10.09.2013

Перестановки, композиции, разбиения

S_n — группа перестановок множества $\{1,\dots,n\}$.

Comp_n — множество композиций (=упорядоченных разбиений).

Part_n — множество разбиений числа n (=неупорядоченных разбиений).

Пример:

$$\mathrm{Comp}_3 = \{3, 2+1, 1+2, 1+1+1\}$$

$$\mathrm{Part}_3 = \{3, 2+1, 1+1+1\}$$

Упражнение $|\,\mathrm{Comp}_n\,| = 2^{n-1}$.

Разбиения из Part_n параметризуют классы сопряженных элементов в S_n = цикловые структуры. Тем самым, определена проекция $S_n \to \mathrm{Part}_n$.

С другой стороны, есть естественная проекция $\mathrm{Comp}_n \to \mathrm{Part}_n$ (забывание упорядочения компонент).

Можно встроить Comp_n в середину, т.е. построить

$$S_n \to \mathrm{Comp}_n \to \mathrm{Part}_n,$$

где вторая стрелка определена выше, первую стрелку определим сейчас, а сквозное отображение будет тогда как выше.

Определение проекции $S_n \to \mathrm{Comp}_n$ сводится к тому, что каждый цикл в перестановке записываем, начиная с минимального элемента, а циклы затем упорядочиваем в порядке возрастания начальных элементов. Назовем это канонической записью перестановки.

Пример: перестановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 8 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$$

в канонической записи имеет вид

$$(172)(35)(486)$$

Таким образом, образ перестановки σ в Comp_8 есть композиция $3+2+3$.

Случайные разбиения

Вводим равномерное распределение μ_n на S_n: оно сопоставляет каждой перестановке σ вероятность $\mu_n(\sigma) = 1/n!$. Проектируя на Part_n, получаем некоторое вероятностное распределение ν_n на Part_n. Попросту говоря, μ_n позволяет говорить о случайных перестановках, а при переходе к цикловым структурам из них получаются случайные разбиения.

Как генерировать случайные разбиения? Можно генерировать сперва случайные перестановки, но есть более простой способ.

Обозначим через κ_n образ меры μ_n на Comp_n. Я опишу алгоритм генерирования случайных композиций с распределением κ_n (а от них уже легко перейти к разбиениям).

Алгоритм ломания n-звенной палки

Рассмотрим палку длины n, состоящую из n звеньев единичной длины. Палку можно ломать в любой из n точек $1, \dots, n$. Припишем им одинаковые вероятности $1/n$ и выберем место излома n_1 случайно. Отбросим левый кусок (длины n_1) и повторим процедуру к оставшемуся правому куску (длины $n - n_1$). Получим новый обломок длины n_2 и т.д. Процедура обязательно закончится за конечное чисо шагов $k \leq n$, когда правый кусок будет иметь нулевую длину. Результат алгоритма есть случайная композиция $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Предложение. Эта случайная композиция распределена по мере κ_n.

Доказательство. Положим

$$I_m = \{1, 2, \dots, m-1, *\}$$

и определим биекцию $S_n \to I_n \times I_{n-1} \times \dots \times I_1$ следующим образом.

Начинаем с перестановки σ. Записываем ее в каконическом виде как слово $a = a_1 \dots, a_n$, в котором кое-где расставлены скобки, размечающие циклы. Соответствующее слово $i_1 \dots i_n$ устроено так:

Для каждого номера $k = 1, \dots, n$ символ i_k равен $*$, если после a_k стоит скобка, т.е. a_k возвращается в начало цикла. В противном случае i_k равен номеру числа a_{k+1} в множестве

$$\{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$$

если расположить числа из этого множества в порядке возрастания.

Тот факт, что построенное отображение есть биекция, означает, что образ равномерного распределения есть произведение равномерных мер на множествах $I_n, \dots, I_1$.

А это обстоятельство позволяет вычислить распределение длины первого цикла перестановки (т.е. номер позиции первой звездочки).

Вероятность того, что длина равна 1, есть $1/n$, поскольку звездочка на первом месте возникает в одном варианте из n.

Вероятность появления первой звездочки на втором месте равна

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

На третьем месте

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}.$$

И так далее: все вероятности одинаковы и равны $1/n$ — точно так, как в процедуре ломания палки. Но после завершения цикла все возобновляется заново. Доказательство закончено.

