МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им.В.А.СТЕКЛОВА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

И.М.ГЕЛЬФАНД, А.А.КИРИЛЛОВ

О ТЕЛАХ СВЯЗАННЫХ С ОБЁРТЫВАЮЩИМИ АЛГЕБРАМИ АЛГЕБР ЛИ

Москва, 1965 г.

Хорошо известно, что некоммутативные кольца естественно возникают во многих вопросах анализа. Не говоря уже о само собой направшивающемся примере кольца всех операторов в гильбертовом пространстве, такими примерами являются операторы квантовой теории поля, дифференциальные операторы, групповые кольца алгебр Ли, обертывающие алгебры алгебр Ли.

Одним из наиболее общих и интересных с алгебраической точки зрения является пример кольца дифференциальных операторов на C^∞ многообразии X с C^∞ коэффициентами, инвариантных относительно некоторой группы преобразований. Алгебраический подход в этом случае состоит в изучении структуры этого кольца. При таком подходе становится совершенно необходимым рассматривать преобразования вида:

$$x \to i\frac{d}{dx}\ ,\quad \frac{d}{dx} \to ix \qquad \text{(Преобразование Фурье)}$$

или

$$x + \frac{d}{dx} = y\ ,\quad x - \frac{d}{dx} = -2\frac{d}{dy}$$

Такие преобразования мы должны рассматривать наравне с обычными заменами переменных.

В этой работе мы рассматриваем лишь один специальный вид колец – обертывающие алгебры $U(G)$ алгебр Ли G

165

или, другими словами, кольцо левоинвариантных дифференциальных операторов на группе Ли.

Неизоморфных между собой колец такого типа очень много. Как показывает пример алгебраической геометрии, ситуация упрощается, если перейти к бирациональной классификации, т.е. если считать эквивалентными кольца, у которых совпадают тела отношений. Рассматриваемые нами кольца $U(G)$ также допускают тело отношений $D(G)$.

Пусть L – поле характеристики 0, а K – некоторое некоммутативное тело над L, центр которого обозначим $Z(K)$. Мы определяем размерность тела K над полем L, которую обозначим через $\mathrm{Dim}_L K$ (см. § 4) и связываем с каждым телом два числа n и k, определяемые формулами:

$$k = \mathrm{Dim}_L Z(K)$$
$$2n+k = \mathrm{Dim}_L K$$

Для случая, когда G – алгебраическая алгебра Ли числа n и k оказываются конечными и целыми неотрицательными. Число $2n+k$ совпадает при этом с размерностью алгебры G, а число k с коразмерностью орбиты общего положения в представлении сопряженном к присоединенному. Наша гипотеза состоит в том, что для случая алгебраической алгебры Ли G числа n и k определяют тело $D(G)$ с точностью до изоморфизма.

Для любых целых чисел $n \geq 0$, $k \geq 0$ мы рассматриваем "стандартное" тело $D_{n,k}(L)$, имеющее в качестве инвариантов n и k. Отсюда, в частности, следует, что тела $D_{n,k}(L)$ и $D_{n',k'}(L)$ изоморфны лишь при $n=n'$, $k=k'$. Некоторое более слабое утверждение (о кольцах) является ответом на вопрос, поставленный Dixmier. Тело $D_{n,k}(L)$ порождается над L элементами $x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, y_1, \dots, y_k$ с обычными соотношениями коммутации для x и $\frac{\partial}{\partial x}$.

Нашу гипотезу о $D(G)$, о которой мы говорили выше, мы можем сейчас сформулировать так: Если G – алгебраическая алгебра Ли над полем L, то $D(G) \simeq D_{n,k}(L)$.

Эта гипотеза доказана в статье для случая, когда G – матричная алгебра и для случая любой нильпотентной алгебры. Кроме того она оказывалась справедливой во всех других примерах, рассмотренных авторами.

Числа n и k имеют существенное значение в теории бесконечномерных представлений и хорошо известны специалистам. Они описывают представления "общего положения". А именно, представление "общего положения" зависит от k параметров и естественно реализуется в пространстве функций от n переменных.

В заключение приводятся примеры двух неалгебраических алгебр Ли, из которых для одной наша гипотеза выполнена, а для другой нет.

§ I. Предварительные сведения.

Напомним некоторые хорошо известные факты теории колец. Для полноты изложения и удобства читателя мы приводим доказательства этих фактов.

Пусть A – кольцо с возрастающей фильтрацией:

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots, \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A,$$

связанной с законом умножения соотношением

$$A_i A_j \subset A_{i+j} \qquad (1)$$

Положим $gr^i A = A_i / A_{i-1}$ и $gr A = \sum gr^i A$

Обозначим через p_i естественную проекцию $A_i \to gr^i A$. Если $x \in A_i$, $y \in A_j$, то элемент $p_{i+j}(xy) \in gr^{i+j} A$ в силу (I) зависит только от $p_i(x) \in gr^i A$ и $p_j(y) \in gr^j A$. Мы получаем таким образом для любых i и j отображение $gr^i A \times gr^j A \to gr^{i+j} A$

Очевидно, эти отображения определяют на $gr A$ структуру градуированного кольца.

