Конспект лекции 17.09.2013

Точечные случайные процессы

Рассмотрим локально компактное пространство $\mathfrak{X}$. Окно в $\mathfrak{X}$ — это относительно компактное борелевское подмножество $A \subset \mathfrak{X}$. Локально конечная конфигурация в $\mathfrak{X}$ — это набор точек (их удобно называть частицами), такой, что в любом окне может быть лишь конечное число частиц. Для простоты будем говорить просто "конфигурация". Множество всех конфигураций в $\mathfrak{X}$ будем обозначать через $\operatorname{Conf}\mathfrak{X}$

Определение Точечный случайный процесс в $\mathfrak{X}$ — это вероятностное распределение на пространстве $\operatorname{Conf}\mathfrak{X}$.

Иными словами, задание вероятностного распределения на $\operatorname{Conf}\mathfrak{X}$ позволяет говорить об ансамбле случайных конфигураций.

Более аккуратно, если говорить о вероятностных распределениях, то следует указать, на какой σ-алгебре они определены. Тут надо поступать так. Всякое окно $A \subset \mathfrak{X}$ определяет функцию на $\operatorname{Conf}\mathfrak{X}$:

$$\mathcal{N}_A: \quad \underline{X} \mapsto |\underline{X} \cap A|, \quad \underline{X} \in \operatorname{Conf}\mathfrak{X},$$

и мы берем минимальную σ-алгебру, относительно которой все такие функции измеримы.

<u>Пример</u>, который нам будет нужен: $\mathfrak{X} = (0,+\infty)$.
Напомню обозначения Δ_∞ и ∇_∞, введенные в первой лекции. Имеет место отображение $\Delta_\infty \to \mathrm{Conf}(0,+\infty)$, состоящее в том, что из набора $X=(x_1,x_2,\dots)\in\Delta_\infty$ выбрасываются возможные нули, а ненулевые координаты объявляются "частицами". Условие $\sum x_i=1$ обеспечивает локальную конечность (здесь важно, что 0 не входит в $(0,+\infty)$). Это отображение пропускается через ∇_∞, т.е. у нас есть естественные отображения

$$\begin{tikzcd} \Delta_\infty \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \nabla_\infty \arrow[r] & \mathrm{Conf}(0,+\infty) \end{tikzcd}$$

Заметим, что стрелка $\nabla_\infty \to \mathrm{Conf}(0,+\infty)$ является вложением.

Отсюда видно, что всякое вероятностное распределение на ∇_∞ можно трактовать как вероятностное распределение на $\mathrm{Conf}(0,+\infty)$. Это существенный момент: мы получаем возможность применить к изучению вероятностных распределений на симплексе ∇_∞ методы теории точечных процессов. И мы это как раз проделаем для конкретного примера — распределения ν_∞.

Корреляционные функции и корреляционные меры

Пусть для простоты $\mathfrak{X}$ будет открытым подмножеством в $\mathbb{R}$, как в интересующем нас случае $\mathfrak{X}=(0,+\infty)$.

Сперва неформальное определение: с точечным процессом в $\mathfrak{X}$ связывается система функций $\rho_n(x_1,\dots,x_n)$, где $n=1,2,\dots$ и $\rho_n(x_1,\dots,x_n)$ симметрична относительно перестановок переменных; $\rho_n(x_1,\dots,x_n)$ есть плотность вероятности того, что случайная конфигурация X имеет частицы в позициях $x_1,\dots,x_n$.

На самом деле, правильнее говорить о корреляционных мерах, ассоциируя с $\rho_n(x_1,\dots,x_n)$ множитель $dx_1\dots dx_n$.