Непрерывная версия процесса ломания палки

С равным успехом мы могли бы считать, что палка имеет длину не n, а 1, тогда как возможные точки излома находятся в $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$. А тогда напрашивается следующая процедура:

Исходная палка есть единичный отрезок $I := [0, 1]$. Место первого излома x_1 выбирается случайно, согласно равномерному распределению на I. Левый кусок $[0, x_1]$ отбрасываем. На правом куске $[x_1, 1]$ снова выбираем точку излома случайно и равномерно, левый конец длины $x_2 \leq 1 - x_1$ отбрасываем. Повторяем процедуру с новым правым куском, длина которого равна $1 - x_1 - x_2$, и так далее до бесконечности. В результате получаем случайную последовательность $X = (x_1, x_2, \ldots)$ неотрицательных вещественных чисел. Очевидно, $\sum x_i \leq 1$.

Введем обозначения:

$$\bar{\Delta}_\infty := \{X = (x_i) : x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\},$$

$$\Delta_\infty := \{X = (x_i) : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\},$$

$$\bar{\nabla}_\infty := \{\widetilde{X} = (\widetilde{x}_i) : \widetilde{x}_1 \geq \widetilde{x}_2 \geq \cdots \geq 0, \sum \widetilde{x}_i \leq 1\},$$

$$\nabla_\infty := \{\widetilde{X} = (\widetilde{x}_i) : \widetilde{x}_1 \geq \widetilde{x}_2 \geq \cdots \geq 0, \sum \widetilde{x}_i = 1\}.$$

Описанную процедуру можно рассматривать как отображение $I^\infty \to \bar{\Delta}_\infty$, перерабатывающую последовательность $Y = (y_i) \in I^\infty$ (напомню, что $I = [0,1]$) в последовательность $X = (x_i) \in \bar{\Delta}_\infty$ по правилу

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2(1-y_1), \quad x_3 = y_3(1-y_1)(1-y_2), \quad \dots$$

При этом мы снабжаем бесконечномерный куб I^∞ естественной вероятностной мерой (произведение лебеговых мер); тогда образ этой меры есть некоторая вероятностная мера κ_∞ на $\bar{\Delta}_\infty$, задающая распределение последовательности X.

Предложение. Почти наверное X лежит в $\Delta_\infty \subset \bar{\Delta}_\infty$.

Доказательство. Утверждение равносильно тому, что величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

равна 1 п.н.

Заметим, что

$$1 - \sum_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} (1-y_i).$$

Поэтому надо доказать, что предел правой части равен 0 п.н. Это то же самое, что сказать, что ряд $\sum_{i=1}^\infty y_i$ расходится п.н. Напомним, что числа y_i выбираются независимо и каждое из них равномерно распределено на I.

Упражнение. Закончить доказательство.

Мы видим, что мера κ_∞ сосредоточена на Δ_∞.

Определим теперь проекцию $X \mapsto \widetilde{X}$ из $\bar{\Delta}_\infty$ в $\bar{\nabla}_\infty$ следующим образом: $\widetilde{x}_1$ есть максимальное в ряду чисел $x_1, x_2, \dots$ (для определенности, первое по счету, если их несколько), $\widetilde{x}_2$ есть максимальное в том же ряду, из которого исключено $\widetilde{x}_1$ и т.д.

Упражнение. Эта проекция сохраняет сумму координат (иными словами, все ненулевые числа рано или поздно будут выбраны). Тем самым, она отображает Δ_∞ в ∇_∞.

Обозначим через ν_∞ вероятностное распределение на ∇_∞, являющееся образом распределения κ_∞ относительно проекции $\Delta_\infty \to \nabla_\infty$.

Идея теперь состоит в том, чтобы рассматривать Δ_∞ и ∇_∞ как аналог множеств Comp_n и Part_n, соответственно. Поскольку мы определили на Δ_∞ и ∇_∞ вероятностные распределения, координаты x_i и $\widetilde{x}_i$ становятся случайными величинами. Наша цель — исследование распределений координат $\widetilde{x}_i$.

Распределение первой координаты в ∇_∞

Рассмотрим случайную величину $\widetilde{x}_1$. Напомним, что она определена на вероятностном пространстве $(\nabla_\infty, \nu_\infty)$ и принимает значения в $[0,1]$.

