам понадобится следующая хорошо известная

Лемма 4.5. *Квадратичная поверхность решений уравнения*

$\sum_{j=1}^{k+1} \gamma_j \xi_j^2 = 0$ $(|\gamma_1| = |\gamma_2| = \ldots = |\gamma_{k+1}| = 1)$ *при* $k \geqslant 1$ *не является топологическим многообразием размерности* k *в окрестности нуля.*

Завершим доказательство теоремы 2.1. Если не выполнено условие (2.3) теоремы 2.1, то множества малых решений уравнения (4.38) и уравнения

$$g(x) = 0, \tag{4.40}$$

где g — отображение, построенное в п. 4.2, не являются локально топологически эквивалентными в окрестности нуля. Действительно, если множества решений этих уравнений локально топологически эквивалентны, то существует гомеоморфизм φ ($\varphi(0) = 0$), отображающий окрестность U нуля в R^n на окрестность $\tilde{U}$ нуля в R^n, такой, что $\varphi\{h^{-1}(0) \cap U\} = g^{-1}(0) \cap \tilde{U}$. В частности, для любой достаточно малой по норме точки x_i из построенной для h в п. 4.6 последовательности $\{x_i\}$ отображение φ является гомеоморфизмом окрестности точки x_i в $h^{-1}(0)$ на окрестность точки $\varphi(x_i)$ в $g^{-1}(0)$. Но по лемме 4.5 такого гомеоморфизма нет, поскольку окрестность точки x_i в $h^{-1}(0)$ гомеоморфна квадратичной поверхности (4.39), а окрестность точки $\varphi(x_i)$ в $g^{-1}(0)$ в силу леммы 4.1 является топологическим многообразием размерности $n - m$. Мы пришли к противоречию.

Итак, если условие (2.3) не выполнено, то множества малых решений уравнений (4.38) и (4.40) не являются локально топологически эквивалентными в окрестности нуля. Так как $g, h \in j_0^r(f) \cap C^{r+1}$, то система уравнений (1.1) в этом случае не r-определена в классе C^{r+1}. Теорема 2.1 полностью доказана.

5. Схема доказательства теоремы 2.2

Эквивалентность условий (2.5) и (2.6) следует из леммы 3.1.

Докажем, что из условия (2.6) следует r-определенность системы уравнений (1.1) в классе C^r. Положим $F(x, \lambda) = f^{(r)}(x) + \lambda\theta(x)$, где $\theta(x) = \tilde{f}(x) - f^{(r)}(x)$, $\tilde{f} \in j_0^r(f) \cap C^r$.

Лемма 5.1. *Если* $\tilde{f} \in j_0^r(f) \cap C^r$ *и многочлен* $f^{(r)}(x)$ *удовлетворяет условию* (2.6), *то для каждого* $R > 0$ *существует* $\varepsilon(R) > 0$, *такое, что* $\Psi[F(\cdot, \lambda); x, y] > 0$ *при* $|x| \leqslant \varepsilon(R)$ $(x \neq 0)$, $y \neq 0$ *и* $|\lambda| \leqslant R$.

Доказательство. По условию леммы $\theta \in j_0^r(0) \cap C^r$. Следовательно, $|\theta(x)| = o(|x|^r)$, $|D\theta(x)| = o(|x|^{r-1})$. Отсюда вытекает неравенство $\Psi[F(\cdot, \lambda); x, y] \geqslant \Psi[f^{(r)}; x, y] - |y|\, o(|x|^r)$. Из этого неравенства и условия (2.6) следует утверждение леммы.

В силу леммы 5.1 отображение $F(x, \lambda)$ в условиях теоремы 2.2 удовлетворяет условиям лемм 3.3—3.5. Из соответствующих рассуждений доказательства теоремы 2.1 вытекает топологическая r-определенность в классе C^r уравнений (1.1) в окрестности нуля.

