Конспект лекции 8 октября 2013

Обобщение понятия "partition structure":
вместо Part_n, $n=1,2,\dots$, можно взять произвольную систему конечных множеств $\{V_n : n=1,2,\dots\}$ и систему стохастических матриц $\Lambda^n_{n-1} : V_n \dashrightarrow V_{n-1}$, $n=2,3,\dots$ Тогда нас может интересовать описание всех когерентных систем мер, т.е. семейств $\{P_n \in \mathcal{P}(V_n) : n=1,2,\dots\}$, подчиненных условию

$$P_n \Lambda^n_{n-1} = P_{n-1}, \quad n=2,3,\dots$$

Графы ветвления

Определение. Граф ветвления, это граф (V,E) с множеством вершин V и множеством ребер E, такой, что:

- V разбито на уровни (или этажи):
$$V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots$$
- Ребра могут соединять только вершины соседних этажей
- Возможны кратные ребра
- Из каждой вершины ~~произвольной~~ $v \in V_n$ торчит хотя бы одно ребро вверх (на уровень $n+1$) и хотя бы одно ребро вниз

(если $n \geq 2$).

(Удобно дополнить V одной вершиной ϕ на нулевом уровне V_0 и считать, что она соединена однократным ребром со всеми вершинами 1-го уровня.)

- Будем считать, что все множества V_n конечны, хотя на самом деле достаточно предполагать, что из каждой вершины $v \in V_n$ вниз (т.е. к уровню $n-1$) отходит конечное множество ребер.

Еще несколько определений.

Размерность вершины $v \in V_n$ есть число $\dim v$ монотонных путей, идущих от $\phi \in V_0$ к v.

Более общо, если $u \in V_m$, $v \in V_n$, где $m \leq n$, то $\dim(u,v)$ есть число монотонных путей из u в v. По соглашению $\dim(v,v) = 1$.

Таким образом, $\dim v = \dim(\phi, v)$.

Если $u \in V_{n-1}$, $v \in V_n$, то $\dim(u,v)$ есть *кратность* (возможно, нулевая) ребра между u и v.

<u>Определение</u> Матрицы Λ^n_{n-1}, связанные с графом ветвления, определяются так:

$$\Lambda^n_{n-1}(v,u) = \frac{\dim u \cdot \dim(u,v)}{\dim v},$$

где $v \in V_n$, $u \in V_{n-1}$.

<u>Упражнение</u> Это стохастические матрицы.

Гиббсовские меры на путях

Обозначим через T пространство бесконечных монотонных путей, выходящих из $\emptyset \in V_0$. Это пространство есть проективный предел,

$$T = \varprojlim T_n,$$

где T_n – пространство конечных (до уровня n) монотонных путей, выходящих из корня $\emptyset \in V_0$.

Если задана вероятностная мера на T, то можно говорить о случайных путях.

<u>Определение</u> Вероятностную меру на T назовем гиббсовской, если вероятность того, что начальный участок пути длины n пройдет вдоль

заданного пути $\tau_n \in T_n$, зависит только от конечной вершины v_n этого пути.

Упражнение Имеет место естественное биективное соответствие

{когерентные семейства мер на этажах графа ветвления} $\longleftrightarrow$ {гиббсовские меры на T}

Марковские семейства классификаций

Мы начали с графа ветвления и пришли к пространству путей $T = \varprojlim T_n$. Наоборот, можно начать с проективного предела

$$T = \varprojlim T_n,$$

где T_n – конечные множества и предел берется относительно некоторых отображений

$$pr_n : T_n \to T_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

и определить ~~доп~~ дополнительную структуру, позволяющую реализовать T как пространство путей.

А именно, надо предположить, что в каждом T_n задано отношение эквивалентности "$\underset{n}{\sim}$", согласно которому T_n разбивается на куски, или классы. Положим $V_n := T_n/\underset{n}{\sim}$, $n=1,2,\dots$

Должно выполняться следующее

<u>Условие</u> Пусть $u \in V_{n-1}$ и $v \in V_n$ — два произвольных класса; выберем произвольный ~~[illegible]~~ элемент $\tau \in u$; тогда число

$$|\, pr_n^{-1}(\tau) \cap v \,| \qquad (*)$$

зависит только от u, v, но не от выбора этого элемента. Кроме того, проекции pr_n должны быть сюръективными.

Граф ветвления получается тогда, если принять это число $(*)$ в качестве кратности ребра между u и v:

<u>Упражнение</u> Исходное пространство T совпадает с пространством путей для построенного графа ветвления.

Рассмотрим теперь три примера различных графов ветвления, которые, однако, дают одну и ту же систему $\{V_n;\ \Lambda^n_{n-1}\}$. Во всех этих примерах, тем самым, $V_n = \mathrm{Part}_n$ (множество разбиений числа n). Кроме того, вершины (= разбиения) $\mu \in \mathrm{Part}_{n-1}$ и $\lambda \in \mathrm{Part}_n$ соединяются ребрами в том и только том случае, когда соответствующие диаграммы Юнга отличаются на одну клетку (различие только в кратности ребра). Для таких пар μ, λ я буду обозначать через k длину той строки диаграммы λ, которая содержит клетку $\lambda \setminus \mu$. Иными словами, в мультипликативной записи

$$\mu = (1^{r_1(\mu)} 2^{r_2(\mu)} \ldots), \quad \lambda = (1^{r_1(\lambda)} 2^{r_2(\lambda)} \ldots)$$

и числа $r_i(\mu)$ и $r_i(\lambda)$ совпадают для всех i, кроме $i = k-1$ и $i = k$, а для них

$$r_{k-1}(\lambda) = r_{k-1}(\mu) - 1 \qquad (k \geq 2)$$

$$r_k(\lambda) = r_k(\mu) + 1$$

~~Пример 1~~

Во всех трех примерах я указываю вид пространства путей $T = \varprojlim T_n$, формулы для размерности вершин ~~[illegible]~~ и для кратностей ребер.