Теорема. Распределение случайной величины $\widetilde{x}_1$ абсолютно непрерывно по мере Лебега и потому имеет плотность $p(x)$. Эта плотность однозначно определяется из функционального уравнения

$$xp(x) = \int_0^{\frac{x}{1-x}} p(t)dt.$$

Доказательство.

Шаг 1. Введем функцию распределения

$$F(x) := \mathbb{P}(\widetilde{x}_1 \le x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Утверждается, что она удовлетворяет соотношению

$$F(x) = \int_0^x F\left(\frac{x}{1-t}\right) dt, \quad x \ge 0.$$

В самом деле, условие $\widetilde{x}_1 \le x$ означает в точности, что $x_i \le x$ для всех $i = 1, 2, \dots$, что можно переписать как комбинацию двух условий: во-первых, $x_1 \le x$; во-вторых, $\max(x_2, x_3, \dots) \le x$.

Вспомним процесс ломания палки. Из его определения следует, что $x_1 = y_1$, тогда как последовательность $(x_2, x_3, \dots)$ есть результат применения такого же процесса с последующим умножением всех координат на $1 - y_1 = 1 - x_1$. При этом y_1 равномерно распределено на $[0,1]$. Это и приводит к указанному рекуррентному соотношению.

Шаг 2. Из уравнения следует первое утверждение: существование плотности $p(x) = F'(x)$.

Шаг 3. Считая x фиксированным, сделаем в интеграле замену переменной t на $s := \frac{x}{1-t}$. Учитывая, что $dt = \frac{x}{s^2}ds$, уравнение можно переписать в виде

$$\frac{F(x)}{x} = \int_x^{\frac{x}{1-x}} F(s)ds.$$

Шаг 4. Дифференцирование по x дает

$$\frac{F'(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2} = F\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' - -\frac{F(x)}{x^2}$$

что приводится к

$$xF'(x) = F\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Левая часть есть $xp(x)$, а правая часть есть

$$\int_0^{\frac{x}{1-x}} p(t)dt.$$

Таким образом, мы доказали соотношение

$$F(x) = \int_0^x F\left(\frac{x}{1-t}\right)dt, \quad x \geq 0.$$

Шаг 5. Перепишем его как

$$p(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \int_{\frac{x}{1-x}}^{+\infty} p(t)dt\right).$$

Отсюда видно, что $p(x)$ определяется однозначно. В самом деле, мы знаем, что $p(x) = 0$ на $[1, +\infty]$. Теперь замечаем, что для вычисления плотности $p(x)$ на отрезке

$$\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \quad k = 1, 2, \ldots.$$

достаточно знать $p(t)$ при $t \geq \frac{x}{1-x}$, а все такие точки лежат правее правого конца $1/k$ нашего отрезка. Таким образом, плотность находится последовательно на первом, втором, и т.д. отрезках.

Это завершает доказательство.

Упражнение. Плотность аналитична на каждом открытом интервале
$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$
тогда как в концах интервалов гладкость конечна и нарастает по мере продвижения к нулю: в точке $1/k$ имеется $k-2$ непрерывных производных.

Зададим функцию $\rho(u)$ на положительной полуоси формулой.
$$\rho(u) = F(1/u),$$

Упражнение. Эта функция однозначно определяется дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом
$$u\rho'(u) = \rho(u-1)$$
и начальным условием
$$\rho(u) = 1, \quad 0 < u \leq 1.$$

Функция $\rho(u)$ называется функцией Дикмана. Она аналитична в каждом из открытых интервалов $(k, k+1)$.

Еще ряд упражнений:

Упражнение. Написать преобразование $X \mapsto Y$, обратное к $Y \mapsto X$. При каком условии оно определено?

Упражнение. Введем в куб I^∞ топологию прямого произведения. Иначе говоря, топологию координатной сходимости. Она превращает I^∞ в метризуемый компакт.

Упражнение. $\bar{\Delta}_\infty$ и $\bar{\nabla}_\infty$ замкнуты в кубе и потому также являются метризуемыми компактами (в той же топологии).

Упражнение. Δ_∞ является плотным подмножеством в $\bar{\Delta}_\infty$ типа G_δ. То же верно для пары $\nabla_\infty \subset \bar{\nabla}_\infty$.