ИНСТИТУТ ГЕОГРАФИИ АН СССР

На правах рукописи

ОЛЬШАНСКИЙ Григорий Иосифович

УДК 517.986.4

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

01.01.01 – математический анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 1989

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

I. Предмет диссертации и ее основные результаты

В последние годы в теории представлений, частично под влиянием математической физики, активно изучаются представления бесконечномерных групп. Имеется, по крайней мере, три класса бесконечномерных групп, которые важны для приложений и для которых уже накоплен большой материал. Это [21, 89] :

- группы диффеоморфизмов гладких многообразий;
- группы отображений многообразий в группы Ли (в особенности, группы петель и их центральные расширения);
- операторные или бесконечномерные классические группы.

Диссертация посвящена группам третьего типа. Ее основные результаты таковы.

I. Предложен оригинальный подход к построению теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп, основанный на понятии (G, K) -пары. Развит новый аппарат, использующий специфику рассматриваемых бесконечномерных групп и отличающийся от традиционной техники теории представлений: метод голоморфных расширений и метод полугрупп двойных классов (последние служат своеобразным аналогом алгебр Гекке).

II. Впервые обнаружено множество бесконечномерных топологических групп, являющихся ручными группами. Это группы

$$\overline{O}_0(p,\infty), \quad \overline{U}(p,\infty), \quad \overline{Sp}(p,\infty) \quad (p=1,2,\ldots)$$

J -унитарных операторов в пространствах Понтрягина над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. Для них полностью описаны неприводимые унитарные представления. Построены "особые" унитарные представления групп $U(p,q)$, выдерживающие предельный переход $q \to \infty$.

Ш. Для двух модельных (G,K) -пар бесконечного ранга - пары $(GL(\infty,\mathbb{C}), U(\infty))$ некомпактного типа и двойственной ей пары $(U(\infty)\times U(\infty), U(\infty))$ компактного типа - дана явная конструкция допустимых представлений, зависящих от многомерных дискретных и непрерывных параметров. Доказано, что полученные представления неприводимы, попарно не эквивалентны и допускают непрерывное продолжение на гильберт-шмидтовское топологическое пополнение группы G.

IУ. Для каждой из бесконечномерных классических алгебр Ли $o(\infty,\mathbb{C})$, $gl(\infty,\mathbb{C})$, $sp(\infty,\mathbb{C})$ определена ассоциативная алгебра, действующая в пространстве произвольного "ручного" представления соответствующей группы $O(\infty)$, $U(\infty)$ или $Sp(\infty)$, содержащая обычную универсальную обертывающую алгебру, а также кольцо виртуальных операторов Лапласа. Подробно разобран случай $o(\infty,\mathbb{C})$: для получившейся алгебры A вычислены образующие и определяющие квадратичные соотношения, получена реализация дифференциальными операторами, выявлена связь с теорией квантовых групп.

Несколько слов по поводу термина "бесконечномерные классические группы", поскольку он допускает целый спектр различных толкований (см., например, [81, 82]). В диссертации рассматриваются как "минимальная версия", т.е. индуктивные пределы конечномерных классических групп типа

$$U(\infty) = \bigcup_{n\geq 1} U(n), \qquad U(p,\infty) = \bigcup_{q\geq 1} U(p,q),$$
$$GL(\infty,\mathbb{C}) = \bigcup_{n\geq 1} GL(n,\mathbb{C}),$$

так и некоторые топологические пополнения индуктивных пределов. С индуктивными пределами удобнее работать, тогда как необходимость непрерывного продолжения представлений на подходящее пополнение диктуется приложениями. Предлагаемые в диссертации варианты топологизации индуктивных пределов подсказаны опытом обращения с представлениями.

2. Краткий обзор работ по представлениям бесконечномерных классических групп

В качестве первых результатов, связанных с предметом диссертации, следует назвать старые теоремы И.Шенберга [110, 111] и М.Г.Крейна [26] , описывающие зональные сферические функции для трех бесконечномерных римановых симметрических пространств ранга I: сферы $x_0^2+x_1^2+\ldots=1$, вещественного гильбертова пространства и бесконечномерного пространства Лобачевского $-x_0^2+x_1^2+x_2^2+\ldots=-1, x_0>0$. Однако эти классические теоремы долгое время рассматривались исключительно как некоторые факты из анализа, тогда как их принципиальное значение для теории представлений не осознавалось.

В 60-х годах появились работы Ф.А.Березина [2] и Д.Шейла [115] и Д.Шейла-В.Стайнспринга [116] , стимулированные квантовой физикой. В них изучались важные специальные примеры представлений - представление Вейля бесконечномерной симплектической группы и спинорное представление бесконечномерной ортогональной группы. Еще раньше И.Сигал [112] выделил класс представлений бесконечномерной унитарной группы, аналогичных полиномиальным представлениям групп $U(n)$.

Далее следует отметить работы японских математиков [93, 103, 117, 124, 128-130], занимавшихся гармоническим анализом на бесконечномерной сфере и гильбертовом пространстве, а также построением квазиинвариантных мер для некоторых бесконечномерных классических групп.

В 1973 году А.А.Кириллов опубликовал короткую заметку [23] об унитарных представлениях групп $SO(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$, реализующихся в тензорах. В заметке не было доказательств, но содержавшиеся в ней идеи и замечания оказались чрезвычайно плодотворными.

Отправляясь от одного замечания А.А.Кириллова, Д.Войкулеску и Ш.Стратила [118-121, 125, 126] предприняли систематическое изучение фактор-представлений групп $SO(\infty)$, $Sp(\infty)$, и особенно $U(\infty)$ в духе теории операторных алгебр. Их работы были продолжены Р.Бойером [69-71] и А.Кэри [72].

С другой стороны, та же заметка А.А.Кириллова стимулировала исследования автора, но в ином, нежели у Войкулеску и Стратилы, направлении. Установка автора состояла в том, чтобы конструировать неприводимые унитарные представления более сложных бесконечномерных классических групп, используя представления Кириллова наподобие конечномерных представлений компактных групп. В конечном счете это привело к идеологии допустимых представлений (G,K)-пар, обсуждаемой в диссертации.

Э.Тома [122] и А.М.Вершик-С.В.Керов [6,7, 9-11] получили серию замечательных теорем о фактор-представлениях бесконечной симметрической группы. Эта тема идейно связана с бесконечномерными классическими группами. В частности, в [8] техника Вершика-Керова была применена ими к группе $U(\infty)$.

Сильный результат был получен Н.И.Нессоновым [40]. Он доказал, что конструкция автора [43] заведомо охватывает все сферические представления группы $GL(\infty, \mathbb{C})$.

Наконец, недавно появилась серия работ Д.Пикрела [104-108] о различных бесконечномерных классических группах, содержащих интересные результаты о представлениях, порожденных квазиинвариантными мерами, и о сферических функциях.

3. Содержание главы I

В этой главе рассматриваются простейшие операторные группы - индуктивные пределы компактных классических групп

$$O(\infty) = \bigcup_{n \geq 1} O(n), \quad U(\infty) = \bigcup_{n \geq 1} U(n), \quad Sp(\infty) = \bigcup_{n \geq 1} Sp(n) \tag{I}$$

и их простейшие унитарные представления - так называемые ручные представления.

Будем обозначать символом K любую из трех групп (I), а символом E - вещественное, комплексное или кватернионное гильбертово пространство с отмеченным базисом $e_1, e_2, \ldots$. Реализуем K как группу таких унитарных операторов в E, которые фиксируют базисные векторы e_i с достаточно большими номерами; в частности, n-я конечномерная подгруппа $K(n) \subset K$, фигурирующая в (I), фиксирует векторы $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$. Наряду с возрастающей цепочкой подгрупп $K(1) \subset K(2) \subset \ldots$ важную роль будет играть цепочка убывающих подгрупп $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, где K_n обозначает подгруппу, "дополнительную" к $K(n)$: она фиксирует первые n векторов $e_1, \ldots, e_n$.

Унитарное представление группы K называется ручным, если всякий его вектор ξ можно аппроксимировать последовательностью векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots$, инвариантных относительно $K_1, K_2, \ldots$ соответственно.

Это условие впервые возникло у А.А.Кириллова [23] . Заметим, что оно эквивалентно непрерывности нашего представления в той топологии на K , в которой подгруппы $K_1, K_2, \ldots$ образуют базис окрестностей единицы.

§ I.I посвящен общим результатам о ручных представлениях групп (I); позже (§ 3.I) они будут распространены на другие группы.

Первым результатом § I.I является следующая характеризация ручных представлений. Погрузим группу K в группу $\overline{K}$ (подробнее $\overline{O}(\infty)$, $\overline{U}(\infty)$ или $\overline{Sp}(\infty)$), состоящую из всех унитарных операторов в E и снабженную сильной=слабой операторной топологией. Оказывается (теорема I.I.6), что ручными являются в точности те унитарные представления группы K , которые допускают непрерывное продолжение на группу $\overline{K}$; иными словами, ручные представления индуктивного предела K и непрерывные унитарные представления топологической группы $\overline{K}$ - это фактически одно и то же.

Второй результат § I.I (теорема I.I.IO) состоит в том, что множество $\Gamma(m)=K_m \backslash K/K_m$ $(m=1,2,\ldots)$ двойных классов смежности обладает естественной полугрупповой структурой, причем полугруппа $\Gamma(m)$ канонически действует в пространстве K_m-инвариантов произвольного ручного представления группы K сжимающими операторами. Здесь впервые проявляется специфика бесконечномерных групп. В конечномерной ситуации множество двойных классов смежности по компактной подгруппе обладает структурой "гипергруппы": попросту говоря, при свертке двух двойных классов возникает вероятностная мера на множестве классов. Но в бесконечномерной ситуации носитель подобной меры вырождается в точку, откуда и возникает полугрупповая структура на двойных классах. Это удивительное явление компенсирует потерю арсенала средств, основанного на инвариантном интегрировании по мере Хаара. Полугруппы двойных классов уместно сравнить с обобщенными алгебрами Гекке из теории представлений p-адических групп: в самом деле, топология p-адической группы также задается некоторой убывающей цепочкой подгрупп K_α, а обобщенная алгебра Гекке, состоящая из K_α-биинвариантных функций на группе, канонически действует в подпространстве K_α-инвариантных векторов.

В § I.2 дается описание неприводимых ручных представлений группы $K=O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$, получающихся при разложении тензорной алгебры над тождественным представлением (теорема I.2.2). Результат был сформулирован А.А.Кирилловым [23] ; в диссертации излагается доказательство, принадлежащее автору [49] ; еще один подход указан в замечании 2.3.I5. В теореме I.2.6 показано, что те же самые ручные представления группы K можно реализовать в виде индуктивных пределов неприводимых конечномерных представлений компактных групп $K(n)$.

В § I.3 доказано, что представлениями, описанными в § I.2, исчерпываются все неприводимые ручные представления групп K (теорема I.3.I). В эквивалентной формулировке этот результат был анонсирован А.А.Кирилловым [23] без доказательства. В диссертации излагается доказательство автора [42] , использующее полугруппы двойных классов. Другое доказательство было дано автором в

[49] . Как следует из результатов § I.I, теорема I.3.I доставляет также описание неприводимых унитарных представлений топологических групп $\overline{K}$. В теореме I.3.5 показано, что произвольное ручное представление является дискретной прямой суммой неприводимых представлений (априори это не очевидно). Как следствие, получается, что топологические группы $\overline{K}$ являются ручными (иначе говоря, группами типа I).

В § I.4 каждая из трех групп K погружается в некоторую группу K^* , а именно

$$O(\infty) \hookrightarrow U(\infty)\,,\ U(\infty) \hookrightarrow U(\infty) \times U(\infty)\,,\ Sp(\infty) \hookrightarrow U(2\infty).$$

Из классификационной теоремы § I.3 выводится, что категория ручных представлений группы K эквивалентна категории голоморфных представлений группы K^* (некоторой подкатегории ее ручных представлений). А именно, произвольное ручное представление группы K канонически расширяется до голоморфного представления группы K^* , причем последнее порождает ту же алгебру фон Неймана. На этом построен метод голоморфных расширений, играющий основную роль в главах 3 и 4. Если провести аналогию с унитарным трюком Г.Вейля, то группа K^* выступает здесь в качестве комплексификации группы K . Например, $U(\infty)$ служит "комплексификацией" для $O(\infty)$. Смысл этого, на первый взгляд, парадоксального утверждения вскрывается уже в доказательстве теоремы I.2.2.

Результаты главы I опубликованы автором в статьях [4I,42,49]. Отмечу еще, что во многом аналогичная теория ручных представлений строится для бесконечной симметрической группы [I02] и для бесконечномерных классических групп над конечными полями [53] .

4. Содержание главы 2

Сюжет главы 2 родился из попытки распространить на ручные представления алгебраическую технику теории конечномерных представлений. При этом сразу возникли серьезные трудности из-за того, что универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}})$ для бесконечномерной классической комплексной алгебры Ли $k_{\mathbb{C}}$, т.е. для $o(\infty,\mathbb{C})$, $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}(\infty,\mathbb{C})$, лишена ряда ценных свойств универсальных обертывающих алгебр $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}}(n))$ конечномерных алгебр Ли $k_{\mathbb{C}}(n)(= o(n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$. Например, у $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}})$ тривиальный центр, тогда как центр алгебр $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}}(n))$ достаточно велик, чтобы разделять неприводимые конечномерные $k_{\mathbb{C}}(n)$-модули. В работе [42] автор построил кольцо "виртуальных операторов Лапласа", обладающих аналогичным свойством для ручных представлений групп K. Эти "операторы Лапласа" не лежат в $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}})$, а получаются некоторым предельным переходом по $n \to \infty$ из центральных элементов алгебр $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}}(n))$.

Надлежащее обобщение этой конструкции приводит к "правильной" версии $\hat{\mathcal{U}}(k_{\mathbb{C}})$ универсальной обертывающей алгебры, которая содержит и $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}})$, и кольцо "операторов Лапласа", а также обладает рядом других хороших свойств.

В § 2.1 строится ассоциативная алгебра A (ее связь с алгебрами $\hat{\mathcal{U}}(k_{\mathbb{C}})$ выясняется в § 2.3). Алгебра A является объединением возрастающей цепочки подалгебр A_m, $m \geq 0$, каждая из которых обладает фильтрацией конечномерными подпространствами, причем градуированные алгебры $\mathrm{gr}\, A_m$, присоединенные к A_m, коммутативны. Подалгебра A_0 совпадает с центром алгебры A и является проективным пределом в категории фильтрованных алгебр центров алгебр $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$; она представляет собой некоторую модификацию алгебры симметрических функций от счетного набора переменных. Подалгебры $A_m, m=1,2,\ldots$ конструируются сходным образом из некоторых подалгебр инвариантов в алгебрах $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$. Таким образом, алгебра A представляет собой нечто вроде индуктивно-проективного предела алгебр $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$. Основной результат параграфа состоит в предъявлении образующих $t^{(M)}, t_{ij}^{(M)}$ алгебры A (индексы i, j, M принимают значения $1, 2, \ldots$) и вычислении определяющих соотношений между ними. Весьма замечательно, что получаются в точности известные квадратичные соотношения, задающие некоторые квантовые группы [17,60,90] , а именно, янгианы алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

В § 2.2 имеются три связанных друг с другом сюжета. Во-первых, установлено, что некоторые важные представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$ канонически продолжаются на алгебру A . Во-вторых, выделена коммутативная подалгебра $C\subset A$, которая диагонализируется в базисе Гельфанда-Цетлина произвольного неприводимого голоморфного представления группы $U(\infty)$, и доказано, что A порождается своими подалгебрами $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C}))$ и C . В-третьих, получена реализация алгебры A дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами на пространстве бесконечных матриц.

В § 2.3 вводятся "правильные" обертывающие алгебры $\hat{\mathcal{U}}(k_{\mathbb{C}})$, в определении которых участвуют ручные представления групп K . Основной результат параграфа - построение изоморфизма $\mathcal{U}(o(\infty,\mathbb{C}))\to A$. Доказательство довольно длинно; в нем используются полугрупповой метод § 1.1, результаты § 2.2 и соображения из классической теории инвариантов. По ходу дела получена реализация алгебры $\hat{\mathfrak{U}}(o(\infty,\mathbb{C}))$ в виде алгебры левоинвариантных дифференциальных операторов на $O(\infty)$ (последнее понятие неочевидно и требует особого разъяснения). Все построения автоматически переносятся на $\hat{\mathfrak{U}}(gl(\infty,\mathbb{C}))$: эта алгебра изоморфна $A\otimes A$. В случае $\hat{\mathfrak{U}}(sp(\infty,\mathbb{C}))$ получаются несколько более слабые результаты, что связано с известной трудностью построения подалгебры Гельфанда-Цетлина в $\mathfrak{U}(sp(n,\mathbb{C}))$.

Следует отметить, что алгебры $\mathfrak{U}(k_{\mathbb{C}})$ обслуживают не только группы K , но и более общие группы главы 3.

Результаты главы 2 опубликованы автором в статьях [41,42, 51,52] .

5. Содержание главы 3

В этой главе строится теория допустимых представлений для трех серий групп

$$SO_0(\rho,\infty)\ ,\quad U(\rho,\infty)\ ,\quad Sp(\rho,\infty)\quad (\rho=1,2,\ldots),$$

которые связаны с бесконечномерными симметрическими пространствами X конечного ранга ρ . Простейший пример такого пространства - это бесконечномерное пространство Лобачевского, т.е. гиперболоид $-x_0^2+x_1^2+x_2^2+\ldots=-1,\ x_0>0$, его ранг равен 1. Через G обозначается любая из указанных групп; она реализуется как некоторая группа J-унитарных операторов в пространстве Понтрягина Π_ρ (над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$) с ρ отрицательными квадратами. Симметрическое пространство X , о котором шла речь, состоит из отрицательных ρ-плоскостей в Π_ρ .

Результаты § 3.1 параллельны результатам § 1.1. Унитарное представление группы G называется допустимым, если его сужение на подгруппу $K\ (=SO(\infty),\ U(\infty),\ Sp(\infty))$ является ручным. Доказано, что допустимые представления группы G - это в точности те представления, которые имеют непрерывное продолжение на группу $\overline{G}$ всех J-унитарных операторов в пространстве Понтрягина ($\overline{G}$ совпадает с группой движений пространства Π_ρ). Затем полугрупповой метод § 1.1 распространяется на группы G : соответствующие полугруппы двойных классов суть полугруппы J-сжимающих конечномерных матриц.

В § 3.2 приводятся необходимые сведения об унитарных представлениях со старшим весом для конечномерных групп $U(\rho,q)^{\sim}$, которые суть $\mathbb{Z}$-накрытия над $U(\rho,q)$.

В § 3.3 вводится $\mathbb{Z}$-накрытие $U(\rho,\infty)^{\sim}$ над $U(\rho,\infty)$. Унитарное представление этой группы называется голоморфным, если его сужение на подгруппу $U(\infty)$ является голоморфным ручным представлением. Это требование равносильно голоморфности матричных элементов представления как функций на полугруппах двойных классов. Основной результат есть классификация неприводимых голоморфных представлений: каждое из них есть индуктивный предел неприводимых унитарных представлений со старшим весом групп $U(\rho,q)^{\sim}$, $q\to\infty$, и определяется одним непрерывным и несколькими дискретными параметрами.

В § 3.4 излагается конструкция неприводимых допустимых представлений для групп G . Они получаются сужением неприводимых голоморфных представлений некоторой надгруппы $G^*\supset G$ (например, если $G=SO_0(\rho,\infty)$, то $G^*=U(\rho,\infty)^{\sim}$). Замечательно, что при редукции с G^* на G сохраняется неприводимость. Это выводится из свойства голоморфности и того, что G^* порождается своими подгруппами G и K^*.

В § 3.5 доказан основной результат главы: всякое допустимое представление группы G канонически расширяется до голоморфного представления группы G^*, имеющего общую с ним алгебру фон Неймана. Отсюда следует, что конструкция § 3.4 доставляет все неприводимые допустимые представления. Одновременно получается полное описание неприводимых унитарных представлений топологических групп $\overline{G}$, а также тот факт, что эти группы принадлежат типу I. Доказательство классификационной теоремы использует замечательную теорему Люшера-Мака [96] о представлениях "полугрупп Ли" сжатиями, которая применяется здесь к полугруппам двойных классов в G. Вопросы, связанные с полугруппами Ли", рассматриваются в работе автора [45, 47].

В § 3.6 обсуждается обобщение упоминавшихся выше теорем Шенберга и Крейна, вытекающее из основных классификационных теорем главы I и главы 3. Речь идет о полном описании зональных сферических функций на бесконечномерных симметрических пространствах конечного ранга $p = 1, 2, \dots$. Такие пространства суть либо грассманианы p-плоскостей в гильбертовом пространстве над $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, либо многообразия отрицательных p-плоскостей в пространствах Понтрягина Π_p над $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. В частном случае вещественного поля и $p = 1$ мы возвращаемся в теоремам Шенберга и Крейна.

§ 3.7 посвящен своеобразному приложению бесконечномерных групп к конечномерным группам. Основным результатом параграфа является теорема 3.7.12, в которой дана явная реализация "особых" неприводимых унитарных представлений групп $U(p, q)$ - тех представлений, которые "выдерживают" предельный переход $q \to \infty$. При $p = 1$ особые представления принадлежат к дополнительной серии, но при $p \geqslant 2$ среди них, по-видимому, содержатся новые унитарные представления. Попутно получены и другие результаты, представляющие самостоятельный интерес. В этом параграфе все представления реализуются в формализме Гельфанда-Цетлина, т.е. предъявляются формулы, описывающие действие генераторов алгебры Ли в базисе типа Гельфанда-Цетлина. В доказательствах используется технический прием, позволяющий редуцировать задачу вычисления инфинитезимальных матричных элементов в классической ситуации, разобранной И.М.Гельфандом и М.Л.Цетлиным [14].

Результаты главы 3 опубликованы автором в статьях [41, 42, 43, 49, 56].

6. Содержание главы 4

В этой главе изучаются допустимые представления (G,K)-пары некомпактного типа $(GL(\infty,\mathbb{C})$, $U(\infty))$ и двойственной ей (G,K)-пары компактного типа $(U(\infty)\times U(\infty),\ U(\infty))$. Категория допустимых представлений определяется так же, как в главе 3: она состоит из таких унитарных представлений группы G, которые при редукции на подгруппу K оказываются ручными.

Во избежание недоразумений стоит сразу же отметить, что неприводимые допустимые представления для $U(\infty)\times U(\infty)$ далеко не сводятся к тензорным произведениям двух ручных представлений группы $U(\infty)$: достаточно сказать, что среди них содержатся сферические представления, которые, в свою очередь, находятся во взаимно-однозначном соответствии с фактор-представлениями типа II_1 группы $U(\infty)$.

Изложенный в главе 4 метод конструирования представлений носит довольно общий характер и применим ко всем другим (G,K)-парам бесконечного ранга, перечисленным в таблице 2. Описание общей картины содержится в заметке автора [48]. Я решил ограничиться в диссертации разбором двух указанных (G,K) -пар по следующим соображениям. Во-первых, подробный анализ всех вариантов вместе с необходимым вспомогательным материалом потребовал бы слишком много места. А во-вторых, схема рассуждений является единообразной, и в предлагаемом изложении присутствуют все принципиальные моменты доказательств: $(GL(\infty,\mathbb{C}), U(\infty))$ может служить моделью для всех (G,K) -пар некомпактного типа, а $(U(\infty)\times U(\infty), U(\infty))$ – для всех (G,K) -пар компактного типа.

В § 4.1 обсуждается идеология (G,K) -пар. Вводятся (G,K) -пары, связанные с бесконечномерными римановыми симметрическими пространствами. Каждая такая (G,K) -пара определяется как индуктивный предел $\varinjlim_{n\to\infty} (G(n), K(n))$, где $G(n)$ и $K(n)$ – конечномерные классические группы, $K(n)$ – компактная подгруппа в $G(n)$ и последовательность однородных пространств $G(n)/K(n)$ образует одну из классических серий римановых симметрических пространств некомпактного или компактного типа. Возможны два варианта. В первом варианте ранг симметрического пространства $G(n)/K(n)$ постоянен (таблица I); тогда мы имеем дело с (G,K)-парами конечного ранга, изученными в главе 3. Во втором варианте $\operatorname{rank} G(n)/K(n)\to\infty$ и получаются двадцать (G,K) -пар бесконечного ранга (таблица 2).

Определение категории допустимых представлений (G,K) -пар построено по образцу определения модулей Хариш-Чандры и преследуют сходные цели – создание основ для построения содержательной теории представлений. Особое внимание к основам обусловлено тем, что для бесконечномерных групп, являющихся индуктивными пределами, нельзя ставить задачу обозрения всех представлений (она оказывается "дикой"). Идеология (G,K) -пар очерчивает рамки, в которых уже оказывается реальным изучение неприводимых унитарных представлений индуктивных пределов конечномерных классических групп. Другой плодотворный подход (Войкулеску-Стратила-Вершик-Керов-...), ориентированный на операторные алгебры, делает упор на изучение фактор-представлений индуктивных пределов компактных групп. Между этими различными подходами имеются важные связи, фиксируемые в теореме 4.I.4.

Основным инструментом для доказательства неприводимости допустимых представлений (G,K) -пар является метод голоморфных расширений ("выход в комплексную область по подгруппе K "). Этот метод играет ключевую роль как в главе 3, так и в главе 4. В разделе 4.I.5 он сформулирован применительно к (G,K) -парам бесконечного ранга.

В заключение параграфа указывается рецепт "правильной" топологизации (G,K) -пар. Этот рецепт был выработан на основе опыта изучения допустимых представлений и сводится к тому, что на подгруппе K надо брать слабую операторную топологию, а "в трансверсальном к ней направлении", т.е. фактически на симметрическом пространстве G/K - операторную топологию Гильберта-Шмидта.

В § 4.2 напоминается популярная конструкция (Хау [83]), Кашивара и Вернь [86] и др.), позволяющая строить унитарные представления со старшим весом группы $U(p,q)$, разлагая тензорные степени ее представления Вейля. Эта схема переносится затем на бесконечномерную группу $U(\infty,\infty)$. В результате получается счетное семейство неприводимых представлений группы $U(\infty,\infty)$, которые используются в §§ 4.3 и 4.5. Следует отметить, что примеры подобных представлений впервые появились у И.А.Шерешевского [65], который занимался бесконечномерным обобщением известной схемы квантования на эрмитовых симметрических пространствах по Березину.

В § 4.3 излагается конструкция семейства $\{T_{\mathcal{M}}\}$ допустимых представлений модельной (G,K)-пары $(GL(\infty,\mathbb{C}),\ U(\infty))$. Символом $\mathcal{M}$ обозначается набор непрерывных и дискретных параметров, определяющий представление. Непрерывные параметры – это произвольное конечное подмножество $\mathfrak{X}\subset\mathbb{R}$, а дискретные параметры – это указание для каждой точки $x\in\mathfrak{X}$ неприводимого представления произвольной конечномерной группы вида $U(k)$, $k=1,2,\dots$. Доказано, что представления $T_{\mathcal{M}}$ неприводимы и попарно не эквивалентны (теорема 4.3.4) и допускают непрерывное продолжение на топологическое пополнение $\overline{GL}(\infty,\mathbb{C})_2$ – группу движений гильберт-шмидтовского пополнения пространства $GL(\infty,\mathbb{C})/U(\infty)$. Замечательно, что тензорное произведение двух представлений из нашего семейства, зависящих от дизъюнктных подмножеств $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, неприводимо и зависит от $\mathfrak{X}_1\cup\mathfrak{X}_2$. Явление такого сорта впервые было обнаружено А.А.Кирилловым [24] для групп диффеоморфизмов. Таким образом, все сводится к "одноточечным" представлениям, которые, в свою очередь, получаются в результате суперпозиции неприводимых унитарных представлений со старшим весом группы $U(\infty,\infty)$ из § 4.2 с подходящими вложениями $GL(\infty,\mathbb{C})\to$ $\to U(\infty,\infty)$.

В § 4.4 содержится подготовительный материал к § 4.5. В первой части параграфа приводится фермионная версия построений § 4.2: представление Вейля заменяется спинорным представлением, и в результате получается семейство неприводимых унитарных представлений со старшим весом для группы $U(2\infty)$. Вторая часть параграфа посвящена представлениям некоторого полупрямого произведения. Они могут быть получены некоторым предельным переходом от "бозонных" представлений группы $U(\infty,\infty)$ (§ 4.2), равно как и из "фермионных" представлений группы $U(2\infty)$.

В § 4.5 излагается конструкция неприводимых допустимых представлений $T_{\mathcal{M}}$ для модельной (G,K) -пары компактного типа $(U(\infty)\times U(\infty),\ U(\infty))$. Наличие двойственности между симметрическими пространствами

$$GL(\infty,\mathbb{C})/U(\infty) \qquad \text{и} \quad U(\infty)\times U(\infty)/U(\infty)=U(\infty)$$

проявляется в удивительной аналогии, прослеживающейся в свойствах представлений обеих (G,K) -пар. В то же время для пары компактного типа возникает ряд новых эффектов, усложняющих и обогащающих теорию. Например, множество $\mathfrak{X}$ непрерывных параметров теперь может состоять из счетного множества точек, накапливающихся к выделенным двум точкам 1 и -1 . Далее, наряду с "бозонными" представлениями из § 4.2 в конструкции используются также "фермионные" и "предельные" представления из § 4.4. Необходимо отметить, что "бозонные", "фермионные" и "предельные" элементы фигурировали уже в конструкции Войкулеску [I26] характеров группы $U(\infty)$, и это не случайно, ибо характеры фактор-представлений группы $U(\infty)$ фактически совпадают со сферическими функциями сферических допустимых представлений для $(U(\infty)\times U(\infty),\ U(\infty))$. Таким образом, содержание параграфа уместно интерпретировать как сильное обобщение работы Войкулеску [I26] . О приложениях к фактор-представлениям я скажу в следующем разделе Введения.

Содержащуюся в § 4.3 и § 4.5 конструкцию неприводимых допустимых представлений для (G,K)-пар бесконечного ранга можно вкратце описать следующим образом. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G погружается в алгебру Ли $\mathfrak{g}^*$, элементы которой являются полиномиальными функциями со значениями в некоторой бесконечномерной классической алгебре Ли. Для $\mathfrak{g}^*$ можно определить семейство $\{V\}$ неприводимых унитаризуемых представлений со старшим весом. Оказывается, что сужение каждого V на $\mathfrak{g}$ продолжается до унитарного представления группы G, причем последнее будет неприводимо и допустимо. При таком описании вырисовывается аналогия с результатами главы 3: алгебра Ли $\mathfrak{g}^*$ играет роль группы G^* из главы 3, и обе они суть универсальные объекты, через которые пропускаются голоморфные расширения. Мне кажется, что появление алгебр токов $\mathfrak{g}^*$ в контексте классических групп заслуживает внимания, ибо оно свидетельствует о наличии внутренних связей между бесконечномерными объектами различной природы.

Результаты главы 4 опубликованы автором в статьях [43,48,55].

7. Дальнейшие результаты, приложения, гипотезы

Ю.А.Неретин [33, 36, 38] нашел очень красивые применения результатов автора о допустимых представлениях (G,K)-пар бесконечного ранга к группе диффеоморфизмов окружности $\mathcal{D}iff\, S^1$. В его конструкции участвуют многие (G,K)-пары как компактного, так и некомпактного типа. Для каждой пары (G,K) рассматривается гильберт-шмидтовское пополнение $\bar{G}_2$ группы G и строится серия вложений $\mathcal{D}iff\, S^1 \to \bar{G}_2$, зависящих от непрерывного параметра. Как уже отмечалось, допустимые представления продолжаются на группу $\bar{G}_2$; ограничивая их на $\mathcal{D}iff\, S^1$, Ю.А.Неретин получает серию унитарных представлений для $\mathcal{D}iff\, S^1$. Конструкция Ю.А.Неретина значительно расширила класс известных унитарных представлений для $\mathcal{D}iff\, S^1$. Как показано в [34, 38] , она применима еще к p-адической версии группы $\mathcal{D}iff\, S^1$ и аффинным группам.

Результаты § 4.5 диссертации доставляют новую информацию о фактор-представлениях группы $U(\infty)$. Во-первых, показано, что все конечные и полуконечные фактор-представления группы $U(\infty)$ можно сделать непрерывными в топологии Гильберта-Шмидта путем домножения на подходящий одномерный характер универсальной накрывающей группы. Тем самым, достигается единообразие картины в "некомпактном" и "компактном" вариантах. Во-вторых, в работах Д.Войкулеску [125, 126] и А.М.Вершика-С.В.Керова [8] оставался еще открытым вопрос о точном описании гильбертова пространства для стандартной формы фактор-представления (конечного или полуконечного). Теперь это описание получается в качестве специального случая реализации допустимых представлений.