Лемма I. Если кольцо $gr A$ является нетеровым кольцом без делителей нуля, то этими же свойствами обладает и исходное кольцо A.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{J}$ – (левый) идеал в кольце A. Положим $gr\, \mathfrak{J} = \sum \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_{i-1}$, где $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J} \cap A_i$. Ясно, что $gr\, \mathfrak{J}$ – (левый) идеал в кольце $gr A$

Пусть $\mathfrak{J}^{(1)} \subset \mathfrak{J}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathfrak{J}^{(n)} \subset \ldots$ – возрастающая цепочка (левых) идеалов в A. Тогда $gr\, \mathfrak{J}^{(1)} \subset gr\, \mathfrak{J}^{(2)} \subset \ldots \subset gr\, \mathfrak{J}^{(n)} \subset \ldots$ – возрастающая цепочка (левых) идеалов в $gr A$. Так как кольцо $gr A$ нетерово, то имеют место равенства $gr\, \mathfrak{J}^{(n)} = gr\, \mathfrak{J}^{(n+1)} = \ldots$, начиная с некоторого n.

Покажем, что тогда $\mathfrak{J}^{(n)} = \mathfrak{J}^{(n+1)} = \ldots$

В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{J}^{(n+1)}$. Обозначим через k наименьшее целое число, для которого $x \in \mathfrak{J}_k^{(n+1)} = \mathfrak{J}^{(n+1)} \cap A_k$. Так как $gr^k \mathfrak{J}^{(n+1)} = gr^k \mathfrak{J}^{(n)}$, то существует такой элемент $y \in \mathfrak{J}^{(n)}$, что $p_k(x) = p_k(y)$

Следовательно, $x - y \in \mathfrak{J}_{k-1}^{(n+1)}$. Аналогично, можно подобрать элемент $y' \in \mathfrak{J}^{(n)}$, такой, что разность $x - y - y'$ лежит в $\mathfrak{J}_{k-2}^{(n+1)}$. Продолжая этот процесс, мы убеждаемся, что $x \in \mathfrak{J}^{(n)}$.

Покажем теперь, что кольцо A не имеет делителей нуля. Пусть x_1, x_2 – отличные от нуля элементы A и пусть k_1, k_2 – наименьшие целые числа, для которых $x_i \in A_{k_i}$, $i = 1,2$. Тогда $p_{k_i}(x_i) \neq 0$

Следовательно, $p_{k_1+k_2}(x_1 x_2) = p_{k_1}(x_1)\, p_{k_2}(x_2) \neq 0$ откуда $x_1 x_2 \neq 0$

Лемма 2. Всякое нетерово (слева) кольцо без делителей нуля является (левым) кольцом Оре. (Это значит, что любые два ненулевые элемента кольца имеют ненулевое общее левое кратное).

Доказательство. Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$ – два элемента из кольца A. Обозначим через J_n левый идеал в A, порожденный элементами $a, ab, \ldots, ab^n$. В силу нетеровости кольца A при некотором n должно быть равенство $J_n = J_{n+1}$. Отсюда

$$ab^{n+1} = x_0 a + x_1 ab + \ldots + x_n ab^n, \quad x_i \in A \qquad (2)$$

Пусть k – наименьший номер, при котором $x_k \neq 0$. Тогда, деля обе части равенства (2) справа на b^k, мы получим:

$$ab^{n+1-k} = x_k a + x_{k+1} ab + \ldots + x_n ab^{n-k}$$

или

$$x_k a = (-x_{k+1} a - \ldots - x_n ab^{n-k-1} + ab^{n-k}) b$$

откуда видно, что элемент $x_k a$ является общим левым кратным элементов a и b.

Для всякого орева кольца A можно определить тело отношений следующим образом. Рассмотрим совокупность всех выражений вида ba^{-1} или $a^{-1}b$, где a, b – элементы кольца A, причем $a \neq 0$. Условимся отождествлять выражения $a^{-1}b$ и cd^{-1}, если $bd = ac$. Из оревости кольца A следует, что каждая "левая дробь" ab^{-1} может быть записана в виде "правой дроби" cd^{-1} и что каждую пару "дробей" $a^{-1}b$, $c^{-1}d$ можно

165

"привести к общему знаменателю", то-есть подобрать такие элементы $x, y_1, y_2 \in A$, что $a^{-1}b = x^{-1}y_1$, $c^{-1}d = x^{-1}y_2$

Для левых дробей с общим знаменателем, естественно, определяются сложение, вычитание и деление:

$$x^{-1}y_1 \pm x^{-1}y_2 = x^{-1}(y_1 \pm y_2)$$
$$(x^{-1}y_1)^{-1}(x^{-1}y_2) = y_1^{-1}y_2$$

После этого можно определить умножение на элемент $a^{-1}b$ как деление на обратный элемент $b^{-1}a$. Без труда проверяется, что полученная совокупность элементов с введенными таким образом операциями действительно является телом.