Формальное определение: n-частичная корреляционная мера

$$\varrho_n=\rho_n(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

точечного процесса определяется из условия того, что ее спаривание $\langle f,\varrho_n\rangle$ с тестовой функцией $f=f(x_1,\dots,x_n)$ от n переменных задается формулой

$$\langle f,\varrho_n\rangle=\mathbb{E}\Big(\sum_{i_1,\dots,i_n} f(x_{i_1},\dots,x_{i_n})\Big),$$

где предполагается, что частицы случайной конфигурации как-то перенумерованы,

$X = (x_i)$, индексы $i_1, \dots, i_n$ произвольны, но попарно различны, а $\mathbb{E}$ – символ математического ожидания. Иначе говоря, обозначая через $\mathbb{P}$ вероятностную меру на $\operatorname{Conf} \mathfrak{X}$,

$$\langle f, \rho_n \rangle = \int\limits_{\operatorname{Conf} \mathfrak{X}} \sum_{i_1, \dots, i_n} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \, \mathbb{P}(dX)$$

Эквивалентное определение. Сперва с произвольной конфигурацией $X \in \operatorname{Conf} \mathfrak{X}$ связываем атомическую меру на $\mathfrak{X}^n = \underbrace{\mathfrak{X} \times \dots \times \mathfrak{X}}_{n}$:

$$X \mapsto \delta^{(n)}_X := \sum_{i_1, \dots, i_n} \delta(x_{i_1}) \otimes \dots \otimes \delta(x_{i_n}),$$

где справа стоят меры Дирака; а затем полагаем

$$\rho_n = \mathbb{E}\left(\delta^{(n)}_{\bullet}\right) = \int\limits_{\operatorname{Conf} \mathfrak{X}} \delta^{(n)}_X \, \mathbb{P}(dX).$$

Идея состоит в том, чтобы задавать точечный процесс с помощью его корреляционных функций / мер.

Конечномерные распределения

Пусть A — произвольное окно в $\mathfrak{X}$. Свяжем с ним систему функций $\pi^{(A)}_n(x_1,\dots,x_n)$, где $n=0,1,2,\dots$, и $\pi^{(A)}_n(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$ есть вероятность того, что в окне A имеется ровно n частиц, причем они находятся в (бесконечно малых) интервалах $dx_1,\dots,dx_n$ вокруг точек $x_1,\dots,x_n$. При $n=0$ аргументы пропадают, и $\pi^{(A)}_0$ определяется как вероятность отсутствия частиц.

Связь между $\{\rho_n\}$ и $\{\pi^{(A)}_n\}$.

(1) Для любых $x_1,\dots,x_n \in A$

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_{A^m}\pi^{(A)}_{n+m}(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)\,dy_1\dots dy_m$$

(2) Обратно, при определенных предположениях (!)

$$\pi^{(A)}_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\int_{A^m}\rho_{n+m}(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)\,dy_1\dots dy_m$$

Первое соотношение очевидно. Второе требует обсуждения, которое мы пока отложим.

Корреляционные функции меры ν_∞

Напомним, что ν_∞ — вероятностная мера на ∇_∞, но мы переносим ее на $\mathrm{Conf}(0,+\infty)$, используя вложение $\nabla_\infty \hookrightarrow \mathrm{Conf}(0,+\infty)$; тем самым ν_∞ задает точечный процесс; нас интересуют его корреляционные функции.

<u>Теорема</u> Корреляционные функции $\rho_n(x_1,\dots,x_n)$ меры (процесса) ν_∞ задаются замечательно простой формулой

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{\mathbb{1}_{x_1+\dots+x_n \le 1}}{x_1 \dots x_n}$$

<u>Доказательство.</u> Идея: мы напишем уравнение, которому должна удовлетворять ρ_n, докажем, что решение единственно, и затем проверим, что написанная формула удовлетворяет уравнению.

Мы исходим из определения процесса ломания палки, который и задает ν_∞.

- Рассмотрим сперва простейший случай $n=1$.