Следующее приложение выходит за рамки теории представлений. В книге П.Леви [28] о броуновском движении подробно обсудаются парадоксальные свойства случайного поля Леви (многопараметрического броуновского движения) на гильбертовом пространстве. Ключевую роль там играет такой результат, доказанный Леви и Маккином (а позднее - более простым способом - Картье [22]): гауссовский случайный процесс на полупрямой, являющийся радиальной частью случайного поля Леви на гильбертовом пространстве, допускает голоморфное продолжение в некоторую комплексную область. В заметке автора [54] этот результат обобщен в двух направлениях: во-первых, не только радиальную часть поля Леви, но и все поле как целое удается продолжить в некоторую (бесконечномерную) комплексную область; во-вторых, все это справедливо для более широкого класса случайных полей, и не только на гильбертовом пространстве, но и на бесконечномерной сфере и бесконечномерном пространстве Лобачевского. Указанные обобщения достигаются благодаря комбинации полугруппового метода § 3.I и метода голоморфных расширений § 3.5 и объясняют природу "детерминизма" бесконечнопараметрических полей Леви.

В другой статье автора [50] , не вошедшей в диссертацию, изучаются допустимые представления (G,K)-пары бесконечного ранга $(SO(\infty,\infty),\ SO(\infty)\times SO(\infty))$. Там найдены все ее сферические представления и доказано, что произвольное ее допустимое представление принадлежит типу I. Доказательство основано на предельном переходе от групп $SO_0(p,\infty)$, чьи представления изучены в главе 3, к группе $SO_0(\infty,\infty)$ при $p\to\infty$. Метод [50] автоматически переносится на две родственные группы: $U(\infty,\infty)$ и $Sp(\infty,\infty)$. Кроме того, в статье [50] развит общий формализм аппроксимации представлений индуктивных пределов классических групп.

В [50] представления допредельных групп используется в качестве источника информации о представлениях предельной группы. Но возможен и обратный ход рассуждений: например, можно предположить, что уже известные свойства допустимых представлений бесконечномерных групп $SO_0(p,\infty)$, $U(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ должны как-то отражаться на поведении "соответствующих" унитарных представлений допредельных конечномерных групп $SO(p,q)$, $U(p,q)$, $Sp(p,q)$. Именно такие соображения являются подоплекой результатов § 3.7 об "особых" представлениях групп $U(p,q)$. Эта тема далее развивается в работах автора [56] и Ю.А.Неретина [35].

Вообще, идея асимптотического подхода к представлениям индуктивных пределов, инициатором которого был А.М.Вершик, оказывается чрезвычайно плодотворной. А.М.Вершик и С.В.Керов [9-II, 87] показали, что разработка этой идеи в широком плане выявляет очень интересные и перспективные связи с операторными алгебрами, комбинаторикой, теорией вероятностей.

Конструкции главы 2, по мнению автора, должны найти применения в развивающейся сейчас теории квантовых групп. Первые результаты в этом направлении имеются: см. работы И.В.Чередника [64, 73]. Было бы очень интересно использовать реализацию янгианов в дифференциальных операторах, доставляемую теоремой 2.2.I8.

Полугрупповой метод, играющий ключевую роль в доказательстве основной классификационной теоремы главы 3, оказывается весьма эффективным средством и для других групп. В статье автора [I02] он используется для нового вывода теоремы А.Либермана [95] о "ручных" представлениях бесконечной симметрической группы (это точный аналог ручных представлений классических групп, исследованных в главе I). В статье автора [57] полугрупповой метод применяется к аналогам (G,K)-пар бесконечного ранга, построенным на базе бесконечной симметрической группы (интересно, что здесь снова проступают связи с квантовыми группами). Полугруппы в теории представлений - это одна из новых тем, открытых благодаря бесконечномерным группам. Она развивается дальше в статьях автора [45, 47] о представлениях "полугрупп Ли" и в работах Ю.А.Неретина [37, 39] о комплексной полугруппе, содержащей группу диффеоморфизмов окружности.

Необходимо отметить, что впервые полугруппы двойных классов появились в работах Р.С.Исмагилова (см. [19,20,21]) о сферических представлениях групп $GL(n,P)$ и $SL(n,P)$, где P обозначает локальное неархимедово поле с бесконечным полем классов вычетов; "эффект бесконечномерности" создается здесь специфическими свойствами таких полей. Между группами типа $SL(2,P)$ и группой $SO_0(1,\infty)$ существует далеко идущая аналогия. В частности, полученное Р.С.Исмагиловым описание сферических функций на $SL(2,P)$ оказывается аналогом теоремы Крейна о сферических функциях на $SO_0(1,\infty)$.

Наряду с (G,K) -парами компактного и некомпактного типа можно определить родственные им (G,K) -пары евклидова типа, для которых G является некоторым полупрямым произведением (простейший пример - группа аффинных движений гильбертова пространства, сохраняющих метрику). Здесь также возникает содержательная теория допустимых представлений, см. [41, 42, 55] .

В заключение я сформулирую две гипотезы, относящиеся к (G,K)-парам бесконечного ранга (таблица 2).

ГИПОТЕЗА 1. Всякое допустимое представление произвольной (G,K) -пары бесконечного ранга принадлежит типу I, т.е. порожденная им алгебра фон Неймана относится к типу I.

Из этой гипотезы следовало бы, что гильберт-шмидтовские пополнения $\overline{G}_2$, построенные по (G,K) -парам бесконечного ранга, являются ручными группами. Гипотеза подтверждается результатами работы [50] , где она доказана для трех пар некомпактного типа, а также работы [57] о родственных (G,K)-парах, связанных с бесконечной симметрической группой.

ГИПОТЕЗА 2. Конструкция, изложенная в главе 4 диссертации на примере модельных пар, а в заметке [48] - в общем случае, доставляет все неприводимые допустимые представления (G,K)-пар бесконечного ранга.

Эта гипотеза подтверждается на уровне сферических представлений, что вытекает из результатов работ А.М.Вершика-С.В.Керова [8], Р.Бойера [68], Н.И.Нессонова [40], автора [50] и Д.Пикрела [107].

8. Оформление диссертации; основные обозначения

В диссертации принята двойная нумерация параграфов и тройная нумерация разделов. Каждый параграф предваряется предисловием, в котором перечислены основные результаты параграфа.

Ссылка типа "теорема I.2.3" относится к единственной теореме из соответствующего раздела. Нумерация формул автономная в пределах раздела. Ссылка типа "формула I.2.3(4)" относится к формуле (4) из раздела I.2.3; внутри же раздела говорится просто о "формуле (4)".

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$H(T)$ - пространство, в котором действует представление T.
$\overline{T}$ - представление, сопряженное к представлению T.
T' - коммутант унитарного представления T, т.е. алгебра операторов, перестановочных с операторами представления; знак штриха используется также как символ транспонирования матриц, но это не может привести к недоразумению; T'' - бикоммутант.
$\otimes$ - символ тензорного произведения пространств или представ-

лений одной и той же группы ("внутреннее" тензорное произведение).

$\times$ – символ "внешнего" тензорного произведения представлений (например, если T_1 и T_2 – представления групп G_1 и G_2 соответственно, то $T_1 \times T_2$ есть представление группы $G_1 \times G_2$).

$\mathbb{Y}$ – множество всех разбиений (или, что то же самое, диаграмм Юнга); если $\lambda \in \mathbb{Y}$, то в записи $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots$) перечисляются длины строк диаграммы Юнга λ .

$\ell(\lambda)$ – длина разбиения $\lambda \in \mathbb{Y}$, т.е. количество ненулевых строк соответствующей диаграммы Юнга.

$|\lambda|$ – количество клеток диаграммы Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}$.

F – любое из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$.

E или $E(F)$ – гильбертово пространство, введенное в I.I.I.

$\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$, ρ_λ, $\rho_{\lambda,\mu}$, $\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$ – ручные представления, введенные в I.2.I.

e_{ij} – стандартные матричные единицы.

Глава I. РУЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $SO(\infty)$, $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$

§ I.I. Абстрактные свойства ручных представлений и полугрупповой метод

Основные результаты параграфа – теоремы I.I.6 и I.I.I0. Теорема I.I.6 показывает, что ручные представления индуктивных пределов $SO(\infty)$, $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$ – это фактически то же самое, что непрерывные унитарные представления "полных" групп $\overline{O}(\infty)$, $\overline{U}(\infty)$, $\overline{Sp}(\infty)$. Теорема I.I.I0 сопоставляет произвольному ручному представлению T последовательность $\{\mathcal{T}_n\}$ представлений конечномерных полугрупп $\Gamma(n)$ двойных классов. Эти результаты будут обобщены в § 3.I.

I.I.I. Напомню, что F всегда обозначает $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. Пусть $E = E(F)$ – гильбертово пространство над F с отмеченным ортонормированным базисом $e_1, e_2, \ldots$. Через $\overline{K}$ (или, подробнее, $\overline{O}(\infty)$, $\overline{U}(\infty)$, $\overline{Sp}(\infty)$) будет обозначаться группа всех F – линейных унитарных операторов в E . Это топологическая группа относительно слабой операторной топологии, которая в данном случае совпадает с сильной операторной топологией.

Через K (или, подробнее, $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$) будет обозначаться подгруппа в $\overline{K}$, состоящая из тех операторов, которые фиксируют базисные векторы с достаточно большими номерами.

Через $K(n)$ (или, подробнее, $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$) будет обозначаться подгруппа в K , фиксирующая $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$.

Группа K есть объединение своих подгрупп $K(n)$ и наделяется топологией индуктивного предела.

В случае $F=\mathbb{R}$ в качестве K наряду с $O(\infty)$, если не оговорено противное, будет рассматриваться ее связная компонента единицы $SO(\infty)$ – объединение групп $SO(n)$.

Для $m=0,1,\ldots$ через K_m (или, подробнее, $SO_m(\infty)$, $O_m(\infty)$ и т.д.) будет обозначаться подгруппа в K, фиксирующая $e_1,\ldots$ $\ldots,e_m$. Подгруппы K_m убывают с ростом m, и все они изоморфны исходной группе K.

Элементы групп $\overline{K}$ и K можно записывать в виде матриц над F формата $\infty\times\infty$. Ясно, что K_m состоит из всех матриц из K вида $\begin{bmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$.

Через θ_m обозначается отображение, сопоставляющее матрице достаточно большого формата ее левый верхний угол формата $m\times m$.

I.I.2. Для $m=1,2,\ldots$ пусть $\Gamma(m)$ (или, подробнее, $\Gamma(m,F)$) обозначает множество всех сжатий пространства F^m, т.е. множество матриц формата $m\times m$ с нормой $\leqslant 1$.

ТЕОРЕМА. (В I), 2), 3) предполагается, что $K\neq SO(\infty)$)

I) $\theta_m(K(n))=\Gamma(m)$, если $n\geqslant 2m$. В частности, $\theta_m(K)=\Gamma(m)$.

2) Пусть $u,\tilde{u}\in K(n)$, где $n\geqslant 2m$. Тогда

$$\theta_m(u)=\theta_m(\tilde{u}) \Longleftrightarrow \exists\, v,\, w\in K_m\cap K(n):\ u=v\tilde{u}w.$$

В частности, если $u,\tilde{u}\in K$, то

$$\theta_m(u)=\theta_m(\tilde{u}) \Longleftrightarrow \exists\, v,\, w\in K_m:\ u=v\tilde{u}w.$$

3) При $n\geqslant 2m$ отображение θ_m из $K(n)$ на $\Gamma(m)$ открыто.

Тем самым, отображение θ_m из K на $\Gamma(m)$ также открыто.

4) Все эти утверждения остаются в силе для $K=SO(\infty)$, если вместо $n\geqslant 2m$ требовать $n\geqslant 2m+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Как известно, всякое сжатие $a\in\Gamma(m)$ можно достроить до унитарной матрицы формата $2m\times 2m$:

$$a\mapsto\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -(1-aa^*)^{1/2} \\ (1-a^*a)^{1/2} & a^*\end{bmatrix}. \qquad (\mathrm{I})$$

2) Импликация "$\Longleftarrow$" очевидна; докажем "$\Longrightarrow$". Напишем

$$u=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}, \quad \tilde u=\begin{bmatrix} \tilde a & \tilde b \\ \tilde c & \tilde d\end{bmatrix}.$$

По условию $a=\tilde a$. Но тогда $c^*c=\tilde c^*\tilde c$. Значит, умножив $\tilde u$ слева на подходящее $v\in K_m\cap K_m(n)$, можно добиться равенства $c=\tilde c$. Напишем теперь $u=[xy]$, где x имеет формат $n\times m$, y имеет формат $n\times(n-m)$. Аналогично, можно написать $\tilde u=[x,\tilde y]$. Но тогда $yy^*=\tilde y\tilde y^*$. Значит, $\tilde u$ можно преобразовать к u умножением справа на подходящий $w\in K_m\cap K(n)$.

3) Допустим, что θ_m не является открытым отображением в некоторой точке $u\in K(n)$. Тогда найдутся ее окрестность X и последовательность точек $a_1,a_2,\dots$, лежащих в $\Gamma(m)\setminus\theta_m(X)$ и сходящихся к точке $a=\theta_m(u)$. В силу I) каждая точка a_i обладает прообразом $u_i\in K(n)$. Выберем из $\{u_i\}$ подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\tilde u$. Тогда $\theta_m(u)=$ $=\theta_m(\tilde u)$. Выберем v,w как в 2). Заменив $\{u_i\}$ на $\{vu_iw\}$, мы придем тогда к противоречию с непрерывностью отображения θ_m.

4) В случае $K=SO(\infty)$ эти три рассуждения модифицируются следующим образом. В первом рассуждении матрица $a\in\Gamma(m,\mathbb{R})$ достраивается сначала до матрицы $u\in O(2m)$, а затем к ней дописывается диагоанльный элемент $\det u$. Во втором рассуждении удобно считать, что u получена из a только что описанным способом. После этого берем прежние ортогональные матрицы v, w и замечаем, что $\det v=\det w$, ибо $\det u=\det\tilde{u}=1$. Ввиду специального выбора матрицы u, мы можем умножить последнюю строку в v и последний столбец в w на $\det\cdot v=\det w$, что позволяет добиться равенства $\det v=\det w=1$. Третье рассуждение остается без изменения.

I.I.3. СЛЕДСТВИЕ. Отображение $f\longmapsto f\circ\theta_m$ позволяет отождествить пространство непрерывных функций на $\Gamma(m)$ с пространством непрерывным функций на K, двустороннее инвариантных относительно K_m. Это утверждение остается в силе после замены бесконечномерных групп K и K_m конечномерными группами $K(n)$ и $K_m\cap K(n)$ соответственно, где n – такое, как и в теореме I.I.2.

I.I.4. СЛЕДСТВИЕ. K является плотной подгруппой в $\overline{K}$.

Действительно, элементы $u,\tilde{u}$ группы $\overline{K}$ близки в топологии группы $\overline{K}$, если для достаточно большого m элементы $\theta_m(u)$ и $\theta_m(\tilde{u})$ близки. Но, как следует из теоремы I.I.2, для любых $u\in\overline{K}$, $m\in\{1,2,\ldots\}$ найдется такой $\tilde{u}\in K$, что $\theta_m(u)=\theta_m(\tilde{u})$.

I.I.5. Условимся, что унитарные представления группы K всегда предполагаются непрерывными в ее топологии индуктивного предела (это означает, что сужение представления на $K(n)$ должно быть непрерывно при всех n).

Если T - унитарное представление группы K, то через $H_n(T)$ будет всегда обозначаться подпространство K_n-инвариантных векторов в пространстве $H(T)$ представления T. С ростом n подгруппа K_n уменьшается и $H_n(T)$ расширяется; положим $H_\infty(T) = \bigcup H_n(T)$. Заметим, что $H_\infty(T)$ инвариантно относительно K, ибо $K(n)$, будучи перестановочно с K_n, сохраняет $H_n(T)$. Стало быть, замыкание $\overline{H_\infty(T)}$ есть инвариантное подпространство в $H(T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что T - ручное представление группы K, если $\overline{H_\infty(T)} = H(T)$.

Ясно, что для неприводимых T имеет место альтернатива: или T - ручное, или $H_\infty(T)=\{0\}$. Класс ручных представлений, очевидно, устойчив относительно взятия прямой суммы, тензорного произведения и перехода к сопряженному представлению.

I.I.6. ТЕОРЕМА. Унитарное представление T группы K является ручным тогда и только тогда, когда оно допускает непрерывное продолжение на топологическую группу $\overline{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Допустим, что T продолжается на $\overline{K}$. Выберем произвольно $\xi \in H(T)$. При достаточно большом n подгруппа K_n попадает внутрь сколь угодно малой окрестности единицы группы $\overline{K}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что K_n-орбита вектора ξ будет целиком лежать в его ε-окрестности. Как хорошо известно, ([59] ,с.434), в произвольном замкнутом выпуклом подмножестве гильбертова пространства имеется ровно один вектор с минимальной нормой. Пусть η - такой вектор для замкнутой выпуклой оболочки K_n-орбиты вектора ξ. Тогда η инвариантен относительно K_n, т.е. лежит в $H_n(T)$. С другой стороны, $\|\eta - \xi\| \leq \varepsilon$. Это показывает, что $H_\infty(T)$ плотно в $H(T)$.

б) Обратно, пусть T – ручное представление. В силу следствия I.I.3, всякий его матричный элемент, отвечающий паре векторов из $H_n(T)$, будучи непрерывной функцией на K, двустороннее инвариантной относительно K_n, допускает непрерывное продолжение на $\overline{K}$. Поскольку $H_\infty(T)$ плотно в $H(T)$, это верно для всех матричных элементов, т.е. T допускает непрерывное продолжение на $\overline{K}$.

I.I.7. Теорема I.I.6 показывает, что ручные представления группы K и унитарные представления топологической группы $\overline{K}$ – это, по существу, одно и то же. Таким образом, вместо $\overline{K}$ можно работать с индуктивным пределом K, что значительно удобнее. Из теоремы I.I.6 следует также, что $O(\infty)$ и $SO(\infty)$ имеют одни и те же ручные представления.

I.I.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Любопытно, что из теоремы I.I.6 можно вообще изгнать представления. Фактически дело сводится к тому факту, что слабая операторная топология на K является сильнейшей среди всех групповых топологий, более слабых, чем топология индуктивного предела и вполне несвязная топология, определяемая системой окрестностей единицы $\{K_n\}$.

I.I.9. Пусть T – произвольное ручное представление группы K. Назовем его кондуктором и обозначим через $\mathrm{cond}\, T$ наименьшее число n такое, что $H_n(T) \neq \{0\}$. Будем обозначать через P_n ортопроектор на $H_n(T)$. Пусть $n \geqslant \mathrm{cond}\, T$. Оператор $P_n T(u) \mid H_n(T)$, где $u \in K$, зависит только от двойного класса $K_n u K_n$ и, значит (теорема I.I.2), только от элемента $\gamma = \theta_n(u)$ из $\Gamma(n)$. Обозначим этот оператор через $\mathcal{T}_n(\gamma)$. Отображение $\mathcal{T}_n$ переводит элементы $\gamma \in \Gamma(n)$ в сжатия пространства $H_n(T)$. Оно сохраняет инволюцию и единицу, а также, как следует снова из теоремы I.I.2, непрерывно относительно обычной топологии в $\Gamma(n)$ и сильной операторной топологии.

I.I.IO. Вспомним теперь, что $\Gamma(n)$ суть полугруппы относительно обычного умножения матриц.

ТЕОРЕМА. Если T – ручное представление группы K и $n \geq \mathrm{cond}\, T$, то отображение $\mathcal{T}_n$ мультипликативно и, тем самым, задает представление инволютивной полугруппы $\Gamma(n)$ сжатиями гильбертова пространства $H_n(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $r \in \{1, 2, \ldots\}$ и $\varepsilon > 0$ зафиксированы, а целое $s \to \infty$, то мера множества тех $w \in K(s)$, для которых $\| \theta_r(w) \| \leq \varepsilon$, стремится к 1 (имеется в виду нормированная мера Хаара компактной группы $K(s)$). В самом деле, достаточно проверить, что для фиксированных $i, j \in \{1, 2, \ldots\}$ и $\delta > 0$ мера множества тех матриц $w \in K(s)$, для которых $| w_{ij} | \leq \delta$, стремится к 1 при $s \to \infty$. Положим $d = 1, 2, 4$ для $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и заметим, что i-я строка матрицы $w \in K(s)$ пробегает единичную сферу в $\mathbb{R}^{sd}$, причем мере Хаара отвечает нормированная инвариантная мера на сфере. Как хорошо известно, образ этой меры относительно проекции на d-мерное подпространство стремится к мере Дирака в нуле с ростом размерности сферы (см. [27]), откуда следует наше утверждение.

б) Зафиксируем теперь произвольные $x, y \in \Gamma(n)$ и их прообразы $u, v \in K$. Тогда

$$\mathcal{T}_n(x)\, \mathcal{T}_n(y) = P_n\, T(u)\, P_n\, T(v) \mid H_n(T). \tag{I}$$

Пусть P_{nl}, где $l > n$, обозначает ортопроектор в $H(T)$ на подпространство всех векторов, инвариантных относительно $K_n \cap K(l)$.

Ясно, что $\rho_{n\ell}$ сильно сходится к ρ_n при $\ell \to \infty$. С другой стороны, $\rho_{n\ell}$ совпадает с оператором усреднения по компактной подгруппе $K_n \cap K(\ell)$. Это позволяет переписать (I) так:

$$\mathcal{T}_n(x)\,\mathcal{T}_n(y) = s\text{-}\lim_{\ell\to\infty} \int\limits_{K_n \cap K(\ell)} \mathcal{T}_n(\theta_n(uwv))\,dw, \tag{2}$$

где $s\text{-}\lim$ означает предел в сильной операторной топологии.

в) Поскольку $\mathcal{T}_n(\cdot)$ является сжатием, которое непрерывно зависит от своего аргумента в сильной топологии, достаточно проверить, что для больших ℓ и подавляющей массы элементов w элемент $\theta_n(uwv)$ близок к xy, откуда будет следовать искомое равенство $\mathcal{T}_n(x)\mathcal{T}_n(y) = \mathcal{T}_n(xy)$. Это утверждение выводится из а) следующим образом. Зафиксируем m настолько большое, что $u, v \in K(m)$, и будем считать $\ell > m$. Каждый из элементов u, v, w можно изобразить матрицей формата $\ell \times \ell$, разбитой на 9 блоков в соответствии с разбиением числа ℓ в сумму $n + (m-n) + (\ell-m)$. Очевидно,

$$u_{11} = x, \quad v_{11} = y, \quad w_{11} = 1, \quad w_{1i} = 0, \quad w_{j1} = 0, \qquad (i,j = 2,3)$$
$$\theta_n(uwv) = xy + u_{12}\,w_{22}\,v_{21}. \tag{3}$$

Положим $r = m-n$, $s = \ell-n$ и применим результат а) к группам $K(s)$, отождествляя их с $K_n \cap K(\ell)$. Мы получим тогда, что при $\ell \to \infty$ норма блока w_{22}, а значит, и добавки $u_{12}w_{22}v_{21}$

в (3) является ε-малой величиной для подавляющей массы элементов w. Это завершает доказательство.

I.I.II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что представления $\mathcal{T}_n$ полугруппы $\Gamma(n)$, определенные согласно I.I.I0 для $n \geq \operatorname{cond} T$, ассоциированны с данным ручным представлением T группы K.

§ I.2. Конструкция ручных представлений

В этом параграфе описаны неприводимые представления групп $O(\infty)$, $U(\infty)$ и $Sp(\infty)$, реализующиеся в тензорах. Основные результаты - теорема I.2.2 (о неприводимости и попарной неэквивалентности) и теорема I.2.6 (о реализации построенных представлений в качестве индуктивных пределов неприводимых представлений конечномерных классических групп). Теорема I.2.2 принадлежит А.А.Кириллову [23]. Для нее дается новое доказательство, основанное на идее голоморфного расширения. Еще один подход к этой теореме указан в замечании 2.3.I5.

I.2.I. Если не оговорено противное, через K обозначается любая из групп $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$. Изготовим из $E(F)$ (см. I.I.I) комплексное гильбертово пространство $\mathcal{E}$ следующим образом: $\mathcal{E} = E(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ или $\mathcal{E} = E(\mathbb{C})$ или $\mathcal{E}$ получается из $E(\mathbb{H})$ редукцией $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ тела скаляров. Обозначим через $\rho^{\mathbb{R}}$, ρ или $\rho^{\mathbb{H}}$ естественное унитарное представление группы K в пространстве $\mathcal{E}$ и назовем его тождественным представлением.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{E}^{\otimes k}$, где $k \in \{1, 2, \ldots\}$, действует представление симметрической группы $S(k)$ перестановками сомножителей. Это действие перестановочно с k-й тензорной степенью тождественного представления группы K.

Условимся обозначать через $\mathbb{Y}$ множество всех диаграмм Юнга (т.е. разбиений); через $|\lambda|$, где $\lambda\in\mathbb{Y}$, количество клеток диаграммы λ; через π_λ – соответствующее неприводимое представление группы $S(|\lambda|)$.

Разлагая пространство $\mathcal{E}^{\otimes k}$ по действию группы $S(k)$, мы получим набор унитарных представлений группы K, параметризуемых всеми λ с $|\lambda|=k$. Точнее, представление группы K, отвечающее диаграмме λ, реализуется в гильбертовом пространстве

$$\mathrm{Hom}_{S(k)}\left(H(\pi),\ \mathcal{E}^{\otimes k}\right),\quad k=|\lambda|\in\{1,2,\ldots\}. \tag{I}$$

Условимся обозначать это представление через $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$, ρ_λ или $\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$ соответственно для $F=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$. Оно входит в разложение пространства $\mathcal{E}^{\otimes k}$ с кратностью $\dim\pi_\lambda$.

Если $F=\mathbb{R},\mathbb{H}$, то существует антилинейная изометрия $\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$, перестановочная с тождественным представлением, откуда видно, что $\bar\rho_\lambda^{\mathbb{R}}\sim\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ и $\bar\rho_\lambda^{\mathbb{H}}\sim\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$. В случае $F=\mathbb{C}$ это не так, поэтому введем еще для $K=U(\infty)$ антитождественное представление представление $\bar\rho$ и положим $\rho_{\lambda,\mu}=\rho_\lambda\otimes\bar\rho_\mu$, где $\lambda,\mu\in\mathbb{Y}$. Ясно, что $\bar\rho_{\lambda,\mu}\sim\rho_{\mu,\lambda}$.

Условимся, что нулевой (пустой) диаграмме отвечает единичное представление.

Все эти представления $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$, $\rho_{\lambda,\mu}$, $\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$, очевидно, являются ручными.

I.2.2. ТЕОРЕМА. Представления $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ группы $O(\infty)$, представления $\rho_{\lambda,\mu}$ группы $U(\infty)$ и представления $\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$ группы $Sp(\infty)$, где λ,μ пробегают $\mathbb{Y}$, неприводимы и попарно не эквивалентны.

Этот результат впервые был сформулирован А.А.Кирилловым [22]. В настоящее время для него имеется три принципиально различных доказательства. Первое (которое, судя по всему, имел в виду А.А. Кириллов) основано на соображениях теории инвариантов; его набросок дан в I.2.3. Два других доказательства были предложены автором [42]. Одно из них изложено ниже: см. I.2.5. По поводу другого см. замечание 2.3.I5.

I.2.3. ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ I.2.2, ОСНОВАННОГО НА ТЕОРИИ ИНВАРИАНТОВ. С помощью классической теории инвариантов [5] находится общий вид K-инвариантного полилинейного отображения $\mathcal{E}\times\ldots\times\mathcal{E}\to\mathbb{C}$ (в случае $F=\mathbb{C}$ надо рассматривать, более общо, частично линейные, а частично антилинейные отображения). Затем выясняется, какие отображения допускают продолжение на $\mathcal{E}^{\otimes k}\times\mathcal{E}^{\otimes\ell}$, где $k+\ell$ - общее количество сомножителей. Именно в этом месте возникает расхождение с конечным случаем: пусть, например, $K=O(\infty)$ и $k=2$; тогда отображение свертки $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{C}$, задаваемое скалярным произведением в $E(\mathbb{R})$, нельзя продолжить до непрерывного функционала на $\mathcal{E}^{\otimes 2}$. Отсюда сразу видно, например, что представление $(\rho^{\mathbb{R}})^{\otimes 2}$, в отличие от своего конечномерного аналога, не содержит единичного представления.

I.2.4. Я напомню сейчас простые факты об индуктивных пределах представлений, которые будут использованы в следующем разделе, а затем в ряде других мест диссертации.

Пусть $\mathcal{G}$ - индуктивный предел (объединение) возрастающей цепочки групп $\mathcal{G}(n)$. Допустим, что для каждого достаточно большого номера n задано унитарное представление T_n группы $\mathcal{G}(n)$, а также изометрическое вложение $H(T_n)\to H(T_{n+1})$, коммутирующее с действием группы $\mathcal{G}(n)$. По этим данным очевидным образом определяется унитарное представление $T = \lim ind\, T_n$ группы $\mathcal{G}$. Оно неприводимо, если T_n неприводимы (см., например, [25]).Для эквивалентности двух представлений $T = \lim ind\, T_n$ и $S = \lim ind\, S_n$, где T_n и S_n неприводимы, необходимо, чтобы T_n и S_n были эквивалентны друг другу для достаточно больших n. В самом деле, пусть A – ненулевой сплетающий оператор между T и S; P_n и Q_n – ортопроекторы на $H(T_n)$ и $H(S_n)$ соответственно. Тогда $Q_n A P_n$ отличен от 0 для достаточно больших n и сплетает T_n с S_n.

I.2.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.2.2, ОСНОВАННОЕ НА ИДЕЕ ГОЛОМОРФНОГО РАСШИРЕНИЯ. Вначале разбирается случай $F = \mathbb{R}$, а затем – остальные два случая.

а) Представление $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ группы $O(\infty)$ совпадает с сужением на $O(\infty)$ представления ρ_λ группы $U(\infty)$. Поскольку ρ_λ является индуктивным пределом неприводимых полиномиальных представлений групп $U(n)$ со старшими весами $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, оно неприводимо и, более того, ρ_λ не эквивалентно ρ_μ при $\lambda \neq \mu$ (см. (I.2.4). Утверждение теоремы для $K = O(\infty)$ допускает теперь следующую переформулировку: пусть S – унитарное представление группы $U(\infty)$, разлагающееся по представлениям вида ρ_λ, где $\lambda \in \mathbb{Y}$, и пусть T – его сужение на $O(\infty)$; тогда T и S имеют общий коммутант. В самом деле, полагая $S = \rho_\lambda$, мы получим, что $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ неприводимо, а полагая $S = \rho_\lambda \oplus \rho_\mu$, где $\lambda \neq \mu$, мы получим, что $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ и $\rho_\mu^{\mathbb{R}}$ не эквивалентны.

б) Пусть $\Gamma(\mathbb{R})$ и $\Gamma(\mathbb{C})$ – полугруппы всех сжатий в $E(\mathbb{R})$ и $E(\mathbb{C})$ соответственно. Наделим их слабой операторной топологией. Группа $O(\infty)$ плотна в $\Gamma(\mathbb{R})$, а группа $U(\infty)$ плотна в $\Gamma(\mathbb{C})$: этот факт хорошо известен и может быть выведен из теоремы I.I.2, подобно следствию I.I.4. Далее, представление S группы $U(\infty)$ продолжается до представления $\mathcal{S}$ полугруппы $\Gamma(\mathbb{C})$, т.е. до ее непрерывного сохраняющего инволюцию морфизма в полугруппу сжатий пространства $H(S)$: достаточно проверить это утверждение для $S=\rho$, когда оно очевидно. Аналогично, T продолжается до представления $\mathcal{T}$ полугруппы $\Gamma(\mathbb{R})$. Теперь мы можем заменить пару (T,S) парой $(\mathcal{T},\mathcal{S})$.

в) Полугруппа $\Gamma(\mathbb{C})$ есть попросту единичный шар в банаховом пространстве $\mathrm{End}\, E(\mathbb{C})$ ограниченных операторов в $E(\mathbb{C})$. Скажем, что функция, определенная и непрерывная на $\Gamma(\mathbb{C})$, голоморфна, если она голоморфна во внутренности единичного шара произвольного конечномерного подпространства банахова пространства $\mathrm{End}\, E(\mathbb{C})$. Заметим теперь, что матричные элементы представления $\mathcal{S}$ суть голоморфные функции в указанном смысле: поскольку равномерный предел голоморфных функций есть снова голоморфная функция, это утверждение редуцируется к случаю $S=\rho$, а тогда оно очевидно. С другой стороны, $\Gamma(\mathbb{R})$ является, очевидно, множеством единственности для голоморфных функций на $\Gamma(\mathbb{C})$.

г) Пусть теперь X - произвольное подпространство в $H(\mathcal{T})= H(\mathcal{S})$, инвариантное относительно $\Gamma(\mathbb{R})$, и $X^{\perp}$ - его ортогональное дополнение. Если $\xi\in X$, $\eta\in X^{\perp}$, то матричный элемент $(\mathcal{S}(\cdot)\xi,\eta)$ является голоморфной функцией, равной нулю на $\Gamma(\mathbb{R})$ и, значит, равен нулю тождественно. Стало быть, X инвариантно относительно $\Gamma(\mathbb{C})$. Это рассуждение показывает, что $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ (а значит, и T и S) имеют общий коммутант.