§ 2. Определение кольца $R_n(A)$ и тела $D_n(A)_0$

Пусть теперь A – произвольное нетерово кольцо без делителей нуля. Через $R_n(A)$ мы будем обозначать алгебру над кольцом A с $2n$ образующими $p_1, p_2, \ldots p_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и соотношениями

$$p_i p_j - p_j p_i = q_i q_j - q_j q_i = 0, \quad [p_i, p_j] = \delta_{ij} 1 \qquad (3)$$

В кольце $R(A)$ можно определить возрастающую фильтрацию

$$A = (R_n(A))_0 \subset (R_n(A))_1 \subset \ldots \subset (R_n(A))_k \subset \ldots$$

взяли в качестве $(R_n(A))_i$ совокупность всех элементов из $R_n(A)$, которые могут быть записаны в виде многочлена степени $\leqslant i$ от образующих.

Лемма 3. Алгебра $R_n(A)$ является свободным A-модулем, в качестве базы которого можно взять всевозможные одночлены вида

$$p^k q^\ell = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} q_1^{\ell_1} \ldots q_n^{\ell_n} \tag{4}$$

Доказательство этой леммы значительно упрощается, если предполагать, что кольцо A является алгеброй над полем характеристики 0. Именно этот случай будет нам нужен в дальнейшем, поэтому в доказательстве мы им и ограничимся.

Покажем сначала, что элементы вида (4) порождают A-модуль $R_n(A)$. Представим $R_n(A)$ как объединение $(R_n(A))_k$ и предположим, что для $k < k_0$ утверждение доказано. Из соотношений (3) непосредственно вытекает, что любой одночлен степени k_0 сравним с одночленом вида (4) по модулю $(R_n(A))_{k_0-2}$. Поэтому наше утверждение верно и для $k = k_0$. Так как для $(R_n(A))_0 = A$ оно очевидно, то оно верно для всех k.

Осталось показать, что одночлены вида (4) независимы над A. Пусть $x = \sum a_{k,\ell}\, p^k q^\ell = 0$. Упорядочим лексикографически наборы (k,ℓ) и пусть (k°, ℓ°) – наибольший среди тех наборов, для которых $a_{k,\ell} \neq 0$

Обозначим через $ad\, y$ оператор в $R_n(A)$, заданный формулой $ad\, y\, z = yz - zy$. Несложное вычисление показывает, что

$$\prod_{i=1}^{n} ad^{k_i^\circ}(-q_i)\, ad^{\ell_i^\circ} p_i\, x = \prod_{i=1}^{n} k_i!\, \ell_i!\, a_{k_\circ,\ell_\circ} \neq 0$$

что противоречит равенству $x = 0$.

Из леммы 3 непосредственно вытекает, что градуированное кольцо $gr\, R_n(A)$ изоморфно кольцу многочленов $A[p_1,\ldots,p_n,\ q_1,\ldots,q_n]$. Таким образом, $gr\, R_n(A)$ является нетеровым кольцом без делителей нуля. Из сказанного в § I следует, что $R_n(A)$ является нетеровым кольцом без делителей нуля и, следовательно, может быть включено в тело отношений. Это тело мы обозначим через $D_n(A)$. Ясно, что если два кольца $A_1 \underset{\circ}{и} A_2$ имеют одно и то же тело отношений K, то

$$D_n(A_1) \simeq D_n(A) \simeq D_n(K)$$

Отметим также следующие легко проверяемые тождества

$$R_n(R_m(A)) = R_{m+n}(A) = R_n(A) \underset{A}{\otimes} R_m(A)$$

$$D_n(D_m(A)) = D_{m+n}(A).$$

§ 3. Кольцо $R_{n,k}(L)$ и тело $D_{n,k}(L)$

Применим конструкцию, описанную в § 2, в частном случае, когда кольцо A является алгеброй многочленов от k

65

переменных над полем L характеристики 0.
Введем обозначения:

$$R_{n,k}(L) = R_n(L[x_1, \dots, x_k])$$

$$D_{n,k}(L) = D_n(L[x_1, \dots, x_k]) = D_n(L(x_1, \dots, x_n)).$$

Напомним, что в кольце $R_n(A)$ и, следовательно, в $R_{n,k}(L)$ мы определили возрастающую фильтрацию, так что соответствующее градуированное кольцо $gr\, R_{n,k}(L)$ изоморфно кольцу многочленов от $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ с коэффициентами из кольца $L[x_1, \dots, x_k]$. Для каждого ненулевого элемента $a \in R_{n,k}(L)$ существует ровно один номер i, такой, что элемент $p_i(a) \in gr^i R_{n,k}(L)$ определен и отличен от нуля. Мы будем называть этот элемент старшим членом элемента a и обозначать $[a]$. Из этого определения следует, что $[a]$ - однородный многочлен от переменных $p_1, \dots, p_n$, $q_1, \dots, q_n$ с коэффициентами из $L[x_1, \dots, x_n]$.

Очевидно, для любых элементов $a_1, a_2 \in R_{n,k}(L)$ выполняется равенство:

$$[a_1 a_2] = [a_1][a_2] \tag{5}$$

т.е. старший член произведения равен произведению старших членов сомножителей.