Уравнение имеет вид

$$\rho_1(x) = 1 + \int_0^{1-x} \rho_1\left(\frac{x}{1-t}\right)\frac{dt}{1-t}$$

Как оно получилось? Перепишем его в виде

$$\rho_1(x)dx = dx + \int_{t=0}^{t=1-x} \rho_1\left(\frac{x}{1-t}\right)\frac{dx}{1-t}\,dt$$

Первое слагаемое справа, dx, есть вероятность того, что первая точка x_1 сразу попадет в $(x, x+dx)$. В интеграле переменная t отвечает положению первой точки, а $\rho_1\left(\frac{x}{1-t}\right)\frac{dx}{1-t}$ есть вероятность того, что одна из последующих точек $x_2, x_3, \ldots$ попадет в $(x, x+dx)$. Перед интегралом можно было бы для большей убедительности поставить множитель $1-dx$, но он роли играть не будет.

Теперь делаем замену переменной $t \mapsto s$, где $s = \frac{x}{1-t}$, и тогда получаем

$$\rho_1(x) = 1 + \int_x^1 \rho_1(s)\frac{ds}{s}$$

Из него следует?

$$\begin{cases} \rho_1'(x) = -\dfrac{\rho_1(x)}{x} \\ \rho_1(1) = 1 \end{cases}$$

Это дифференциальное уравнение с начальным условием может иметь только одно решение на $(0,1]$. И $\rho_1(x)=\frac{1}{x}$ ему удовлетворяет.

- Общий случай ($n\geq 2$). Тогда возникает уравнение

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{n-1}\left(\frac{x_1}{1-x_i},\dots,\widehat{\frac{x_i}{1-x_i}},\dots,\frac{x_n}{1-x_i}\right)\cdot\frac{1}{(1-x_i)^{n-1}} + \int_0^{1-x_1-\dots-x_n} \rho_n\left(\frac{x_1}{1-t},\dots,\frac{x_n}{1-t}\right)\frac{dt}{(1-t)^n}$$

(галочка означает, что i-й член пропускается).

Используем индукцию по n, предполагая, что ρ_{n-1} задается желаемой формулой. Непосредственно проверяется, что $\dfrac{\mathbb{1}_{x_1+\dots+x_n\leq 1}}{x_1\cdots x_n}$ уравнению удовлетворяет.

Единственность решения: замораживаем отношения $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ (т.е. фиксируем $\frac{x_1}{x_1+\dots+x_n}, \dots, \frac{x_n}{x_1+\dots+x_n}$) и рассматриваем ρ_n как функцию одной переменной $u := x_1+\dots+x_n$. Далее действует тот же механизм, что и в случае $n=1$.

□

Применения

Напомним, что $F(x) := \mathbb{P}(\tilde{x}_1 \le x)$

Теорема

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \underset{\substack{\sum x_i \le 1 \\ x_1,\dots,x_m \ge x}}{\int\dots\int} \frac{dx_1 \dots dx_m}{x_1 \dots x_m}$$

Пояснение: n-кратный интеграл при $n=0$ интерпретируется как 1.

<u>Доказательство</u>: Это следует из доказанной явной формулы для корреляционных функций меры ν_∞ и абстрактной формулы

$$\Pi_0^{(A)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int\limits_{A^m}\!\!\cdots\!\int \rho_m(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m,$$

примененной к $A=[x,1]$.

$\square$

Введем обозначение:

$$\mathcal{D}^{(m)}_{a,b} = \{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m_{>0} : x_1+\dots+x_m \le a,\ x_1,\dots,x_m \ge b\}$$

<u>Теорема</u>

$$p(x) = \frac{1}{x}\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int\limits_{\mathcal{D}^{(m)}_{1-x,\,x}}\!\!\cdots\!\int \frac{dx_1\dots dx_m}{x_1\dots x_m}$$

Доказательство. Применяем формулу, выражающую $\Pi_n^{(A)}$ через $\{\rho_{n+m};\ m=0,1,\dots\}$. В данном случае $n=1$, $A=[x,1]$.

$\square$

Заметим, что интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{D}^{(m)}_{a,b}} \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_m}{x_1 \dots x_m} =: I(m; a, b)$$

не меняется при умножении параметров a, b на одну и ту же положительную константу.