д) В случае $K=U(\infty)$ рассуждаем аналогично, погружая $U(\infty)$ в $U(\infty)\times U(\infty)$ посредством отображения $u\mapsto\{u,\bar{u}\}$. Роль представлений ρ_λ исполняют теперь внешние тензорные произведения $\rho_\lambda \times \rho_\mu$ (сужение такого представления на $U(\infty)$ есть $\rho_{\lambda,\mu}$). А для группы $K = Sp(\infty)$ используется ее вложение в группу $U(2\infty)$: так обозначается индуктивный предел групп $U(2n)$, который есть не более, чем другая реализация группы $U(\infty)$.

I.2.6. ТЕОРЕМА. Каждое из неприводимых представлений $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$, $\rho_{\lambda,\mu}$, $\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$ группы K может быть реализовано в виде индуктивного предела неприводимых представлений групп $K(n)$.

Следует отметить, что последовательность допредельных представлений всегда определена однозначно, с точностью до конечного числа первых членов, см. I.2.4. Явный вид допредельных представлений, которые будут обозначаться соответственно через ${}^n\rho^{\mathbb{R}}_\lambda$, ${}^n\rho_{\lambda,\mu}$, ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$, указывается по ходу доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Разберем вначале случай представлений $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ группы $O(\infty)$. Явный вид пространства $H(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$ указан в I.2.I(I) По аналогии с этой формулой, рассмотрим пространство

$$\mathrm{Hom}_{S(k)}\left(H(\pi_\lambda),\ (\mathbb{C}^n)_0^{\otimes k}\right), \quad k = |\lambda|, \tag{I}$$

где $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ обозначает подпространство бесследовых тензоров в $(\mathbb{C}^n)_0^{\otimes k}$. Как показано у Г.Вейля [5] ,с.2II-2I5, пространство (I) нетривиально для всех достаточно больших n (а именно, если n больше или равно сумме первых двух столбцов диаграммы λ), и в нем реализуется неприводимое представление группы $O(n)$. Условимся обозначать его через ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$. (Эта процедура доставляет все неприводимые представления групп $O(n)$ и одновременно - очень удобный способ их параметризации диаграммами Юнга.)

Отождествив $\mathbb{C}^n$ с подпространством $\mathbb{C}e_1 + \ldots + \mathbb{C}e_n$ в

$\mathcal{E} = E(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, мы получаем возможность интерпретировать $H({}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$ как подпространство в $H(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$. С ростом n это подпространство, очевидно, расширяется. Отсюда видно, что $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ содержит подпредставление, эквивалентное $\lim\,\mathrm{ind}\, {}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$. Оно совпадает с ним ввиду неприводимости представления $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$.

Последнее утверждение можно было бы проверить непосредственно, получив, тем самым, новый вывод теоремы I.2.2. Впрочем, он, по существу, не сильно отличается от ее первого доказательства, намеченного в I.2.3.

б) В случае $K = Sp(\infty)$ доказательство ровно такое же, и в качестве ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{H}}$ появляются представления групп $Sp(n)$ со старшими весами $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, см. [5], с.240. В случае $K = U(\infty)$ надо вместо $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ взять пространство $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k} \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^{\otimes \ell}$ смешанных тензоров; представление ${}^n\rho_{\lambda,\mu}$ будет задаваться старшим весом

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots, -\mu_2, -\mu_1).$$

§ I.3. Классификация ручных представлений

Этот параграф состоит из двух теорем: I.3.I и I.3.5. Вместе они дают полное описание ручных представлений групп $SO(\infty)$, $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$ (или, что сводится к тому же, всех унитарных представлений топологических групп $\overline{O}(\infty), \overline{U}(\infty), \overline{Sp}(\infty)$).

I.3.I. Снова K – любая из групп $O(\infty), U(\infty), Sp(\infty)$.

ТЕОРЕМА. Представлениями группы K, построенными в § I.2, исчерпываются все ее неприводимые ручные представления.

Этот результат был анонсирован в эквивалентной формулировке А.А.Кирилловым [23] . Ниже излагается доказательство автора [42], основанное на полугрупповом методе, т.е. на теореме I.I.I0. Иное доказательство содержится в статье автора [49] .

I.3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.3.I. ДЛЯ $K=O(\infty)$. Пусть T – неприводимое ручное представление группы K ; надо доказать, что $T\sim\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{Y}$.

а) Пусть $n\geqslant \mathrm{cond}\,T$ и $\mathcal{T}_n$ – представление полугруппы $\Gamma(n)=\Gamma(n,\mathbb{R})$, ассоциированное с T , см. I.I.II. Тогда $H_n(T)$ конечномерно и $\mathcal{T}_n$ однозначно продолжается до неприводимого представления группы $GL(n,\mathbb{R})$ в $H_n(T)$.

В самом деле, рассмотрим в $\Gamma(n)$ однопараметрическую подполугруппу $\{c1 : 0<c\leqslant 1\}$. Из неприводимости T и определения $\mathcal{T}_n$ следует, что $\mathcal{T}_n$ неприводимо (поскольку образ полугруппы $\Gamma(n)$ относительно $\mathcal{T}_n$ устойчив относительно операции сопряжения, это понятие имеет ровно тот же смысл, что в контексте унитарных представлений групп). По лемме Шура, операторы $\mathcal{T}_n(c1)$ скалярны. Из непрерывности операторной полугруппы $c\mapsto\mathcal{T}_n(c1)$ в единице следует, что $\mathcal{T}_n(c1)\neq 0$. Положим теперь

$$\mathcal{T}_n(g)=\mathcal{T}_n(c1)^{-1}\mathcal{T}_n(cg)\ ,\quad g\in GL(n,\mathbb{R})\ ,\ \|cg\|\leqslant 1.$$

Очевидно, что это определение не зависит от произвола в выборе константы c и задает сильно непрерывное неприводимое представление группы $GL(n,\mathbb{R})$ ограниченными операторами гильбертова пространства $H_n(T)$. По известной общей теореме (см., например, [78, 79, I27]), ему отвечает неприводимый $(O(n),\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ – модуль Хариш-Чандры, реализующийся в подпространстве $H_n^0(T)$, состоящем из $O(n)$-конечных векторов.

Перейдя от $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ к ее комплексификации $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, а затем к компактной вещественной форме $\mathfrak{u}(n)$, мы превратим $H_n^0(T)$ в $\mathfrak{u}(n)$-модуль. Заметим теперь, что $\mathcal{T}_n$ переводит операцию транспонирования в сопряжение операторов. Отсюда следует, что операторы в $H_n^0(T)$, отвечающие элементам алгебры $\mathfrak{u}(n)$, кососимметричны относительно предгильбертова скалярного произведения в $H_n^0(T)$. Таким образом, $H_n^0(T)$ является унитаризуемым $\mathfrak{u}(n)$-модулем.

Рассмотрим квадратичный элемент Казимира алгебры $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Его можно записать в виде

$$\Delta = \sum_k a_k^2 - \sum_\ell b_\ell^2 ,$$

где $\{a_k\}$ – подходящий базис подалгебры $\mathfrak{o}(n)\subset\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\{b_\ell\}$ – базис дополнительного подпространства, состоящего из симметрических матриц. Поскольку $H_n^0(T)$ является неприводимым модулем Хариш-Чандры, Δ действует в нем скалярно и, в частности, может интерпретироваться как в существенном самосопряженный оператор в $H_n(T)$ с областью определения $H_n^0(T)$.

С другой стороны, Δ является суммой квадратов элементов базиса $\{a_k, ib_\ell\}$ алгебры $\mathfrak{u}(n)$. По критерию Нелсона [99], действие алгебры $\mathfrak{u}(n)$ в $H_n^0(T)$ порождает тогда унитарное представление группы $U(n)^\sim$ (так будет обозначаться универсальное накрытие над $U(n)$) в пространстве $H_n(T)$. Это представление состоит не более, чем из двух неприводимых компонент, ибо аналогичным свойством обладает $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$-модуль $H_n^0(T)$. Поскольку группа $U(n)^\sim$ компактна по модулю своего центра, ее неприводимые унитарные представления конечномерны. Значит $H_n(T)$

конечномерно, что и требовалось доказать.

б) Покажем, что сужение построенного неприводимого конечномерного представления $\mathcal{T}_n$ группы $GL(n,\mathbb{R})$ на подгруппу $D(n)$ диагональных матриц разлагается по ее характерам вида

$$D(n) \ni d = diag(d_1,\ldots,d_n) \mapsto d_1^{a_1}\ldots d_n^{a_n}, \quad a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (1)$$

В самом деле, операторы $\mathcal{T}_n(d)$ образуют коммутативное семейство самосопряженных операторов и поэтому допускают одновременную диагонализацию. Соответствующие характеры (или, говоря иначе, веса) имеют вид

$$d \mapsto |d_1|^{s_1}(sgn\, d_1)^{\varepsilon_1}\ldots|d_n|^{s_n}(sgn\, d_n)^{\varepsilon_n}, \quad s_k \in \mathbb{R}, \; \varepsilon_k \in \{0,1\}.$$

Остается доказать, что $s_k \in \mathbb{Z}_+$ и $\varepsilon \equiv s_k \mod 2$, $k=1,\ldots,n$.

Непрерывность представления $\mathcal{T}_n$ в нуле полугруппы $\Gamma(n)$ показывает, что $s_k \geqslant 0$, причем $s_k > 0$, если $\varepsilon_k = 1$. Далее, зафиксируем произвольный весовой вектор ξ в $H_n(T)$ и номер $k \in \{1,\ldots,n\}$. Рассмотрим вложение $O(3) \to O(\infty)$, определяемое отождествлением $\mathbb{R}^3$ с подпространством $\mathbb{R}e_k + \mathbb{R}e_{n+1} + \mathbb{R}e_{n+2}$ в $E(\mathbb{R})$. Сужение матричного элемента $(T(\cdot)\xi,\xi)$ на подгруппу $O(3)$ имеет тогда вид

$$u \mapsto |u_{11}|^{s}(sgn\, u_{11})^{\varepsilon}, \quad s = s_k, \quad \varepsilon = \varepsilon_k, \quad u \in O(3). \qquad (2)$$

Функция (2) положительно определена на $O(3)$ и двустронне инвариантна относительно $O(2)$. Поэтому коэффициенты ее разложения по зональным сферическим функциям на $O(3)/O(2)$, т.е. по многочленам Лежандра аргумента $t = u_{11} \in [-1, 1]$ должны быть неотрицательны.

Разложение функции $t \mapsto |t|^s$ по четным многочленам Лежандра $P_{2m}(t)$ приведено в [I], п.I0.20, формула (I0). Из нее видно, что коэффициент при $P_{2m}(t)$, с точностью до положительного множителя, равен $s(s-2)\ldots(s-2m+2)$, так что условие неотрицательности дает требуемое ограничение $s \in \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.

Разложение функции $t \mapsto |t|^s \operatorname{sgn} t$ приведено там же, формула (II). Из нее видно, что все произведения вида $(s-1)(s-3)\ldots$ $\ldots(s-2m+1)$ должны быть неотрицательны, откуда $s \in \{1, 3, 5, \ldots\}$.

в) Возьмем теперь произвольное $n \geq \operatorname{cond} T$. Результат пункта б) показывает, что неприводимое представление $\mathcal{T}_n$ группы $GL(n, \mathbb{R})$ реализуется в тензорах, т.е. совпадает с сужением на $GL(n, \mathbb{R})$ полиномиального представления группы $GL(n, \mathbb{C})$, отвечающего некоторому $\lambda \in \mathbb{Y}$. Стало быть, T имеет общий матричный элемент с $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ и, значит, эквивалентно ему.

I.3.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.3.I ДЛЯ $K = U(\infty)$.

а) То же самое рассуждение, что в пункте а) из I.3.2, показывает, что для любого $n \geq \operatorname{cond} T$ представление $\mathcal{T}_n$ полугруппы $\Gamma(n, \mathbb{C})$ порождает неприводимое конечномерное представление группы $GL(n, \mathbb{C})$ (роль группы $U(n)^\sim$ играет теперь группа $U(n)^\sim \times U(n)^\sim$).

б) Покажем, что сужение этого представления на подгруппу $\mathcal{D}(n)$ всех диагональных матриц в $GL(n, \mathbb{C})$ разлагается по ее весам вида

$$\mathcal{D}(n) \ni d \mapsto d_1^{a_1} \bar{d}_1^{b_1} \ldots d_n^{a_n} \bar{d}_n^{b_n}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{Z}_+. \tag{I}$$

Действуя так же, как в I.3.2, но заменив $O(3)$ на $U(2)$, приходим к следующей задаче.

Пусть u пробегает $U(2)$. Положим $u_{11}=r\exp i\theta$, где $0\leqslant r\leqslant 1$, $\theta\in\mathbb{R}$. Известно, что функция

$$u\mapsto r^{s}\exp(il\theta),\ u\in U(2),\ s\geqslant 0,\ l\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

положительно определена на $U(2)$, и требуется доказать, что $s-|l|\in\{0,2,4,6,\ldots\}$; тогда (2) можно будет переписать как

$$u\mapsto u_{11}^{a}\,\bar u_{11}^{b},\quad a=\frac{s+l}{2}\in\mathbb{Z}_+,\quad b=\frac{s-l}{2}\in\mathbb{Z}_+$$

Для проверки этого утверждения разложим функцию (2) по зональным сферическим функциям на $U(2)/U(1)$, которые в переменных (r,θ) имеют вид

$$f_{lm}(r,\theta)=(-1)^{m}\exp(il\theta)r^{|l|}P_m^{|l|,0}(1-2r^2), \tag{3}$$

где $P_m^{\alpha\beta}$ - многочлены Якоби. Дело сводится к разложению функции $r^{s-|l|}$ по многочленам $(-1)^m P_m^{|l|}(1-2r^2)$, $m=0,1,\ldots$. Это разложение приведено в [I], п.I0.20, формула (3), в которую надо подставить $\rho=\frac{1}{2}(s-|l|)$, $x=1-2r^2$. И снова требование неотрицательности коэффициентов разложения дает искомое ограничение $s-|l|\in\{0,2,4,\ldots\}$.

в) Доказательство завершается так же, как в I.3.2.

I.3.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.3.I ДЛЯ $K=Sp(\infty)$. Действуя по той же схеме, получаем неприводимое конечномерное представление $\mathcal{T}_n$ группы $GL(n,\mathbb{H})$, и надо доказать, что оно происходит из полиномиального представления ее комплексификации $GL(2n,\mathbb{C})$. Но из результата пункта б) в I.3.3 следует, что сужение представления $\mathcal{T}_n$ на подгруппу $\mathcal{D}(n)$ тех же самых диагональных комплексных матриц разлагается по весам вида I.3.3 (I), что доказывает наше утверждение.

I.3.5. ТЕОРЕМА. Произвольное ручное представление группы K разлагается в дискретную прямую сумму неприводимых представлений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Зафиксируем $m\in\{1,2,\ldots\}$. Предполагая $n\geqslant 2m$, обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех непрерывных положительно определенных функций φ на группе $K(n)$, двустороннее инвариантных относительно подгруппы $K_m\cap K(n)$ и таких, что $\varphi(1)\leqslant 1$. Благодаря следствию I.I.3, мы можем интерпретировать $\mathcal{P}_n$ как некоторое множество непрерывных функций на $\Gamma(m)$. Ясно, что $\mathcal{P}_n$ убывают с ростом n и что их пересечение $\mathcal{P}$ отождествляется с множеством всех непрерывных функций φ на K, двусторонне инвариантных относительно K_m и таких, что $\varphi(1)\leqslant 1$.

б) Сузим на $\Gamma(m)$ лебегову меру пространства матриц, построим по ней пространство $L^\infty(\Gamma(m))$ и снабдим его $*$-слабой топологией как пространство, сопряженное к $L^1(\Gamma(m))$. Тогда $\mathcal{P}$, как подмножество в $L^\infty(\Gamma(m))$, будет выпуклым компактом.

В самом деле, выпуклость очевидна. Далее, $\mathcal{P}_n$ является компактом как подмножество в $L^\infty(K(n))$. Поскольку проекция θ_m переводит меру Хаара группы $K(n)$ в меру, эквивалентную мере Лебега на $\Gamma(m)$, $\mathcal{P}_n$ является компактом в $L^\infty(\Gamma(m))$. А тогда это верно и для $\mathcal{P}$.

в) Пусть $ex\,\mathcal{P}$ – множество всех крайних точек выпуклого компакта $\mathcal{P}$, отличных от нулевой функции. Функции из $ex\,\mathcal{P}$ суть в точности матричные элементы $(T(\cdot)\xi,\xi)$, где T – неприводимое ручное представление группы K и ξ – единичный вектор из $H_m(T)$. В силу теоремы I.3.I, множество неприводимых ручных представлений группы K с нетривиальным пространством $H_m(\cdot)$ счетно; выпишем их последовательность $T_1, T_2, \ldots$. Множество $ex\,\mathcal{P}$ соответственно представится в виде объединения дизъюнктных подмножеств $Q_1, Q_2, \ldots$: функции из Q_i суть матричные элементы i-го представления, $i=1,2,\ldots$. Далее, каждое из Q_i является компактом, будучи непрерывным образом единичной сферы конечномерного пространства $H_m(T_i)$.

г) Пусть теперь S – произвольное ручное представление группы K. При его разложении можно, не ограничивая общности, считать, что оно обладает единичным циклическим вектором, лежащим в $H_m(S)$, где m – некоторое число. Будем считать, что в а)–в) взято именно это m. Тогда матричный элемент φ, отвечающий циклическому вектору, является элементом из $\mathcal{P}$, причем $\varphi(1)=1$. Поскольку $L^1(\Gamma(m))$ сепарабельно, пространство $L^\infty(\Gamma(m))$ метризуемо. Значит, по теореме Шоке (см. Фелпс[62]), φ представляется некоторой вероятностной мерой μ_φ на $ex\,\mathcal{P}$. Подмножества Q_i в $ex\,\mathcal{P}$, будучи компактными, являются борелевскими. Значит, меру μ_φ можно сузить на любое из них. Поэтому можно написать $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots$, где φ_i представляется мерой $\mu_\varphi \mid Q_i$. Наконец, для каждого i имеем $\varphi_i(\cdot)=\mathrm{tr}(T_i(\cdot)A_i)$, где $A_i=A_i^*\geqslant 0$ – некоторый оператор в $H_m(T)$. Приведя A_i к диагональному виду, мы представим φ_i в виде положительной комбинации конечного числа функций из Q_i. В итоге получается разложение функции φ в выпуклую комбинацию не более, чем счетного множества функций из $ex\,\mathcal{P}$, откуда следует, что S есть прямая сумма не более, чем счетного множества неприводимых представлений.

I.3.6. СЛЕДСТВИЕ. Топологические группы $\bar{K}=\bar{O}(\infty), \bar{U}(\infty), \bar{S}p(\infty)$ являются группами типа I.

По определению, это означает, что произвольное унитарное представление группы $\bar{K}$ порождает алгебру фон Неймана типа I. Данный результат вытекает из теоремы I.3.5 и теоремы I.I.6.

§ I.4. Голоморфные расширения ручных представлений

В начале параграфа обсуждаются свойства голоморфных унитарных представлений группы $U(\infty)$ (теоремы I.4.2, I.4.3 и I.4.4). Основным результатом является теорема I.4.5 о существовании голоморфного расширения у произвольного ручного представления.

I.4.I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ручное представление группы $U(\infty)$ назовем голоморфным, если оно является прямой суммой представлений вида ρ_λ, $\lambda\in\mathbb{Y}$.

Это определение оправдывается теоремой I.4.3.

I.4.2. ТЕОРЕМА. Ручное представление T группы $U(\infty)$ голоморфно тогда и только тогда, когда $T\,|\,U(\infty)$ разлагается по полиномиальным представлениям группы $U(n)$ для всех n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\rho_\lambda\,|\,U(n)$ разлагается по полиномиальным представлениям группы $U(n)$, откуда следует необходимость приведенного условия на T. Обратно, пусть T не голоморфно. Разложим его на неприводимые представления (теорема I.3.5). Все они имеют вид $\rho_{\lambda,\mu}$ (теорема I.3.I), причем найдется хотя бы одно такое $\rho_{\lambda,\mu}$, для которого $\mu \neq 0$ (иначе T было бы голоморфно). Но для достаточного большого n в разложение представления $\rho_{\lambda,\mu} | U(n)$ входит не полиномиальное представление $\rho_{\lambda,\mu}$ (теорема I.2.6). Это доказывает достаточность.

I.4.3. Рассмотрим полугруппу $\Gamma(n,\mathbb{C})$, которая есть попросту комплексный матричный шар (см. I.I.2). Обозначим через $\Gamma^0(n,\mathbb{C})$ внутренность этого шара. Представление $\mathcal{T}_n$ полугруппы $\Gamma(n,\mathbb{C})$ сжатиями гильбертова пространства назовем голоморфным, если выполнено любое из трех эквивалентных условий:

I) Операторная функция $\gamma \longmapsto \mathcal{T}_n(\gamma)$ голоморфна в $\Gamma^0(n,\mathbb{C})$.

2) Векторные функции $\gamma \longmapsto \mathcal{T}_n(\gamma)\xi$ голоморфны в $\Gamma^0(n,\mathbb{C})$ для любых $\xi \in H(\mathcal{T}_n)$.

3) Числовые функции $\gamma \longmapsto (\mathcal{T}_n(\gamma)\xi, \eta)$ голоморфны в $\Gamma^0(n,\mathbb{C})$ для любых $\xi, \eta \in H(\mathcal{T}_n)$.

По поводу эквивалентности этих свойств см., например, приложение 5 в [29].

ТЕОРЕМА. Ручное представление T группы $U(\infty)$ голоморфно тогда и только тогда, когда все ассоциированные с ним представления $\mathcal{T}_n$ полугрупп $\Gamma(n,\mathbb{C})$ голоморфны в смысле данного определения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Необходимость. Надо установить голоморфность всех $\mathcal{T}_n$, ассоциированных с $T = \rho_\lambda$. Поскольку ρ_λ содержится в $\rho^{\otimes k}$, где $k = |\lambda|$, можно заменить ρ_λ на $\rho^{\otimes k}$. Этот же случай легко сводится к случаю $T = \rho$, когда все очевидно.

б) Достаточность. Возьмем любое $n \geqslant \operatorname{cond} T$. Разложим представление $\mathcal{T}_n$, ассоциированное с T, по неприводимым представлениям подгруппы $U(n) \subset \Gamma(n, \mathbb{C})$. Среди них не могут оказаться не полиномиальные представления группы $U(n)$, ибо это нарушило бы голоморфность соответствующих матричных элементов в нуле полугруппы $\Gamma(n, \mathbb{C})$. Теперь остается сослаться на теорему I.4.2.

I.4.4. Условимся обозначать символом $(\cdot)'$ коммутант данного представления, а символом $(\cdot)''$ – бикоммутант.

ТЕОРЕМА. Пусть T – голоморфное представление группы $U(\infty)$, и T_n, где $n \geqslant \operatorname{cond} T$, обозначает естественное представление подгруппы $U(n)$ в $H_n(T)$. Тогда редуцированная алгебра фон Неймана $P_n T'' P_n \mid H_n(T)$ совпадает с T_n''.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, слова "редуцированная алгебра фон Неймана" корректны, ибо P_n лежит в алгебре фон Неймана T''. Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}$ и $\ell(\lambda)$ – количество ненулевых строк диаграммы λ. Заметим, что если $n < \ell(\lambda)$, то $H_n(\rho_\lambda) = \{0\}$, а если $n \geqslant \ell(\lambda)$, то в $H_n(\rho_\lambda)$ реализуется неприводимое полиномиальное представление ${}^n\rho_\lambda$ группы $U(n)$, по которому λ однозначно восстанавливается. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

I.4.5. Определим вложения

$$O(\infty) \to U(\infty), \quad U(\infty) \to U(\infty) \times U(\infty), \quad Sp(\infty) \to U(2\infty) \qquad (\mathrm{I})$$

следующим образом. Первая стрелка в (I) есть тождественное отображение; вторая стрелка переводит матрицу $u \in U(\infty)$ в пару $\{u; \bar{u}\}$; третья стрелка происходит из естественных вложений $Sp(n) \to U(2n)$, происходящих из отождествления $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$, а группа $U(2\infty)$ определяется соответственно как индуктивный предел групп $U(2n)$.

Как обычно, пусть K – любая из групп $O(\infty)$ (или $SO(\infty)$), $U(\infty), Sp(\infty)$, и пусть K^* обозначает соответствующую надгруппу, определенную в (I). Во всех трех случаях мы можем говорить о голоморфных представлениях группы K^* . В самом деле, во втором случае достаточно заменить в определении I.4.I представления ρ_λ представлениями вида $\rho_\lambda \times \rho_\mu$ группы $U(\infty)\times U(\infty)$ (я пишу здесь "$\times$" вместо "$\otimes$" , чтобы подчеркнуть, что речь идет о внешнем тензорном произведении). А в третьем случае надо воспользоваться очевидным изоморфизмом групп $U(2\infty)$ и $U(\infty)$.

ТЕОРЕМА. Произвольное ручное представление T группы K канонически расширяется до голоморфного представления группы K^* (обозначаемого в дальнейшем T^*). При этом имеем $T''=(T^*)''$, что эквивалентно равенству $T'=(T^*)'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является не более, чем переформулировкой теорем I.2.2, I.3.I и I.3.5 вместе взятых. В самом деле, возьмем для определенности случай $K=O(\infty)$. В силу указанных теорем, T есть прямая сумма представлений вида $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$. Расширяя каждое из них до соответствующего представления группы $K^*=U(\infty)$, мы получаем представление T^* , и совпадение бикоммутантов обеспечено теоремой I.2.2. Допустим, что в том же самом гильбертовом пространстве $H(T)=H(T^*)$ имеется еще какое-то голоморфное представление T_1^* группы $U(\infty)$ такое, что $T_1^*\,|\,O(\infty)=T$. Разложив его на неприводимые компоненты, мы получим тогда, что T_1^* должно быть эквивалентно T^* , т.е. должен существовать унитарный оператор в $H(T)$, сплетающий T^* и T_1^* . Этот оператор лежит в T' и, значит, в $(T^*)'=T'$, откуда следует, что $T_1^* = T^*$.

I.4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В ситуации раздела I.4.5 будем говорить, что T^* является голоморфным расширением представления T.

Ясно, что функтор голоморфного расширения осуществляет эквивалентность категории ручных представлений группы K и категории голоморфных представлений ее надгруппы K^*. Этот функтор будет играть чрезвычайно важную роль в дальнейшем.

I.4.7. Я приведу сейчас простой пример, иллюстрирующий изложенный формализм. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^\infty$, состоящее из всех последовательностей вещественных чисел, и снабдим его гауссовой продакт-мерой $\mu^{\otimes\infty}$, где μ обозначает вероятностную меру на $\mathbb{R}$ с плотностью $(2\pi)^{-1/2} exp(-t^2/2)$, где $t \in \mathbb{R}$.

Возьмем в качестве T естественное унитарное представление группы $O(\infty)$ в $L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu^{\otimes\infty})$:

$$[T(u)f](x) = f(xu), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^\infty). \tag{I}$$

Поскольку цилиндрические функции плотны в $L^2(\mathbb{R}^\infty)$, T является ручным представлением.

С другой стороны, рассмотрим так называемое пространство Сигала-Баргмана [66, II9, II4] $L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)$. Это гильбертово пространство, состоящее из целых функций на $\mathbb{C}$, квадратично интегрируемых по гауссовой мере $\nu^{\otimes n}$, где ν – мера на $\mathbb{C}$ с плотностью $\pi^{-1} exp(-|\tau|^2)$, $\tau \in \mathbb{C}$. Если $k > n$, то подпространство в $L^2_{hol}(\mathbb{C}^k)$, состоящее из функций, зависящих явно лишь от первых n координат, естественным образом отождествляется с $L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)$. Это позволяет определить индуктивный предел пространств $L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)$ в категории гильбертовых пространств.

Согласно Сигалу [114] результат можно интерпретировать как некоторое пространство целых функций на координатном гильбертовом пространстве ℓ^2 ; обозначим его через $L^2_{hol}(\ell^2)$. В нем очевидным образом (фактически, той же формулой (1)) задается унитарное представление S группы $U(\infty)$. Легко показать, что это представление группы $U(\infty)$ эквивалентно однократной прямой сумме представлений ρ_λ , где λ пробегает множество однострочечных диаграмм Юнга. В частности, оно голоморфно.

Теперь мы можем отождествить $L^2(\mathbb{R}^\infty)$ и $L^2_{hol}(\ell^2)$, сделав по каждой координате следующее известное интегральное преобразование (см., например, [3] , с.219, или [114])

$$\tilde{\varphi}(\tau)=\exp(-\tau^2/2)\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\exp(\tau t)\,d\mu(t),\quad \tau\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

Легко проверить, что это отождествление согласовано с действием группы $O(\infty)$. Таким образом, наше представление S группы $U(\infty)$ можно отождествить с голоморфным расширением представления T группы $O(\infty)$.

Как следствие, получаем описание структуры представления T : оно есть прямая сумма представлений $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$, где λ пробегает то же, что и выше, множество однострочечных диаграмм Юнга.

Этот пример легко обобщить, заменив $\mathbb{R}^\infty$ на $\mathbb{R}^{m\times\infty}$ и даже на $\mathbb{R}^{\infty\times\infty}$. Затем можно пойти дальше, заменив $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ или на $\mathbb{H}$. В результате получается простое доказательство результатов работы [101] .

Во всех ситуациях переход к голоморфному расширению существенно упрощает задачу разложения представления. Причина этого явления кроется в теореме I.4.4, позволяющей сводить все к разложению некоторых представлений конечномерных групп $U(n)$.

I.4.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Вернувшись к вложению $K \to K^*$ (см.I.4.5(I)), определим в K^* подгруппы K_n^*, содержащие подгруппы $K_n \subset K$ и соотносящиеся с ними так же, как K^* соотносится с K. Тогда для любого ручного представления T группы K получаем: пространство K_n-инвариантов $H_n(T)$ совпадает с пространством K_n^*-инвариантов представления T^*. Это замечание часто оказывается полезным. Например, в ситуации примера I.4.7 оно сразу показывает, что $H_n(T)$ совпадает с подпространством тех цилиндрических функций из $L^2(\mathbb{R}^\infty)$, которые явно зависят только от первых n координат.

I.4.9. ЗАМЕЧАНИЕ (об аналитических векторах). Пусть K - любая из групп $SO(\infty), O(\infty), U(\infty), Sp(\infty)$; T - ее ручное представление, $n \geqslant cond\, T$ и $\mathcal{T}_n$ - представление полугруппы $\Gamma(n)$ сжимающих $n \times n$-матриц в $H_n(T)$, ассоциированное с T. Обозначим через $\Gamma^o(n)$ внутренность матричного шара $\Gamma(n)$. Из теорем I.4.3 и I.4.5 следует, что для любого $\xi \in H_n(T)$ вектор-функция $\gamma \longmapsto \mathcal{T}_n(\gamma)\xi$ вещественно-аналитична в $\Gamma^o(n)$, т.е. она является сужением некоторой голоморфной функции.

С другой стороны, положим

$$H_n^o(T) = \bigcup_{0<\varepsilon<1} \mathcal{T}(\gamma_\varepsilon) H_n(T), \quad \gamma_\varepsilon \overset{def}{=} \varepsilon \cdot 1_n \in \Gamma^o(n).$$

Поскольку γ_ε стремится к единице полугруппы $\Gamma(n)$ при $\varepsilon \to 1$, подпространство $H_n^o(T)$ плотно в $H_n(T)$. Заметим теперь, что если $\xi \in H_n^o(T)$, то вектор-функция $\gamma \longmapsto \mathcal{T}_n(\gamma)\xi$ продолжается до вещественно-аналитической функции, определенной в некоторой окрестности матричного шара $\Gamma(n)$. В частности, у нее существуют производные всех порядков в единице. Это обстоятельство будет использовано в замечании 2.3.22.

Нетрудно проверить, что пространства $H_n^0(T)$ с ростом увеличиваются; обозначим через $H_\infty^0(T)$ их объединение и назовем его пространством аналитических векторов ручного представления T . Ясно, что $H_\infty^0(T)$ является плотным K-инвариантным подпространством в $H(T)$ и что каждый вектор $\xi \in H_\infty^0(T)$ является аналитическим вектором представлений $T \mid K(n)$ в обычном смысле.

Если T неприводимо, то $H_\infty^0(T)$ совпадает с $H_\infty(T)$, но в общем случае это уже неверно. Например, если T - представление группы $K=O(\infty)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu^{\otimes\infty})$, то элементы пространства $H_n^0(T)$, как функции на $\mathbb{R}^n$, аналитичны.

Глава 2. РАСШИРЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОБЕРТЫВАЮЩИХ АЛГЕБР И ЯНГИАНЫ

§ 2.I. Конструкция квадратичной алгебры A и ее связь с янгианами

В разделах 2.I.I – 2.I.8 строится алгебра A и находится ее центр A_0 ; последний отождествляется с алгеброй так называемых квазисимметрических функций.

Алгебра A обладает фильтрацией такой, что присоединенная градуированная алгебра $P = gr(A)$ коммутативна. В разделах 2.I.9 – 2.I.I2 выясняется структура алгебры P : предъявляется счетный набор ее алгебраически независимых образующих. Эти результаты существенно используются дальше. Первое применение указано в замечании 2.I.I3: алгебра A обладает некоторыми свойствами конечности.