Пример 1

- $T_n = S_n$ (множество перестановок множества $[n] := \{1, \dots, n\}$)
- $pr_n : T_n \to T_{n-1}$ есть каноническая проекция $S_n \to S_{n-1}$ (как в определении пространства виртуальных перестановок).

Тем самым, $T = \mathbb{Y}$

- Разбиение на классы в T_n, это разбиение на классы сопряженности в группе S_n

- $$\dim_1 \lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{k=1}^{\infty} k^{r_k(\lambda)} r_k(\lambda)!}$$

- $$\dim_1 (\mu, \lambda) = \begin{cases} (k-1) r_{k-1}(\lambda), & k \geq 2 \\ 1, & k = 1 \end{cases}$$

Пример 2

- $T_n = \mathrm{Part}\,[n]$ (это множество разбиений множества $[n]$ на блоки; нумерация блоков при этом не вводится)

- $pr_n : T_n \to T_{n-1}$ состоит в удалении "n"

Тем самым, T есть множество разбиений бесконечного множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$

~~$\dim_2 \lambda =$~~

- Разбиение на классы в T_n: два разбиения из ~~Part~~ Part[n] объявляются эквивалентными, если они индуцируют одинаковые разбиения числа n

- $$\dim_2 \lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{k=1}^{\infty} (k!)^{r_k(\lambda)} r_k(\lambda)!}$$

- $$\dim_2 (\mu, \lambda) = \begin{cases} r_{k-1}(\mu), & k \geq 2 \\ 1, & k = 1 \end{cases}$$

Пример 3

Здесь

- $\dim_3 (\mu, \lambda) = r_k(\lambda)$

- $$\dim_3 \lambda = \frac{|\lambda|!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots} = \frac{|\lambda|!}{\prod_{k=1}^{\infty} (k!)^{r_k(\lambda)}}$$

Происхождение этого примера: кратности $\dim_3(\mu, \lambda)$ возникают из формулы умножения мономиальных симметрических функций:

$$m_\mu \cdot p_1 = \sum_{\lambda = \mu + \square} \dim_3(\mu, \lambda) \cdot m_\lambda$$

Здесь $\{m_\lambda\}$ базис мономиальных симметрических функций в алгебре $Sym = \mathbb{R}[[x_1, x_2, \ldots]]$ симм симметрические функций и

$$p_1 = m_{(1)} = x_1 + x_2 + \ldots$$

Упражнение Доказать, что во всех трёх примерах получается одна и та же система $\{\Lambda^n_{n-1}\}$.

Определение (хвостовое отношение эквивалентности)

Рассмотрим пространство бесконечных путей T некоторого графа ветвления. Два пути $\tau, \tau' \in T$ объявляются эквивалентными, если они сливаются, начиная с некоторого ~~котор~~ уровня. Т.е., если

$\tau = (\varnothing, v_1, v_2, \ldots)$, $v_i \in V_i$

$\tau' = (\varnothing, v_1', v_2', \ldots$, $v_i' \in V_i$

то $v_i = v_i'$ для $i \gg 1$.

В примерах 1 и 2 на пространстве T имеется естественное действие группы $S_\infty = \varinjlim S_n$ финитных перестановок множества $\mathbb{N}$.

Упражнение Доказать, что в примерах 1 и 2 классы эквивалентности в T относительно хвостового отношения эквивалентности суть в точности орбиты действия группы S_∞.

В примере 3, в отличие от примеров 1 и 2, наглядной интерпретации пространства путей вроде бы нет. Тем не менее, именно пример 3 удобнее всего для доказательства теоремы Кингмана о классификации "partition structures"

Подготовка к теореме Кингмана: лемма Керова

Определим гомоморфизм алгебр

$$\mathrm{Sym} \to C(\overline{\nabla}_\infty)$$

на образующих $p_n \in \mathrm{Sym}$, где $p_n = \sum x_i^n$, следующим образом:

$$p_n \to \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Упражнение. Функции $\alpha \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n$ непрерывны на $\overline{\nabla}_\infty$ при $n = 2, 3, \ldots$ (но не при $n=1$!).

Образ элемента $f \in \mathrm{Sym}$ в алгебре $C(\overline{\nabla}_\infty)$ будем обозначать через $\tilde{f}$.

Будем обозначать элементы пространства $\overline{\nabla}_\infty$ через ω или как $(\alpha; \gamma)$, где $\gamma := 1 - \sum \alpha_i$.

Важное замечание. Следует различать $\tilde{f}(\omega)$ и $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Лемма Керова

$$\tilde{m}_\lambda(\alpha; \gamma) = \sum_{k=0}^{r_1(\lambda)} \frac{\gamma^k}{k!} m_{\lambda - (1^k)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Схема доказательства

1. Формула справедлива, если $\gamma = 0$
2. Формула согласуется с конструкцией "Kingman's paintbox"
3. Эта конструкция дает вероятности, непрерывно зависящие от $\omega = (\alpha; \gamma) \in \overline{\nabla}_\infty$.