Таким образом,

$$I(m; a, b) = I\left(m; 1, \frac{b}{a}\right)$$

Отсюда и из сравнения последних двух теорем получаем соотношение

$$p(x) = \frac{1}{x} F'\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

которое уже было в первой лекции.

<u>Теорема</u> Плотность $p(x_1, \dots, x_n)$ распределения первых n координат $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ по мере ν_∞ выражается через $F'(x)$:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1 \dots x_n} F'\left(\frac{x_n}{1 - x_1 - \dots - x_n}\right)$$

Доказательство

Рассматриваем окно $A = [x_n, 1]$. Тогда $p(x_1, \dots, x_n) = \pi_n^{(A)}(x_1, \dots, x_n)$. Выражаем правую часть через $\{\varrho_{n+m} : m = 0, 1, 2, \dots\}$. Используем замечание на предыдущей странице.

$\square$

Меры Дирихле

$$\Delta_{n-1} := \{ (x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,\ x_1 + \dots + x_n = 1 \}$$

$dx = dx_1 \dots dx_{n-1}$ (с равным успехом можно исключить любую координату, не обязательно последнюю).

Многомерный бета-интеграл:

$$\int_{\Delta_{n-1}} x_1^{a_1-1} \dots x_n^{a_n-1}\, dx = B(a_1, \dots, a_n) := \frac{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1 + \dots + a_n)},$$

где

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

Упражнение: доказать формулу.

(предполагаем, что параметры $a_1, \dots, a_n$ строго положительны).

<u>Определение</u> Мера Дирихле $D(a_1,\dots,a_n)$ с параметрами $a_1,\dots,a_n$ — это вероятностное распределение на симплексе Δ_{n-1} с плотностью $\frac{\Gamma(a_1+\dots+a_n)}{\Gamma(a_1)\dots\Gamma(a_n)} x_1^{a_1-1}\dots x_n^{a_n-1}$ по лебеговой мере dx.

<u>Упражнение</u> Рассмотрим проекцию $\Delta_{n-1}\to\Delta_{n-2}$, $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+x_n)$. При этом отображении мера Дирихле $D(a_1,\dots,a_n)$ переходит в меру Дирихле $D(a_1,\dots,a_{n-2},a_{n-1}+a_n)$.

То же самое, если склеиваются две другие или несколько координат - или ~~и~~ если склеиваются разные группы координат — тогда складываются соответствующие параметры.

Рассмотрим теперь отображение $\Delta_{n-1}\to \mathrm{Conf}(0,+\infty)$, при котором образом точки $(x_1,\dots,x_n)\in\Delta_{n-1}$ является конфигурация $X=\{x_i : x_i\neq 0\}$.

Обозначим через $\widetilde{D}(a_1,\dots,a_n)$ образ меры Дирихле $D(a_1,\dots,a_n)$ относительно этого отображения.

Мера $\widetilde{D}(a_1,\dots,a_n)$ задает точечный процесс в ~~$\mathfrak{X}$~~ ~~$\mathfrak{X}$~~ пространстве $\mathfrak{X}=(0,+\infty)$; типичная конфигурация состоит из n частиц.

Теорема. При $n \to \infty$ меры $\widetilde{D}(\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n})$ сходятся к мере ν_∞, где сходимость можно понимать как поточечную сходимость соответствующих корреляционных функций.

Доказательство. Корреляционные функции меры $\widetilde{D}(\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n})$ имеют вид

$$\rho_m^{(n)}(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{n})^n} \cdot n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

$$\cdot (x_1 \ldots x_m)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \int\limits_{y_1+\ldots+y_{n-m} = 1-(x_1+\ldots+x_m)} \cdots \int y_1^{\frac{1}{n}-1} \ldots y_{n-m}^{\frac{1}{n}-1} dy$$

Замена переменных приводит интеграл к

$$\left(1-(x_1+\ldots+x_m)\right)^{\left(\frac{1}{n}-1\right)(n-m)+n-m-1} \cdot B(\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n-m})$$

$$= \left(1-(x_1+\ldots+x_m)\right)^{-\frac{m}{n}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{n})^{n-m}}{\Gamma(\frac{n-m}{n})}$$