В разделе 2.I.I4 напоминается определение янгианов $Y(\mathfrak{gl}(m))$, отвечающих алгебрам Ли $\mathfrak{gl}(m)$. Эти новые объекты являются алгебрами с квадратичными соотношениями (а также алгебрами Хопфа). Они были введены Л.Д.Фаддеевым и его сотрудниками в ходе их исследований по квантовому методу обратной задачи рассеяния (см., например, работы [I7, 60, 90]).

Основным результатом параграфа является теорема 2.I.I5 о структуре алгебры A . В ней строится изоморфизм между A и тензорным произведением $A_0 \otimes Y(\mathfrak{gl}(\infty))$, где алгебра $Y(\mathfrak{gl}(\infty))$ определяется как индуктивный предел по $m \to \infty$ янгианов $Y(\mathfrak{gl}(m))$ (ее естественно назвать янгианом алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\infty)$). В процессе доказательства вычисляются образующие алгебры A и определяющие (квадратичные) соотношения между ними.

2.I.I. Введем серию обозначений:

$$\mathfrak{gl}(n)=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\quad \mathfrak{gl}(\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{gl}(n).$$

$\{e_{ij} : 1\leqslant i\ ,\ j<\infty\}$ – стандартный базис матричных единиц в $\mathfrak{gl}(\infty)$.

$$GL(n)=GL(n,\mathbb{C})\ ,\quad GL(\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}GL(n).$$

$GL_m(n)$ – подгруппа в $GL(n)$, сохраняющая первые m базисных векторов в $\mathbb{C}^n$ и подпространство, натянутое на остальные $n-m$ векторов; она изоморфна $GL(n-m)$; $m=0,1,\dots,n$.

$A(n)$ – универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{gl}(n)$.

$A_m(n)$ – ее подалгебра, состоящая из инвариантов группы $GL_m(n)$, действующей в $\mathfrak{gl}(n)$ по присоединенному представлению (иными словами, $A_m(n)$ есть централизатор в $A(n)$ элементов e_{ij}, где $m+1\leqslant i, j\leqslant n$; в частности, $A_0(n)$ есть центр алгебры $A(n)$).

$I(n)$ – левый идеал в $A(n)$, порожденный элементами $e_{1n}, e_{2n},\dots, e_{nn}$.

2.I.2. ЛЕММА. Для произвольного $a\in A_{n-1}(n)$ существует единственный элемент $b\in A(n-1)$ такой, что $a\in b+I(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как всякий элемент алгебры $A(n)$, a однозначно разлагается в сумму компонент вида

$$e_{n1}^{p_1}\dots e_{n,n-1}^{p_{n-1}}\, x\, e_{1n}^{q_1}\dots e_{n-1,n}^{q_{n-1}}\, e_{nn}^{r}\ ,\quad x\in A(n-1). \tag{I}$$

Условие $a\in A_{n-1}(n)$ означает $[a,e_{nn}]=0$, т.е.

$$\rho_1+\dots+\rho_{n-1}=q_1+\dots+q_{n-1}, \tag{2}$$

коль скоро $x\neq 0$. Значит, компонента (I) лежит в $I(n)$, если сумма (2) не равна 0 . То же верно, если $\tau>0$. Единственная компонента, для которой и сумма (2), и число τ равны 0, есть элемент $b\in A(n-1)$.

2.I.3. Пусть $0\leq m<n$. Если $a\in A_m(n)$, то $a\in A_{n-1}(n)$, и по лемме 2.I.2 ему отвечает элемент $b\in A(n-1)$.

ЛЕММА. Отображение $a\mapsto b$ задает морфизм алгебр $A_m(n)\longrightarrow A_m(n-1)$, $0\leq m<n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идеал $I(n)$ инвариантен относительно $GL(n-1)$ и, в частности, относительно $GL_m(n-1)$. Поэтому b инвариантен относительно $GL_m(n-1)$ и, значит, лежит в $A_m(n-1)$. Далее, поскольку $I(n)$ инвариантен относительно $GL(n-1)$ и является левым идеалом, $I(n)A(n-1)=I(n)$. Пусть теперь $a_1,a_2\in A_m(n)$. Напишем $a_i=b_i+c_i$, где $b_i\in A(n-1), c_i\in I(n)$, $i=1,2$. Тогда

$$a_1a_2=(b_1+c_1)(b_2+c_2)=b_1b_2+b_1c_2+c_1b_2+c_1c_2\in$$

$$\in b_1b_2+I(n)+I(n)A(n-1)+I(n)^2\subseteq b_1b_2+I(n).$$

Итак, отображение $a\mapsto b$ сохраняет умножение. Его аддитивность очевидна.

Содержание лемм 2.I.2 и 2.I.3 можно пересказать следующим образом.

Обозначим через $\tilde{I}(n)$ правый идеал алгебры $A(n)$, порожденный элементами $e_{n1},\dots,e_{nn}$. Тогда справедливо разложение

$$A(n)=(\tilde{I}(n)+I(n))\oplus A(n-1).$$

Обозначим через $\pi_n : A(n)\longrightarrow A(n-1)$ проекцию на второе слагаемое. Суть леммы 2.I.2 состоит в том, что

$$A_{n-1}(n)\cap\tilde{I}(n)=A_{n-1}(n)\cap I(n).$$

Отсюда вытекает, во-первых, что ядро проекции $\pi_n | A_{n-1}(n)$ лежит в $I(n)$ и, во-вторых, что это ядро является двусторонним идеалом в $A_{n-1}(n)$, так что $\pi_n | A_{n-1}(n)$ является морфизмом алгебры.

2.I.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Леммы 2.I.2 и 2.I.3 уместно сопоставить с известной конструкцией гомоморфизма Хариш-Чандры (см. Диксмье [I6], § 7.4). Я напомню эту конструкцию для алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, поскольку это будет полезно для дальнейшего.

Рассматривается разложение

$$A(n)=(n_- A(n)+A(n)n_+)\oplus U(\mathfrak{h}), \tag{I}$$

где n_- - нижняя треугольная, n_+ - верхняя треугольная, $\mathfrak{h}$ - диагональная подалгебры в $\mathfrak{gl}(n)$. Пусть $A(n)^{\mathfrak{h}}$ - централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $A(n)$. Тогда проекция на второе слагаемое в (I) определяет морфизм алгебры $A(n)^{\mathfrak{h}}$ на алгебру $U(\mathfrak{h})$. Это и есть гомоморфизм Хариш-Чандры.

Далее, отождествим $U(\mathfrak{h})$ с $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, где координаты $x_1,\dots,x_n$ в $\mathfrak{h}^*$ отвечают базису $e_{11},\dots,e_{nn}$ в $\mathfrak{h}$. Многочлен от $x_1,\dots,x_n$ назовем квазисимметрическим, если он симметричен в координатах $x_1-1,\dots,x_n-n$. Пусть $Q(n)$ - подалгебра всех квазисимметрических многочленов в $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$. Гомоморфизм Хариш-Чандры осуществляет изоморфизм центра $A_0(n)$ алгебры $A(n)$ на алгебру $Q(n)$. Он называется изоморфизмом Хариш-Чандры.

2.I.5. Для произвольного $m=0,1,\dots$ рассмотрим цепочку морфизмов, определенных леммой 2.I.3

$$A_m(m) \xleftarrow{\pi_{m+1}} A_m(m+1) \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\pi_n} A_m(n) \longleftarrow \cdots \qquad (\mathrm{I})$$

Из доказательства леммы 2.I.2 видно, что эти морфизмы сохраняют каноническую фильтрацию универсальных обертывающих алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ассоциативная алгебра A_m есть проективный предел последовательности (I) алгебр $A_m(n)$, образованный в категории фильтрованных алгебр.

Элементом алгебры A_m является всякая последовательность $(a_n : n \geqslant m)$, где

$$a_n \in A_m(n), \quad \pi_n(a_n) = a_{n-1}, \ \deg a \overset{def}{=} \sup_{n \geqslant m} \deg a_n < +\infty$$

(здесь $\deg a_n$ - степень элемента $a_n \in A(n)$).

Всякий элемент $a=(a_n) \in A_m$ однозначно определяется укороченной последовательностью $a_{m+k}, a_{m+k+1}, \dots$. Это обстоятельство позволяет определить вложения $A_m \to A_{m+1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра A есть индуктивный предел ассоциативных фильтрованных алгебр $A_0 \subset A_1 \subset \dots$.

Определим каноническое вложение в A универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ следующим образом: элементу

$x \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ сопоставляется последовательность $x, x, \ldots$. Это определение корректно, ибо x лежит в некотором $A(k)$ и, значит, в $A_k(n)$ для всех $n > k$.

Отметим еще, что в A естественным образом действует группа $GL(\infty)$.

2.I.6. ЛЕММА. Центр алгебры A совпадает с A_o.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что A_o лежит в центре. Обратно, пусть $a \in A$ – элемент центра. Тогда он коммутирует с $\mathfrak{gl}(\infty) \subset A$. Если $a = (a_n : n \geqslant m)$, то видно, что a_n лежит в центре алгебры $A(n)$ для всех $n \geqslant m$. А тогда $a \in A_o$.

2.I.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Это же рассуждение показывает, что A_m совпадает с подалгеброй в A , состоящей из инвариантов подгруппы $GL_m(\infty) = \bigcup\limits_{n \geqslant m} GL_m(n)$.

2.I.8. Отождествим $A_o(n)$ с $Q(n)$ посредством изоморфизма Хариш-Чандры, см. 2.I.4. Тогда проекция $\pi_n : A_o(n) \to A_o(n-1)$ превратится в морфизм $Q(n) \to Q(n-1)$, представляющий собой сужение многочлена на гиперплоскость $x_n = 0$ в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через Q проективный предел алгебр $Q(n)$ в категории фильтрованных алгебр и назовем его алгеброй квазисимметрических функций. Ясно, что A_0 и Q изоморфны.

Это определение очень похоже на определение алгебры симметрических функций, см. Макдональд [30] . Например, в Q можно определить аналоги степенных сумм, элементарных симметрических функций и полных симметрических функций:

$$s_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [(x_k - k)^M - (-k)^M], \quad M = 1, 2, \ldots;$$

$$1+\sum_{M=1}^{\infty} e_M(x)t^M=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+(x_k-k)t}{1-kt}\quad;$$

$$1+\sum_{M=1}^{\infty} h_M(x)t^M=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+kt}{1-(x_k-k)t}$$

$$(x=(x_1,x_2,\dots)).$$

ср. [30] , гл.I, § 2. Каждое из семейств $\{s_M\},\{e_M\},\{h_M\}$ является системой алгебраически независимых образующих алгебры $Q=A_0$.

2.I.9. Введем следующие обозначения:

$P(n)$ - симметрическая алгебра пространства $gl(n)$.

$P_m(n)$ - подалгебра $GL_m(n)$ -инвариантов в $P(n)$.

$I'(n)$- идеал в $P(n)$, порожденный элементами $e_{1n},\dots,e_{nn}$.

Теперь мы можем повторить построения 2.I.2 - 2.I.5, заменив $A_m(n)$ на $P_m(n)$ и $I(n)$- на $I'(n)$. В результате для каждого $m=0,1,\dots$ получается коммутативная градуированная алгебра P_m , являющаяся проективным пределом коммутативных градуированных алгебр $P_m(n)$. Затем вводится алгебра P - индуктивный предел алгебр $P_0\subset P_1\subset\dots.$

Алгебра P содержит симметрическую алгебру $S(gl(\infty))$. Алгебра P_m совпадает с подалгеброй $GL_m(\infty)$-инвариантов в P . Повторяя рассуждения раздела 2.I.8, мы получим изоморфизм между P_0 и алгеброй обычных симметрических функций.

Условимся обозначать символом $gr(\cdot)$ градуированную алгебру, присоединенную к данной фильтрованной алгебре.

ЛЕММА. Канонические изоморфизмы $gr(A(n))\to P(n)$ определяют изоморфизмы $gr(A_m)\to P_m$ и $gr(A)\to P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тот факт, что идеал $I(n)$ универсальной обертывающей алгебры $A(n)$ порожден элементами первого порядка, а также теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта, получаем, что $gr(I(n))$ совпадает с $I'(n)$. Отсюда следуют все утверждения леммы.

2.I.I0. Рассмотрим следующие элементы алгебры $\rho(n)$:

$$\rho_n^{(M)} = \sum_{d_1,\ldots,d_n=1}^{n} e_{d_1 d_2} e_{d_2 d_3} \ldots e_{d_M d_1}, \quad M=2,3,\ldots \tag{I}$$

$$\rho_n^{(1)} = \sum_{d=1}^{n} e_{dd} \tag{2}$$

$$\rho_{ij|n}^{(M)} = \sum_{d_1,\ldots,d_{M-1}=1}^{n} e_{id_1} e_{d_1 d_2} \ldots e_{d_{M-1} j}, \quad M=2,3,\ldots \tag{3}$$

$$\rho_{ij|n}^{(1)} = e_{ij}. \tag{4}$$

ЛЕММА. Для произвольного $m=0,1,\ldots,n-1$ алгебра $\rho_m(n)$ порождается элементами $\rho_n^{(M)}$ и $\rho_{ij|n}^{(M)}$, где $M=1,2,\ldots, 1\leqslant i,j\leqslant m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отождествим $\rho(n)$ с алгеброй полиномиальных функций от матричного аргумента x формата $n\times n$. Утверждение леммы сводится тогда к тому, что алгебра $GL_m(n)$-инвариантов порождается функциями $tr(x^M)$ и $(x^M)_{ij}$, где $i,j\leqslant m$.

При $m=0$ это очевидно, поэтому будем считать $m\geqslant 1$. Запишем x в виде блочной матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ в соответствии с разбиением $m+(n-m)$ числа n. Надо доказать, что всякий многочлен $\varphi(x)$, удовлетворяющий условию инвариантности

$$\varphi(x)\equiv\varphi(a,b,c,d)=\varphi(a,bg^{-1},gc,gdg^{-1}),\qquad g\in GL(n-m) \tag{5}$$

выражается через инварианты $tr(x^M), (x^M)_{ij}, 1\le i,j\le m$. Заметим сперва, что эти инварианты можно заменить инвариантами вида $tr(d^M)$, где $M\geq 1$, а также $a_{ij}, (bd^{M-2}c)_{ij}$, где $M\geq 2$. В самом деле, имеем $x_{ij}=a_{ij}$, а если $M\geq 2$, то $(x^M)_{ij}-(bd^{M-2}c)_{ij}$ выражается через инварианты вида $a_{k\ell}$ и $(bd^{N-2}c)_{k\ell}$, где $N<M$; поэтому вместо $(x^M)_{ij}$ можно с равным успехом взять $(bd^{M-2}c)_{ij}, M\geq 2$. Далее, $tr(x^M)-tr(d^M)$ выражается через инварианты вида $tr(d^N)$, где $N<M$, а также инварианты $a_{k\ell}$ и $(bd^{N-2}c)_{k\ell}$, где $N\leq M$; поэтому вместо $tr(x^M)$ можно взять $tr(d^M)$.

Итак, достаточно установить, что всякий инвариант $\varphi(a,b,c,d)$ можно выразить через инварианты вида $tr(d^M)$, a_{ij}, $(bd^{M-2}c)_{ij}$.

Для упрощения обозначений далее предполагается $m=1$ (обобщение на случай $m>1$ будет очевидно). Элемент a можно не учитывать, так что речь пойдет об описании полиномиальных инвариантов $\varphi(b,c,d)$, где c есть элемент $GL(n-1)$-модуля V векторов-столбцов длины $n-1$, b есть элемент дуального модуля V^* векторов-строк и $d\in V\otimes V^*$. Всякий такой инвариант можно разложить в сумму выражений вида

$$\psi(\underbrace{b,\ldots,b}_{p};\ \underbrace{c,\ldots,c}_{q};\ \underbrace{d,\ldots,d}_{r}), \tag{6}$$

где ψ является полилинейным инвариантом. В свою очередь, ψ определяется полилинейным инвариантом вида

$$\chi(b_1,\dots,b_p;\ c_1,\dots,c_q;\ u_1,\dots,u_r;\ v_1,\dots,v_r), \tag{7}$$

где $b_1,\dots,b_p,\ u_1,\dots,u_r \in V^*;\ c_1,\dots,c_q,\ v_1,\dots,v_r \in V$. Как следует из классической теории инвариантов для $GL(n-1)$, в (7) должно выполняться равенство $p=q$, и χ является суммой мономов от билинейных инвариантов $b_i c_j,\ b_i v_j,\ u_i c_j,\ u_i v_j$, причем в любом мономе каждая из букв встречается ровно один раз. Ввиду происхождения переменных типа u, v, необходимо следить за расположением этих букв с одинаковыми номерами. В каждом мономе у нас могут возникнуть, во-первых, замкнутые цепочки типа

$$(u_{k_1} v_{k_2})(u_{k_2} v_{k_3}) \dots (u_{k_M} v_{k_1}) \tag{8}$$

и, во-вторых, разомкнутые цепочки типа

$$(b_k v_{m_1})(u_{m_1} v_{m_2}) \dots (u_{m_{M-1}} c_l). \tag{9}$$

Возвращаясь к (6), мы видим, что цепочке (8) отвечает инвариант $tr(d^M)$, а цепочке (9) – инвариант $b\,d^{M-1}c$, что завершает доказательство.

2.I.II. Зафиксируем $m \in \{0,1,\dots\}$ и $N \in \{1,2,\dots\}$ и наложим на индексы i, j, M ограничения $i,j \leqslant m,\ 1 \leqslant M \leqslant N$.

ЛЕММА. Если n достаточно велико, то элементы $\rho_n^{(M)},\ \rho_{ij|n}^{(M)}$ алгебры $P_m(n)$ с индексами, удовлетворяющими указанным ограничениям, алгебраически независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой тройки индексов (i, j, M), подчиненной нашим ограничениям, выберем конечное подмножество Ω_{ijM}

в $\{m+1, m+2, \ldots\}$ мощности $M-1$. Сделаем это так, чтобы множества Ω_{ijM} попарно не пересекались. Возьмем n настолько большим, чтобы все Ω_{ijM} содержались в $\{m+1, \ldots, n-N\}$.

Рассмотрим набор независимых переменных

$$t_1, \ldots, t_N; \quad t_{ijM} \ (i, j \leq m, \ 1 \leq M \leq N). \tag{I}$$

Определим зависящий от t_{ijM} оператор x_{ijM} в $\mathbb{C}^n$ следующим образом. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – канонический базис в $\mathbb{C}^n$ и $\alpha_1 < \ldots < \alpha_{M-1}$ – все индексы из Ω_{ijM}. Тогда

$$\begin{gathered} x_{ijM}: e_j \to t_{ijM} e_{\alpha_{M-1}}, \ e_{\alpha_{M-1}} \to e_{\alpha_{M-2}}, \ldots, e_{\alpha_1} \to e_i; \\ x_{ijM}: e_k \to 0 \qquad \left(k \notin \{j\} \cup \Omega_{ijM}\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Определим оператор x в $\mathbb{C}^n$, зависящий от всех переменных, следующим образом

$$x e_k = \begin{cases} \sum\limits_{ijM} x_{ijM} e_k, & k \leq n-N \\ t_{k-(n-N)}, & k = n-N+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Интерпретируя элементы алгебры $P(n)$ как многочлены от матричного элемента, получим с учетом (2) и (3):

$$\rho^{(M)}(x) = t_1^M + \cdots + t_N^M + \varphi(\ldots, t_{k\ell L}, \ldots);$$

$$\rho^{(M)}_{ij|n}(x) = t_{ijM} + \psi(\ldots, t_{k\ell L}, \ldots), \quad L < M$$

(параметры $t_1,\dots,t_N$ в φ и ψ не входят). Отсюда видно, что наши многочлены алгебраически независимы уже как функции параметров (I).

2.I.I2. Из формул (I)-(4) в 2.I.I0 видно, что

$$\rho_n^{(M)} \in \rho_{n-1}^{(M)} + I'(n), \quad \rho_{ij|n}^{(M)} \in \rho_{ij|n-1}^{(M)} + I'(n).$$

Поэтому корректно определены элементы

$$\rho^{(M)} = (\rho_n^{(M)} : n \geqslant 0) \in P_0, \quad \rho_{ij}^{(M)} = (\rho_{ij|n}^{(M)} : n \geqslant m) \in P_m, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

ТЕОРЕМА. Для любого $m \in \{0,1,\dots\}$ элементы $\rho^{(M)}$ и $\rho_{ij}^{(M)}$, где $M = 1,2,\dots, 1\leqslant i, j \leqslant m$ (при $m=0$ остаются только $\rho^{(M)}$) суть свободные образующие коммутативной алгебры P_m. Снимая ограничение $1 \leqslant i, j \leqslant m$, получаем свободные образующие коммутативной алгебры P.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho = (\rho_n : n \geqslant m) \in P_m$. В силу леммы 2.I.I0, для всякого $n \geqslant m$ элемент $\rho_n \in P_m(n)$ можно представить в виде некоторого многочлена φ_n от элементов $\rho_n^{(M)}$, $\rho_{ij|n}^{(M)}$, где $i, j \leqslant m$, $M \leqslant \deg \rho$. В силу леммы 2.I.II, φ_n не зависит от n, если n достаточно велико. Стало быть, элементы указанные в теореме, действительно, являются образующими. Их алгебраическая независимость очевидна из леммы 2.I.II.

2.I.I3. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $P_m^{[M]}$ – подпространство элементов степени M градуированной алгебры P_m, а $A_m^{(M)}$ – подпространство элементов степени $\leqslant M$ фильтрованной алгебры A_m. Из теоремы 2.I.I2 вытекает, что все $P_m^{[M]}$ конечномерны. Поскольку P_m совпадает с $gr(A_m)$, отсюда следует, что все $A_m^{(M)}$ конечномерны.

2.1.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Янгианом $Y(\mathfrak{gl}(m))$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(m)$ называется комплексная ассоциативная алгебра с единицей, порожденная образующими $t_{ij}^{(M)}$, где $M=1,2,\ldots, 1\leq i,j\leq m$, и определяющими квадратичными соотношениями

$$\left[t_{ij}^{(M+1)}, t_{k\ell}^{(N)}\right]-\left[t_{ij}^{(M)}, t_{k\ell}^{(N+1)}\right]=t_{kj}^{(M)}t_{i\ell}^{(N)}-t_{kj}^{(N)}t_{i\ell}^{(M)}, \tag{1}$$

где $M,N=0,1,\ldots,\ t_{ij}^{(0)}\overset{def}{=}\delta_{ij},\ 1\leq i,j,k,\ell\leq m.$

В действительности $Y(\mathfrak{gl}(m))$ обладает структурой алгебры Хопфа, но наличие коумножения далее использоваться никак не будет. Чтобы привести соотношения (1) к стандартному виду [17;90], введем производящие функции для образующих

$$t_{ij}(u)=\delta_{ij}+u^{-1}t_{ij}^{(1)}+u^{-2}t_{ij}^{(2)}+\cdots \tag{2}$$

и составим из них матрицу $T(u)=[t_{ij}(u)]$ формата $m\times m$. Пусть $\{1_{ij}\}$ – стандартный базис в матричной алгебре $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^m$ и

$$T_1(u)=T(u)\otimes 1,\quad T_2(v)=1\otimes T(v) \tag{3}$$

$$\sigma=\sum_{i,j=1}^{m}1_{ij}\otimes 1_{ji}\in \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^m). \tag{4}$$

Тогда (1) переписывается в следующем виде:

$$(u-v-\sigma)T_1(u)T_2(v)=T_2(v)T_1(u)(u-v-\sigma). \tag{5}$$

2.I.I5. ТЕОРЕМА. В алгебре A существуют элементы $t_{ij}^{(M)}$, $1\leq M, i, j<\infty$ такие, что

I) элементы $t_{ij}^{(M)}$, где $M=1,2,\ldots, 1\leq i,j\leq m$, лежат в A_m и удовлетворяют соотношениям 2.I.I4(I);

2) порожденная ими подалгебра в A_m изоморфна $Y(\mathfrak{gl}(m))$;

3) вся алгебра A_m изоморфна тензорному произведению этой подалгебры, изоморфной $Y(\mathfrak{gl}(m))$, и подалгебры A_0.

Напомню, что структура алгебры A_0 была выяснена в 2.I.8. Из теоремы следует, что алгебра A изоморфна тензорному произведению своего центра A_0 на подалгебру, изоморфную $Y(\mathfrak{gl}(\infty))$ (индуктивный предел янгианов $Y(\mathfrak{gl}(m)$).

Доказательство теоремы излагается в 2.I.I6 - 2.I.I9.

2.I.I6. Рассмотрим следующие элементы в $A(n)$:

$$e_{ij|n}^{(M)}=\sum_{d_1,\ldots,d_{M-1}=1} e_{id_1}e_{d_1d_2}\ldots e_{d_{M-1}j}\;;\; 1\leq i,j\leq n \tag{I}$$

(предполагается, что $e_{ij|n}^{(1)}=e_{ij}$). Эта формула имеет тот же вид, что 2.I.I0(I), однако теперь все происходит в универсальной обертывающей алгебре $A(n)$, а не в коммутативной алгебре $P(n)$. Положим теперь

$$e_{ij|n}(u)=\delta_{ij}+\sum_{M=1}^{\infty} e_{ij|n}^{(M)}u^{-M} \tag{2}$$

$$t_{ij|n}(u)\equiv\delta_{ij}+\sum_{M=1}^{\infty} t_{ij|n}^{(M)}u^{-M}\stackrel{def}{=}e_{ij|n}(u+n). \tag{3}$$

Определение элементов $t_{ij|n}^{(M)}$ в (3) эквивалентно следующему:

$$t_{ij|n}^{(M)} = \sum_{\tau=0}^{M-1} (-n)^{\tau} \binom{M-1}{\tau} e_{ij|n}^{(M-\tau)} . \tag{4}$$

В частности,

$$t_{ij|n}^{(1)} = e_{ij} , \quad t_{ij|n}^{(2)} = e_{ij|n}^{(2)} - n e_{ij} ,$$

$$t_{ij|n}^{(3)} = e_{ij|n}^{(3)} - 2n e_{ij|n}^{(2)} + n^2 e_{ij} .$$

Как известно (см. Желобенко [I8] , с.256), под действием $\mathfrak{gl}(n)$ в $A(n)$ элементы $e_{ij|n}^{(M)}$ преобразуются так же, как e_{ij}. То же самое верно тогда и для элементов $t_{ij|n}^{(M)}$. Стало быть, элементы $t_{ij|n}^{(M)}$ лежат в $A_m(n)$, коль скоро $i,j \leq m$.

ЛЕММА. Последовательность $\left(t_{ij|n}^{(M)}\right)$, где M, i, j фиксированы, $n \to \infty$, определяет некоторый элемент $t_{ij}^{(M)}$ алгебры A. Он лежит в A_m, если $i,j \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $M=1$ утверждение леммы тривиально, так что можно считать $M \geq 2$. Из (4) легко получить рекуррентное соотношение

$$t_{ij|n}^{(M)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(e_{i\alpha} t_{\alpha j|n}^{(M-1)} - t_{ij|n}^{(M-1)} \right) , \quad M \geq 2. \tag{5}$$

Докажем теперь индукцией по M, что

$$t_{ij|n}^{(M)} - t_{ij|n-1}^{(M)} \in I(n) , \quad 1 \leq i , j \leq n-1. \tag{6}$$

Это верно для $M=1$, ибо $t_{ij|n}^{(1)} \equiv e_{ij}$. Пусть $M \geq 2$. Напишем выражение, аналогичное (5), для $t^{(M)}_{ij|n-1}$ и вычтем его из (5). Получим тогда

$$t^{(M)}_{ij|n} - t^{(M)}_{ij|n-1} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big[e_{i\alpha}(t^{(M-1)}_{\alpha j|n} - t^{(M-1)}_{\alpha j|n-1}) - $$

$$ - (t^{(M-1)}_{ij|n} - t^{(M-1)}_{ij|n-1})\Big] + e_{in} t^{(M-1)}_{nj|n} - t^{(M-1)}_{ij|n}.$$

По предположению индукции, выражения в квадратных скобках лежат в $\mathrm{I}(n)$. Далее, поскольку $t^{(M-1)}_{nj|n}$ преобразуется под действием $\mathfrak{gl}(n)$ так же, как e_{nj}, получаем

$$e_{in} t^{(M-1)}_{nj|n} - t^{(M-1)}_{ij|n} = t^{(M-1)}_{nj|n} e_{in} + \Big[e_{in}, t^{(M-1)}_{nj|n} \Big] - t^{(M-1)}_{ij|n} =$$

$$= t^{(M-1)}_{nj|n} e_{in} - \delta_{ij} t^{(M-1)}_{nn|n}.$$

Поскольку $e_{in} \in \mathrm{I}(n)$, в полученном выражении первый член лежит в $\mathrm{I}(n)$. Второй член также лежит в $\mathrm{I}(n)$: это видно из определения (I).

Итак, (6) доказано, откуда следует существование элемента $t^{(M)}_{ij} \in A$. Далее, из (4) вытекает, что $\Big[t^{(M)}_{ij|n}, e_{k\ell} \Big] = 0$, если $1 \leq i, j \leq m$, $m+1 \leq k, \ell < \infty$, что и завершает доказательство.

Следует подчеркнуть, что для элементов $e^{(M)}_{ij|n}$ условие (6) не выполняется.

2.I.I7. ЛЕММА. Элементы $t^{(M)}_{ij}$, где $M=1,2,\ldots$, $1 \leq i, j \leq m$, удовлетворяют определяющим соотношениям (I) или (5) раздела

2.I.I4 для янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно и легко проверяется, что если формальный ряд

$$T(u)=1+u^{-1}T^{(1)}+u^{-2}T^{(2)}+\cdots,$$

где $T^{(M)}$ суть матрицы $m\times m$ над некоторой алгеброй, удовлетворяет уравнению 2.I.I4(5), то ему же удовлетворяет и $T(-u)^{-1}$. Тривиально проверяется, что матрица

$$T(u)=[\delta_{ij}+u^{-1}e_{ij}]_{i,j=1}^{n}$$

удовлетворяет 2.I.I4(5). Значит, ему удовлетворяет и матрица

$$T(-u)^{-1}=[e_{ij|n}(u)]_{i,j=1}^{n}. \tag{I}$$

Из вида уравнения 2.I.I4(5) ясно, что его решения сохраняются при сдвиге параметра u на константу. Заменив в (I) u на $u+n$ и учитывая определение 2.I.I6(3), мы получим, что матрица $[t_{ij|n}(u)]$ формата $n\times n$ удовлетворяет 2.I.I4(5). Стало быть, элементы $t_{ij|n}^{(M)}$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$ удовлетворяют эквивалентным соотношениям 2.I.I4(I) для янгиана $Y(\mathfrak{gl}(n))$. Но тогда элементы $t_{ij|n}^{(M)}$, где $1\leqslant i$, $j\leqslant m$, удовлетворяют этим же соотношениям $(n\geqslant m)$, т.е. соотношениям для янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m))$. Поскольку это верно для всех $n\geqslant m$, этим соотношениям удовлетворяют элементы $t_{ij}^{(M)}$ алгебры A_m, $1\leqslant i$, $j\leqslant m$, что завершает доказательство.

2.I.I8. ЛЕММА. Определяющие соотношения для $Y(\mathfrak{gl}(m))$ можно переписать в следующем виде:

$$\left[t_{ij}^{(M)}, t_{k\ell}^{(N)}\right] = \sum_{\tau=0}^{M-1}\left(t_{kj}^{(M-\tau-1)}\, t_{i\ell}^{(N+\tau)} - t_{kj}^{(N+\tau)}\, t_{i\ell}^{(N-\tau-1)}\right). \qquad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что система тождеств (I) эквивалентна системе 2.I.I4(I). В самом деле, заменив в 2.I.I4(I) $M+1$ на $M-\tau$ и N на $N+\tau$, получим

$$\left[t_{it}^{(M-\tau)}, t_{k\ell}^{(N+\tau)}\right] - \left[t_{ij}^{(M-\tau-1)}, t_{k\ell}^{(N+\tau+1)}\right] =$$

$$= t_{kj}^{(M-\tau-1)}\, t_{i\ell}^{(N+\tau)} - t_{kj}^{(N+\tau)}\, t_{i\ell}^{(N-\tau-1)}. \qquad (2)$$

Заметим, что

$$\left[t_{ij}^{(M-\tau-1)}, t_{k\ell}^{(N+\tau+1)}\right]\Big|_{\tau=M-1} = \left[\delta_{ij}, t_{k\ell}^{(N+M)}\right] = 0.$$

Поэтому, если просуммировать тождества (2) для $\tau=0,1,\dots,M-1$, то получится (I). Довольно очевидно, что и наоборот, из (I) следует 2.I.I4(I), что впрочем, в дальнейшем не будет использоваться.

Отмечу еще, что (I) можно придать симметричную форму по M и N : надо заметить, что часть членов в (I) сокращается и фактически суммирование можно вести от $r=M-min(M,N)$ до $r=M-1$.

