Ниже "размерность" означает тот вариант, который был введен в примере 3 из предыдущей лекции. Т.е.

$$\dim\lambda = [p_1^N : m_\lambda], \quad \lambda\in \mathrm{Part}_N$$

(где $[p_1^N : m_\lambda]$ обозначает коэффициент при m_λ в разложении элемента p_1^N по базису мономиальных симметрических функций)

$$\dim(\mu,\lambda) = [p_1^{N-n}\cdot m_\mu : m_\lambda], \quad \lambda\in\mathrm{Part}_N, \mu\in\mathrm{Part}_n$$

(где $n<N$).

Напомню, что было введено отображение $f\mapsto\tilde f$, сопоставляющее элементу $f\in\mathrm{Sym}$ непрерывную функцию на $\overline{\nabla}_\infty$.

Наша цель — доказать теорему Кингмана.

ТЕОРЕМА. Существует биективное соответствие $\{P_n\}\leftrightarrow\widetilde{P}$ между "partition structures" и вероятностными мерами на $\overline{\nabla}_\infty$. Оно задается тем, что для любого n и любого разбиения $\mu\in\mathrm{Part}_n$

$$P_n(\mu) = \dim\mu\cdot\int_{\omega\in\overline{\nabla}_\infty}\widetilde{m}_\mu(\omega)\widetilde{P}(d\omega)$$

Вместо "partition structure" $\{P_n\}$ удобно рассматривать функцию φ на множестве $\bigsqcup_n \mathrm{Part}_n$ всех разбиений, такую, что

$$\varphi(\mu) = \frac{P_n(\mu)}{\dim \mu}, \qquad \mu \in P_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Такого рода функции характеризуются тремя свойствами:

- $\varphi(\varnothing) = 1$ (нормировка)
- $\varphi(\mu) \geq 0$ для всех μ (неотрицательность)
- $$\varphi(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_{n+1}} \dim(\mu, \lambda)\, \varphi(\lambda), \qquad \mu \in \mathrm{Part}_n$$

("псевдогармоничность")

Теорема Кингмана эквивалентна утверждению:

формула

$$\boxed{\varphi(\mu) = \int_{\omega \in \overline{\nabla}_\infty} \widetilde{m}_\mu(\omega)\, \widetilde{P}(d\omega)} \qquad (*)$$

устанавливает биективное соответствие ~~между~~

~~неотрицательными, нормированными, псевдогармоническими функциями φ и вероятностными мерами~~

$$\{\varphi\} \longleftrightarrow \widetilde{P}$$

нормированные неотрицательные псевдогармонические функции

вероятностные меры на $\overline{\nabla}_\infty$

Мы будем доказывать именно это утверждение.

Что очевидно:

- Функция φ, заданная формулой $(*)$, обладает нужными тремя свойствами
- Если для данной функции φ существует представление $(*)$, то мера $\tilde{P}$ определена однозначно
  (Это следует из того факта, что образ алгебры Sym в $C(\overline{\nabla}_\infty)$ плотен).

Неочевидно существование "представляющей" меры $\tilde{P}$.

Из приведённого ниже доказательства будет видно, что $\tilde{P}$ возникает как слабый предел некоторых мер $\tilde{P}_N$, которые канонически определяются ~~мерой~~ функцией φ.

А именно, для каждого N мы вкладываем Part_N в $\overline{\nabla}_\infty$, сопоставляя разбиению $\lambda \in \mathrm{Part}_N$ точку

$$\omega_\lambda = \left(\frac{\lambda_1}{N}, \frac{\lambda_2}{N}, \dots, \right) \in \overline{\nabla}_\infty$$

(параметр γ здесь равен 0, поскольку $\sum \frac{\lambda_i}{N} = 1$).

Мера $\tilde{P}_N$ на $\overline{\nabla}_\infty$ определяется как образ меры P_N на Part_N относительно этого отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Зафиксируем n и $\mu \in \mathrm{Part}_n$, и пусть $N \to \infty$, $\lambda \in \mathrm{Part}_N$. Тогда

$$\frac{\dim(\mu, \lambda)}{\dim \lambda} = \widetilde{m}_\mu(\omega_\lambda) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

где оценка справа не зависит от λ.

Более точно,

$$\left| \frac{\dim(\mu, \lambda)}{\dim \lambda} - \widetilde{m}_\mu(\omega_\lambda) \right| \leq \frac{C(\mu)}{N}$$

где $C(\mu)$ не зависит от N.

Отложим на время доказательство этого предложения и выведем из него теорему ~~Кин~~ Кингмана.