Пусть теперь b - произвольный элемент тела

$D_{n,k}(L)$. Этот элемент может быть записан в виде $b = a_1 a_2^{-1}$, где $a_i \in R_{n,k}(L)$.

Лемма 4. Рациональная функция $[a_1][a_2]^{-1}$ зависит только от элемента $b = a_1 a_2^{-1}$ (а не от способа записи его в виде отношения элементов из $R_{n,k}(L)$). Обозначим эту функцию через $[b]$. Для любых $b_1, b_2 \in D_{n,k}(L)$ справедливо равенство

$$[b_1 b_2] = [b_1][b_2]$$

Доказательство.

Пусть элемент b записан в виде левой дроби $a_1 a_2^{-1}$ и в виде правой дроби $a_3^{-1} a_4$. Покажем, что тогда $[a_1][a_2]^{-1} = [a_4][a_3]^{-1}$. В самом деле, равенство $a_1 a_2^{-1} = a_3 a_4$ означает по определению, что $a_3 a_1 = a_4 a_2$. Отсюда $[a_3][a_1] = [a_4][a_2]$, что и доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение, очевидно, достаточно доказать для того случая, когда $b_1 \in R_{n,k}(L)$. Но в этом случае имеем:

$$b_1 b_2 = b_1(a_1 a_2^{-1}) = (b_1 a_1) a_2^{-1}$$

Отсюда

$$[b_1 b_2] = [b_1 a_1][a_2]^{-1} = [b][a_1][a_2^{-1}] = [b_1][b_2]$$

Следствие. Функция $[b]$ инвариантна относительно внутренних автоморфизмов тела.

В самом деле, $[aba^{-1}] = [a][b][a]^{-1} = [b]$

Заметим теперь, что в кольце $R_{n,k}(L)$ есть еще одна естественная фильтрация. А именно, в качестве i-ого члена фильтрации берётся совокупность всех элементов, которые могут быть записаны в виде многочленов степени $\leq i$ с коэффициентами из L от образующих

$p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, x_1, x_2, \dots, x_k$

Ясно, что соответствующая этой фильтрации градуированная алгебра совпадает с алгеброй многочленов

$L[p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_k]$

Так же, как и выше, можно определить гомоморфизм $b \to [b]$ мультипликативной группы тела $D_{n,k}(L)$ в группу рациональных функций вида AB^{-1}, где A и B - однородные многочлены (вообще говоря, разных степеней) от $2n+k$ переменных $p_1, \dots p_n, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_k$. Именно этот гомоморфизм мы используем в следующем параграфе при доказательстве неизоморфизма тел $D_{n,k}(L)$ при различных n и k.

§ 4. Теорема о неизоморфизме.

Мы покажем, что построенные нами кольца $R_{n,k}(L)$ и тела $D_{n,k}(L)$ не изоморфны (как алгебры над L) при разных n и k. Доказательство основан на понятии размерности кольца и тела.

Начнем с более простого случая кольца. Пусть A - алгебра над полем L, $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ - любой конечный набор элементов A. Рассмотрим совокупность всех элементов алгебры, которые могут быть записаны в виде многочлена (с коэффициентами из L) степени $\leq N$ от элементов, входящих в набор α. Эта совокупность является, очевидно, линейным пространством над L, размерность которого мы обозначим через $d(\alpha, N)$. Выражение

$$\sup_{\alpha} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\ln d(\alpha, N)}{\ln N}$$

мы будем называть размерностью алгебры A и обозначать

$$\mathrm{Dim}_L A$$

Лемма 5. $\mathrm{Dim}_L R_{n,k}(L) = 2n+k$

Доказательство. Возьмем в качестве α набор

$\alpha_0 = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_k)$

Величина $d(\alpha, N)$ легко вычисляется и равна C^{2n+k}_{N+2n+k} (Напомним, что пространство многочленов степени $\leqslant N$ от m переменных имеет размерность C^{m}_{N+m}). Отсюда

$$\mathrm{Dim}_L R_{n,k}(L) \geqslant \lim_{N\to\infty} \frac{\ln C^{2n+k}_{N+2n+k}}{\ln N} = 2n+k$$

Пусть теперь $\alpha = (a_1, \dots, a_s)$ – произвольный конечный набор элементов из $R_{n,k}(L)$. Каждый элемент a_i может быть записан в виде многочлена от образующих $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_k$. Пусть m наибольшая из степеней этих многочленов. Каждый многочлен степени $\leqslant N$ от a_i является многочленом степени $\leqslant mN$ от образующих. Отсюда $d(\alpha, N) \leqslant d(\alpha_0, mN) = C^{2n+k}_{mN+2n+k}$ Но $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \frac{\ln C^{2n+k}_{mN+2n+k}}{\ln N} = 2n+k$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим теперь тело D над полем L. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_s)$ – конечный набор элементов тела. Набор $(a_1 b, \dots, a_s b)$, где $b \in D$ мы обозначим через αb. Определим размерность тела D над L следующим образом:

$$\mathrm{Dim}_L D = \sup_{\alpha} \inf_{b\neq 0} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\ln d(\alpha b, N)}{\ln N} \qquad (7)$$

Замечание I. Формула (7), определяющая размерность тела, применима и для любого кольца без делителей нуля. Легко проверить, что в случае кольца $R_{n,k}(L)$ формулы (6) и (7) дают одно и то же значение размерности.

