Конспект лекции 1 октября 2013

Эргодические меры

Измеримое (= борелевское) пространство, это пара $(X, \mathcal{F})$, где X — множество, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств.

$\mathcal{P}(X, \mathcal{F})$: множество вероятностных мер на $(X, \mathcal{F})$.

Предположим, что задано действие конечной или счетной группы G на $(X, \mathcal{F})$. Тогда обозначим через $\mathcal{P}(X, \mathcal{F})^G \subset \mathcal{P}(X, \mathcal{F})$ подмножество G-инвариантных вероятностных мер.

<u>Упражнение</u> Для $P \in \mathcal{P}(X, \mathcal{F})^G$ следующие три условия эквивалентны:

(1) P экстремальна в том смысле, что она является крайней (= экстремальной) точкой выпуклого множества $\mathcal{P}(X, \mathcal{F})^G$.

(2) P эргодична, что означает следующее условие: если $Y \in \mathcal{F}$ — G-инвариантное подмножество, то $P(Y)$ равно 0 или 1.

(3) Рассмотрим унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $L^2(X, P)$ (оператор, отвечающий элементу $g \in G$, ~~пер~~ переводит функцию $f \in$ ~~$L^2(G)$~~ $L^2(X, P)$ в функцию $x \mapsto f(g^{-1}x)$. Условие состоит в том, что в $L^2(X, P)$

нет G-инвариантных векторов, кроме констант.

Упражнение Приведенное выше в (2) ~~условие~~ определение эргодичности не изменится, если вместо G-инвариантности множества Y потребовать более слабое свойство инвариантности mod 0: это означает, что

$$\mathbb{P}((gY)\,\Delta\, Y) = 0 \qquad \forall g \in G.$$

Примеры 1. X и G конечны, $\mathcal{F}$ состоит из всех подмножеств в X. Тогда ~~меры~~ эргодические меры суть в точности орбитальные меры, т.е. равномерные распределения на орбитах.

2. $X = Y^{\infty}$, $G = S_{\infty}$ действует перестановками. Тогда эргодические меры суть в точности продакт-меры $\mu^{\otimes\infty}$, где μ — произвольная вероятностная мера на Y. А общие инвариантные меры параметризуются произвольными вероятностными мерами на пространстве $\mathcal{P}(Y)$ ("меры на мерах"). Этот факт есть теорема де Финетти. Простейший случай: $Y = \{0,1\}$. Тогда экстремальные меры суть меры Бернулли; они задаются числом $t \in [0,1]$. А общие инвариантные меры находятся в биекции с вероятностными мерами на $[0,1]$.

3. Поворот окружности на иррациональный угол.

Здесь $G=\mathbb{Z}$, $X=\mathbb{T}=\{u\in\mathbb{C} : |u|=1\}$.

Упражнение Доказать, что в этой ситуации есть ровно одна инвариантная мера; она же автоматически эргодическая мера — нормированная лебегова мера на $\mathbb{T}$.

4. Пример Колмогорова транзитивного, но не эргодического действия

Возьмем $X=\{0,1\}^{\infty}$ и $X' := \{$последовательности с бесконечным числом нулей и единиц$\} \subset X$.

G: полная симметрическая группа $\overline{S_\infty}$ (все перестановки координат).

Группа G, правда, не счетна! Она действует на X' транзитивно. С другой стороны, любая мера Бернулли $\mu_t^{\otimes\infty}$ с $t\in(0,1)$ является G-инвариантной.

Упражнение. Почему?

Литература • Фелпс, Лекции о теоремах Шоке.

• о теореме де Финетти: напр., Феллер, Введение в теорию вероятностей.

Стохастические матрицы и марковские ядра

Пусть сперва X и Y — конечные множества. Стохастическая матрица формата $X \times Y$, это матрица $\Lambda = [\Lambda(x,y)]$, у которой строки параметризуются точками $x \in X$; столбцы параметризуются точками $y \in Y$; $\Lambda(x,y) \geq 0$ для всех x, y;

$$\sum_{y \in Y} \Lambda(x,y) = 1 \text{ для всех } x.$$

<u>Упражнение</u> Если $[\Lambda(x,y)]$ и $[\Lambda'(y,z)]$ — две стохастические матрицы формата $X \times Y$ и $Y \times Z$ соответственно, то их произведение также является стохастической матрицей.

$\Lambda = [\Lambda(x,y)]$ рассматриваем как "обобщенное отображение" $X \dashrightarrow Y$. В отличие от обычного отображения $X \to Y$ здесь образ точки $x \in X$ "размазывается" — он является вероятностным распределением $\Lambda(x, \bullet)$.

<u>Упражнение</u> $\Lambda : X \dashrightarrow Y$ задает естественное отображение $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ вероятностных мер.