Установим необходимость условия (2.5) для r-определенности уравнений (1.1) в классе C^r. Если уравнения (1.1) r-определены в C^r, но условие (2.5) не выполнено, то найдутся $x_i \to 0$ ($x_i \neq 0$), $y_i \neq 0$, такие, что $|y_i|^{-2} |x_i|^{-2r} \Phi(f^{(r)}; x, y) \to 0$. Отсюда и из леммы об отборе кривых вытекает существование $\tilde{x}_i \to 0$ ($\tilde{x}_i \neq \neq 0$), $\tilde{y}_i \neq 0$, удовлетворяющих при некотором $\delta > 0$ неравенствам

$$|f^{(r)}(\tilde{x}_i)| \leqslant c |\tilde{x}_i|^{r+\delta}, \quad |Df^{(r)}(\tilde{x}_i)^* \tilde{y}_i| \leqslant c |\tilde{x}_i|^{r-1+\delta} |\tilde{y}_i|.$$

Далее, используя леммы 4.1 и 4.3—4.5 и дословно повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 2.1, получаем, что система уравнений (1.1) не является в окрестности нуля топологически r-определенной в классе C^r. Теорема 2.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954.
4. *Бобылев Н. А.* О деформации функционалов, имеющих единственную критическую точку.— Мат. заметки, 1983, т. 34, вып. 3, с. 387—398.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский А. Ю.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
6. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
7. *Болтянский В. Г.* Свойство отделимости системы выпуклых конусов.— Изв. АН АрмССР. Математика, 1972, т. 7, № 4, с. 250—257.
8. *Болтянский В. Г.* Теорема о пересечении множеств.— Изв. АН АрмССР, 1972, т. 7, № 5, с. 325—333.
9. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
10. *Болтянский В. Г.* Метод шатров в теории экстремальных задач.— Успехи мат. наук, 1975, т. 30, № 3, с. 3—55.
11. *Болтянский В. Г.* Отделимость системы выпуклых конусов в топологическом векторном пространстве.— Докл. АН СССР, 1985, т. 283, № 5, с. 1044—1046.
12. *Болтянский В. Г.* Отделимость конусов в линейных топологических пространствах.— В кн.: Динамика неоднородных систем. М.: ВНИИ системных исследований, 1984, с. 68—76.
13. *Болтянский В. Г.* Теория шатров — аппарат решения экстремальных задач. М.: ВНИИ системных исследований, 1985, с. 76. Препр.
14. *Болтянский В. Г.* Шатры в топологических векторных пространствах.— В кн.: Динамика неоднородных систем. М.: ВНИИ системных исследований, 1985, с. 77—83.
15. *Болтянский В. Г.* О пересечении локальных шатров.— Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 5, с. 1042—1044.
16. *Болтянский В. Г.* Принцип максимума в теории оптимальных процессов.— Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6, с. 1070—1074.
17. *Болтянский В. Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 3, с. 518—521.
18. *Болтянский В. Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства и с переменной областью управления.— В кн.: Динамика неоднородных систем. М.: ВНИИ системных исследований, 1983, с. 78—86.
19. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
20. *Браверман Э. М., Меерков С. М., Пятницкий Е. С.* Малый параметр в проблеме обоснования метода гармонического баланса (в случае гипотезы фильтра).— АиТ, 1975, № 1, с. 43—51; № 2, с. 53—62.
21. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
22. *Вайникко Г. М.* Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту: Тарт. ун-т, 1970.

23. *Воинов Ю. Н.* Ограниченность градиентов обобщенных решений краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений вблизи границы.— Вестн. ЛГУ, 1974, вып. 2, № 7, с. 7—12.
24. Вопросы математической теории надежности/Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983.
25. *Воронов А. А.* Основы теории автоматического регулирования. М.: Энергия, 1980.
26. *Всехсвятский С. Ю., Калашников В. В.* Оценки момента первого наступления редкого события в регенерирующих процессах.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1985, № 2, с. 105—110.
27. *Всехсвятский С. Ю., Калашников В. В.* Оценки моментов первого наступления редких событий в регенерирующих процессах.— Теория вероятностей и ее применения, 1985, т. 30, № 2, с. 90—94.
28. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
29. *Грачев Н. И.* Фильтрующие свойства нелинейности обобщенный люфт.— АиТ, 1982, № 5, с. 47—51.
30. *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета: Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
31. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы: Общая теория, М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 1.
32. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений.— Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 4, с. 759—762.
33. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 3, с. 395—453.
34. *Зачепа В. Р.* Конечноопределенные уравнения. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1980, деп. № 3615—80.
35. *Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И.* Регулярные ветвления и регулярные деформации нелинейных фредгольмовых уравнений. М.: ВИНИТИ АН СССР, деп. № 3617—80.
36. *Звонкин А. К., Шубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений.— УМН, 1981, т. 39, № 2, с. 77—127.
37. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
38. *Золотарев В. М.* Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений.— Мат. сб., 1976, т. 101/(143), № 3, с. 416—454.
39. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
40. *Ишлинский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением.— Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 3, с. 430—441.
41. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Об учете микронапряжений в теории пластичности.— Механика твердого тела, 1968, № 3, с. 17—32.
42. *Какосян А. В., Клебанов Л. Ю.* Об оценках близости распределений в терминах характеристических функций.— Теория вероятностей и ее применения, 1984, т. 29, № 4, с. 815—816.
43. *Калашников В. В.* Оценка скорости сходимости в теореме Реньи.— В кн.: Тр. Всесоюз. семинара «Проблемы устойчивости стохастических моделей». М.: изд-во ВНИИСИ, 1983, с. 48—57.
44. *Калман Р., Фалб П., Арбиб А.* Очерки по математической теории систем. М.: Наука, 1973.
45. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
46. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах.— Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 6, с. 1058—1061.
47. *Климов В. С.* О вращении потенциальных векторных полей.— Мат. заметки, 1976, т. 20, вып. 2, с. 253—261.
48. *Козякин В. С., Красносельский М. А.* Метод функционализации параметра в задаче о точках бифуркации.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 5, с. 1061—1064.

49. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. М.: Сов. радио, 1967.
50. *Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л.* Оптимальное управление стохастическими системами с последействием.— АиТ, 1973, № 1, с. 34—41.
51. *Колмановский В. Б.* Об аппроксимации линейных управляемых систем с последействием.— Пробл. управления и теории информ., 1974, т. 3, № 1, с. 39—45.
52. *Колмановский В. Б.* Оптимальное управление некоторыми стохастическими системами с запаздывающим аргументом.— В кн.: Тр. 4 Всесоюз. конф. по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев: Наук. думка, 1977, с. 177—185.
53. *Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* О приближенном синтезе оптимального управления стохастическими квазилинейными системами с после действием.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 978—988.
54. *Колмановский В. Б.* О фильтрации некоторых стохастических процессов с последействием.— АиТ, 1974, № 1, с. 51—55.
55. *Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л.* Оптимальные оценки состояния системы и некоторые задачи управления уравнениями с последействием.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 3, с. 446—456.
56. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
57. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Системы с последействием нейтрального типа.— АиТ, 1984, № 1, с. 17—23.
58. *Красносельский А. М.* Априорные оценки норм решений скалярных неравенств.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 5, с. 1119—1122.
59. *Красносельский А. М.* Частотные критерии в задаче о вынужденных периодических колебаниях систем автоматического регулирования.— АиТ, 1980, № 9, с. 23—30.
60. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
61. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1960.
62. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
63. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
64. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
65. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
66. *Красносельский М. А.* О рождении автоколебаний из состояния равновесия.— АиТ, 1973, № 1, с. 182—184.
67. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3, с. 199—215.
68. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости.— Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 3, с. 293—296.
69. *Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М.* Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3, с. 530—533.
70. *Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М.* О топологическом индексе экстремалей функционалов вариационного исчисления.— Докл. АН ТаджССР, 1978, т. 21, № 8, с. 8—11.
71. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
72. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
73. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1968.

74. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Основы вариационного исчисления. М.; Л.: ОНТИ, 1935. Т. 1. Ч. 2.
75. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
76. *Лере Ж., Шаудер Ю.* Топология и функциональные уравнения.— УМН, 1946, т. 1, № 3/4, с. 14—36.
77. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1973.
78. *Мессарович М., Такахара Я.* Общая теория систем. М.: Мир, 1978.
79. *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
80. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
81. *Пальмов В. А.* Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976,
82. *Покровский А. В.* Корректные решения уравнений с сильными нелинейностями.— Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 5, с. 1037—1040.
83. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
84. *Понтрягин Л. С.* Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1976.
85. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования автоматических систем. М.: Физматгиз, 1960.
86. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973.
87. *Похожаев С. И.* О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами.— Функцион. анализ и его прил., 1967, т. 1, № 3, с. 48—55.
88. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. (Библиотека сб. «Математика»). М.: Мир, 1967. 258 с.
89. *Розенвассер Е. Н.* Колебания нелинейных систем: Метод интегральных уравнений. М.: Наука, 1969.
90. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии: Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
91. *Садовский Б. Н.* Предельно компактные и уплотняющие операторы.— УМН, 1972, т. 21, № 1, с. 81—146.
92. *Сахобов О., Соловьев А. Д.* Неравенства для характеристик надежности восстанавливаемых систем. Ташкент: ФАН, 1983.
93. *Сешу С, Рид М. Б.* Линейные графы и электрические цепи. М.: Высш. шк., 1971.
94. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наук. думка, 1973.
95. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.
96. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 6, с. 1038—1048.
97. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.
98. Функциональный анализ: Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1972.
99. *Цыпкин Я. З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
100. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука. 1973.
101. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
102. *Шайхет Л. Е.* Оптимальное управление уравнениями Вольтерра.— Пробл. управления и теории информ., 1984, т. 13, № 3, с. 141—152.
103. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости.— В кн.: Методы исследования нелинейных систем автоматического регулирования/ Под ред. Р. А. Нелепина. М.: Наука, 1976, с. 42—177.

104. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
105. *Brezis H.* Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.— Ann. Inst. Fourier, 1968, vol. 18, N 1, p. 115—175.
106. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contraction dans les espaces de Hilbert. Amsterdam: North-Holland, 1973.
107. *Browder F. E.* Pseudo-monotone operators and the direct method of variations.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1970, vol. 38, N 4, p. 268—277.
108. *Browder F. E.* Nonlinear elliptic boundary value problem and the generalized topological degree.— Bull. Amer. Math. Soc., 1970, vol. 76, N 5, p. 999—1005.
109. *Fujisaki M., Kallianpur G., Kunita H.* Stochatic differential equations for the nonlinear filtering problem.— Osaka J. Math., 1972, vol. 9, p. 19—40. Пер.: Математика: Сб. пер. иностр. ст., 1973, т. 17, № 2, с. 108—128.
110. *Giltay.* On ferromagnetic states.— Appl. Sci. Res., 1951, vol. 2, p. 199—215.
111. *Kwong R. H., Wilsky A. D.*. Estimation and filter stability of stochastic delays ystems.— SIAM J. Contr. and Optimiz., 1978, vol. 16, N 4, p. 660—681.
112. Nonlinear filtering and stochastic control/Ed. S. K. Mitter. N. Y.: Springer, 1982. 297 p.
113. *Rabinowitz P.* A note on topological degree for potential operators.— J. Math. Anal. and Appl., 1975, vol. 51, N 2, p. 483—492.
114. *Van Trees H. L.* Detection, estimation and modulation theory. N. Y.: Wiley, 1971, Pt 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Николай Антонович Бобылев
Владимир Григорьевич Болтянский
Сергей Юрьевич Всехсвятский и др.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

Утверждено к печати
Всесоюзным научно-исследовательским институтом
системных исследований
Академии наук СССР

Редактор Г. А. Сидорова
Редактор издательства М. М. Гальперин
Художник Н. Н. Якубовская
Художественный редактор Н. А. Фильчагина
Технические редакторы
М. Н. Комарова, И.В. Бочарова
Корректоры Н. Б. Габасова, И. А. Талалай

ИБ № 35004

Сдано в набор 03 02.86. Подписано к печати 19.05.86.
Т-01562. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага книжно-журнальная.
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая. Усл. печ. л. 10,5.
Усл. кр. отт. 10,75. Уч.-изд.л. 10,5. Тираж 3450 экз.
Тип. зак. 2356 Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

2-типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

Для получения книг почтой заказы просим направлять по одному из адресов: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

480091 **Алма-Ата**, 91, ул. Фурманова, 91/97;
370005 **Баку**, 5, Коммунистическая ул., 51;
690088 **Владивосток**, Океанский проспект, 140,
320093 **Днепропетровск**, проспект Ю. Гагарина, 24,
734001 **Душанбе**, проспект Ленина, 95;
664033 **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289;
252030 **Киев**, ул. Пирогова, 4;
277012 **Кишинев**, проспект Ленина, 148;
343900 **Краматорск**, Донецкой области, ул. Марата, 1;
443002 **Куйбышев**, проспект Ленина, 2;
220012 **Минск**, Ленинский проспект, 72;
630090 **Новосибирск**, Академгородок, Морской проспект, 22;
620151 **Свердловск**, ул. Мамина-Сибиряка, 137;
700185 **Ташкент**, ул. Дружбы народов, 6,
450059 **Уфа**, 59, ул. Р. Зорге, 10;
720000 **Фрунзе**, бульвар Дзержинского, 42;
310078 **Харьков**, ул. Чернышевского, 87.

1 р. 10 к.