Замечание 2. Если тело D коммутативно, то величина $\mathrm{Dim}_L D$, как нетрудно видеть, равна степени трансцендентности D над L.

Вычислим теперь размерность тела $D_{n,k}(L)$

Лемма 6. $\mathrm{Dim}_L D_{n,k}(L) = 2n+k$

Доказательство. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_s)$ – произвольный набор. Существует такой элемент $b \in R_{n,k}(L)$ что все элементы $a_i b$ лежат в $R_{n,k}(L)$. Рассуждая далее так же, как в доказательстве леммы 5, мы получаем неравенство

$$\mathrm{Dim}_L D_{n,k}(L) \leqslant 2n+k$$

Для доказательства обратного неравенства, естественно, рассмотреть набор $\alpha_0 = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_k)$ и доказать, что для любого $b \in D_{n,k}(L)$ одночлены

$$P_{k,\ell,m} = (p_1 b)^{k_1} \dots (p_n b)^{k_n} (q_1 b)^{\ell_1} \dots (q_n b)^{\ell_n} (x_1 b)^{m_1} (x_k b)^{m_k}$$

линейно независимы. Однако, это не так, например, при $b = x_1^{-1}$. Выйти из этого затруднения можно следующим образом

Мы покажем, что многочлены $P_{k,\ell,m}$ могут быть зависимы только когда однородная функция $[b]$ (см.§ 3) имеет степень однородности -1. Тогда многочлены

$$\tilde{P}_{k,\ell,m}=(p_1ab)^{k_1}\dots(p_nab)^{k_n}(q_1ab)^{\ell_1}\dots(q_nab)^{\ell_n}(x_1ab)^{m_1}\dots(x_kab)^{m_k}$$

где a – любой ненулевой элемент $D_{n,k}(L)$, могут линейно независимы только, когда $[ab]$ – однородная функция степени -1. Пусть a – такой элемент тела $D_{n,k}(L)$ для которого степень $[a]$ отлична от нуля. Из сказанного следует, что либо $P_{k,\ell,m}$, либо $\tilde{P}_{k,\ell,m}$ образуют линейно независимую систему. Поэтому, если взять в качестве α объединение наборов α_0 и $\alpha_0 a$ то мы получим

$$d(\alpha b, N) \geq C^{2n+k}_{N+2n+k}$$

откуда следует искомое неравенство

$$Dim_L D_{n,k}(L) \geq 2n+k$$

Посмотрим теперь, когда могут быть линейно зависимы многочлены $P_{k,\ell,m}$. Существует такой элемент $Q\in R_{n,k}(L)$, что все выражения $P_{k,\ell,m}Q$ лежат в $R_{n,k}(L)$. Рассмотрим старший член произведения $P_{k,\ell,m}Q$. Из сказанного в § 3 следует, что

$$[P_{k,\ell,m}Q]=p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}q_1^{\ell_1}\dots q_n^{\ell_n}x_1^{m_1}\dots x_k^{m_k}[b]^d[Q], \quad (8)$$

где через d обозначена степень многочлена $P_{k,\ell,m}$:

$$d=k_1+\dots+k_n+\ell_1+\dots+\ell_n+m_1+\dots+m_k$$

Отсюда $deg[P_{k,\ell,m}Q]=d(1+deg[b])+deg\,Q$

Если $deg[b]\neq -1$, то многочлены $[P_{k,\ell,m}Q]$ имеют разные степени при разных d. Предположим, что эти многочлены линейно зависимы:

$$\sum c_{k,\ell,m}P_{k,\ell,m}=0$$

Пусть $deg[b]>-1$ (соответственно, $deg[b]<-1$ и пусть d – наивысшая (соответственно, наинизшая) степень многочленов $P_{k,\ell,m}$, при которых стоит ненулевой коэффициент $c_{k,\ell,m}$. Тогда должно иметь равенство

$$\sum_{deg P_{k,\ell,m}} c_{k,\ell,m}[P_{k,\ell,m}Q]=0 \quad (9)$$

которое получается из рассмотрения старших членов в выражении

$$\sum c_{k,\ell,m}P_{k,\ell,m}Q=0$$

Вспоминая выражение (8) для $[P_{k,\ell,m}Q]$, мы видим, что (9) не может выполняться для ненулевых коэффициентов $c_{k,\ell,m}$. Доказательство леммы закончено.

Замечание 3. При доказательстве формулы $\mathrm{Dim}_L D_{n,k}(L) = 2n+k$ мы пользовались фактически только следующими свойствами этого тела:

I. $D_{n,k}(L)$ есть тело отношений некоторой алгебры A (а именно, $R_{n,k}(L)$),

2. В алгебре A есть такая фильтрация, что ассоциированная с A градуированная алгебра $gr\,A$ изоморфна алгебре многочленов от $2n+k$ переменных.