2.I.I9. ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.I.I5. Из леммы 2.I.I7 вытекает существование морфизма алгебры $Y(\mathfrak{gl}(m))$ в алгебру A_m, переводящего образующие $t_{ij}^{(M)}$ первой алгебры в одноименные элементы второй алгебры, построенные в лемме 2.I.I6. Вспомним, что в A_m есть фильтрация, относительно которой $gr(A_m)=P_m$. Из сопоставления формул 2.I.I0(I) и 2.I.I6(I) – 2.I.I6(4) видно, что старший член элемента $t_{ij}^{(M)}$ совпадает с $\rho_{ij}^{(M)}$. Поскольку алгебра $gr(A_m)=P_m$ коммутативна, отсюда и из теоремы 2.I.I2 следует, что элементы $t_{ij}^{(M)}$ алгебры A_m удовлетворяют условию типа Пуанкаре-Биркгофа-Витта: произвольный элемент подалгебры в A_m, натянутой на элементы $t_{ij}^{(M)}$, однозначно представляется многочленом от $t_{ij}^{(M)}$, где эти буквы стоят в любом, но заранее фиксированном порядке. С другой стороны, из леммы 2.I.I8 видно, что в янгиане $Y(\mathfrak{gl}(m))$ буквы $t_{ij}^{(M)}$ также можно расставлять в любом предписанном порядке, ибо если приписать букве $t_{ij}^{(M)}$ степень M, то правая часть в 2.I.I8(I) имеет степень $M+N-1$. Стало быть, наш морфизм имеет нулевое ядро, и $Y(\mathfrak{gl}(m))$ можно интерпретировать как подалгебру в A_m. Тем самым, утверждения I) и 2) теоремы 2.I.I5 доказаны. Утверждение 3) теперь легко выводится из теоремы 2.I.I2.

2.I.20. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что в A_o существуют элементы $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots$ такие, что

$$(t^{(M)})_n = t_{11|n}^{(M)} + \cdots + t_{nn|n}^{(M)} \in A_o(n),$$

и что они являются свободными образующими коммутативной алгебры A_o. Используя формулу Переломова-Попова (Желобенко [I8], § 6I), нетрудно вычислить $t^{(M)}$ в реализации 2.I.8 алгебры A_o

как алгебры Q квазисимметрических функций.

§ 2.2. Различные результаты об алгебре A

В этом параграфе показывается, что алгебра A наследует ряд важнейших свойств универсальных обертывающих алгебр: она действует в представлениях, имеется своего рода отображение симметризации $gr(A)\to A$, наконец, A может быть реализована дифференциальными операторами. Все это будет существенно использовано в § 2.3.

Основные результаты параграфа - теоремы 2.2.8, 2.2.15 и 2.2.18.

Схема изложения следующая.

В разделах 2.2.1 - 2.2.5 вводится некоторая категория Ω модулей над алгеброй Ли $gl(\infty)$, напоминающая известную категорию $\mathcal{O}$ Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда. Эта категория содержит $gl(\infty)$ -модули R_λ со старшим весом, связанные с голоморфными представлениями ρ_λ группы $U(\infty)$. Показывается, что всякий модуль из Ω обладает канонической структурой A-модуля.

В разделах 2.2.6 - 2.2.9 вводится важная коммутативная алгебра $C\subset A$. Она называется подалгеброй Гельфанда-Цетлина, ибо диагонализуется в базисе Гельфанда-Цетлина произвольного модуля R_λ . Алгебра A порождается ею плюс $gl(\infty)$ (теорема 2.2.8). Первое применение (следствие 2.2.9) состоит в том, что алгебра действует в представлениях ρ_λ ограниченными операторами.

В разделах 2.2.10 - 2.2.15 строится изоморфизм векторных пространств $\sigma: P\to A$, призванный выполнять функции отображения симметризации $S(\mathfrak{g})\to\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ из теории алгебр Ли (Диксмье [16], § 2.4). Отображение σ обладает любопытными комбинаторными свойствами (лемма 2.2.13).

В разделах 2.2.16 – 2.2.18 построена реализация алгебры A в дифференциальных операторах на пространстве матриц бесконечного формата.

2.2.1. Пусть $A(\infty)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(n)$ – универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{gl}(\infty)$ и J_n обозначает левый идеал в $A(\infty)$, порожденный элементами e_{ij}, где $1\le i\le j$ и $j>n$. Очевидно, идеалы J_n убывают с ростом n и их пересечение равно нулю.

Пусть V – некоторый $\mathfrak{gl}(\infty)$-модуль и, тем самым, $A(\infty)$-модуль. Пусть V_n обозначает аннулятор идеала J_n в V. Заметим, что $V_0\subseteq V_1\subseteq V_2\subseteq\dots$, и положим $V_\infty=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} V_n$. Поскольку $[e_{ij},V_n]\subseteq V_n$ при $i,j\le n$, V_∞ является подмодулем в V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через Ω обозначается категория $\mathfrak{gl}(\infty)$-модулей V таких, что $V_\infty=V$.

Если V неприводим, то это условие эквивалентно тому, что $V_\infty\ne\{0\}$. Определение категории Ω имеет очевидное сходство с определением категории ручных представлений в 1.1.15.

2.2.2. ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Всякий $\mathfrak{gl}(\infty)$-модуль V из Ω обладает канонической структурой A-модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v\in V$ и $a=(a_n)\in A$. Тогда, по определению 2.1.5,

$$a_{n+1}-a_n\in I(n+1)\subset J_n.$$

Поэтому вектор $a_n v\in V$ при $n\to\infty$ стабилизируется, и его можно принять за определение вектора av. Тривиально проверяется, что этим самым определяется действие алгебры A в V, продолжающее действие ее подалгебры $A(\infty)$.

2.2.3. Подалгебра A_m сохраняет все V_n, где $n\geqslant m$. В самом деле, пусть $v\in V_n$ и $a=(a_n : n\geqslant m)\in A_m$. Тогда $av=a_n v$. Но $a_n\in A(n)$ и $J_n A(n)=J_n$. Значит, $av\in V_n$.

2.2.4. $\mathfrak{gl}(\infty)$-модуль V называется модулем со старшим весом $x=(x_1,x_2,\dots)$, если он обладает циклическим вектором v таким, что

$$e_{ij}v=0 \qquad \text{для } 1\leqslant i<j<\infty;\ e_{ii}v=x_i v \qquad \text{для } i\ 1,2,\dots .$$

Тогда v называется старшим вектором. Для любого $x\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\dots$ существует универсальный модуль со старшим весом x (модуль Верма) и неприводимый модуль с тем же старшим весом (единственный неприводимый фактор-модуль модуля Верма). Это проверяется точно так же, как в классической теории, см. Диксмье [16], с.256-259.

ЛЕММА. Если V -модуль со старшим весом x, который финитен, т.е. $x_n=0$ для достаточно больших n, то $V\in\Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_{n+1}=x_{n+2}=\dots=0$. Тогда старший вектор $v\in V$ лежит в V_n. Поскольку v цикличен, $V_\infty=V$.

2.2.5. ЛЕММА. Пусть V - модуль с финитным старшим весом x. Тогда произвольный элемент $a\in A_0$ действует в V как скалярный оператор $f_a(x)\cdot 1$, где $f_a\in Q$ - квазисимметрическая функция, отвечающая a при отождествлении $A_0=Q$ из 2.1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v - старший вектор модуля V и $a=(a_n : n\geqslant 0)\in A_0$. Из определения изоморфизма Хариш-Чандры (см. 2.1.4) и изоморфизма $A_0\to Q$ следует, что $a_n v=f_a(x)v$, коль скоро n достаточно велико. Значит, $av=f_a(x)v$. Поскольку v цикличен и a лежит в центре алгебры A, это же верно для всех векторов модуля V .

2.2.6. Рассмотрим эндоморфизм ν алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\infty)$ и, тем самым, алгебры $A(\infty)$, переводящий e_{ij} в $e_{i+1,j+1}$. Очевидно,

$$\nu(A_m(n)) \subset A_{m+1}(n+1), \qquad \nu(I(n)) \subset I(n+1).$$

Отсюда видно, что ν задает эндоморфизм алгебры A , отображающий A_m в A_{m+1} для всех $m=0,1,\ldots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подалгеброй Гельфанда-Цетлина будем называть подалгебру $C \subset A$, натянутую на $A_0, \nu(A_0), \nu(\nu(A_0)), \ldots$.

Очевидно, C коммутативна.

2.2.7. Для произвольной диаграммы Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}$ условимся обозначать через R_λ неприводимый $\mathfrak{gl}(\infty)$-модуль со старшим весом $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$. Тогда $R_\lambda \in \Omega$. Модуль R_λ тесно связан с представлением ρ_λ группы $U(\infty)$: он очевидным образом реализуется в $H_\infty(\rho_\lambda)$. Можно сказать еще, что R_λ есть индуктивный предел неприводимых $\mathfrak{gl}(n)$-модулей со старшими весами $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Действуя в полной аналогии с построением базиса Гельфанда-Цетлина для неприводимых конечномерных $\mathfrak{gl}(n)$-модулей (см. Желобенко [18] § 67, а также § 3.7 диссертации), можно определить базис в модуле R_λ , связанный с цепочкой $(\nu^m(\mathfrak{gl}(\infty))$ подалгебр в $\mathfrak{gl}(\infty)$. Единственное расхождение со стандартным определением сводится к тому, что в случае $\mathfrak{gl}(n)$ обычно производят последовательную редукцию на подалгебру $\mathfrak{gl}(n-1)$, фиксирующую вектор $e_n \in \mathbb{C}^n$, затем подалгебру $\mathfrak{gl}(n-2)$, фиксирующую e_n и e_{n-1} и т.д., а в бесконечномерной ситуации надо брать сначала e_1 , потом e_1 и e_2 и т.д. Элементы базиса Гельфанда-Цетлина в R_λ параметризуются всевозможными схемами Гельфанда-Цетлина, т.е. последовательностями Λ следующего вида:

$$\Lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots) \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times \ldots \tag{1}$$

$$\lambda^{(0)} = \lambda ; \quad \lambda_i^{(m)} \geqslant \lambda_i^{(m+1)} \geqslant \lambda_{i+1}^{(m)} \quad (m \geqslant 0,\ i \geqslant 1) \tag{2}$$

$$\lambda^{(m)} = 0 \qquad \text{, если } m \text{ достаточно велико} \tag{3}$$

Из этих определений, из определения алгебры C и леммы 2.2.5 вытекает следующий результат, оправдывающий термин "подалгебра Гельфанда-Цетлина".

ЛЕММА. Действие алгебры C в модуле R_λ диагонализуется в базисе Гельфанда-Цетлина. Далее, если $a \in A_0$, $m \in \{0,1,\ldots\}$ и ξ_Λ - элемент базиса, отвечающий схеме $\Lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots)$,то

$$\nu^m(a)\xi_\Lambda = f_a(\lambda^{(m)})\xi_\Lambda .$$

2.2.8. ТЕОРЕМА. C и $\mathcal{O}\!\mathcal{H}(\infty)$ вместе порождают алгебру A.

Следует подчеркнуть, что этот факт обусловлен некоммутативностью алгебры A,ибо аналогичное утверждение для алгебры P неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Покажем, что в алгебре $P(n)$ справедливо тождество

$$\rho_n^{(M)} = \nu(\rho_{n-1}^{(M)}) + M\rho_{11|n}^{(M)} +$$

$$+ \sum_{k \geqslant 2} \sum_{\substack{M > M_1 \geqslant \ldots \geqslant M_k > 0 \\ M_1 + \cdots + M_k = M}} c_{M_1 \ldots M_k} \rho_{11|n}^{(M_1)} \ldots \rho_{11|n}^{(M_k)} , \tag{1}$$

где $M=1,2,\ldots$ и $C_{M_1\ldots M_2}$ – некоторые константы, не зависящие от n. В самом деле, рассмотрим правую часть формулы 2.I.IO(I), определяющей $\rho_n^{(M)}$. Мономы в 2.I.IO(I), для которых $d_1\geq 2,\ldots,$ $d_M\geq 2$, дают в сумме $\nu(\rho_{n-1}^{(M)})$. Мономы, у которых ровно один из индексов $d_1,\ldots,d_M$ равен 1, дают в сумме $M\rho_{11|n}^{(M)}$. Наконец, остальные мономы дают оставшиеся члены в (I). Ясно, что константы определяются только расположением единиц в наборе $(d_1,\ldots,d_M)$, т.е. не зависят от n.

б) Поскольку (I) справедливо для всех n и константы от n не зависят, аналогичное тождество справедливо для элементов $\rho^{(M)}$, $\nu(\rho^{(M)})$, $\rho_{11}^{(M)}$ и т.д. Возьмем теперь в алгебре A_0 произвольные элементы $t^{(M)}$ такие, что $\deg t^{(M)}=M$ и старший член в $t^{(M)}$ равен $\rho^{(M)}$ (например, можно было бы взять элементы, указанные в 2.I.20). Тогда для элементов $t^{(M)}$, $\nu(t^{(M)})$, $t_{11}^{(M)}$ и т.д. будет выполняться равенство (I) с точностью до элемента степени $\leq M-1$.

в) Обозначим через $A^{(M)}$ подпространство элементов степени $\leq M$ фильтрованной алгебры A, где $M=1,2,\ldots$. Покажем индукцией по M, что $A^{(M)}$ содержится в подалгебре A', натянутой на C и $\mathfrak{gl}(\infty)$.

Прежде всего, это верно для $M=1$. Действительно, по теореме 2.I.I2, элементы степени 1 в ρ лежат в $\mathfrak{gl}(\infty)+\mathbb{C}\rho^{(1)}$, откуда следует, что $A^{(1)}$ совпадает с $\mathbb{C}+\mathfrak{gl}(\infty)+\mathbb{C}t^{(1)}$.

Допустим, что $A^{(M-1)}\subset A'$, где $M\geq 2$, и покажем, что $A^{(M)}\subset A'$. В силу теоремы 2.I.I2, достаточно проверить, что $t^{(M)}\in A'$ и $t_{ij}^{(M)}\in A'$ для всех i,j. Для $t^{(M)}$ это тривиально, ибо $t^{(M)}\in A_0$. Далее, из результата б) и индукционного предположения видно, что $t_{11}^{(M)}\in A'$. Наконец, коммутируя $t_{11}^{(M)}$ с элементами из $\mathfrak{gl}(\infty)$, можно получить все $t_{ij}^{(M)}$.

2.2.9. СЛЕДСТВИЕ. Для произвольного $\lambda \in \mathbb{Y}$ отождествим R_λ с $H_\infty(\rho_\lambda)$ и будем интерпретировать A-модуль R_λ как представление алгебры A операторами гильбертова пространства $H(\rho_\lambda)$ с инвариантной областью определения $H_\infty(\rho_\lambda)$. Тогда все эти операторы ограничены.

(Будем обозначать через $R_\lambda(a)$ ограниченный оператор в $H(\rho_\lambda)$, отвечающий элементу $a \in A$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.2.8 достаточно проверить ограниченность операторов, отвечающих элементам из $\mathfrak{gl}(\infty)$ и из $\gamma^m(A_0)$, $m = 0, 1, \ldots$. Поскольку ρ_λ есть подпредставление тензорной степени тождественного представления ρ, проверка для элементов из $\mathfrak{gl}(\infty)$ тривиальна. Далее, в обозначениях раздела 2.2.7 для диаграммы $\lambda^{(m)}$ есть только конечное число возможных вариантов (это видно из 2.2.7(2)). Отсюда и из леммы 2.2.7 следует, что оператор, отвечающий $\gamma^m(a)$, где $a \in A_0$, является прямой суммой конечного числа скалярных операторов и, значит, ограничен.

2.2.10. Целью разделов 2.2.10 - 2.2.15 является построение изоморфизма векторных пространств $\sigma : P \to A$, выполняющего функции классического отображения симметризации. Нетривиальность этого построения вызвана тем, что обычное отображение симметризации из симметрической алгебры $P(n)$ на универсальную обертывающую алгебру $A(n)$ не согласовано с каноническими проекциями $A_m(n) \to A_m(n-1)$ и $P_m(n) \to P_m(n-1)$.

Будем обозначать через $\mathrm{Mat}(n)$ пространство комплексных матриц формата $n \times n$, а через $\mathfrak{D}(n)$ - алгебры голоморфных $GL(n)$-левоинвариантных дифференциальных операторов на $\mathrm{Mat}(n)$.

ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Имеется естественный изоморфизм алгебр

$\partial_n : A(n) \to \mathcal{D}(n)$.

В самом деле, реализуем $A(n)$ как алгебру левоинвариантных голоморфных дифференциальных операторов на $GL(n)$. Все эти операторы имеют полиномиальные коэффициенты и потому продолжаются с $GL(n)$ на $Mat(n)$. В результате получаем вложение $\partial_n : A(n) \to \mathcal{D}(n)$. Оно сюръективно, ибо сужение произвольного дифференциального оператора из $\mathcal{D}(n)$ на открытое подмножество $GL(n) \subset Mat(n)$ является, очевидно, элементом из $A(n)$.

Попутно получаем, что все элементы из $\mathcal{D}(n)$ суть дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами.

Отмечу еще, что ∂_n определяется правым действием группы $GL(n)$ на $Mat(n)$, что

$$\partial_n(e_{ij}) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha j}} \quad (1 \le i, j \le n)$$

и что степень $deg\, a$ элемента $a \in A(n)$ совпадает с порядком $ord\,(\partial_n(a))$ дифференциального оператора $\partial_n(a) \in \mathcal{D}(n)$.

2.2.II. ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Имеется изоморфизм векторных пространств $\tilde{\partial}_n : P(n) \to \mathcal{D}(n)$ такой, что

$$\left[\tilde{\partial}_n(\rho) f \right](x) = \left[\rho\left(\ldots, \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \ldots\right) f(x(1+y)) \right]\Big|_{y=0} . \qquad (I)$$

Здесь $\rho \in P(m)$, f – произвольная голоморфная функция на $Mat(n)$, $x, y \in Mat(n)$. В правой части (I) многочлен ρ интерпретируется как голоморфный дифференциальный оператор на $Mat(n)$ с постоянными коэффициентами.

Очевидно, $\tilde{\partial}_n(\rho)\in\mathcal{D}(n)$. Тот факт, что $\tilde{\partial}_n$ есть изоморфизм векторных пространств, проверяется тривиально.

2.2.I2. ЛЕММА. $\tilde{\partial}_n$ задается следующей формулой:

$$\tilde{\partial}_n(e_{i_1j_1}\ldots e_{i_Mj_M}) =$$

$$=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_M=1}^{n} x_{\alpha_1 i_1}\ldots x_{\alpha_M i_M}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1 j_1}}\ldots\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_M j_M}}. \tag{I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\left[\tilde{\partial}_n(e_{i_1j_1}\ldots e_{i_Mj_M})f\right](x)=\frac{\partial}{\partial y_{i_1j_1}\ldots\partial y_{i_Mj_M}}f(xy)\Bigg|_{y=1_n}.$$

Но $(xy)_{\alpha j}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{\alpha i}\,y_{ij}$, откуда легко следует (I).

Эта лемма будет использована в 2.2.I7.

2.2.I3. Положим $\sigma_n=\partial_n^{-1}\circ\tilde{\partial}_n$. Это изоморфизм векторных пространств $P(n)\longrightarrow A(n)$ со следующими свойствами:

I) σ_n сохраняет фильтрацию, и определенное им отображение $P(n)\longrightarrow gr(A(n)) = P(n)$ есть тождественное отображение.

2) σ_n коммутирует с присоединенным представлением группы $GL(n)$.

Условимся обозначать через $\langle XY\ldots Z\rangle$ произведение элементов $X, Y, \ldots, Z$ ассоциативной матричной алгебры $Mat(n)$.

ЛЕММА. Изоморфизм векторных пространств $\sigma_n^{-1}: A(n)\longrightarrow P(n)$ дается следующей явной формулой: если $X_1,\ldots,X_M\in \mathfrak{gl}(n)$, то

$$\sigma_n^{-1}(X_1\dots X_M)=\sum\langle X_{i_1}\dots X_{i_a}\rangle\langle X_{j_1}\dots X_{j_b}\rangle\dots\langle X_{k_1}\dots X_{k_c}\rangle, \tag{I}$$

где сумма берется по всевозможным разбиениям множества $\{1,\dots,M\}$ на пересекающиеся подмножества ("кластеры")

$$\{i_1<\dots<i_a\},\ \{j_1<\dots<j_b\},\ \dots,\ \{k_1<\dots<k_c\},$$

причем порядок "кластеров" несуществен.

ПРИМЕР. Если $X,\ Y,\ Z\in\mathfrak{gl}(n)$, то

$$\sigma_n^{-1}(X)=X\ , \qquad \sigma_n^{-1}(XY)=XY+\langle XY\rangle,$$

$$\sigma_n^{-1}(XYZ)=XYZ+\langle XY\rangle Z+\langle XZ\rangle Y+\langle YZ\rangle X+\langle XYZ\rangle.$$

Любопытно, что (I) имеет такую же комбинаторную структуру, как известная формула, выражающая моменты системы случайных величин через ее семиинварианты (см. Малышев и Минлос [31],с.44).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x)$- голоморфная функция на $\mathrm{Mat}(n)$. Тогда

$$\left[\partial_n(X_1,\dots,X_M)f\right](x)=$$

$$=\frac{\partial^M}{\partial t_1\dots\partial t_M}f(x(1+t_1X_1)\dots(1+t_MX_M))\Big|_{t_1=\dots=t_M=0} \tag{2}$$

$$(1+t_1X_1)\dots(1+t_MX_M) =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{M} \sum_{\ell_1<\dots<\ell_r} t_{\ell_1}\dots t_{\ell_r} \langle X_{\ell_1}\dots X_{\ell_r}\rangle. \tag{3}$$

Обозначим правую часть в (3) через $1+y$. Рассмотрим функцию $\varphi(y)=f(x(1+y))$ и разложим ее в ряд Тейлора по переменной $y\in \mathrm{Mat}(n)$. Этот ряд можно рассмотреть затем как формальный степенной ряд по $t_1,\dots,t_M$. Выражение (2) есть коэффициент в этом ряду при мономе $t_1\dots t_M$, откуда легко следует (I).

2.2.I4. ЛЕММА. $\sigma_n(\mathrm{I}'(n))=\mathrm{I}(n)$ для всех $n=1,2,\dots$, где $\mathrm{I}'(n)$ – идеал в $P(n)$, введенный в 2.I.9, $\mathrm{I}(n)$ – левый идеал в $A(n)$, введенный в 2.I.I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a\in A(n)$ имеет вид be_{in}, где $b\in A(n)$, то, как видно из 2.2.I3(I), $\sigma_n^{-1}(a)\in P(n)$ есть сумма мономов, каждый из которых делится на некоторый e_{kn}. Таким образом, $\sigma_n^{-1}(\mathrm{I}(n))$ содержится в $\mathrm{I}'(n)$.

Обратное включение доказывается теперь формальным рассуждением. В самом деле, пусть $\rho\in \mathrm{I}'(n)$ и $a=\sigma_n(\rho)$. Напишем $\rho = \rho_1e_{1n}+\dots+\rho_ne_{nn}$ и положим $a_i=\sigma_n(\rho_i)$, $i=1,\dots,n$. Элемент $\sum a_ie_{in}$ лежит в $\mathrm{I}(n)$, так что его образ относительно σ_n^{-1} лежит в $\mathrm{I}'(n)$. С другой стороны, $\sigma_n^{-1}(a-\sum a_ie_{in})$ имеет меньшую степень, чем ρ. Это рассуждение позволяет установить включение $\sigma_n(\rho)\in \mathrm{I}(n)$ индукцией по $\deg\rho$.

2.2.I5. ТЕОРЕМА. Последовательность отображений $\sigma_n: P(n)\to A(n)$, построенных в 2.2.I3, определяет отображение $\sigma: P\to A$. Это изоморфизм векторных пространств, отображающий P_m

на A_m для любого $m=0,1,2,\ldots$, сохраняющий фильтрацию, индуцирующий при переходе от A к $gr(A)=P$ тождественное отображение $P\to P$ и коммутирующий с действием группы $GL(\infty)$ в P и A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho=(\rho_n : n\geqslant m)\in P_m$. По определению, $\sigma(\rho)=a=(a_n)$, где $a_n=\sigma_n(\rho_n)$. По лемме 2.2.14, $a_n-a_{n-1}\in I(n)$. Поскольку σ_n коммутирует с действием $GL(n)$, имеем $a_n\in P_m(n)$. Ясно также, что $deg(a_n)$ ограничены. Поэтому $a\in P_m$, т.е. отображение σ корректно определено. Остальные утверждения теоремы очевидны.

2.2.16. В разделах 2.2.16 - 2.2.18 будет построена реализация алгебры A дифференциальными операторами со счетным числом переменных.

Пусть V - конечномерный $GL(n)$-модуль и V^* - дуальный модуль. Положим

$$f[V;\xi,\eta](x)=\langle x\xi,\eta\rangle;\quad x\in GL(n),\ \ \xi\in V,\ \ \eta\in V^*. \tag{1}$$

Если все матричные элементы $f[V;\xi,\eta]$ полиномиальны, т.е. продолжаются до полиномиальных функций на $Mat(n)$, то V называется полиномиальным модулем. Эквивалентное условие состоит в том, что V разлагается в прямую сумму неприводимых модулей со старшими весами $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, где все λ_k суть целые неотрицательные числа.

Для дальнейшего будет важно, что произвольный многочлен на $Mat(n)$ можно представить в виде (1) с подходящим полиномиальным модулем V и что

$$\partial_n(a)f[V;\xi,\eta]=f[V;a\xi,\eta]\quad \forall a\in A(n). \tag{2}$$

Отмечу еще следующий факт: если V - полиномиальный $GL(n)$ -

модуль, то аннулятор $V^{e_{nn}}$ элемента e_{nn} в V является полиномиальным $GL(n-1)$-модулем, и всякий полиномиальный $GL(n-1)$-модуль может быть получен таким способом из некоторого полиномиального $GL(n)$-модуля.

2.2.17. Пусть d_n и d_{n-1} – голоморфные дифференциальные операторы на $Mat(n)$ и $Mat(n-1)$ соответственно. Рассмотрим проекцию $Mat(n)\longrightarrow Mat(n-1)$, сводящуюся к вычеркиванию n-ой строки и n-го столбца. Если f – голоморфная функция на $Mat(n-1)$, то через $\tilde{f}$ будет обозначаться ее поднятие на $Mat(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что d_n и d_{n-1} согласованы, если

$$(d_{n-1}f)^{\sim}=d_n\tilde{f}\quad\forall f \tag{I}$$

или, что сводится к тому же, если d_{n-1} получается в результате вычеркивания из d_n всех мономов, содержащих частные производные вида $\partial/\partial x_{in}$ или $\partial/\partial x_{nj}$.

ЛЕММА. Пусть $a\in A_{n-1}(n)$, $b\in A(n-1)$. Тогда условие согласованности операторов $d_n=\partial_n(a)$ и $d_{n-1}=\partial_{n-1}(b)$ эквивалентно тому, что $a\in b+I(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из 2.2.16, без ограничения общности можно предполагать, что функция f в (I) имеет вид $f[W;\xi,\eta]$, где W – полиномиальный $GL(n-1)$-модуль, причем $W=V^{e_{nn}}$, где V – полиномиальный $GL(n)$-модуль. Поскольку V вполне приводим как $GL(n-1)$-модуль, W выделяется в нем в виде прямого слагаемого, что позволяет реализовать W^* в виде подмодуля в V^* и, тем самым, считать η элементом из V^*. Ясно теперь, что $\tilde{f}$ совпадает с $f[V;\xi,\eta]$. В силу 2.2.16(I), условие согласованности для $\partial_n(a)$ и $\partial_{n-1}(b)$ приобретает следующий вид:

$$f[V; a\xi, \eta] = f[V; b\xi, \eta], \ \xi \in W = V^{e_{nn}}, \ \eta \in W^* \subset V^*. \qquad (2)$$

Заметим, что $b\xi \in W$ и что $a\xi \in W$ (ибо $[a, e_{nn}] = 0$). Стало быть, в (2) можно считать η произвольным элементом из V^*, и тогда наше условие сведется к тому, что дифференциальный оператор $\partial_n(a-b) \in \mathcal{D}(n)$ аннулирует все многочлены на $Mat(n)$, не зависящие явно от $x_{1n}, \ldots, x_{nn}$. Иными словами, каждый моном в $\partial_n(a-b)$ содержит хотя бы одну частную производную вида $\partial/\partial x_{in}$.

В силу леммы 2.2.I2 это означает, что $\partial_n(a-b) \in \mathcal{D}(n)$ можно записать в виде $\tilde{\partial}_n(\rho)$, где $\rho \in I'(n)$. По определению σ_n, это означает $\sigma_n^{-1}(a-b) \in I'(n)$, что по лемме 2.2.I4 эквивалентно условию $a-b \in I(n)$.

2.2.I8. Обозначим через Mat пространство всех комплексных матриц формата $\infty \times \infty$, т.е. проективный предел пространств $Mat(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Голоморфным дифференциальным оператором на Mat будем называть всякую последовательность $d = (d_n)$, начинающуюся с некоторого номера m, где d_n - голоморфный дифференциальный оператор на $Mat(n)$, причем d_n и d_{n+1} согласованы для всех n в смысле определения 2.2.I7. Условимся еще, что отбрасывание нескольких первых членов последовательности (d_n) не меняет элемента d .

Ясно, что голоморфные дифференциальные операторы на Mat образуют ассоциативную алгебру. Эта алгебра действует в пространстве цилиндрических голоморфных (или полиномиальных) функций на Mat.

Скажем, что $d = (d_n)$ имеет конечный порядок, если порядки $ord\,(d_n)$ дифференциальных операторов d_n в совокупности ограничены. Положим тогда $ord\,(d) = \sup\, ord\,(d_n)$.

Ясно, что группа $GL(\infty)$ действует левыми и правыми сдвигами в пространстве цилиндрических голоморфных (или полиномиальных) функций на Mat.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра $\mathcal{D}_m$, где $m=0,1,\dots$, состоит из всех голоморфных дифференциальных операторов на Mat , имеющих конечный порядок и перестановочных с левыми сдвигами элементами группы $GL(\infty)$ и правыми сдвигами элементами ее подгруппы $GL_m(\infty)$. Алгебра $\mathcal{D}$ определяется как объединение цепочки алгебр $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}_1\subset\dots$.

ТЕОРЕМА. Отображение

$$\partial : a=(a_n)\longmapsto d=(d_n), \qquad d_n\stackrel{def}{=}\partial_n(a_n),$$

задает изоморфизм алгебр $A\to\mathcal{D}$, отображающий A_m на $\mathcal{D}_m$ для всех $m=0,1,2,\dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a=(a_n : n\geqslant m)\in A_m$. По лемме 2.2.17, последовательность $d=(\partial_n(a_n))$ является дифференциальным оператором на Mat . Он имеет конечный порядок, ибо $\mathrm{ord}(\partial_n(a_n))= = \deg a_n$. По определению ∂_n (см. 2.2.10), $\partial_n(a_n)$ коммутирует с левым действием группы $GL(n)$. Он коммутирует с правым действием группы $GL_m(\infty)\cap GL(n)$, ибо $a_n\in A_m(n)$. Значит, $d\in\mathcal{D}_m$. Ясно, что ∂ является морфизмом алгебр $A_m\to\mathcal{D}_m$. То, что это изоморфизм, также легко следует из леммы 2.2.17.

2.2.19. ПРИМЕРЫ. В порядке иллюстрации я укажу дифференциальные операторы $d=(d_n)\in\mathcal{D}$, отвечающие простейшим элементам алгебры A , а именно, элементам $t^{(1)}_{ij}=e_{ij}$, t^{2}_{ij} , а также центральным элементам $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$, определение которых было дано в замечании 2.1.20. Каждый оператор записывается как бесконечная сумма дифференциальных мономов, которую надо интерпретировать следующим образом: при суммировании по всем переменным индексам от I до n получается дифференциальный оператор d_n. При этом соглашении имеем:

$$t_{ij}^{(1)} \leftrightarrow \sum_a x_{ai}\partial_{aj}$$

$$t_{ij}^{(2)} \leftrightarrow \sum_{a,b,c} x_{ai}x_{bc}\partial_{ac}\partial_{bj}$$

$$t^{(1)} \leftrightarrow \sum_{a,b} x_{ab}\partial_{ab}$$

$$t^{(2)} \leftrightarrow \sum_{a,b,c,d} x_{ad}x_{bc}\partial_{ac}\partial_{bd},$$

где x_{ij} суть матричные элементы матрицы $x \in \mathrm{Mat}$, а $\partial_{ij} = \partial/\partial x_{ij}$.

§ 2.3. Алгебра A как "правильная" версия универсальной обертывающей алгебры

Параграф начинается с некоторых мотивировок, после чего в разделе 2.3.3 дается определение "правильной" версии универсальной обертывающей алгебры $\hat{\mathcal{U}}(k(\infty))$ для алгебры Ли $k(\infty)$ группы K, где K обозначает $O(\infty)$, $U(\infty)$ или $Sp(\infty)$.

Определение алгебры $\hat{\mathcal{U}}(k(\infty))$ согласовано с ручным представлениями группы K, но не конструктивно. Основной результат параграфа - теорема 2.3.4 - состоит в отождествлении абстрактной алгебры $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{o}(\infty))$ с алгеброй A (о двух остальных случаях - алгебрах $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{u}(\infty))$ и $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sp}(\infty))$ - говорится в конце, в разделе 2.3.21).

