Курсовая работа студента Олюманского Г.И.
(группа 305)

„Градуировка в кольце $R_{1,0}$"

0. Рассмотрим кольцо $R_{1,0}(K)$. Это алгебра над полем K с образующими p, q и соотношением

$$(\mathrm{I}) \qquad pq - qp = 1.$$

Такому соотношению удовлетворяют операторы $\frac{d}{dx}$ и умножение на x.

1. Назовем многочлен $\sum \alpha_{ij} q^i p^j$ однородным степени n, если $\alpha_{ij} \neq 0 \Rightarrow i-j=n$

Из (I) легко следует, что тем самым в $R_{1,0}$ задана градуировка, т.е. произведение однородных элементов степеней n и m есть однородный же элемент степени $n+m$. Нам будет важно, что подкольцо R^+ эл-тов неотрицательной степени порождено q и $t = qp$, и имеет место основное соотношение,

$$(\mathrm{II}) \qquad tq = q(t+1)$$

которое легко следует из (I).

Всякий эл-т из $R_{1,0}$ может быть записан в виде $\sum\limits_{n_1 \le i \le n_2} q^i P_i(t)$, где P_i - многочлен

Два эл-та перемножаются по формуле

$$(\mathrm{III}) \qquad q^n P(t) \cdot q^m Q(t) = q^{n+m} P(t+m)\, Q(t)$$

Отметим, что $R_{1,0}$ вкладывается в тело Гильберта некоммутативных формальных степенных рядов от q, т.е. выражений вида

$$\sum_{n_1 \le i < \infty} q^i R_i(t)$$

, где R_i - уже рациональные ф-ии от t., а перемножение 2-х таких рядов определяется по формуле (III) (частный случай общей конструкции Гильберта).

2. При помощи описанной градуировки мы получим опровергающий пример к гипотезе: если $a, b \in R_{1,0}$ и $[a, b] = ab - ba = 0$, то

(IV) $\quad a = P(c)$; $b = Q(c)$

где P и Q – многочлены, а $c \in R_{1,0}$.

Рассмотрим

$$a = q^2 t(t+3)$$
$$b = q^3 t(t+2)(t+4)$$

При помощи (III) можно проверить, что $[a, b] = 0$.
Предположим что выполнено IV для некоторых P, Q и $c \in R_{1,0}$.
Если $R_{1,0} \ni x = \sum_{n_1 \le i \le n_2} q^i P_i(t)$ и $P_{n_2} \neq 0$, назовем $q^{n_2} P_{n_2}(t)$ старшим членом x (обозначение: $[x]$)
Пусть: $[P]$ означает старший член многочлена P.
Имеет место тождество

$$[P(C)] = [P]([C])$$

Оно вытекает из (III) и определения $[\ldots]$
Т.к. a и b однородны, то

$a = [a] = [P(c)] = [P][C]$ и аналогично
$b = [b] = [Q(c)] = [Q][C]$

т.е. a и b суть степени однородного эл-та $d = [c]$
Т.к. $\deg a = 2$ а $\deg b = 3$, очевидно, что $\deg d = 1$
Без ограничения общности можно считать, что коэффициенты при $[P]$ и $[Q]$ равны 1. Тогда, т.к. $\deg d > 0$, то ~~в~~ вид $d \in R^+$, ~~d=~~ $d = q S(t)$, где S – многочлен от t, и $a = d^2$ и $b = d^3$
Значит

(V) $\quad S(t)S(t+1) = t(t+3)$ и
$\quad S(t)S(t+1)S(t+2) = t(t+2)(t+4)$.

Можно доказать, что в многочленах (V) неразрешимо, хотя (V) разрешимо в рациональных ф-х и можно положить

$$S(t)=\frac{t(t+2)}{t+1}, \text{ но } q\,\frac{t(t+2)}{t+1}$$ не лежит в $R_{1,0}$.

Однако $d=q\,\frac{t(t+2)}{t+1}$ лежит в теле частных $D_{1,0}$ кольца $R_{1,0}$, и мы тем самым доказали что $R_{1,0}$ не целозамкнуто, т.к., например, ур-е

$x^2-a=0$, где $a=q^2t(t+3)$ разрешимо в $D_{1,0}$, но неразрешимо в $R_{1,0}$