Теорема I. Изоморфизмы L - алгебр

$$R_{n,k}(L) \simeq R_{n',k'}(L) \text{ и } D_{n,k}(L) \simeq D_{n',k'}(L)$$

имеют место только при $n = n'$, $k = k'$.

Доказательство. Центр кольца $R_{n,k}(L)$ есть $R_{0,k}(L)$, центр тела $D_{n,k}(L)$ есть $D_{0,k}(L)$ Поэтому изоморфизм возможен только при

$$2n+k = 2n'+k' \quad \text{и} \quad k = k'.$$

§ 5. Определение тела $D(G)$.

Пусть G - алгебра Ли над полем L характеристики 0. Обозначим через $\mathcal{U}(G)$ обертывающую алгебру алгебры G , т.е. фактор-алгебру свободной ассоциативной алгебры, порожденной элементами G , по идеалу, порожденному элементами

$$xy - yx - [x,y],$$

где $x, y \in G$

Каждый элемент $\mathcal{U}(G)$ может быть записан в виде многочлена от элементов G с коэффициентами из L. Таким образом, в $\mathcal{U}(G)$ определяется возрастающая фильтрация

$$L = (\mathcal{U}(G))_0 \subset (\mathcal{U}(G))_1 \subset \ldots \subset (\mathcal{U}(G))_k \subset \ldots,$$

где $(\mathcal{U}(G))_i$ обозначает совокупность всех элементов из $\mathcal{U}(G)$, которые могут быть записаны в виде многочлена степени $\leqslant i$ от элементов алгебры G .

Из теоремы Пуанкаре-Биркгофа"Витта (см.напр. [1], гл.1) следует, что $gr\,\mathcal{U}(G)$ является алгеброй многочленов от m переменных, где $m = \dim G$. Как мы видели в § I, отсюда следует, что алгебра $\mathcal{U}(G)$ является кольцом Оре без делителей нуля. Тело отношений алгебры $\mathcal{U}(G)$ мы обозначим через $D(G)$ и будем называть телом Ли алгебры G .

Из результатов предыдущего параграфа (см.лемму 6 и замечание 3) следует равенство

$$\mathrm{Dim}_L D(G) = m$$

<u>Основная гипотеза</u>. Тело $D(G)$ изоморфно одному из тел $D_{n,k}(L)$.

§ 6. Доказательство основной гипотезы для матричных алгебр

Мы покажем, что основная гипотеза выполняется, когда G - алгебра всех матриц с нулевым следом или полная матричная алгебра. Доказательство основано на следующем предложении

Лемма 7. Пусть G_n - алгебра всех матриц n - ого порядка с элементами из поля L, у которых последняя строчка состоит из нулей. Тогда

$$D(G_n) = D_{\frac{n(n-1)}{2},0}(L)$$

Покажем сначала, как из этой леммы вытекает справедливость основной гипотезы для матричных алгебр. Известно, что центр обертывающей алгебры для полной маричной алгебры G порядка n (соотв. алгебры $\tilde{G}$ матриц со следом 0) порождается элементами $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ (соотв. $\Delta_2, \Delta_3, \dots \Delta_n$), где $\Delta_i(g)$ - след i - ой внешней степени матрицы g. (Мы используем реализацию алгебры $U(G)$ в виде алгебры полиномов на G, см. [2]). Элементы нижней строки входят линейно в многочлены Δ_i. Ясно, что $D(G)$ (соотв. $D(\tilde{G})$) порождается $D(G_n)$) и элементами $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ (соотв. $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$).

Поэтому

$$D(G) = D_{\frac{n(n-1)}{2},n}(L), \quad D(\tilde{G}) = D_{\frac{n(n-1)}{2},n-1}(L)$$

Докажем теперь лемму 7 индукцией по n. Рассмотрим в G_{n+1} естественный базис из элементов e_{ik}, $i = 1,2,\dots n$, $k = 1,2,\dots,n+1$ (e_{ik} - матрица, у которой на пересечении i - ой строки и k - ого столбца стоит I, а остальные элементы равны 0).

Положим $q_i = e_{i,n+1}$, $p_i = e_{ii} q_i^{-1}$, $\tilde{e}_{ik} = e_{ik} q_i^{-1} q_k$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij}$$
$$[\tilde{e}_{ik}, q_j] = \delta_{kj} q_j, \quad [\tilde{e}_{ik}, p_j] = -\delta_{kj} p_j$$

Поэтому, если коэффициенты C_{ik} удовлетворяют условия

$$\sum_{k} C_{ik} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{10}$$

то элемент $\sum_{i,k} C_{ik} \tilde{e}_{ik}$ коммутирует со всеми q_j и p_j.