Доказательство теоремы 2.3.4, изложенное в разделах 2.3.5 - 2.3.19, опирается на результаты § 2.2 и полугрупповой метод § 1.1. Попутно (лемма 2.3.14) объясняется, каким образом из алгебры Ли $\mathfrak{o}(\infty)$ "извлекается" алгебра Ли $\mathfrak{u}(\infty)$, что приводит к новому доказательству теоремы 1.2.2 (замечание 2.3.15).

В замечании 2.3.20 объясняется, в каком смысле алгебра $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{o}(\infty)) = A$ является алгеброй левоинвариантных дифференциальных операторов на группе $O(\infty)$.

Я хотел бы еще отметить, что теория, составляющая предмет настоящей главы, складывалась не в той последовательности, в которой она здесь излагается. А именно, первоначально в [41, 42] были построены виртуальные операторы Лапласа на группах K. Затем, как их обобщение, возникло определение 2.3.3 алгебры $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{k}(\infty))$. Потом была получена ее реализация дифференциальными операторами, из которой выкристаллизовалась алгебраическая конструкция параграфа 2.1. И лишь в самом конце была обнаружена совершенно неожиданная для автора связь с янгианами, подтвердившая естественность всех этих достаточно сложных построений.

2.3.1. Пусть K - любая из групп $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$ и $\mathfrak{k}(\infty)$ - ее алгебра Ли, т.е. одна из алгебр $\mathfrak{o}(\infty)$, $\mathfrak{u}(\infty)$, $\mathfrak{sp}(\infty)$, состоящая из всех финитных антиэрмитовых матриц формата $\infty\times\infty$ над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ соответственно. Иначе говоря, $\mathfrak{k}(\infty)$ определяется как индуктивный предел алгебр Ли $\mathfrak{k}(n)$, отвечающих компактным классическим группам $K(n)$, т.е. $O(n)$, $U(n)$ или $Sp(n)$.

Условимся обозначать символом $\mathcal{U}(\cdot)$ комплексифицированную универсальную обертывающую алгебру данной вещественной алгебры Ли.

Отметим следующие важные свойства алгебры $\mathcal{U}(k(n))$: она реализуется в виде алгебры левоинвариантных дифференциальных операторов на группе $K(n)$; она канонически действует в пространстве произвольного конечномерного представления группы $K(n)$ (причем это действие согласовано с ее действием дифференциальными операторами на матричные элементы представления); ее центр настолько велик, что его инфинитезимальные характеры разделяют неприводимые представления группы $K(n)$.

Разумеется, $\mathcal{U}(k(n))$ обладает множеством других ценных свойств, которые лежат в основе алгебраического подхода в теории представлений.

Целью настоящего параграфа является построение некоторой алгебры $\hat{\mathcal{U}}(k(\infty))$, которая содержит $\mathcal{U}(k(\infty))$ и обладает аналогами указанных свойств алгебр $\mathcal{U}(k(n))$, причем роль конечномерных представлений групп $K(n)$ играют ручные представления группы K . Необходимость расширения алгебры $\mathcal{U}(k(\infty))$ вызвана тем, что эта алгебра имеет бедную структуру: достаточно заметить, что ее центр тривиален. Автор полагает, что $\hat{\mathcal{U}}(k(\infty))$ является "правильной" версией универсальной обертывающей алгебры для группы K.

Интересно, что потребность в расширении универсальной обертывающей алгебры возникает и в теории представлений бесконечномерных объектов иной природы: алгебры Вирасоро (см. Фейгин и Фукс [61]) и алгебр Каца-Муди (см. Кац [85]).

2.3.2. Если T – унитарное представление группы K и $X \in k(\infty)$, будем обозначать через $dT(X)$ кососамосопряженный оператор в $H(T)$, являющийся генератором однопараметрической группы унитарных операторов $\{T(exp(aX): a\in\mathbb{R}\}$.

ЛЕММА. Если T - конечная прямая сумма неприводимых ручных представлений группы K, то все операторы $dT(X)$ ограничены и образуют представление алгебры Ли $k(\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку все неприводимые ручные представления реализуются в тензорах (см. § I.2), все сводится к случаю, когда T является тождественным представлением $\rho^{\mathbb{R}}, \rho$ или $\rho^{\mathbb{H}}$ А тогда утверждение леммы очевидно.

2.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра $\hat{\mathcal{U}}_m(k,\infty)$, где $m=0,1,2,\dots$, состоит из классов эквивалентностей последовательностей $X=(X_n)$ следующего вида:

I) X_n определен для достаточно больших номеров n, X_n лежит в $\mathcal{U}(k(n))$ и инвариантен относительно присоединенного действия подгруппы $K_m\cap K(n)$.

2) $\sup\limits_n \deg(X_n)<+\infty$;

3) если T - произвольное неприводимое ручное представление группы K, то операторы $dT(X_n)$ сильно сходятся к некоторому оператору $dT(X)$ (который ограничен в силу теоремы Банаха-Штейнгауза).

4) две последовательности $X=(X_n), Y=(Y_n)$, удовлетворяющие перечисленным условиям, считаются эквивалентными, если $dT(X)=$ $=dT(Y)$ для всех неприводимых ручных T (в частности, можно отбрасывать любое конечное число первых членов последовательности).

Ясно, что $\hat{\mathcal{U}}_m(k(\infty))$ действительно является ассоциативной алгеброй, если все операции над последовательностями выполнять покомпонентно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгеброй $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{k}(\infty))$ называется индуктивный предел (объединение) возрастающей цепочки алгебр $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathfrak{k}(\infty))$, где $m=0,1,2,\dots$.

Вложение $\mathcal{U}(\mathfrak{k}(\infty))\longrightarrow\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{k}(\infty))$ задается так: элементу $Y\in\mathfrak{k}(\infty)$ сопоставляется последовательность $X=(Y,Y,\dots)$.

По своему определению алгебра $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{k}(\infty))$ канонически действует ограниченными операторами в гильбертовом пространстве любого неприводимого ручного представления группы K.

2.3.4. Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. I) Существует изоморфизм алгебр $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{o}(\infty))\longrightarrow A$, однозначно определенный следующим условием. Пусть $X\in\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{o}(\infty))$, a - его образ в A, $\lambda\in\mathbb{Y}$, $R_\lambda(a)$ - ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $H(\rho_\lambda)=H(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$ (см. 2.2.9). Тогда $d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(X)=R_\lambda(a)$.

2) Этот изоморфизм отображает $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathfrak{o}(\infty))$ на A_m для всех $m=0,1,\dots$.

По поводу алгебр $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{u}(\infty))$ и $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{sp}(\infty))$ см. ниже замечание 2.3.2I.

Доказательство теоремы является длинным. В его первой части (2.3.5 - 2.3.I3) строится вложение $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{o}(\infty))\longrightarrow A$, обладающее указанным в теореме свойством. Здесь существенно используется теорема 2.2.I8, позволяющая отождествить алгебру A с алгеброй $\mathcal{D}$ дифференциальных операторов. Во второй части (2.3.I4 - 2.3.I9) устанавливается сюръективность построенного отображения. С помощью теоремы 2.2.9 дело сводится к проверке того, что образ алгебры $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{o}(\infty))$ в A содержит $\mathfrak{gl}(\infty)$ и подалгебру C Гельфанда-Цетлина.

2.3.5. Рассмотрим сюръективные отображения $\theta_k\colon O(n)\longrightarrow$

$\to\Gamma(k,\mathbb{R})$, где предполагается $n\geqslant 2k$, см. I.I.2. Обозначим через $\Gamma^o(k,\mathbb{R})$ внутренность множества $\Gamma(k,\mathbb{R})$, т.е. открытый матричный шар.

ЛЕММА. Если $n\geqslant 2k$, то $\theta_k : O(n)\to\Gamma(k,\mathbb{R})$ является субмерсией во всех точках $u\in O(n)$, проектирующихся в $\Gamma^o(k,\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $u\in O(n)$ в виде блочной матрицы $[\,u_{ij}\,]_1^2$, где блок u_{11} совпадает с $\theta_k(u)$. По предположению $\|u_{11}\|<1$, так что u_{12} имеет максимально возможный ранг, а именно k. Если $Y=[Y_{ij}]_1^2$ – элемент алгебры Ли $\mathfrak{o}(n)$, то блок $[uY]_{11}$ равен $u_{11}Y_{11}+u_{12}Y_{21}$. Из сказанного выше следует, что отображение $Y_{21}\longmapsto u_{12}Y_{21}$ есть сюръективное отображение из пространства матриц формата $(n-k)\times k$ на пространство матриц формата $k\times k$. Тем более сюръективно отображение $Y\longmapsto(uY)_{11}$, т.е. θ_k субмерсивно в точке $u\in O(n)$.

2.3.6. Зафиксируем последовательность $X=(X_n)$, представляющую произвольный элемент алгебры $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathfrak{o}(\infty))$, см. 2.3.2. Зафиксируем затем произвольное $k\geqslant m$ и будем считать n настолько большим, чтобы X_n был определен и чтобы было $n\geqslant 2k$.

Положим для краткости $O_k(n)=O_k(\infty)\cap O(n)$. По условию, X_n инвариантен относительно $\mathrm{Ad}\,O_m(n)$ и, тем более, относительно $\mathrm{Ad}\,O_k(n)$. Отождествим X_n с левоинвариантным дифференциальным оператором на группе $O(n)$. Тогда этот оператор будет также правоинвариантен относительно подгруппы $O_k(n)$.

Из теоремы I.I.2 и леммы 2.3.5 следует теперь, что наш дифференциальный оператор (ввиду его двусторонней $O_k(n)$-инвариантности) можно опустить с $O(n)$ на $\Gamma^o(k,\mathbb{R})$. Иными словами, существует дифференциальный оператор δ_{kn} на $\Gamma^o(k,\mathbb{R})$, однозначно определенный следующим условием:

$$(\delta_{kn} f)\circ\theta_k = X_n(f\circ\theta_k) \qquad \forall f\in C^\infty(\Gamma^\circ(k,\mathbb{R})). \tag{I}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальный оператор δ_{kn} называется радиальной частью дифференциального оператора X_n относительно проекции $\theta_k: O(n)\to\Gamma(k,\mathbb{R})$.

Для дальнейшего будет важен следующий алгоритм вычисления радиальной части. Обозначим через $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ пространство матриц над $\mathbb{R}$ формата $n\times n$ и будем рассматривать $O(n)$ как подмногообразие в $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$. Интерпретируя $X_n\in\mathcal{U}(\sigma(n))$ как элемент алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$, сопоставим ему левоинвариантный дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами $\hat{X}_n$ на $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, ср. 2.2.10. Вычеркнем затем из $\hat{X}_n$ все мономы, содержащие хотя бы одну частную производную $\partial/\partial x_{ij}$, такую, что $i>k$ или $j>k$, ср. 2.2.17. В результате получится некоторый дифференциальный оператор $\hat{X}_{kn}$ на $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

1) $\hat{X}_{kn}$ содержит только частные производные $\partial/\partial x_{ij}$ с индексами $i,j\leqslant k$;

2) все коэффициенты у $\hat{X}_{kn}$ биинвариантны относительно $O_k(n)$ (это следует из того, что $\hat{X}_{kn}$ биинвариантен относительно $O_k(n)$).

Возьмем произвольный коэффициент и сузим его на $O(n)$. Мы получим гладкую $O_k(n)$- биинвариантную функцию на $O(n)$. В силу следствия 1.1.3, ее можно опустить на $\Gamma(k,\mathbb{R})$. В силу леммы 2.3.4, результат будет гладкой функцией на $\Gamma^\circ(k,\mathbb{R})$.

Проделав эту процедуру со всеми коэффициентами оператора $\hat{X}_{kn}$, мы получим в итоге некоторый дифференциальный оператор δ_{kn} на $\Gamma^\circ(k,\mathbb{R})$. Тривиальная проверка показывает, что он действительно удовлетворяет условию (I).

2.3.7. Пусть φ – произвольный многочлен на $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, биинвариантный относительно $O_k(n)$, и $\tilde{\varphi}$ – гладкая функция на $\Gamma^0(k,\mathbb{R})$, полученная из φ сужением на $O(n)$ и последующим спуском на $\Gamma^0(k,\mathbb{R})$, см. конец раздела 2.3.6.

ЛЕММА. $\tilde{\varphi}$ есть также многочлен, причем $\deg\tilde{\varphi}\leq\deg\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем записывать произвольный $x\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ в виде блочной матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$, где $a=\theta_k(x)$. По первой основной теореме классической теории инвариантов для группы $O(n-k)$ [5], общий вид $O_k(n)$ – левоинвариантного многочлена $\varphi(x)$ на $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ таков:

$$\varphi(x)=\psi(a,b,y), \qquad y=y'=\begin{bmatrix} c' \\ d'\end{bmatrix}\cdot[c\,d], \tag{I}$$

где ψ – многочлен степени $\leq\deg\varphi$. Следует оговорить, что при подсчете $\deg\psi$ линейным функциям от y приписывается степень 2.

Но для $x\in O(n)$ имеем

$$c'c=1-a'a, \quad c'd=-a'b, \quad d'd=1-b'b.$$

Поэтому существует многочлен χ на $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, явно зависящий только от блоков a,b матрицы x, совпадающий с φ на $O(n)$ и такой, что $\deg\chi\leq\deg\varphi$.

Заменив χ на результат его усреднения относительно правого действия группы $O_k(n)$ (что сводится к правому действию группы $O(n-k)$ на блок b), мы можем считать χ инвариантным относительно этого действия.

Повторяя то же рассуждение для $\mathcal{X}$ и используя тождество $bb'=1-aa'$, выполненное для $x\in O(n)$, мы придем в итоге к многочлену, зависящему только от $a\in \mathrm{Mat}(k,\mathbb{R})$, который и есть $\widetilde{\varphi}$.

2.3.8. Вернемся к последовательности $X=(X_n)$ из 2.3.6. Найдется такое N, что $\deg X_n\leq N$ для всех n (второе условие в определении 2.3.3). Обозначим через $\mathcal{D}iff(k,N)$ пространство дифференциальных операторов на $\Gamma^0(k,\mathbb{R})$, у которых порядок $\leq N$ и все коэффициенты суть многочлены степени $\leq N$. Из описания алгоритма 2.3.6 и леммы 2.3.7 следует, что $\delta_{kn}\in \mathcal{D}iff(k,N)$ для всех n. Отметим, что $\mathcal{D}iff(k,N)$ конечномерно.

ЛЕММА. Существует $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{kn}=\delta_k$ в конечномерном пространстве $\mathcal{D}iff(k,N)$ дифференциальных операторов на $\Gamma^0(k,\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть T – произвольное неприводимое ручное представление группы $O(\infty)$ и $\xi,\eta\in H_k(T)$. Будем обозначать через $f[T,k;\xi,\eta]$ матричный элемент $(T(\cdot)\xi,\eta)$, опущенный с $O(\infty)$ на $\Gamma(k,\mathbb{R})$ в соответствии со следствием I.I.3. Линейная оболочка всех функций такого вида есть в точности пространство полиномиальных функций на $\Gamma(k,\mathbb{R})$. В самом деле, это следует из того факта, что всякое T имеет вид $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$, т.е. сужение представления ρ_λ группы $U(\infty)$, причем $H_k(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})=H_k(\rho_\lambda)$.

б) Таким образом, достаточно установить существование пределов вида $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{kn}f[T,k;\xi,\eta]$. Предел можно понимать в любом разумном смысле, поскольку все допредельные функции принадлежат некоторому конечномерному пространству многочленов.

Заметим теперь, что по определению операторов δ_{kn}

$$(\delta_{kn}f[T,k;\xi,\eta])(\theta_k(u))=(T(u)\cdot dT(X_n)\xi,\eta), \qquad (1)$$

где $u \in O(n)$ произволен. Будем считать теперь, что u пробегает $O(2k) \subset O(n)$. При $n \to \infty$ оператор $dT(X_n)$ сильно сходится к оператору $dT(X)$ (см. условие 3) в 2.3.3). Стало быть, правая часть в (I) как функция на $O(2k)$ равномерно сходится к функции $(T(\cdot)\, dT(X)\xi, \eta)$. Поскольку проекция $\theta_k : O(2k) \to \Gamma(k, \mathbb{R})$ сюръективна, это доказывает наше утверждение.

2.3.9. Заметим, что вектор $dT(X)\xi$ лежит в $H_k(T)$. В самом деле, согласно условию (I) в определении 2.3.3, оператор $dT(X_n)$ коммутирует с действием подгрупры $O_m(n)$ в $H(T)$. Отсюда следует, что оператор $dT(X)$ коммутирует со всеми $T(u)$, где $u \in O_m(\infty)$. Поскольку $k \geqslant m$, $dT(X)$ сохраняет $H_k(T)$.

Отсюда и из доказательства леммы 2.3.8 вытекает важное соотношение

$$\delta_k f[T, k; \xi, \eta] = f[T, k; dT(X)\xi, \eta]; \quad \xi, \eta \in H_k(T). \tag{I}$$

2.3.10. Обозначим через $\Gamma_m(k, \mathbb{R})$ следующую подполугруппу в $\Gamma(k, \mathbb{R})$:

$$\Gamma_m(k, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} : x \in \Gamma(k-m, \mathbb{R}) \right\}.$$

Для $\gamma \in \Gamma(k, \mathbb{R})$ рассмотрим соответствующие операторы левого и правого сдвига в пространстве функций на $\Gamma(k, \mathbb{R})$ (или на $\Gamma^o(k, \mathbb{R})$):

$$L_\gamma f(\gamma_1) = f(\gamma' \gamma_1), \quad R_\gamma f(\gamma_1) = f(\gamma_1 \gamma).$$

ЛЕММА. Дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами δ_k , определенный в лемме 2.3.8, коммутирует со всеми левыми сдвигами из $\Gamma(k,\mathbb{R})$ и со всеми правыми сдвигами из $\Gamma_m(k,\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению ассоциированных представлений (см. I.I.10, I.I.II) имеем

$$L_\gamma f[T,k;\xi,\eta] = f[T,k;\xi,\mathcal{T}_k(\gamma)\eta] \tag{1}$$

$$R_\gamma f[T,k;\xi,\eta] = f[T,k;\mathcal{T}_k(\gamma)\xi,\eta] \ . \tag{2}$$

С другой стороны, оператор $dT(X)|H_k(T)$ коммутирует с $\mathcal{T}_k(\gamma)$, если $\gamma\in\Gamma_m(k,\mathbb{R})$: это следует из определения $\mathcal{T}_k$ и того факта, что $dT(X)$ коммутирует со всеми $T(u)$, где $u\in O_m(\infty)$. Сопоставляя (I) и (2) с 2.3.9(I), получаем требуемое утверждение.

2.3.II. Положим

$$\mathrm{Mat}_m(k,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} : x\in \mathrm{Mat}\,(k-m,\mathbb{R}) \right\}.$$

Поскольку дифференциальный оператор δ_k имеет полиномиальные коэффициенты, его можно распространить с $\Gamma^0(k,\mathbb{R})$ на все пространство $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{R})$.

ЛЕММА. Как дифференциальный оператор на $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{R})$, δ_k коммутирует с левыми сдвигами элементами полугруппы $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{R})$ и правыми сдвигами элементами ее подполугруппы $\mathrm{Mat}_m(k,\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - многочлен на $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{R})$ и $x\in\mathrm{Mat}(k-m,\mathbb{R})$. Для $\varepsilon\in\mathbb{R}$ положим $\gamma(\varepsilon)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon x \end{bmatrix}$. Если $|\varepsilon|$ достаточно мало, то $\gamma(\varepsilon)\in\Gamma_m(k,\mathbb{R})$, и тогда по лемме 2.3.10

$$\delta_k R_{\gamma(\varepsilon)} f = R_{\gamma(\varepsilon)}\delta_k f .$$

Но обе части этого равенства зависят от ε полиномиально, так что равенство сохраняется для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$, в том числе для $\varepsilon = 1$. Это показывает, что δ_k коммутирует с правыми сдвигами из $Mat_m(k, \mathbb{R})$. Аналогично проверяется его перестановочность с левыми сдвигами из $Mat(k, \mathbb{R})$.

2.3.12. До сих пор k было фиксировано, теперь же будем рассматривать всёвозможные $k \geqslant m$.

ЛЕММА. Дифференциальный оператор δ_k на $Mat(k, \mathbb{R})$ согласован с дифференциальным оператором δ_{k+1} на $Mat(k+1, \mathbb{R})$ в смысле определения 2.2.17.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что

$$(\delta_k f[T, k; \xi, \eta]) \circ \theta_k = \delta_{k+1} f[T, k+1; \xi, \eta]$$

для всякого неприводимого ручного T и любых $\xi, \eta \in H_k(T)$. Но это сразу следует из 2.3.9(I).

2.3.13. Теперь мы можем завершить первую часть доказательства теоремы 2.3.4: построение вложения $\hat{\mathcal{U}}(\sigma(\infty)) \to A$, переводящего $\hat{\mathcal{U}}_m(\sigma(\infty))$ в A_m.

а) Пусть $X = (X_n)$ – последовательность, представляющая произвольный элемент алгебры $\hat{\mathcal{U}}_m(\sigma(\infty))$, где $m \in \{0, 1, \ldots\}$ (см. 2.3.3). В 2.3.6 – 2.3.II по X была построена последовательность $(\delta_k : k \geqslant m)$, где δ_k – дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами на $Mat(k, \mathbb{R})$. Оператор δ_k можно трактовать как голоморфный дифференциальный оператор d_k на пространстве $Mat(k)$ комплексных матриц.

б) Последовательность $d = (d_k : k \geqslant m)$ является элементом алгебры $\mathcal{D}_m$, введенной в 2.2.18. В самом деле, из леммы 2.3.12

видно, что операторы d_k попарно согласованы и, тем самым, d есть голоморфный дифференциальный оператор на $\mathrm{Mat}(\infty)$. Далее, из леммы 2.3.8 следует, что d имеет конечный порядок. Наконец, из леммы 2.3.11 следует, что d левоинвариантен относительно $GL(\infty)$ и правоинвариантен относительно $GL_m(\infty)$.

в) Пусть T – неприводимое ручное представление группы $O(\infty)$ (т.е. $T=\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{Y}$) и T^* – его голоморфное расширение на $U(\infty)$ (т.е. $T^*=\rho_\lambda$). Для произвольных $\xi,\eta\in H_\infty(T)=H_\infty(T^*)$ рассмотрим функции

$$f[T;\xi,\eta]=\lim_{k\to\infty}\operatorname{proj} f[T,k;\xi,\eta]$$

$$f[T^*;\xi,\eta]=\lim\operatorname{proj} f[T^*,k;\xi,\eta].$$

Это полиномиальные цилиндрические функции, определенные соответственно на пространстве всех вещественных и на пространстве всех комплексных матриц формата $\infty\times\infty$. Первая функция есть сужение второй функции. Отсюда и из 2.3.9(1) вытекает соотношение

$$d\cdot f[T^*;\xi,\eta]=f[T^*;dT(X)\xi,\eta],$$

связывающее X и d . Из него видно, что d зависит только от класса эквивалентности последовательности X (см. условие 4) определения 2.3.3), т.е. только от соответствующего элемента алгебры $\hat{\mathcal{U}}_m(O(\infty))$. Ясно, что построенное отображение $\hat{\mathcal{U}}_m(O(\infty))\to\mathcal{D}_m$ является вложением ассоциативных алгебр. Отождествим $\mathcal{D}_m$ с A_m посредством изоморфизма $\partial: A_m\to\mathcal{D}_m$ (см. 2.2.18). Пусть $a=\partial^{-1}(d)\in A_m$ и $R_\lambda(a)$ – соответствующий ограниченный оператор в $H(T)=H(\rho_\lambda)$, см. 2.2.9. Из 2.2.16(2) следует, что левая часть в (I) равна $f[T^*; R_\lambda(a)\xi, \eta]$. Это показывает, что $d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(X)$ совпадает с $R_\lambda(a)$ для всех $\lambda\in\mathbb{Y}$, что и требовалось доказать.

2.3.14. Приступим теперь ко второй части доказательства теоремы 2.3.4 – проверке сюръективности построенных отображений $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathcal{O}(\infty))\to A_m$.

ЛЕММА. Образ алгебры $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathcal{O}(\infty))$ в A содержит $\mathfrak{gl}(\infty)$. Более того, $\mathfrak{gl}(m)$ содержится в образе подалгебры $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathcal{O}(\infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Зафиксируем произвольные i,j и положим

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(e_{i\alpha}-e_{\alpha i})(e_{\alpha j}-e_{j\alpha}). \tag{I}$$

Если n достаточно велико, то $X_n\in\mathcal{U}(\sigma(n))$. Покажем, что

$$s-\lim_{n\to\infty} dT(X_n)=dT^*(e_{ij}) \tag{2}$$

для $T=\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$, $T^*=\rho_\lambda$, где $\lambda\in\mathbb{Y}$ произвольно. Достаточно доказать (2) для $T=(\rho^{\mathbb{R}})^{\otimes k}$, $T^*=\rho^{\otimes k}$, где $k\in\{1,2,\dots\}$, ρ – тождественное представление группы $U(\infty)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{E}=l_2$, $\rho^{\mathbb{R}}$ – его сужение на $O(\infty)$.

Пусть $e_1,e_2,\dots$ – канонический базис в $\mathcal{E}$. Поскольку нормы операторов $dT(X_n)$ равномерно ограничены по n, достаточно проверить, что

$$dT(X_n)\xi\to dT^*(e_{ij})\xi, \qquad \xi=e_{\alpha_1}\otimes\dots\otimes e_{\alpha_k}. \tag{3}$$

б) Положим $E_{\alpha\beta}=d\rho(e_{\alpha\beta})$ и для $s=1,\dots,k$

$$E^{(s)}_{\alpha\beta} = \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{s-1} \otimes E_{\alpha\beta} \otimes \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{k-s-1} \ .$$

В этих обозначениях имеем теперь

$$dT(X_n)\xi = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{n} (E^{(s)}_{i\alpha} - E^{(s)}_{\alpha i})(E^{(t)}_{\alpha j} - E^{(t)}_{j\alpha})\xi . \tag{4}$$

Заметим, что

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} (E^{(s)}_{i\alpha} - E^{(s)}_{\alpha i})(E^{(t)}_{\alpha j} - E^{(t)}_{j\alpha})\xi \right\| \to 0 \ , \quad s \neq t. \tag{5}$$

В самом деле, раскрыв скобки в (5), мы получим для каждого α четыре члена, из которых три равны 0 для всех достаточно больших α ввиду специального выбора вектора ξ (см. (3)). А оставшиеся члены дают

$$-\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} E^{(s)}_{\alpha i} E^{(t)}_{\alpha j} e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_k} =$$

$$= -\frac{1}{n} \delta_{i\alpha_s} \delta_{j\alpha_t} \sum_{\alpha=1}^{n} e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_k} , \tag{6}$$

где e_α вставляется в тензор ξ вместо e_{α_s} и e_{α_t} . Поскольку векторы, стоящие под знаком суммы в (6), попарно ортогональны и имеют единичную норму, норма вектора (6) стремится к 0 при

$n \to \infty$. Это доказывает (5).

в) Итак, достаточно рассмотреть в (4) вклад членов, отвечающих $s = t$, т.е. выражение

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{n} (E_{i\alpha}^{(s)} - E_{\alpha i}^{(s)})(E_{\alpha j}^{(s)} - E_{j\alpha}^{(s)})\xi .$$

Раскрыв скобки, мы получим под знаком суммы выражение

$$\left(E_{i\alpha}^{(s)} E_{\alpha j}^{(s)} - E_{\alpha i}^{(s)} E_{\alpha j}^{(s)} - E_{i\alpha}^{(s)} E_{j\alpha}^{(s)} - E_{\alpha i}^{(s)} E_{j\alpha}^{(s)}\right)\xi =$$

$$\left(E_{ij}^{(s)} - \delta_{i\alpha} E_{\alpha j}^{(s)} - \delta_{\alpha j} E_{i\alpha}^{(s)} + \delta_{ij} E_{\alpha\alpha}^{(s)}\right)\xi . \tag{7}$$

В результате усреднения по $\alpha = 1, \ldots, n$, второй, третий и четвертый члены в (7) дадут нулевой вклад при $n \to \infty$. Останется первый член в (7), который даст

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{n} E_{ij}^{(s)} \xi = \sum_{s=1}^{k} E_{ij}^{(s)} \xi = dT^{*}(e_{ij})\xi .$$

Это доказывает (3).

г) Предположим, что $1 \leq i, j \leq m < n$. Тогда элемент X_n инвариантен относительно $O_m(n)$. В самом деле, простое вычисление показывает, что X_n коммутирует с генераторами $e_{\beta\gamma} - e_{\gamma\beta}$, $m < \beta, \gamma \leq n$ алгебры Ли группы $O_m(n)$ и, кроме того, очевидно, что X_n инвариантен относительно диагональных операторов из $O_m(n)$.

Отсюда и из (2) следует, что $X=(X_n)$ определяет элемент из $\hat{\mathcal{U}}_m(o(\infty))$, образом которого является $e_{ij}\in\mathfrak{gl}(m)$, откуда вытекает утверждение леммы.

2.3.15. ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство леммы 2.3.14 легко превратить в новое доказательство теоремы 1.2.2 для случая $K=SO(\infty)$. Например, тот факт, что представление ρ_λ группы $U(\infty)$ остается неприводимым после ограничения на $SO(\infty)$, вытекает из того, что всякий оператор в $H(\rho_\lambda)=H(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$, коммутирующий с группой $SO(\infty)$, коммутирует с алгеброй $o(\infty)$ и, значит, с алгеброй $\mathfrak{u}(\infty)$ (лемма 2.3.14), т.е. является скалярным оператором.

Аналогичное рассуждение можно провести и для групп $U(\infty)$ и $Sp(\infty)$.

2.3.16. Напомню, что в 1.2.6 было введено обозначение ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ для неприводимых представлений группы $O(n)$. Если n настолько велико, что $\lambda_{[n/2]}=0$, то сужение представления ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ на $SO(n)$ неприводимо, и его старший вес равен $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{[n/2]})$. Обозначим это сужение снова через ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$.

ЛЕММА. Для любого $\lambda\in\mathbb{Y}$ можно указать конечное множество $M(\lambda)\subset\mathbb{Y}$ со следующим свойством: если n достаточно велико, то в разложение представлений $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}\,|\,SO(n)$ могут входить только представления ${}^n\rho_\mu^{\mathbb{R}}$ с $\mu\in M(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}\,|\,SO(n)=\rho_\lambda\,|\,SO(n)$ и поскольку ρ_λ является индуктивным пределом неприводимых полиномиальных представлений ${}^k\rho_\lambda={}^k\rho_{\lambda,0}$ групп $U(k)$, достаточно проанализировать спектр разложения представления ${}^k\rho_\lambda$ группы $U(k)$ по ее подгруппе $SO(n)$, где $k\geqslant n$.

Картановскую подалгебру в $o(n,\mathbb{C})=o(n)\otimes\mathbb{C}$ можно выбрать так, что всякий весовой вектор для $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C})=\mathfrak{u}(k)\otimes\mathbb{C}$ с весом

$(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ останется весовым для $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ и приобретает вес

$$(\nu_1 - \nu_n,\ \nu_2 - \nu_{n-1},\ \ldots,\ \nu_\ell - \nu_{n-\ell+1}), \tag{I}$$

где $\ell = [n/2]$. Пусть $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ – произвольный старший вес для $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$, участвующий в разложении представления ${}^k\rho_\lambda | SO(n)$. Он должен иметь тогда вид (I).

Заметим, что

$$\nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_k \geqslant 0\ , \quad \nu_1 + \ldots + \nu_k = |\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$$

Стало быть, величина $|\mu_1| + \ldots + |\mu_\ell|$ ограничена сверху константой $2|\lambda|$.

Поскольку мы имеем дело со старшим весом алгебры Ли $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$,

$$\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_\ell \geqslant 0 \qquad , \text{ если } \quad n = 2\ell + 1\ ,$$

$$\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{\ell-1} \geqslant |\mu_\ell| \geqslant 0 \quad , \text{ если } \quad n = 2\ell.$$

Таким образом, если $n = 2\ell + 1$, то $\mu_i = 0$ при $i > 2|\lambda|$, а для первых $2|\lambda|$ координат веса $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ имеется только конечное число возможностей. Если же $n = 2\ell$ и n настолько велико, что $\ell - 1 > 2|\lambda|$, то $\mu_{\ell-1} = 0$, откуда $\mu_\ell = 0$, так что мы снова получаем ограничения того же сорта.