Условие псевдогармоничности дает:

$$\varphi(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_N} \dim(\mu, \lambda)\, \varphi(\lambda)$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_N} \frac{\dim(\mu, \lambda)}{\dim \lambda} \cdot \dim \lambda \cdot \varphi(\lambda)$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_N} \frac{\dim(\mu, \lambda)}{\dim \lambda}\, P_N(\lambda)$$

В силу предложения,

$$\varphi(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_N} \widetilde{m}_\mu(\omega_\lambda)\, P_N(\lambda) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \int_{\omega \in \overline{\nabla}_\infty} \widetilde{m}_\mu(\omega)\, \widetilde{P}_N(d\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Поскольку $\overline{\nabla}_\infty$ — компактное пространство, из последовательности $\{\widetilde{P}_N\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\widetilde{P}_{N_i}\}$, такую, что существует слабый предел

$$\widetilde{P} := \lim_{i \to \infty} \widetilde{P}_{N_i}$$

Тогда из написанного выше равенства следует, что

$$\varphi(\mu) = \int_{\omega \in \overline{\nabla}_\infty} \widetilde{m}_\mu(\omega)\, \widetilde{P}(d\omega) \qquad \forall \mu.$$

Мы доказали существование представляющей меры. В силу ее единственности, $\widetilde{P}$ не зависит от возможного произвола в выборе подпоследовательности $\{\widetilde{P}_{N_i}\}$. А это значит, что попросту $\widetilde{P}_N \to \widetilde{P}$ (слабо).

Перейдем к доказательству предложения стр. 4.

Рассмотрим "факториальные" мономиальные симметрические функции m^*_μ. Они определяются точно так же, как функции m_μ; единственное различие состоит в том, что обычные степени переменных x^m заменяются убывающими факториальными степенями

$$x^{\downarrow m} := x(x-1)\dots(x-m+1).$$

ЛЕММА. Пусть $\mu \in \mathrm{Part}_n$, $\lambda \in \mathrm{Part}_N$, $n \le N$. Справедлива формула

$$N^{\downarrow n} \frac{\dim(\mu, \lambda)}{\dim \lambda} = m^*_\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

Доказательство.

"Обратная" индукция по $n = N, N-1, \dots$. Т.е. ~~сначала~~ докажем формулу сперва для $n = N$, а затем спускаемся от $n+1$ к n.

Ключевой факт:

- Во-первых, $m^*_\mu = m_\mu +$ младшие члены
- Во-вторых, если μ не содержится в λ (относительно включения диаграмм Юнга), то $m^*_\mu(\lambda) = 0$.

Проверка для $n=N$. Если $\mu \neq \lambda$, то обе части равенства равны 0. Если $\mu=\lambda$, то $\dim(\mu,\lambda)=\dim(\lambda,\lambda)=1$ (по соглашению), ~~[illegible]~~

и требуемое равенство сводится к

$$\frac{N!}{\dim\lambda} \overset{?}{=} m^*_\lambda(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$$

но правая часть, как легко проверить, равна $\lambda_1!\,\lambda_2!\dots$, поэтому это эквивалентно тому, что

$$\dim\lambda = \frac{N!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\dots},$$

что действительно верно.

Далее, переход "$n+1 \to n$" сводится к тому, что

$$(N-n)\, m^*_\mu(\lambda_1,\lambda_2,\dots) = \sum_{\varkappa\in \mathrm{Part}_{n+1}} \dim(\mu,\varkappa) \cdot m^*_\varkappa(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$$

Заметим, что $N=\lambda_1+\lambda_2+\dots$. Поэтому это вытекает из более общего факта:

$$p_1 \cdot m^*_\mu = \sum_{\varkappa\in \mathrm{Part}_{n+1}} \dim(\mu,\varkappa)\, m^*_\varkappa + n\, m^*_\mu.$$

Докажем это равенство. Поскольку

$~~m^*_\mu~~$

$m^*_\mu = m_\mu +$ младшие члены,

из определения кратностей $\dim(\mu, \varkappa)$ следует, что

$$p_1\, m^*_\mu = \sum_{\varkappa \in \mathrm{Part}_{n+1}}' \dim(\mu, \varkappa)\, m^*_\varkappa + \text{члены степени } n \text{ и ниже.}$$

Или, подробнее,

$$(x_1 + x_2 + \ldots)\, m^*_\mu(x_1, x_2, \ldots) =$$

$$= \sum_{\varkappa \in \mathrm{Part}_{n+1}}' \dim(\mu, \varkappa)\, m^*_\varkappa(x_1, x_2, \ldots)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu \in \mathrm{Part}_k} c(\nu)\, m^*_\nu(x_1, x_2, \ldots),$$

где $c(\nu)$ – какие-то коэффициенты. Пусть k – наименьший номер, для которого найдется $\nu \in \mathrm{Part}_k$, входящее с ненулевым коэффициентом. Подставим в это равенство $(x_1, x_2, \ldots) = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$ и используя второе свойство факториальных функций (см. стр. 6), заключаем, что единственный возможный вариант, это $k = n$, $\nu = \mu$. А тогда коэффициент $c(\nu) = c(\mu)$ находится из левой части: он равен $\mu_1 + \mu_2 + \ldots = n$. $\square$

Наконец, предложение стр. 4 выводится из леммы.
Здесь существенно лишь то, что m^*_μ совпадает с m_μ
с точностью до младших членов.

Это завершает доказательство теоремы Кингмана.