Рассмотрим совокупность G всех матриц C порядка n, матричные элементы которых удовлетворяют условиям (10). Каждой такой матрице C мы сопоставляем элемент $\alpha(C) = \sum_{i,k} C_{ik} \tilde{e}_{ik} \in D(G_{n+1})$

Оказывается, что отображение α обладает следующим свойством:

$$\alpha([C_1, C_2]) = [\alpha(C_1), \alpha(C_2)]$$

Мы опускаем несложную, но громоздкую проверку этого тождества. Ясно, что тело $D(G_{n+1})$ порождается элементами вида $\alpha(C)$, $C \in G$ и элементами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что тело, порожденное элементами $\alpha(C)$, изоморфно $D_{\frac{n(n-1)}{2},0}(L)$

Но совокупность G является алгеброй Ли, изоморфной G, поэтому нужное нам утверждение верно по индуктивному предположению. Лемма доказана.

§ 7. Доказательство основной гипотезы для нильпотентных алгебр Ли.

Нам понадобятся некоторые сведения о структуре центра алгебры $\mathcal{U}(G)$ и тела $D(G)$, где G – нильпотентная алгебра Ли над полем характеристики 0.

Лемма 8. (Dixmier). Центр тела $D(G)$ является полем отношений центра $Z(G)$ алгебры $\mathcal{U}(G)$ и изоморфен полю рациональных функций от k переменных. Число k имеет ту же четность, что и $\dim G$.
Если G_0 – идеал коразмерности I в G, то либо $Z(G_0) \subset Z(G)$, либо $Z(G) \subset Z(G_0)$

Доказательство перечисленных в лемме фактов можно получить из результатов [3], [4] или [5] см.также [6].

Лемма 9. В алгебре $\mathcal{U}(G)$ существуют элементы $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n, z_1, \dots, z_k$ (числа n и k зависят от алгебры G) со следующими свойствами.

(*) Тело Ли $D(G)$ порождается элементами x_i, y_i, z_i.

(**) Имеют место коммутационные соотношения:

$$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [x_i, z_j] = [y_i, z_j] = [z_i, z_j] = 0,$$

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij} c \quad \text{, где } c \text{ – ненулевой элемент } Z(G)$$

Ясно, что из этой леммы непосредственно вытекает справедливость основной гипотезы для алгебры G : достаточно положить $p_i = x_i c^{-1}$, $q_i = y_i$

Будем доказывать лемму индукцией по размерности G
Пусть G_0 – идеал коразмерности I в G и x – элемент G, не принадлежащий G_0.

I-й случай: $Z(G_0) \subset Z(G)$. В этом случае существует элемент $Z(G)$, не лежащий в $\mathcal{U}(G_0)$. Этот элемент однозначно записывается в виде

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \text{ где } a_i \in \mathcal{U}(G_0)$$

Так как $[y, b] = 0$ для любого $b \in G$, то

$$[a_0, b] x^n + (n a_0 [x, b] + [a_1, b]) x^{n-1} + \dots = 0$$

откуда

$$[a_0, b] = 0, \ [na_0x + a_1, b] = 0$$

т.е.

$$a_0 \in Z(G) \qquad na_0x + a_1 \in Z(G)$$

По предположению индукции в $U(G)$ есть элементы $x_1, \dots x_n, y_1, \dots, y_n\ z_1, \dots, z_k$, удовлетворяющие условиям леммы. Положим $z_{k+1} = na_0x + a_1$.

Очевидно, система элементов $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n, z_1, \dots z_{k+1}$ обладает свойствами (*) и (**)

2-й случай: $Z(G) \subset Z(G_0)$. В этом случае существует элемент $y \in Z(G_0)$, не лежащий в $Z(G)$. Тогда $[x, y] \neq 0$. Пусть k – наибольшее целое число, для которого $(adx)^k y \neq 0$. Меняя, если нужно, y на $(adx)^{k-1} y$, можно считать, что $k = 1$.

Итак, в $Z(G_0)$ существует такой элемент y, что $[x, y] = z \neq 0$, а $[x, z] = 0$, т.е. $z \in Z(G)$. Обозначим через $\widetilde{D(G_0)}$ подтело $D(G_0)$, состоящее из элементов, коммутирующих с x. Мы покажем, что отображение

$$\varphi = exp\left(-\frac{y}{z} adx\right) = \sum \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^k$$

является гомоморфизмом алгебры $U(G_0)$ в $\widetilde{D(G_0)}$

В самом деле:

$$\varphi(ab) = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^k ab =$$

$$\sum_k \sum_{i+j=k} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k \frac{k!}{i!\,j!} (adx)^i a (adx)^j b =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!} \left(\frac{y}{z}\right)^{i+j} (adx)^i a (adx)^j b = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$adx\, \varphi(a) = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} adx \left[\left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^k a\right] =$$

$$= \sum_k \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \left(\frac{y}{z}\right)^{k-1} (adx)^k a + \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^{k+1} a = 0$$

Пусть теперь $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k$ – система образующих $D(G_0)$, обладающая свойствами (*),(**). Положим

$$\tilde{x}_i = z^N \varphi(x_i), \ \tilde{y}_i = z^N \varphi(y_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\tilde{x}_{n+1} = x z^{2N-1} \varphi(c), \ \tilde{y}_{n+1} = y$$