Обобщением стохастических матриц являются марковские ядра. Они записываются в виде $\Lambda(x, dy)$; здесь x — точка измеримого пространства; при фиксированном x выражение $\Lambda(x, dy)$ является вероятностной мерой на другом измеримом пространстве Y; единственное дополнительное требование состоит в том, что для любого фиксированного измеримого подмножества $A \subseteq Y$ функция

$$x \longmapsto \Lambda(x, A) = \int_A \Lambda(x, dy)$$

измерима на X.

Опять-таки марковское ядро $\Lambda(x, dy)$ интерпретируется как "обобщенное отображение" $X \dashrightarrow Y$.

Упражнение Композиция двух марковских ядер $\Lambda: X \dashrightarrow Y$ и $\Lambda': Y \dashrightarrow Z$ есть снова марковское ядро.

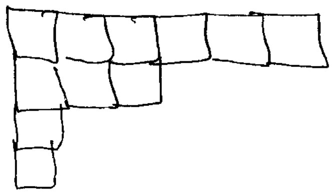
Упражнение $\Lambda: X \dashrightarrow Y$ задает отображение $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ пространств вероятностных мер.

В случае, когда X и Y дискретны, марковские ядра сводятся к стохастическим матрицам

Partition structures

Обозначим через Part_n множество разбиений числа n. Разбиения будем обозначать буквами $\lambda, \mu, \ldots$ Различные способы представления разбиений:

- координатная запись $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$, где $\lambda_1+\lambda_2+\ldots=|\lambda|=n$
- диаграммы Юнга



$\lambda_1=6$
$\lambda_2=3$
$\lambda_3=1$
$\lambda_4=1$

- мультипликативная запись

$$\lambda=\left(1^{r_1(\lambda)}2^{r_2(\lambda)}\ldots\right),$$

где $r_k(\lambda)$ — число координат (= строк диаграммы Юнга), равных k.

Очевидно, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, r_k(\lambda)=|\lambda|$.

Для $n=1,2,\ldots$ определим стохастическую матрицу

$$\Lambda^{n+1}_{n}: \mathrm{Part}_{n+1} \dashrightarrow \mathrm{Part}_n$$

следующим образом:

- $\Lambda^{n+1}_n(\lambda,\mu)$ отлично от 0 только если μ получается из λ удалением одной клетки. Записываем это символически как $\mu=\lambda-\square$ или $\lambda=\mu+\square$. Пусть $k+1$ — длина строки в λ, содержащая клетку $\square$. Иными словами,

$$r_k(\lambda)=r_k(\mu)-1, \quad r_{k+1}(\lambda)=r_{k+1}(\mu)+1,$$
$$r_i(\lambda)=r_i(\mu), \quad i\neq k, k+1.$$

Тогда полагаем
$$\Lambda^{n+1}_n(\lambda,\mu)=\frac{(k+1)\,r_{k+1}(\lambda)}{n+1}$$

<u>Упражнение</u> Почему $\Lambda^{(n+1)}_n$ — стохастическая матрица?

<u>Определение</u> "<u>Partition structure</u>", это последовательность $\{P_n\in\mathcal{P}(Part_n): n=1,2,\dots\}$ вероятностных мер, согласованные со стохастическими матрицами Λ^{n+1}_n в том смысле, что
$$P_{n+1}\Lambda^{n+1}_n=P_n \quad , \; n=1,2,\dots$$

<u>Пояснение</u>: в левой части P_{n+1} интерпретируется как вектор-строка с координатами $\lambda\in Part_{n+1}$. Аналогично, P_n есть вектор-строка, координаты которой нумеруются разбиениями $\mu\in Part_n$. Иными словами, написанное соотношение

означает в подробной записи

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_{n+1}} P_{n+1}(\lambda)\, \Lambda^{n+1}_{n}(\lambda, \mu) = P_n(\mu)$$

для всех $\mu \in \mathrm{Part}_n$.

* * *

Вернемся теперь к пространству $\mathfrak{S} = \varprojlim S_n$ виртуальных перестановок. Напомним, что на нем определено левое и правое действие группы S_∞, происходящее из левого и правого действия группы S_n на себе, $n = 1, 2, \dots$. Но нас сейчас будет интересовать другое действие: то, которое происходит из действия группы S_n на себе сопряжениями.

Иными словами, для $g \in S_\infty$ и $s = (s_n : n = 1, 2, \dots) \in \mathfrak{S}$

$$g \cdot s = ((g \cdot s)_n : n = 1, 2, \dots), \text{ где}$$

$$(g \cdot s)_n := g s_n g^{-1}, \qquad n \gg 1.$$

Напомню обозначение: $\mathcal{P}(\cdot)$ — пространство вероятностных мер, $\mathcal{P}(\cdot)^G$ — пространство вероятностных мер, инвариантных относительно действия группы G.

<u>Предложение</u> Имеет место естественная биекция между $\mathcal{P}(\mathfrak{G})^{S_\infty}$ (~~[illegible]~~ действие сопряжениями) и множеством всех "partition structures"

<u>Упражнение</u> Доказать это утверждение.