Вспоминая про предынтегральные множители, получаем после сокращений

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m}\,(x_1\dots x_m)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\sim \frac{n^m}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m}\,(x_1\dots x_m)^{-1} \sim (x_1\dots x_m)^{-1}.$$

$\square$

Теперь время дать название мере ν_∞: она называется мерой (или распределением) Пуассона – Дирихле. Откуда "Дирихле", понятно из предыдущей теоремы, а "Пуассон" происходит из связи с пуассоновскими процессами, о которой сейчас пойдет речь.

Лифтинг

Будем интерпретировать ν_∞ как меру на пространстве $\mathrm{Conf}(0,+\infty)$. Если $X \in \mathrm{Conf}(0,+\infty)$ и $s>0$, будем обозначать через sX конфигурацию, получающуюся из X умножением всех координат на s.

Предположим, что задано вероятностное распределение $\mathbb{P}$ на $\mathrm{Conf}(0,+\infty)$. Оно задает ансамбль случайных конфигураций. Построим по нему новый ансамбль следующим образом: выбираем случайным образом конфигурацию X (по мере $\mathbb{P}$), а затем умножаем ее на независимый случайный параметр s с распределением $e^{-s}ds$ на оси $\mathbb{R}_{>0}$. Тем самым возникает новая мера $\widetilde{\mathbb{P}}$ на $\mathrm{Conf}(0,+\infty)$, которую назовем ЛИФТИНГОМ меры $\mathbb{P}$. Можно сказать еще, что $\widetilde{\mathbb{P}}$ есть образ меры $\mathbb{P}\otimes\{e^{-s}ds\}$ при отображении $(X,s)\longmapsto sX$ из $\mathrm{Conf}(0,+\infty)\times\mathbb{R}_{>0}$ в $\mathrm{Conf}(0,+\infty)$.

Теорема Лифтинг меры ν_∞ имеет корреляционные функции

$$\widetilde{\rho}_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}e^{-x_i}$$

Доказательство

В силу самого определения лифтинга,

$$\widetilde{\rho}_n(x_1,\dots,x_n)=\int_0^\infty \rho_n\left(\frac{x_1}{s},\dots,\frac{x_n}{s}\right)s^{-n}e^{-s}ds$$

где множитель s^{-n} возникает из-за скейлинга дифференциала $dx=dx_1\cdots dx_n$ (вспомним, что реально надо смотреть на корреляционные меры $\rho_n=\rho_n(x_1,\dots,x_n)dx$!!!).

Вспомним, что

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = (x_1\cdots x_n)^{-1}\,\mathbb{1}_{x_1+\dots+x_n\le 1},$$

откуда

$$\rho_n\left(\frac{x_1}{s},\dots,\frac{x_n}{s}\right) = \frac{s^n}{x_1\cdots x_n}\,\mathbb{1}_{s\ge x_1+\dots+x_n}.$$

Отсюда

$$\tilde\rho_n(x_1,\dots,x_n) = (x_1\cdots x_n)^{-1}\int_{x_1+\dots+x_n}^{\infty} e^{-s}\,ds$$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}e^{-x_i}$$

$\square$.

<u>Следствие</u> В результате лифтинга мера ν_∞ радикально упрощается и превращается просто в пуассоновский процесс с плотностью $x^{-1}e^{-x}$ на оси $(0,+\infty)$.

Подробнее о пуассоновских процессах см. начало книжки Кингман, Пуассоновские процессы, М., МЦНМО, 2007.

Обратно, мера ν_∞ получается из пуассоновского процесса с указанной плотностью следующим образом: рассматриваем случайную пуассоновскую конфигурацию $Y=(y_i)$ и затем полагаем $X=(x_i)$, где $x_i = \dfrac{y_i}{y_1+y_2+\dots}$.