Определение разделенных разностей. Определение по индукции:

$$f[y_1, y_2] := \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1},$$
$$\dots$$
$$f[y_1, \dots, y_n] := \frac{f[y_2, \dots, y_n] - f[y_1, \dots, y_{n-1}]}{y_n - y_1}.$$

Упражнение

$$f[y_1, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(y_i)}{\pi_i},$$

где

$$\pi_i = \pi_i(y_1, \dots, y_n) := \prod_{r : r \neq i} (y_i - y_r).$$

Определение. Стандартный $(n-1)$-мерный симплекс, это

$$\Delta_{n-1} := \{(t_1, \dots, t_n) : t_1, \dots, t_n \geq 0, \quad t_1 + \dots + t_n = 1\},$$

Упражнение. Для любого $i = 1, \dots, n$ выражение

$$\frac{dt_1 \dots dt_n}{dt_i} := dt_1 \dots dt_{i-1} dt_{i+1} \dots dt_n$$

задает один и тот же элемент объема (меру) на симплексе Δ_{n-1}.

Определение. Обозначим этот элемент объема (меру) через dt.

Упражнение.

$$\int_{\Delta_{n-1}} dt = \frac{1}{(n-1)!}$$

Определение. Равномерное распределение на симплексе Δ_{n-1} задается мерой $(n-1)!dt$, имеющей общую массу 1.

Теорема Эрмита-Генокки. Пусть $f(x)$ — функция на $\mathbb{R}$ класса C^{n-1} и $y_1, \dots, y_{n-1}$ — попарно различные точки на $\mathbb{R}$. Справедлива формула

$$f[y_1, \dots, y_n] = \int_{\Delta_{n-1}} f^{(n-1)}(t_1 y_1 + \dots + t_n y_n) dt.$$

Упражнение. Доказать этот факт индукцией по n.

Основание индукции: случай $n = 2$. Положить

$$g(t) := f((1-t)y_1 + ty_2)$$

и использовать лемму Ньютона-Лейбница, согласно которой

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt.$$

Далее, для $n \geq 3$ ввести функцию на $[0, 1]$

$$t \mapsto g(t; t_2, \dots, t_{n-1}) := f^{(n-2)}((1-t)y_1 + t_2 y_2 \cdots + t_{n-1}y_{n-1} + ty_n)$$

и применить тот же трюк, используя индуктивное определение разделенных разностей.

Постарайтесь проделать сами, а в случае затруднений можно посмотреть заметку Александера.

Определение. $M(x; y_1, \dots, y_n)dx$ есть образ равномерного распределения $(n-1)!dt$ при отображении

$$\Delta_{n-1} \ni t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1 y_1 + \dots + t_n y_n.$$

Функция $x \mapsto M(x; y_1, \dots, y_n)$ называется B-сплайном с узлами $y_1, \dots, y_n$.

Упражнение.

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(x; y_1, \dots, y_n)dx = 1.$$

Теорема. Явный вид B-сплайна таков:

$$M(x; y_1, \dots, y_n) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - x)_+^{n-2}}{\pi_i},$$

Вывод этой теоремы из теоремы Эрмита-Генокки:

Зафиксируем отрезок $[a, b]$, содержащий все узлы. Достаточно доказать, что

$$(n-1)!\int_{\Delta_{n-1}} g(t_1 y_1 + \dots t_n y_n)dt = \int_a^b g(\xi)M(\xi; y_1, \dots, y_n)d\xi$$

для любой непрерывной функции $g(\xi)$ на $[a,b]$.

Найдется функция f, такая, что $g = f^{(n-1)}$. Напишем разложение

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-2}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x f^{n-1}(\xi)(x-\xi)^{n-2}d\xi,$$

где $x \in [a,b]$. Перепишем это как

$$f(x) = P(x) + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b f^{n-1}(\xi)(x-\xi)_+^{n-2}d\xi,$$

где

$$P(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}.$$

Линейный функционал

$$L : f \mapsto f[y_1, \ldots, y_n]$$

обращается в нуль на полиномах степени $\leq n-2$. Поэтому $L(P) = 0$.

Применяя L к f, получаем

$$L(f) = L\left(x \mapsto \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b f^{n-1}(\xi)(x-\xi)_+^{n-2}d\xi,\right)$$

или

$$(n-1)!L(f) = \int_a^b g(\xi)L\left(x \mapsto (n-1)(x-\xi)_+^{n-2}\right)d\xi.$$

Согласно Эрмиту-Генокки левая часть равна

$$\int_a^b g(\xi)M(\xi; y_1, \ldots, y_n)d\xi.$$

Стало быть, $M(\xi; y_1, \ldots, y_n)$ совпадает со значением функционала L на функции

$$x \mapsto (n-1)(x-\xi)_+^{n-2}.$$

Конец доказательства.