и возьмем в качестве $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{k-1}$ какой-нибудь набор элементов $Z(G)$, порождающий центр тела $D(G)$. Мы покажем, что при подходящем выборе числа N и элемента y полученная система $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$ обладает свойствами

Сначала докажем, что с помощью выбора элемента y можно добиться, чтобы $\varphi(c) \neq 0$. В самом деле, от элемента y мы требовали, чтобы $y \in Z(G_0)$ $[x,y] = z \neq 0$ и $z \in Z(G)$. Поэтому роль y может играть $y_\tau = y + \tau z$ при любом $\tau \in L$. Рассмотрим

$$\varphi_\tau(c) = \sum \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y_\tau}{z}\right)^k (adx)^k c \qquad (11)$$

и предположим, что при всех τ это выражение равно 0. Ясно, что величина (II) является многочленом от τ. Коэффициент при τ^j в этом многочлена равен, как легко сосчитать,

$$\frac{(-1)^j}{j!} \varphi((adx)^j c)$$

Пусть j – наибольший номер, для которого $(adx)^j c$ отлично от нуля. Тогда $(adx)^j c \in Z(G)$, а отображение φ тождественно на $Z(G)$. Поэтому $\varphi((adx)^j c) = (adx)^j c \neq 0$. Это противоречит предположению о том, что наш многочлен тождественно равен нулю.

В дальнейшем будем считать, что y выбран так, что $\varphi(c) \neq 0$. Справедливость условий(**) следует непосредственно из того, что φ является гомоморфизмом $U(G_0)$ в $\widetilde{D(G_0)}$. Остается доказать, что система $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$ порождает тело $D(G)$. Пусть $g_1, \dots, g_m$ такой базис в G, что оператор adx имеет вид

$$adx\, g_i = \sum_{j>i} a_{ij} g_j$$

Тогда

$$\varphi(g_i) = g_i + \sum_{j>i} b_{ij}(y,z) g_j$$

Отсюда видно, что $D(G_0)$ порождается $\varphi(U(G_0))$ и элементами y и z. Так как элементы z и $\varphi(U(G_0)), 1 \leq i \leq k$ лежат в $Z(G)$, то они выражаются через $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{k-1}$. Таким образом, тело $D(G)$ порождается элементами $x, y, \varphi(x_i), \varphi(y_i), \tilde{z}_i$

Остается заметить, что при достаточно большом N элементы $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ лежат в $U(G)$.

Лемма доказана.

§ 8. Примеры

В этом параграфе L означает или поле R вещественных чисел, или поле C комплексных чисел. Пусть G – трехмерная алгебра Ли над L с базисом x, y, z и соотношениями

$$[x,y]=y, \quad [x,z]=\alpha z, \quad [y,z]=0$$

где α – иррациональное число. Присоединенная линейная группа Ли состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{a} & 0 & b \\ 0 & e^{\alpha a} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $a, b, c \in L$ и, очевидно, не является алгебраической. В этом случае тело Ли $D(G)$ не изоморфно ни одному из тел $D_{n,k}(L)$. В самом деле, центр тела $D(G)$ совпадает с полем L (это без труда получается, например, с помощью результатов о структуре центра $D(G)$ для разрешимых алгебр Ли G, полученных в [5]. Таким образом, если бы тело $D(G)$ было изоморфно телу $D_{n,k}(L)$, то выполнялись бы равенства

$$2n+k = \mathrm{Dim}_L\, D(G) = \dim G = 3$$

$$k = \mathrm{Dim}_L\, L = 0,$$

что невозможно при целом n.

Рассмотрим теперь расширение $\tilde{G}$ алгебры G с помощью одномерной алгебры T (с базисным элементом t) заданное соотношениями:

$$[y,z]=t, \quad [x,t]=(1+\alpha)t$$

Так как $\tilde{G}/T = G$, алгебра $\tilde{G}$ также неалгебраическая.

Однако можно проверить, что элементы

$$p_1 = yt^{-1}, \quad q_1 = z, \quad p_2 = (1+\alpha)^{-1}t, \quad q_2 = yzt^{-2} - xt^{-1}$$

порождают тело $D(G)$ и удовлетворяют соотношениям

$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0 \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij}\cdot 1$$

Таким образом, $D(G) \simeq D_{2,0}(L)$.

Литература

I. Séminaire "Sophus Lie," Paris, 1957

2. И.М.Гельфанд. "Центр инфинитезимального группового кольца". Мат.сб.I950, т.26, вып.I,I03-II2.

3. J. Dixmier, Sur les représen-tations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II. Bull. Soc. Math. France, 85, 325-388

4. J. Dixmier, Sur l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie nilpotente. Arch, der Math. 1959, 10, N: 5, 321-326

5. P. Bernat, Sur les corps des quotients de l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie. C. r. Acad. Sci, 1962, 254, N:10, 1712-1714.

6.. А.А.Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп ЛИ, УМН, т.ХУП, I962, вып.4.

Печатается в соответствии с постановлением Президиума Академии Наук СССР № 830 от 6 октября I96I г.

Т-I5780 от 27/XII-65 г. Тир. II0 Заказ I65

Цена 73 коп.