2.3.I7. ЛЕММА. Вложение $\hat{\mathcal{U}}_0(\mathfrak{o}(\infty)) \to A_0$ сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра A_0 изоморфна алгебре Q квазисимметрических функций, а последняя порождается функциями s_M ,см. 2.I.8. Поэтому достаточно показать, что для каждого $M = 1, 2, \ldots$ найдется последовательность $X = (X_n)$, представляющая элемент алгебры $\hat{\mathcal{U}}_0(\mathfrak{o}(\infty))$ и такая, что

$$d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(X) = s_M(\lambda)\cdot 1 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[(\lambda_i - i)^M - (-i)^M\right]\cdot 1 . \tag{I}$$

Как хорошо известно, алгебра $O(n)$-инвариантов в $\mathcal{U}(\sigma(n))$ изоморфна подалгебре в $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_\ell]$, где $\ell=[n/2]$, состоящей из всех четных многочленов, симметричных в координатах $y_i = x_i + \frac{n}{2} - i$. Этот изоморфизм однозначно определяется тем условием, что (единственное) собственное значение $O(n)$-инвариантного элемента в неприводимом $O(n,\mathbb{C})$-модуле со старшим весом $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_\ell)$ совпадает со значением соответствующего многочлена в точке μ. Более того, степень инварианта в $\mathcal{U}(\sigma(n))$ совпадает со степенью многочлена (см. Желобенко [I8], §§ I25-I26).

Зафиксируем теперь $M\in\{1,2,\dots\}$ и положим

$$h_n(x_1,\dots,x_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell}\left[\rho_n\left(x_i+\frac{n}{2}-i\right) - \rho_n\left(\frac{n}{2}-i\right)\right], \tag{2}$$

где

$$\rho_n(t) = \left[\frac{\left(t+\frac{n}{2}\right)\left(t-\frac{n}{2}\right)}{n}\right]^M = \left(\frac{t^2-\frac{n^2}{4}}{n}\right)^M . \tag{3}$$

Многочлен h_n обладает нужными свойствами четности и симметричности, поэтому ему отвечает $O(n)$-инвариантный элемент X_n в $\mathcal{U}(o(n))$, $\deg X_n = 2M$. Из (3) видно, что при любых фиксированных t_1, t_2 имеем

$$\rho_n(t_1+\frac{n}{2})-\rho_n(t_2+\frac{n}{2})=t_1^M-t_2^M+O(n^{-1}). \tag{4}$$

Применяя (4) к $t_1=x_i-i,\ t_2=-i$ для $i=1,2,\ldots$, получаем, что для любого фиксированного $\mu\in\mathbb{Y}$

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\mu_1,\ldots,\mu_{[n/2]})=s_M(\mu). \tag{5}$$

По теореме I.2.6 $\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ эквивалентно индуктивному пределу представлений ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ групп $O(n)$, так что в $H(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$ выделяется плотное подпространство $H^\infty(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$ – объединение конечномерных подпространств $H({}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$. Если n достаточно велико, то ${}^n\rho_\lambda^{\mathbb{R}}$ есть неприводимое представление группы $SO(n)$ со старшим весом $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{[n/2]})$. Поэтому, применяя (5) к $\mu=\lambda$, мы получаем, что последовательность $d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(X_n)$ сходится к скалярному оператору $s_M(\lambda)\cdot 1$ на каждом векторе из нашего плотного подпространства.

Остается доказать, что нормы операторов $d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(X_n)$ равномерно ограничены при $n\to\infty$. Но это следует из леммы 2.3.16 и опять-таки из (5).

2.3.18. ЛЕММА. Образ алгебры $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{o}(\infty))$ в A устойчив относительно эндоморфизма $\nu: A\to A$ из 2.2.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X=(X_n)$ – последовательность, представляющая некоторый элемент из $\hat{\mathcal{U}}_m(\mathfrak{o}(\infty))$ и $a\in A_m$ – ее образ. Эндоморфизм $\nu:\mathfrak{gl}(\infty)\longrightarrow\mathfrak{gl}(\infty)$ индуцирует эндоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{o}(\infty)$ и, тем самым, эндоморфизм алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{o}(\infty))$. Положим $Y_n=\nu(X_{n-1})$ и $Y=(Y_n)$. Тривиальная проверка показывает, что Y удовлетворяет всем условиям определения 2.3.3 для $m+1$ вместо m и, тем самым, представляет некоторый элемент из $\hat{\mathcal{U}}_{m+1}(\sigma(\infty))$. Пусть $b \in A_{m+1}$ – его образ. Надо показать, что $b = \nu(a)$.

По определению 2.3.3 операторы $d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(X_n)$ сильно сходятся к оператору $R_\lambda(a)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{Y}$, а операторы $d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(Y_n)$ – к оператору $R_\lambda(b)$.

С другой стороны, как видно из обсуждения в 2.2.7, гильбертово пространство $H(\rho_\lambda)=H(\rho_\lambda^{\mathbb{R}})$ разлагается в конечную однократную прямую сумму $\oplus H_\mu$, где H_μ несет неприводимое представление подгруппы $U_1(\infty)$, которое после отождествления $U_1(\infty)$ с $U(\infty)$ посредством эндоморфизма $\nu: U(\infty) \to U_1(\infty) \subset U(\infty)$ превращается в ρ_μ. Поэтому для каждого такого μ имеется каноническая биекция I_μ алгебры операторов пространства $H(\rho_\mu)$ на алгебру операторов пространства H_μ. В этих обозначениях имеем

$$R_\lambda(\nu(a)) = \bigoplus_\mu I_\mu(R_\mu(a)) \quad \forall a \in A. \tag{1}$$

Очевидно также, что

$$d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(Y_n) = d\rho_\lambda^{\mathbb{R}}(\nu(X_{n-1})) = \bigoplus_\mu I_\mu(d\rho_\mu^{\mathbb{R}}(X_{n-1})). \tag{2}$$

Но первый член в (2) сильно сходится к $R_\lambda(b)$, тогда как третий член в (2) сильно сходится к $R_\lambda(\nu(a))$, ввиду (1). Отсюда вытекает искомое равенство $b = \nu(a)$.

2.3.19. Окончание доказательства теоремы 2.3.4. Покажем, что вложение $\hat{\mathcal{U}}(o(\infty)) \to A$ сюръективно. Рассмотрим образ алгебры $\hat{\mathcal{U}}(o(\infty))$ в A. По лемме 2.3.15 он содержит $\mathcal{O}\mathcal{H}(\infty)$. По лемме 2.3.17 он содержит A_0 . Наконец, по лемме 2.3.18 вместе с A_0 в нем содержится $\nu(A)$, $\nu^2(A), \dots$. Поскольку все эти подпространства порождают алгебру A (теорема 2.2.8), наш образ совпадает со всей алгеброй A.

Это же самое рассуждение доказывает чуть более сильное утверждение о сюръективности вложений $\hat{\mathcal{U}}_m(o(\infty)) \longrightarrow A_m$ для всех m. Здесь надо воспользоваться тем фактом, что A_m порождается своими подпространствами $\mathcal{H}(m)$ и $A_0, \nu(A_0), \dots, \nu^m(A_0)$: это уточнение теоремы 2.2.8 получается точно так же, как и сама теорема 2.2.8.

Теорема 2.3.4 полностью доказана.

2.3.20. ЗАМЕЧАНИЕ. Установленный в теореме 2.3.4 изоморфизм алгебр $\hat{\mathcal{U}}(o(\infty))$ и $\mathcal{D}$ позволяет интерпретировать элементы алгебры $\hat{\mathcal{U}}(o(\infty))$ как "левоинвариантные дифференциальные операторы на группе $O(\infty)$ ". Эти слова взяты в кавычки, поскольку они приобретают точный смысл лишь после замены группы $O(\infty)$ пространством $\Gamma(\mathbb{R}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{proj}\, \Gamma(n,\mathbb{R})$ сжимающих вещественных матриц бесконечного формата. Однако такая замена вполне оправдана, ибо в силу следствия 1.1.3, цилиндрические функции на $\Gamma(\mathbb{R})$ отождествляются с функциями на $O(\infty)$, двусторонне инвариантными относительно подгрупп $O_n(\infty)$ с достаточно большими номерами n. С другой стороны, в определении 2.2.18 алгебры $\mathcal{D}$ ничего не изменится, если вместо полугруппы $\mathrm{Mat}(n)$ комплексных матриц будет взята полугруппа $\Gamma(n,\mathbb{R})$, поскольку мы имеем дело с дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами. Отсюда видно, что элементы $d=(d_n)\in\mathcal{D}$ можно интерпретировать как дифференциальные операторы на $\Gamma(\mathbb{R})$, причем их уместно назвать левоинвариантными, ибо d_n будут левоинвариантными операторами на полугруппах $\Gamma(n,\mathbb{R})$.

2.3.2I. ЗАМЕЧАНИЕ. Все конструкции в доказательстве теоремы 2.3.4 переносятся на группу $U(\infty)$, и в итоге для нее получается следующий аналог теоремы 2.3.4: алгебра $\hat{\mathcal{U}}(u(\infty))$ изоморфна $A\otimes A$. Этот результат не удивителен, поскольку он согласуется с формализмом § I.4. В случае группы $Sp(\infty)$ проходит первая часть доказательства теоремы 2.3.4, и мы получаем вложение алгебры $\hat{\mathcal{U}}(sp(\infty))$ в алгебру A, которая интерпретируется теперь как расширение универсальной обертывающей алгебры для $u(2\infty)$. Следует ожидать, что это вложение по-прежнему является изоморфизмом. Однако прежний способ доказательства сюръективности, основанный на подалгебре Гельфанда-Цетлина, теперь не проходит: дело в том, что эндоморфизму алгебры $\hat{\mathcal{U}}(sp(\infty))$, проистекающему из изоморфизма группы $Sp(\infty)$ на ее подгруппу $Sp_1(\infty)$, отвечает квадрат эндоморфизма ν алгебры A, а не сам этот эндоморфизм, как было раньше. Из-за этого не удается получить аппроксимацию для $\nu^m(A_0)$, где m нечетно. Описанная трудность связана с известной проблемой построения базиса Гельфанда-Цетлина и подалгебры Гельфанда-Цетлина в теории представлений групп $Sp(n)$.

2.3.22. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть K - любая из групп $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$ и T - ее ручное представление. В случае, когда T неприводимо, алгебра $\hat{\mathcal{U}}(k(\infty))$, как следует из ее определения, канонически действует в $H(T)$ ограниченными операторами. В общем же случае даже элементам алгебры Ли $k(\infty)$ отвечают уже неограниченные операторы. Однако можно показать, что алгебра $\hat{\mathcal{U}}(k(\infty))$ канонически действует в подпространстве $H^0_\infty(T)$ аналитических векторов, введенном в I.4.9. Это действие можно задать двумя различными, но эквивалентными способами.

I-ый способ. Пусть $X=(X_n)$ - последовательность, представляющая элемент алгебры $\hat{\mathfrak{U}}(k(\infty))$. Тогда соответствующий оператор $dT(X)$ в $H^0_\infty(T)$ определяется как сильный предел операторов $dT(X_n)$ на векторах из $H^0_\infty(T)$. Отметим, что все $dT(X_n)$ корректно определены на $H^0_\infty(T)$, ибо его элементы являются аналитическими векторами представлений $T \mid K(n)$, см. I.4.9.

2-й способ. Рассмотрим элемент $d=(d_n)\in\mathcal{D}$, отвечающий элементу $X\in\hat{\mathfrak{U}}(k,\infty)$. Будем интерпретировать d как дифференциальный оператор на $\Gamma=\lim\operatorname{proj}\Gamma(n)$ (см. замечание 2.3.20, которое сохраняет силу и для групп $U(\infty)$, $Sp(\infty)$). Чтобы определить $dT(X)\xi$, где $\xi\in H^0_\infty(T)$, выберем n такое, что $\xi\in H^0_n(T)$, затем применим дифференциальный оператор d_n к вектор-функции $\gamma\longrightarrow\mathcal{T}_n(\gamma)\xi$ и возьмем у получившейся функции значение в единице. Данная процедура имеет смысл, поскольку мы знаем, что функция $\gamma\longmapsto\mathcal{T}_n(\gamma)\xi$ является аналитической в окрестности матричного шара $\Gamma(n)$. Можно показать, что результат этой процедуры не зависит от произвола в выборе n; он и принимается в качестве определения вектора $dT(X)\xi$.

Чтобы проиллюстрировать сказанное выше, рассмотрим следующий пример: T является представлением группы $O(\infty)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^\infty,\mu^{\otimes\infty})$, построенным в I.4.7, а последовательность $X=(X_n)$ имеет вид

$$X_n=-\frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}(e_{ij}-e_{ji})^2 .$$

Эта последовательность задает центральный элемент алгебры

$\hat{\mathcal{U}}(O(\infty))$, отвечающий элементу $t^{(1)} \in A_0$ (определение последнего см. в 2.I.20).

Вычисляя оператор $dT(X)$ первым способом, получаем

$$dT(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right),$$

где $x_1, x_2, \ldots$ - координаты в $\mathbb{R}^\infty$ (в вычислении используется закон больших чисел, показывающий, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \equiv 1$$

почти всюду по мере $\mu^{\otimes\infty}$ на $\mathbb{R}^\infty$).

Оператор (I) рассматривался в [I24] , где было показано, что в процессе аппроксимации вероятностного пространства $(\mathbb{R}^\infty, \mu^{\otimes\infty})$ конечномерными вероятностными пространствами (S^{n-1}, ν_n) ,где ν_n обозначает $O(n)$-инвариантную вероятностную меру на сфере S^{n-1} , этот оператор оказывается "пределом" операторов Лапласа на сферах.

Подобно тому, как лапласиан на S^{n-1} задает разложение пространства $L^2(S^{n-1}, \nu_n)$ на неприводимые компоненты относительно группы $O(n)$, дифференциальный оператор (I) управляет разложением пространства представления T группы $O(\infty)$. Это утверждение становится очевидным, если перейти к реализации представления T в пространстве $L^2_{hol}(\ell^2)$ (см. I.4.7); в этой реализации $dT(X)$ оказывается дифференциальным оператором $\sum_{i=1}^{\infty} z_i (\partial/\partial z_i)$.

Глава 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $SO_0(p,\infty)$, $U(p,\infty)$ и $Sp(p,\infty)$

§ 3.1. Абстрактные свойства допустимых представлений

В этом параграфе определяются основные объекты исследования в настоящей главе: группы $SO_0(p,\infty)$, $U(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и их допустимые представления. Результаты параграфа – теорема 3.1.10 о параметризации двойных классов, теорема 3.1.5 о непрерывности допустимых представлений в слабой операторной топологии на группе и теорема 3.1.6 о представлениях конечномерных полугрупп J-сжимающих матриц, ассоциированных с произвольным допустимым представлением, – являются непосредственным обобщением результатов § 1.1.

3.1.1. Как и раньше, через F обозначается $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, а через $E=E(F)$ – сепарабельное гильбертово пространство над F с отмеченным базисом $e_1, e_2, \dots$. Условимся отождествлять F^n с подпространством в E, натянутым на $e_1,\dots,e_n$.

Зафиксируем $p\in\{1,2,\dots\}$ и введем оператор J в E, равный -1 на F^p и $+1$ на ортогональном дополнении к F^p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор, действующий в E или в F^n, где $n\geqslant p$ называется J-унитарным, если он сохраняет индефинитное скалярное произведение $[\xi,\eta]=(J\xi,\eta)$, где $(\cdot,\cdot)$ – гильбертово скалярное произведение.

Группа J-унитарных операторов в F^{p+q}, где $q\in\{1,2,\dots\}$, как обычно, обозначается через $O(p,q)$, $U(p,q)$ или $Sp(p,q)$ (для $F=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ соответственно). Через $SO_0(p,q)$ обозначается связная компонента единицы в $O(p,q)$.

Определим группы $SO_0(p,\infty)$, $U(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ как индуктивные пределы по $q\to\infty$ конечномерных групп $SO_0(p,q)$, $U(p,q)$ $Sp(p,\infty)$ соответственно. Если не оговорено противное, в настоящей главе символом G обозначается любой из этих индуктивных пределов. Элементы группы G суть J-унитарные операторы в E, фиксирующие базисные векторы с достаточно большими номерами. Группа G наделяется топологией индуктивного предела.

Через K обозначается подгруппа в G, фиксирующая $e_1,\dots,e_p$. Она изоморфна одной из групп $SO(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$.

Через $G(n)$, где $n=p+q$ обозначается подгруппа в G, фиксирующая $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots$. Она совпадает с одной из подгрупп $SO_0(p,q)$, $U(p,q)$, $Sp(p,q)$.

3.I.2. Как и в I.I, через $\theta_m(\cdot)$ будет обозначаться левый верхний угол формата $m\times m$ для данной матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор A, действующий в E или в F^{p+q}, называется J-сжатием, если $[A\xi,\xi]\leqslant[\xi,\xi]$ для всех ξ из E или из F^{p+q}.

Будем обозначать через $\Gamma(p,q)$ множество всех J-сжатий в F^{p+q}; в случае $F=\mathbb{R}$ на матрицы из $\Gamma(p,q)$ налагается еще дополнительное условие $\det(\theta_p(\cdot))>0$. Очевидно, θ_{p+q} отображает G в $\Gamma(p,q)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $m=p+q$ и n достаточно велико. А именно, $n\geqslant 2m$ при $F=\mathbb{C},\mathbb{H}$ и $n\geqslant 2m+1$ при $F=\mathbb{R}$. Тогда

I) $\theta_m(G(n))=\Gamma(p,q)$. В частности, $\theta_m(G)=\Gamma(p,q)$.

2) Пусть $g,\tilde g\in G(n)$. Тогда

$$\theta_m(g)=\theta_m(\tilde g)\Longleftrightarrow(\exists\, v,\ w\in K_q(n-p):\ g=v\tilde g w).$$

В частности, если $g,\tilde g\in G$, то

$$\theta_m(g)=\theta_m(\tilde{g}) \Longleftrightarrow (\exists v,\, w\in K_q :\; g=v\tilde{g}w).$$

3) Отображение θ_m из $G(n)$ на $\Gamma(p,q)$ открыто. Тем самым, отображение θ_m из G на $\Gamma(p,q)$ также открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО такое же, как для теоремы I.I.2, со следующими небольшими модификациями. В I.I.2(I) надо заменить 1 на J и рассматривать сопряжение по отношению к индефинитному скалярному произведению. Кроме того, при доказательстве утверждения 3 необходимо воспользоваться тем (тривиальным в контексте теоремы I.I.2) обстоятельством, что при проекции $\theta_m : G(n)\longrightarrow \Gamma(p,q)$ прообраз всякого ограниченного множества снова ограничен.

В качестве следствия мы получаем возможность отождествления непрерывных K_q-биинвариантных функций на группе G с непрерывными функциями на $\Gamma(p,q)$ (см. следствие 2.I.3).

3.I.3. Пусть $\bar{O}(p,\infty)$, $\bar{U}(p,\infty)$, $\overline{Sp}(p,\infty)$ обозначает группу всех J-унитарных операторов в E со слабой (или, что сводится к тому же) сильной операторной топологией. Группы $\bar{U}(p,\infty)$ и $\overline{Sp}(p,\infty)$ связны. Группа $\bar{O}(p,\infty)$ состоит из двух связных компонент; ее связная компонента единицы выделяется условием $\det\theta_p(\cdot)>0$ и обозначается через $\bar{O}_0(p,\infty)$.

Условимся обозначать через $\bar{G}$ любую из групп $\bar{O}_0(p,\infty)$, $\bar{U}(p,\infty)$, $\overline{Sp}(p,\infty)$. Так же, как в I.I.4, проверяется, что G является плотной подгруппой в $\bar{G}$.

3.I.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть T – унитарное представление группы G. Назовем его допустимым представлением, если $T|K$ является ручным представлением группы K

Положим $(n=p+q)$:

$$H_n(T)=H_q(T|K)\,,\;\; H_\infty(T)=\bigcup_n H_n(T).$$

Условие допустимости означает, что $H_\infty(T)$ плотно в $H(T)$.

3.1.5. ТЕОРЕМА. Унитарное представление группы G допустимо тогда и только тогда, когда оно является сужением непрерывного унитарного представления топологической группы $\overline{G}$. Таким образом, допустимые представления группы G и унитарные представления топологической группы $\overline{G}$ - это, по существу, одно и то же.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дублирует доказательство теоремы 1.1.6; вместо теоремы 1.1.2 используется ее аналог - теорема 3.1.2.

Замечание 1.1.8 также остается в силе.

3.1.6. Заметим, что множество $\Gamma(p,q)$ является полугруппой по умножению. В самом деле, это очевидно в случае $F=\mathbb{C},\mathbb{H}$, ибо тогда $\Gamma(p,q)$ состоит из всех J-сжатий в F^{p+q}. Если же $F=\mathbb{R}$, то надо учесть то обстоятельство, что $\Gamma(p,q)$ является связной компонентой единицы в полугруппе всех вещественных J-сжатий, будучи образом связной группы $SO_0(p,n-p)$, где $n\geqslant 2(p+q)+1$ (см. теорему 3.1.2).

Кроме того, в $\Gamma(p,q)$ имеется инволютивный антиавтоморфизм $\gamma\longmapsto\gamma^{\#}$, определяемый как сопряжение относительно $[\cdot,\cdot]$. Он согласован с антиавтоморфизмом $g\longmapsto g^{-1}$ группы G относительно ее проекции на $\Gamma(p,q)$.

Пусть теперь T - допустимое представление группы G и n настолько велико, что $H_n(T)\neq\{0\}$, т.е. $n\geqslant p+\mathrm{cond}\,(T\,|\,K)$.

Используя теорему 3.1.2 и рассуждая точно так же, как в 1.1.9, получаем: существует отображение $\mathcal{T}_n$ полугруппы $\Gamma(p,n-p)$ в полугруппу сжатий гильбертова пространства $H_n(T)$, однозначно определенное условием

$$\mathcal{T}_n(\theta_n(g))=P_n\,T(g)\,|\,H_n(T),\quad g\in G,$$

где P_n – ортопроектор на $H_n(T)$. Более того, $\mathcal{T}_n$ переводит единицу полугруппы в единичный оператор, инволюцию $\gamma \mapsto \gamma^{\#}$ – в сопряжение операторов и непрерывно в слабой (и даже в сильной) операторной топологии. Следующий результат получается точно так же, как теорема I.I.I0.

ТЕОРЕМА. Для любого $n \geqslant p + cond(T|K)$ отображение $\mathcal{T}_n$ является представлением инволютивной полугруппы $\Gamma(p, n-p)$ сжатиями пространства $H_n(T)$.

Будем говорить, что $\mathcal{T}_n$ ассоциированы с T.

§ 3.2. Необходимые сведения об унитарных представлениях со старшим весом

В этом параграфе определяются унитарные представления со старшим весом групп $U(p,q)^{\sim}$, которые в дальнейших построениях будут играть ту же роль, что полиномиальные представления групп $U(n)$ – в контексте главы I. Отмечаются некоторые простые свойства этих представлений и формулируется результат их классификации, доказанный в работах [44, 77].

3.2.I. Пусть $\mathcal{G}$ – конечномерная связная редуктивная вещественная группа Ли; $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли; $\mathfrak{g} = k \oplus \mathcal{Y}$ – разложение Картана; $\mathcal{K}$ – подгруппа в $\mathcal{G}$, отвечающая подалгебре k. Группа $\mathcal{K}$ компактна или (если $\mathcal{G}$ имеет бесконечный центр) компактна по модулю центра; в обоих случаях все ее неприводимые унитарные представления конечномерны. Пусть $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ – комплексификация алгебры $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{b}$ – борелевская подалгебра в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$; $\mathfrak{b} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{n}$ – разложение в сумму картановской подалгебры и нильпотентного радикала.

Пусть V – неприводимое унитарное представление группы $\mathcal{G}$ и $H_{fin}(V)$ – подпространство $\mathcal{K}$-конечных векторов в $H(V)$. Как известно [78, 79, 127], $H_{fin}(V)$ обладает канонической структурой неприводимого $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-модуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что V – унитарное представление со старшим весом относительно $\mathfrak{b}$, если $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ – модуль $H_{fin}(V)$ является модулем со старшим весом относительно $\mathfrak{b}$, т.е. обладает ненулевым вектором ξ, аннулируемым подалгеброй $\mathfrak{n}$ и являющимся собственным для $\mathfrak{h}$ с некоторым весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Как хорошо известно, для каждого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ имеется ровно один, с точностью до эквивалентности, неприводимый $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-модуль со старшим весом λ; он будет здесь обозначаться через $L(\lambda)$ (см. Диксмье [16], § 7.1).

Если $\mathcal{G}$ односвязна, то функтор $V \longmapsto H_{fin}(V)$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между неприводимыми унитарными представлениями со старшим весом и теми $L(\lambda)$, которые оказываются унитаризуемыми $\mathfrak{g}$-модулями.

Задачей описания унитарных представлений со старшим весом (или, что сводится к тому же, унитаризуемых модулей $L(\lambda)$) занимались многие специалисты по теории представлений; я сошлюсь здесь только на работы [86, 78]. Окончательная классификация была получена в [78]. Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(p,q)$, который нужен в этой главе, был ранее разобран автором [44]. Доказательства результатов, сообщаемых ниже, можно найти в [86, 44]).

3.2.2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(p,q)$, $k = \mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q)$, $n = p+q$. Тогда $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. В качестве $\mathfrak{b}$ выбирается верхнетреугольная подалгебра, в качестве $\mathfrak{h}$ – подалгебра диагональных матриц. Вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ является вектором $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ из $\mathbb{C}^n$. Для унитаризуемости модуля $L(\lambda)$ необходимы следующие условия:

$$\lambda \in \mathbb{R}^n; \qquad \begin{array}{l} \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \{0, 1, \ldots\} \\ i = 1, \ldots, p-1, \ p+1, \ldots, n-1. \end{array} \tag{I}$$

Вес λ, удовлетворяющий (I), определяется $n-2$ дискретными параметрами $\lambda_i - \lambda_{i+1}$, указанными в (I), и еще двумя непрерывными параметрами λ_1 и λ_2. Но фактически существен только один непрерывный параметр (а именно, разность $\lambda_1 - \lambda_n$), поскольку прибавление ко всем координатам λ_i константы сводится к тензорному умножению модуля $L(\lambda)$ на одномерный модуль.

Для произвольного λ, удовлетворяющего (I), положим

$$a(\lambda) = card\{i : i = 2, \ldots, p, \quad \lambda_i \neq \lambda_1\} \tag{2}$$

$$b(\lambda) = card\{j : j = p+1, \ldots, n-1, \ \lambda_j \neq \lambda_n\} \tag{3}$$

$$c(\lambda) = min\,(p + b(\lambda), \ q + a(\lambda)) - 1. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА. Пусть λ – вес, удовлетворяющий (I). Необходимое и достаточное условие унитаризуемости модуля $L(\lambda)$ состоит в том, что $\lambda_n - \lambda_1$ должно быть или целым числом $\geqslant a(\lambda) + b(\lambda)$, или вещественным числом, строго большим $c(\lambda)$.

Следует отметить, что всегда $c(\lambda) \geqslant a(\lambda) + b(\lambda)$. Поэтому при фиксированных дискретных параметрах $\lambda_i - \lambda_{i+1}$, $i \neq p$ множество допустимых значений для $\lambda_n - \lambda_1$ состоит из луча и конечного числа целых точек.

3.2.3. Пусть λ – вес, удовлетворяющий 3.2.2(I). Тогда он является доминантным весом для подалгебры $k_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(p, \mathbb{C}) \oplus \oplus\, \mathfrak{gl}(q, \mathbb{C})$ и ему отвечает неприводимый конечномерный

$k_{\mathbb{C}}$-модуль; обозначим последний через $\Pi(\lambda)$. Рассмотрим разложение

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathcal{G}_- \oplus k_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{G}_+ =$$

$$\stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (I)$$

где подразумевается, что матрицы из $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ разбиты на блоки в соответствии с разбиением $n = p + q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным подмодулем Верма $M(\lambda)$ со старшим весом λ называется индуцированный $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-модуль

$$M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{G}_{\mathbb{C}})} \Pi(\lambda), \qquad (2)$$

где $\Pi(\lambda)$ интерпретируется как $\mathcal{U}(k_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{G}_+)$-модуль с тривиальным действием подалгебры $\mathcal{G}_+$.

Модуль $L(\lambda)$ либо совпадает с $M(\lambda)$, либо является его единственным неприводимым фактор-модулем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что $L(\lambda)$ невырожден, если он совпадает с $M(\lambda)$ (т.е. если $M(\lambda)$ неприводим), и вырожденным – в противном случае.

ТЕОРЕМА. Унитаризуемый модуль $L(\lambda)$ невырожден тогда и только тогда, когда $\lambda_n - \lambda_1 > c(\lambda)$.

3.2.4. Пусть λ удовлетворяет 3.2.2(I). Рассмотрим $M(\lambda)$ как $k_{\mathbb{C}}$-модуль.

ЛЕММА. I) Этот модуль изоморфен $\Pi(\lambda) \otimes S(\mathcal{G}_-)$.

2) $k_{\mathbb{C}}$-модуль $\Pi(\lambda)$ является минимальным $k_{\mathbb{C}}$-типом в

$M(\lambda)$ и в $L(\lambda)$ в следующем смысле. Во-первых, он входит с кратностью 1. Во-вторых, если $\Pi(\mu)$ - какой-либо другой неприводимый подмодуль (или, как говорят, $k_{\mathbb{C}}$-тип) в $M(\lambda)$ или в $L(\lambda)$, то

$$\lambda_i \geqslant \mu_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p); \quad \mu_j \geqslant \lambda_j \quad (p+1 \leqslant j \leqslant n). \tag{I}$$

Причем хотя бы для одного i и для одного j неравенства строгие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение немедленно следует из определения $M(\lambda)$ и разложения 3.2.3(I). Второе же утверждение вытекает из первого.

§ 3.3. Голоморфные представления группы $U(p,\infty)^{\sim}$

В теории допустимых представлений групп $SO_0(p,\infty)$, $U(p,\infty)$ и $Sp(p,\infty)$ голоморфные представления групп $U(p,\infty)^{\sim}$ будут играть ту же роль, что голоморфные представления группы $U(\infty)$ - в теории ручных представлений групп $SO(\infty)$, $U(\infty)$ и $Sp(\infty)$.

Основной результат параграфа теоремы 3.3.3 и 3.3.5 состоит в том, что неприводимые голоморфные представления группы $U(p,\infty)^{\sim}$ суть индуктивные пределы при $q \to \infty$ неприводимых унитарных представлений со старшим весом конечномерных групп $U(p,q)^{\sim}$ (подобно тому, как неприводимые голоморфные представления группы $U(\infty)$ суть индуктивные пределы неприводимых полиномиальных представлений групп $U(n)$).

Важная промежуточная теорема 3.3.4 аналогична теореме I.4.4.

В теореме 3.3.6 доказано, что алгебра фон Неймана произвольного голоморфного представления всегда имеет тип I; этот факт будет использован в следствии 3.5.2.

3.3.1. В этом параграфе предполагается, что $p\in\{1,2,\dots\}$ зафиксировано, q переменно и $n=p+q$.

Определим $\mathbb{Z}$-накрытие $U(p,\infty)^\sim$ над $U(p,\infty)$ как индуктивный предел накрывающих групп $U(p,q)^\sim$, где $q\to\infty$. Это накрытие характеризуется тем, что прообраз подгруппы $U(p)\times U(\infty)$ есть $U(p)^\sim\times U(\infty)$. Отсюда видно, что подгруппа $U(\infty)=\{1\}\times U(\infty)$ группы $U(p,\infty)$ допускает поднятие в $U(p,\infty)^\sim$. Это делает корректным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Унитарное представление группы $U(p,\infty)^\sim$ назовем голоморфным, если его сужение на подгруппу $U(\infty)$ голоморфно в смысле определения 1.4.1.

В этом параграфе будет получено полное описание голоморфных представлений.

3.3.2. Рассмотрим бесконечную последовательность $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$, удовлетворяющую следующему условию:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R};\\
&\lambda_{p+1},\lambda_{p+2},\dots\in\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\dots\};\\
&\lambda_i-\lambda_{i+1}\in\mathbb{Z}_+ \text{ для } i=1,\dots,p-1,p+1,\dots\\
&\lambda_j=0 \text{ для достаточно больших } j>p.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Положим еще (ср. 3.2.2(2)-(4)):

$$a(\lambda)=\operatorname{card}\{i: i=2,\dots,p,\ \ \lambda_i\neq\lambda_1\} \tag{2}$$

$$b(\lambda)=\operatorname{card}\{j: j=p+1,p+2,\dots,\ \lambda_j\neq 0\} \tag{3}$$

$$c(\lambda)=p+b(\lambda)-1. \tag{4}$$

Пусть λ^n обозначает $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Заметим, что $a(\lambda)=a(\lambda^n)$ для всех n и что $b(\lambda)=b(\lambda^n), c(\lambda)=c(\lambda^n)$ для всех достаточно больших n.

Обозначим через $\mathcal{V}_p$ множество всех λ, удовлетворяющих помимо (I), еще следующему дополнительному условию: $-\lambda_1$ есть либо целое число $\geqslant a(\lambda)+b(\lambda)$, либо вещественное число $>c(\lambda)$. По теореме 3.2.2, это условие равносильно тому, что $L(\lambda^n)$ является унитаризуемым модулем (и тем самым определено унитарное представление со старшим весом $V(\lambda^n)$ группы $U(p,q)^\sim$ для всех достаточно больших n). Впрочем, как показывает небольшое размышление, это верно вообще для всех $n>p$.

ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для каждого $\lambda\in\mathcal{V}$ существует неприводимое унитарное представление $V(\lambda)$ группы $U(p,\infty)^\sim$, являющееся индуктивным пределом представлений $V(\lambda^n)$ групп $U(p,q)^\sim$. Оно будет называться унитарным представлением группы $U(p,\infty)^\sim$ со старшим весом λ (невырожденным, если $-\lambda_1>c(\lambda)$, и вырожденным – в противном случае).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ -подмодуль в $L(\lambda^{n+1})$, порожденный старшим вектором, является циклическим $\mathfrak{u}(p,q)$ -унитаризуемым модулем и, значит, изоморфен $L(\lambda^n)$. Это позволяет отождествить $V(\lambda^n)$ с циклической оболочкой старшего вектора представления $V(\lambda^{n+1})$ относительно подгруппы $U(p,q)^\sim$ в $U(p,q+1)^\sim$. Тем самым, представления $V(\lambda^n)$ составляются в индуктивный предел. Неприводимость представления $V(\lambda)$ есть следствие общего результата об индуктивных пределах (см. I.2.4).

ТЕОРЕМА. Пусть $V=V(\lambda)$ – неприводимое унитарное представление группы $U(p,\infty)^\sim$ со старшим весом $\lambda\in\mathcal{V}_p$. Тогда V голоморфно в смысле определения 3.3.I.

Обратное утверждение доказано в 3.3.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть ξ – старший вектор представления V, т.е. общий старший вектор всех допредельных представлений $V(\lambda^n)$. Покажем, что ξ инвариантен относительно подгруппы $U_{b(\lambda)}(\infty)$ в $U(\infty)$. В самом деле, из определения модуля $L(\lambda^n)$ как фактор-модуля обобщенного модуля Верма $M(\lambda^n)$ (см. 3.2.2) видно, что для любого $q > b(\lambda)$ наш вектор ξ является старшим вектором неприводимого полиномиального представления группы $U(q) \subset U(\infty)$ со старшим весом

$$(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+b(\lambda)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{q-b(\lambda)}).$$

Стало быть, для любого $q > b(\lambda)$ он инвариантен относительно подгруппы $U_{b(\lambda)}(\infty) \cap U(q)$, что доказывает наше утверждение.

б) $V|U(\infty)$ является ручным представлением. В самом деле, пространство $H_\infty(V|U(\infty))$ нетривиально, ибо по доказанному, оно содержит вектор ξ. Будучи инвариантным относительно всей группы $U(p,\infty)^\sim$, оно должно быть плотно в $H(V)$: здесь действует тот же механизм, что в I.I.5.

в) Из первого утверждения леммы 3.2.4 следует, что для любого n представление $V(\lambda^n)$ разлагается по полиномиальным представлениям подгруппы $U(q)$, $q = n - p$. А отсюда следует, что $V|U(q)$ разлагается по полиномиальным представлениям для всех q. В силу теоремы I.4.2 $V|U(\infty)$ голоморфно.

3.3.4. Зафиксируем произвольное голоморфное представление V группы $U(p,\infty)^\sim$. Пусть V_n обозначает естественное представление подгруппы $U(p,n-p)^\sim$ в $H_n(V)$, где $H_n(V) = H_{n-p}(V|U(\infty))$; предполагается, что $n-p \geqslant cond(V|U(\infty))$. Пусть P_n обозначает ортопроектор на $H_n(V)$ в $H(V)$.

ТЕОРЕМА. При этих предположениях имеем: $P_n V'' P_n | H_n(V) = (V_n)''$. В частности, если V неприводимо, то V_n также неприводимо (ср. теорема I.4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть S – унитарное представление группы $U(p,k-p)^{\sim}$, где $k>p$, такое, что $S|U(k-p)$ разлагается по полиномиальным представлениям группы $U(k-p)$. Разложим S в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений группы $U(p,k-p)^{\sim}$. Тогда почти все эти представления суть представления со старшим весом.

В самом деле, указанное свойство представления S наследуется при его дезинтегрировании. Поэтому можно сразу считать, что S неприводимо. Рассмотрим $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C})$-модуль $H_{fin}(S)$ (см. 3.2.I). Ввиду предположения о полиномиальности, в этом модуле найдется неприводимое конечномерное представление подалгебры $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})\oplus \oplus\mathfrak{gl}(k-p,\mathbb{C})$, старший вес μ которого минимален в следующем смысле: неотрицательное число $\mu_{p+1}+\ldots+\mu_k$ имеет минимально возможное значение. Старший вектор этого представления аннулируется всеми генераторами e_{ij} алгебры $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C})$, где $1\leq i\leq p$, $p+1\leq j\leq k$, в противном случае мы могли бы уменьшить координату μ_j на единицу, что невозможно. Стало быть, наш вектор является старшим для всего модуля $H_{fin}(S)$, т.е. S эквивалентно $V(\mu)$.

б) Пусть $k>n>p$. Рассмотрим в группе $U(p,k-p)^{\sim}$ подгруппу $\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$, изоморфную $U(k-n)$. Пусть $V(\mu)$ – неприводимое унитарное представление группы $U(p,k-p)^{\sim}$ со старшим весом $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_k)$, причем $\mu_k\geq 0$. Обозначим через P_{nk} оператор усреднения по указанной подгруппе: он проектирует $H(V(\mu))$

на подпространство инвариантов этой подгруппы. Утверждается, что $P_{nk} \neq 0$ равносильно условию $\mu_{n+1} = \ldots = \mu_k = 0$, и что при выполнении этого условия естественное представление подгруппы $U(p, n-p)^{\sim}$ в $P_{nk} H(V(\mu))$ неприводимо и эквивалентно $V(\mu) | U(p, n-p)^{\sim}$.

В самом деле, $V(\mu) | U(p, n-p)^{\sim}$ разлагается в дискретную прямую сумму неприводимых представлений вида $V(\lambda)$ с конечными кратностями (см. [44]). Предположим, что $P_{nk} \neq 0$ и рассмотрим какое-нибудь $V(\lambda)$, содержащееся в $U(p, n-p)^{\sim}$-инвариантном подпространстве $P_{nk} H(V(\mu))$. Пусть ξ – его старший вектор. Тогда ξ является весовым вектором модуля $H_{fin}(V(\mu)) = L(\mu)$, причем последние $k-n$ координат его веса равны нулю. Но в силу предположения $\mu_k \geqslant 0$, у всех весов модуля $L(\mu)$ последние $k-n$ (и даже $k-p$) координат неотрицательны. Поэтому то же рассуждение, что в пункте а), показывает, что ξ совпадает со старшим вектором представления $V(\mu)$. Отсюда видно, что $\lambda = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ и что $P_{nk} H(V(\mu))$ состоит из одного представления $V((\mu_1, \ldots, \mu_n))$.

Обратно, если $\mu_{n+1} = \ldots = \mu_k = 0$, то старший вектор представления $V(\mu)$ инвариантен относительно указанной выше подгруппы, изоморфной $U(k-n)$, и, значит, $P_{nk} \neq 0$.

в) Вернемся к нашему голоморфному представлению V . Пусть n – такое, что в формулировке теоремы, и $k > n$. В силу теоремы 1.4.2, примененной к представлению $V | U(\infty)$, представление V_k группы $U(p, k-p)^{\sim}$ в $H_k(V)$ обладает свойством, предполагаемым у представления S из пункта а). Стало быть, V_k разлагается в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений вида $V(\mu)$, где $\mu_k \geqslant 0$. Пусть P_{nk} – проектор в пространстве $H_k(V) = H(V_k)$, введенный в пункте б). Из результата этого пункта следует, что редуцированная алгебра фон Неймана $P_{nk} V_k'' P_{nk}$ в пространстве $P_{nk} H(V_k)$ совпадает с алгеброй фон Неймана, порожденной сужением представления $V_k \mid U(p, n-p)^{\sim}$ на это подпространство: здесь действует тот же механизм, что в теореме I.4.4.

С другой стороны заметим, что P_{nk} есть попросту ортопроектор $H_k(V) \to H_n(V)$. В самом деле, это сводится к тому очевидному факту, что у представления ρ_λ группы $U(\infty)$, где $\lambda \neq 0$, нет ненулевых инвариантных векторов относительно подгруппы вида $\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$, где левый верхний блок имеет конечный формат (в рассматриваемой ситуации – $(k-n) \times (k-n)$).

Таким образом, $P_n T_k'' P_n \mid H_n(V) = T_n''$. Поскольку это верно для любого $k > n$, получаем утверждение теоремы.

3.3.5. ТЕОРЕМА (обратная к теореме 3.3.3). Если V – неприводимое голоморфное представление группы $U(p, \infty)^{\sim}$, то оно есть представление со старшим весом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цепочку представлений V_n групп $U(p, n-p)^{\sim}$, реализующихся в пространствах $H_n(V)$. По теореме 3.3.4 все они неприводимы. Более того, результат пункта а) доказательства этой теоремы показывает, что каждое V_n обладает старшим весом. Наконец, результат пункта б) в 3.3.4 показывает, что эти старшие веса имеют вид λ^n, где λ фиксировано, и что V есть $V(\lambda)$.

3.3.6. ТЕОРЕМА. Если V – произвольное голоморфное представление группы $U(p, \infty)^{\sim}$, то порожденная им алгебра фон Неймана V'' имеет тип I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предполагать, что $H_n(V)$ является циклическим подпространством представления V

для некоторого n. Но тогда по теореме 3.3.4 представления V и V_n имеют изоморфные коммутанты. Поскольку $U(p,n-p)^{\sim}$, как всякая связная редуктивная группа, есть группа типа I, $T'=T'_n$ есть алгебра фон Неймана типа I. Значит, T'' имеет тип I.

§ 3.4. Конструкция допустимых представлений

Основным результатом параграфа является теорема 3.4.3. Она утверждает, что неприводимые голоморфные представления группы $U(p,\infty)^{\sim}$ остаются неприводимыми и попарно неэквивалентными после ограничения на подгруппу $SO_0(p,\infty)$. Аналогичные утверждения имеют место для групп $U(p,\infty)$ и $Sp(p,\infty)$.

Доказательство опирается на теорему 1.2.2, в которой подобное явление было установлено для ручных представлений.

3.4.1. Пусть, как и в § 3.1, G – одна из групп $SO_0(p,\infty)$, $U(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$. Сейчас будет построено вложение группы G в некоторую группу G^*, ср. 1.4.5(1). Группа G^* является объединением своих конечномерных подгрупп $G^*(n)$, и подгруппа $G(n)\subset G$, определенная в 3.1.1, оказывается подгруппой в $G^*(n)$.

1) Пусть $G=SO_0(p,\infty)$. Тогда $G^*=U(p,\infty)^{\sim}$ и $G^*(n)=U(p,n-p)^{\sim}$, а вложение $G\to G^*$ определяется как поднятие канонического вложения $SO_0(p,\infty)\to U(p,\infty)$ в накрывающую группу $U(p,\infty)^{\sim}$.

Для проверки того, что это поднятие действительно существует, надо показать, что $SO_0(p,q)$ допускает понятие в $U(p,q)^{\sim}$. А это утверждение редуцируется к аналогичному утверждению для максимальных компактных подгрупп, и в конечном счете все сводится к возможности поднятия подгруппы $SO(p)\subset U(p)$ в $U(p)^{\sim}$. Но последнее очевидно, ибо $SO(p)$ содержится в односвязной подгруппе $SU(p)$.

2) Пусть $G=U(p,\infty)$. Обозначим через Z ядро проекции $U(p)^{\sim}\to U(p)$, изоморфное группе $\mathbb{Z}$, и положим

$$G^{*}=(U(p,\infty)^{\sim}\times U(p,\infty)^{\sim})/\{(z,z^{-1}):z\in Z\}. \qquad (1)$$

Подгруппы $G^{*}(n)$ определяются аналогично, с заменой "∞" на "$n-p$". Группа G^{*} является накрытием над $U(p,\infty)\times U(p,\infty)$ со слоем $\mathbb{Z}$. В случае необходимости будем обозначать ее также через $[U(p,\infty)\times U(p,\infty)]^{\sim}$.

Вложение $G\longrightarrow G^{*}$ есть поднятие вложения

$$U(p,\infty)\ni g\mapsto\langle g,\bar{g}\rangle\in U(p,\infty)\times U(p,\infty) \qquad (2)$$

в группу G^{*}. Его существование очевидно.

3) Пусть $G=Sp(p,\infty)$. Тогда $G^{*}=U(2\infty,2\infty)^{\sim}$ – индуктивный предел групп $G^{*}(n)=U(2p,2n-2p)^{\sim}$. Отождествление пространств $\mathbb{H}^{p+q}$ и $\mathbb{C}^{2p+2q}$ порождает вложение $Sp(p,q)\to U(2p,2q)$, которое допускает поднятие в $U(2p,2q)^{\sim}$ ввиду односвязности группы $Sp(p,q)$. Это дает требуемое вложение $G\to G^{*}$. Следует подчеркнуть, что G^{*} изоморфна группа $U(2p,\infty)^{\sim}$.

3.4.2. Сопоставляя данное определение вложения $G\to G^{*}$ с каноническим вложением $K\to K^{*}$ из I.4.5, мы видим, что имеется очевидное вложение $K^{*}\to G^{*}$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & K^* \end{array} \qquad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Унитарное представление группы G^* называется голоморфным, если его сужение на подгруппу K^* является голоморфным в смысле определений, данных в 1.4.1 и 1.4.5.

Результаты § 3.3 доставляют полное описание категории голоморфных представлений группы G^*. В самом деле, в первом варианте G^* есть в точности группа $U(p,\infty)^\sim$, рассматривавшаяся в § 3.4. В третьем варианте G^* изоморфна группе $U(2p,\infty)^\sim$. Ясно также, что результаты § 3.3 легко переносятся и на группу G^* во втором варианте. В частности, ее неприводимые голоморфные представления имеют вид $V(\lambda)\times V(\mu)$, где $\lambda,\mu\in\mathbb{V}_p$, причем $\lambda_1-\mu_1\in\mathbb{Z}$: это условие, очевидно, означает тривиальность внешнего тензорного произведения $V(\lambda)\times V(\mu)$ на подгруппе, по которой происходит факторизация в 3.4.1(1).

Из § 3.3 следует, что во всех трех вариантах группы G^* все ее голоморфные представления имеют тип I и допускают разложение в прямой интеграл неприводимых голоморфных представлений.

3.4.3. В разделе 3.4.4 , а также в главе 4 будет использована следующая элементарная лемма (в качестве ссылки можно указать, например, Бурбаки [4], гл.III, § 6, упр. 25).

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{G}$ – произвольная конечномерная связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ – ее подгруппы с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$. Если $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ порождают $\mathfrak{g}$, то $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ алгебраически порождают $\mathcal{G}$.

3.4.4. ТЕОРЕМА. 1) Если V – голоморфное представление группы G^* и $T = V|G$, то T допустимо и $T'' = V''$, $T' = V'$. В частности, если V неприводимо, то T также неприводимо.

2) Если V_1 и V_2 – два неприводимых голоморфных представления группы G^*, которые не эквивалентны друг другу, то неприводимые представления $T_1 = V_1|G$ и $T_2 = V_2|G$ группы G также не эквивалентны.

3) Если допустимое представление T группы G может быть записано в виде $V|G$, где V – голоморфное представление группы G^* в том же пространстве, то такое V определено однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Покажем, что G^* алгебраически порождается своими подгруппами G и K^*. В самом деле, достаточно установить, что для любого $n > p$ группа $G^*(n)$ порождается своими подгруппами $G(n)$ и $K^*(n) = K^* \cap G^*(n)$. Заметим теперь, что алгебра Ли группы $G(n)$ является максимальной собственной подалгеброй в алгебре Ли группы $G^*(n)$. Ввиду связности группы $G^*(n)$, мы можем применить лемму 3.4.3, положив в ней $\mathcal{G} = G^*(n)$, $\mathcal{G}_1 = G(n)$, $\mathcal{G}_2 = K^*(n)$.

б) Теперь наша теорема легко выводится из теоремы I.4.5. В самом деле, докажем I). Допустимость представления T очевидна. Далее, результат пункта а) показывает, что $V' = T' \cap (V|K^*)'$. С другой стороны, $V|K^*$, будучи голоморфным расширением ручного представления $V|K = T|K$, имеет общий с ним коммутант, который, тем самым, содержит T'. Значит, $V' = T'$, откуда следует также равенство $V'' = T''$.

Утверждение 2) следует из утверждения I), примененного к представлению $V = V_1 \oplus V_2$.

Наконец, утверждение 3) вытекает из пункта а) и единственности голоморфного расширения ручного представления $V|K = T|K$.

3.4.5. Доказанная теорема вместе с результатом § 3.3 доставляет для каждой из групп G серию неприводимых допустимых представлений, попарно не эквивалентных друг другу. Они получаются редукцией неприводимых голоморфных представлений соответствующей надгруппы G^*. Введем для них следующие обозначения:

$$T(\lambda)=V(\lambda)|G\ ,\ \lambda\in \mathbb{Y}_\rho\ ,\ \text{ если }\ G=SO_0(\rho,\infty)\ ; \tag{1}$$

$$T(\lambda,\mu)=[V(\lambda)\times V(\mu)]|G,\ \lambda,\mu\in \mathbb{Y}_\rho\ ,\quad \lambda_1-\mu_1\in\mathbb{Z}\ ,\quad \text{если}\quad G=U(\rho,\infty)\ ; \tag{2}$$

$$T(\lambda)=V(\lambda)|G\ ,\ \lambda\in \mathbb{Y}_{2\rho}\ ,\ \text{если }\ G=Sp(\rho,\infty)\ . \tag{3}$$

§ 3.5. Классификационная теорема

В этом параграфе показано, что конструкция § 3.4 охватывает все неприводимые допустимые представления и что произвольное допустимое представление принадлежит типу I (теорема 3.5.I и ее следствия).

Это центральный результат главы. Его доказательство основано на полугрупповом методе § 3.I и замечательной теореме Люшера и Мака [96] . Последняя утверждает, что всякое инволютивное представление конечномерной "полугруппы Ли" сжимающими операторами получается аналитическим продолжением из унитарного представления некоторой группы Ли.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что описание всех допустимых представлений достигается без обращения к сложной и до сих пор не завершенной классификационной теории унитарных представлений конечномерных групп $SO_0(p,q), U(p,q), Sp(p,q)$ (все, что нам нужно знать из "конечномерной" теории, это описание унитарных представлений со старшим весом групп $U(p,q)^{\sim}$).

Наоборот, из результатов о представлениях бесконечномерных групп можно извлекать новую информацию о представлениях допредельных конечномерных групп. Эта идея используется в § 3.7.

3.5.1. В этом параграфе по-прежнему G – любая из групп $SO_0(p,\infty), U(p,\infty), Sp(p,\infty)$, а G^* – ее надгруппа, определенная в 3.4.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть T – допустимое представление группы G . Его голоморфным расширением называется голоморфное представление T^* группы G^* такое, что $T^* \mid G = T$.

В силу теоремы 3.4.4 3), голоморфное расширение, коль скоро оно существует, единственно.

ТЕОРЕМА. Всякое допустимое представление T группы G обладает голоморфным расширением.

Доказательство приводится ниже, в разделах 3.5.6-3.5.7. Основную роль в нем играют представления $\mathcal{T}_n$ полугрупп J-сжатий $\Gamma(p, n-p)$, ассоциированные с T (см. теорему 3.1.6). В разделах 3.5.3 - 3.5.5 излагается подготовительный материал.

СЛЕДСТВИЯ. 1) Всякое неприводимое допустимое представление группы G имеет вид, указанный в 3.4.5.

2) Категория допустимых представлений группы G (или, что сводится к тому же, категория унитарных представлений топологической группы $\overline{G}$, см. 3.1.3) эквивалентна категории голоморфных представлений группы G^* .

3) Всякое допустимое представление группы G имеет тип I. Тем самым, топологическая группа $\overline{G}$ является группой типа I.

Эти утверждения вытекают из теорем 3.5.1, 3.4.4, 3.3.6 и 3.1.5.

3.5.3. Предположим, что задана локальная группа Ли L с инволютивным автоморфизмом σ ее алгебры Ли ℓ. Тем самым, алгебра ℓ снабжается $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $\ell=\ell_0\oplus\ell_1$. Подмножество $\Gamma\subset L$ называется локальной полугруппой в L, если для достаточно малой окрестности единицы $\mathcal{U}\subset L$ выполнено условие $(\Gamma\cap\mathcal{U})^2\subset\Gamma$. Предположим, что в L имеется локальная полугруппа вида $\Gamma=L_0\exp C$, где $L_0\subset L$ – локальная подгруппа в L, отвечающая ℓ_0, и C – замкнутый выпуклый конус с непустой внутренностью, лежащий в ℓ_1 и инвариантный относительно глобальной группы Ли, отвечающей L_0. В действительности, как показано в [45], из существования конуса с указанными свойствами уже следует, что $L_0\exp C$ является локальной полугруппой. Но поскольку в дальнейшем речь пойдет о совершенно конкретных локальных полугруппах, этот результат не будет использоваться.

Обозначим через $g\mapsto g^{\#}$ инволютивный антиавтоморфизм локальной группы L с дифференциалом $-\sigma$. Он сохраняет локальную полугруппу Γ, является тождественным отображением на $\exp C$ и сводится к $g\mapsto g^{-1}$ на L_0.

Пусть H – комплексное гильбертово пространство и $\Gamma(H)$ – полугруппа всех его сжатий, наделенная слабой операторной топологией. Предположим, что задан непрерывный морфизм $\mathcal{T}:\Gamma\to\Gamma(H)$, сохраняющий единицу и такой, что $\mathcal{T}(\gamma^{\#})=\mathcal{T}(\gamma)^{*}$ для $\gamma\in\Gamma$ (поскольку Γ – локальная полугруппа, все это происходит вблизи единицы). Тогда $\mathcal{T}|L_0$ является унитарным представлением локальной группы Ли L_0. С другой стороны, каждый элемент X конуса C порождает локальную однопараметрическую полугруппу $\{\mathcal{T}(\exp tX):t\geqslant 0\}$ самосопряженных сжатий. У нее имеется генератор $\mathcal{T}(X)$; это самосопряженный (вообще говоря, неограниченный) неположительный оператор $\mathcal{T}(X)$ такой, что

$$\mathcal{T}(exp(tX)) = exp(t\mathcal{T}(X)),\ t \geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь алгебру Ли $\ell^* = \ell_0 \oplus i\ell_1$, лежащую в комплексификации алгебры ℓ, и отвечающую ей локальную группу Ли L^*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что унитарное представление T^* локальной группы L^*, действующее в пространстве H представления $\mathcal{T}$ локальной полугруппы Γ, согласовано с ним, если выполнены следующие два условия:

$$\mathcal{T} \mid L_0 = T^* \mid L_0 \tag{I}$$

$$T^*(exp(iX)) = exp(i\mathcal{T}(X)) \quad \forall X \in C. \tag{2}$$

Ясно, что такое T^*, коль скоро оно существует, единственно.

Теорема Люшера-Мака [96]. В указанных выше предположениях представление T^*, согласованное с $\mathcal{T}$, всегда существует.

Очевидно, T^* можно продолжить до представления односвязной глобальной группы Ли $\widetilde{L}^*$, отвечающей L^*.

3.5.4. ЛЕММА. Полугруппы J-сжатий $\Gamma(p,q)$(см. 3.I.2) или полугруппы $\Gamma(q)$ обычных сжатий (см. I.I.2), интерпретируемые как локальные полугруппы, удовлетворяют всем условиям, перечисленным в 3.5.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы не говорить отдельно о полугруппах $\Gamma(q)$, разрешим временно параметру $p \in \{1, 2, \dots\}$ принимать еще и нулевое значение. Тогда $\Gamma(q)$ можно будет рассматривать как частный случай полугруппы $\Gamma(p,q)$.

Пусть $\ell = gl(p+q, F)$; ℓ_0 – алгебра Ли группы $G(n)$, $n = p+q$ (см. 3.1.1), т.е. одна из алгебр $o(p,q)$, $u(p,q)$, $sp(p,q)$; ℓ_1 – дополнительное к ℓ_0 подпространство в ℓ состоящее из J-симметрических матриц над F ; $C \subset \ell_1$ – конус J-неположительных матриц, т.е. таких матриц X, что $JX = (JX)^* \leq 0$.

Надо показать, что $\Gamma(p,q)$ локально совпадает с $L_0 \exp C$. В случае $F = \mathbb{C}$ хорошо известно, что всякая обратимая матрица из $\Gamma(p,q)$ представляется в виде произведения матрицы из L_0 (т.е. $U(p,q)$) и экспоненты элемента конуса, причем такое разложение единственно, см. , например, [58] . Это утверждение легко переносится на случай $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{H}$: достаточно заметить, что $gl(p+q, \mathbb{R})$ выделяется инволюцией из $g(p+q, \mathbb{C})$, а $g(p+q, \mathbb{H})$ – из $gl(2(p+q), \mathbb{C})$. Отсюда следует лемма.

Следует подчеркнуть то важное обстоятельство, что локальная группа L^* , ассоциированная с ℓ , в рассматриваемой ситуации локально изоморфна группе $G^*(n)$, $n = p+q$ (см. 3.4.1).

3.5.5. Пусть K – любая из групп $SO(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$; S – ее ручное представление; S^* – его голоморфное расширение на группу K^* ; $\{ \delta_q \}$ – семейство представлений полугрупп $\Gamma(q) = \Gamma(q, F)$, ассоциированных с S и определенных при $q \geq cond(S)$ (см. 1.1.11); S_q^* – естественное представление подгруппы $K^*(q) \subset K^*$ в пространстве $H_q(S)$, определенное представлением S^*.

ЛЕММА. При этих предположениях представление S_q^* группы $K^*(q)$ согласовано с представлением δ_q полугруппы $\Gamma(q)$ в смысле определения 3.5.3 $(q \geq cond\, S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех трех вариантов группы K рассуждения совершенно единообразны. Чтобы упростить обозначения, я буду предполагать $K=SO(\infty)$.

Справедливость условия 3.5.4(I) очевидна; проверим 3.5.4(2). В нашей ситуации S^* – голоморфное представление группы $U(\infty)$.

Пусть $\mathcal{S}_q^*$ – ассоциированные с ним представления полугрупп $\Gamma(q,\mathbb{C})$. Тогда S_q^*, являющееся представлением группы $U(q)$ в $H_q(S)=H_q(S^*)$, совпадает с $\mathcal{S}_q^* \mid U(q)$.

Пусть $X\in C$, т.е. X – вещественная матрица формата $q\times q$ с неположительными собственными значениями. Для всякого $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z\geqslant q$ матрица $\exp(zX)$ лежит в $\Gamma(q,\mathbb{C})$, так что определен оператор $\mathcal{S}_q^*(\exp(zX))$, непрерывно зависящий от z в слабой операторной топологии.

Заметим, что функция $z\longmapsto \mathcal{S}_q^*(\exp(zX))$ голоморфна в области $\operatorname{Re} z>0$. В самом деле, если X лежит во внутренности конуса C, то это следует из теоремы I.4.3, ибо тогда $\exp(zX)\in\Gamma^o(q,\mathbb{C})$. Если же X лежит на границе конуса, то надо аппроксимировать X элементами из внутренности конуса или же просто заново повторить доказательство теоремы I.4.3.

Отсюда следует, что кососамосопряженный генератор однопараметрической группы унитарных операторов

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto S_q^*(\exp(tiX))=\mathcal{S}_q^*(\exp(tiX)).$$

получается из самосопряженного генератора однопараметрической полугруппы сжатий $t\longmapsto \mathcal{S}_q(\exp(tX))$ умножением на i, что и доказывает 3.5.4(2).

3.5.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5.I ДЛЯ $G=SO_0(p,\infty)$

а) Пусть T – произвольное допустимое представление группы

$SO(\infty)$; S - его сужение на $SO(\infty)$; S^* - голоморфное расширение представления S на группу $U(\infty)$. Нам надо доказать существование унитарного представления T^* группы $U(p,\infty)^\sim$ такого, что $T^*|SO_0(p,\infty)=T$, $T^*|U(\infty)=S^*$.

б) Зафиксируем произвольное $n=p+q$ такое, что $q\geq \mathrm{cond}\, S$, и обозначим через T_n, S_q и S_q^* естественные представления групп $SO_0(p,q)$, $SO(q)$ и $U(q)$ в пространстве $H_q(S)=H_q(S^*)$. Покажем, что в этом пространстве существует представление T_n^* группы $U(p,q)^\sim$ такое, что $T_n^*|SO_0(p,q)=T_n$ и $T_n^*|U(q)=S_n^*$.

в) Рассмотрим представление $\mathcal{T}_n$ полугруппы $\Gamma(p,q)$ вещественных J-сжатий, которое ассоциировано с T и действует в $H_q(S)$. Лемма 3.5.4 позволяет применить к $\mathcal{T}_n$ теорему 3.5.3 Люшера-Мака. По этой теореме, существует унитарное представление локальной группы $U(p,q)$, согласованное с $\mathcal{T}_n$; обозначим его через T_n^*.

г) Покажем, что представления $T_n^*|U(q)$ и S_q^* локальной группы $U(q)$ совпадают. В самом деле, выделим в $\Gamma(p,q)$ подполугруппу, состоящую из матриц вида $\begin{bmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$ и изоморфную, тем самым, $\Gamma(q)=\Gamma(q,\mathbb{R})$. По определению ассоциированных представлений, $\mathcal{T}_n|\Gamma(q)$ совпадает с представлением $\mathcal{S}_q$ полугруппы $\Gamma(q)$, которое ассоциировано с S . Рассмотрим теперь согласованное с $\mathcal{S}_q$ унитарное представление локальной группы $U(q)$. С одной стороны, оно совпадает с $U(q)$. С другой стороны, в силу леммы 3.5.5, оно совпадает с S_q^* , что и требовалось доказать.

д) Продолжим наше локальное представление T_n^* до представления глобальной группы $U(p,q)^\approx$ - универсальной накрывающей для $U(p,q)$. Покажем, что T_n^* можно опустить на группу $U(p,q)^\sim$.

Для этого достаточно установить, что представление $T_n^* \mid U(p)^{\sim} \times U(q)^{\sim}$ однозначно на $U(p)^{\sim} \times U(q)$. Но этот факт следует из результата пункта г), ибо $T_n^* \mid U(q)^{\sim}$ локально совпадает с представлением S_q^* , которое однозначно на $U(q)$.

е) Итак, мы проверили утверждение пункта б) о существовании представления T_n^* с нужными свойствами. Это представление единственно, ибо $U(p,q)^{\sim}$ порождается своими подгруппами $SO_0(p,q)$ и $U(q)$ (см. 3.4.4, пункт а)). А отсюда следует, что при различных n (т.е. при различных q) представления T_n^* согласованы друг с другом в следующем смысле: если $m>n$ и $g\in U(p,q)^{\sim}$, то $T_m^*(g) \mid H_q(S)$ совпадает с $T_n^*(g)$. Иными словами, в пространстве $H(T)=H(S)$ существует унитарное представление T^* группы $U(p,\infty)^{\sim}$, являющейся индуктивным пределом представлений T_n^*. Ясно, что оно обладает двумя свойствами, указанными в пункте а), что завершает доказательство.

3.5.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5.1 ДЛЯ ГРУПП $U(p,\infty)$ и $Sp(p,\infty)$. В случае $G=Sp(p,\infty)$ все рассуждения из 3.5.6 проходят без изменений. В случае $G=U(p,\infty)$ все рассуждения также остаются в силе, если только сделать следующее добавление к пункту д).

В рассматриваемой ситуации в качестве T_n^* выступает некоторое унитарное представление группы $U(p,q)^{\approx} \times U(p,q)^{\approx}$ и рассуждение пункта д) показывает, что оно однозначно на группе $U(p,q)^{\sim} \times U(p,q)^{\sim}$, будучи однозначным на подгруппе $U(q)\times U(q)$. Но нам необходимо более сильное утверждение: однозначность представления T_n^* на группе $[U(p,q)\times U(p,q)]^{\sim}$, введенной в 3.4.1, пункт 2). Иными словами, надо проверить, что T_n^* тривиально на центральной подгруппе, по которой происходит факторизация в

3.4.1(1). Но тут надо воспользоваться тем обстоятельством, что сужение представления T_n^* на локальную группу $U(p,q)$ совпадает с ее глобальным представлением T_n и учесть вид вложения группы $U(p,q)$ в $U(p,q)\times U(p,q)$, предписанный в 3.4.1(2).

§ 3.6. Пары Гельфанда и сферические представления

Пары Гельфанда (G,K) – это те объекты, для которых можно развивать теорию зональных сферических функций. В разделе 3.6.1 предлагается определение пар Гельфанда, пригодное для групп, не являющихся локально компактными. Теорема 3.6.2 утверждает, что индуктивный предел пар Гельфанда снова является парой Гельфанда. Этот несложный общий результат позволяет построить много интересных примеров бесконечномерных пар Гельфанда. Некоторые из них приведены в таблицах 1 и 2. Другим бесконечномерным парам Гельфанда посвящена заметка автора [46] .

В теореме 3.6.4 на примере двух двойственных друг другу пар Гельфанда

$$(SO(p+\infty),\ SO(p)\times SO(\infty)) \qquad \text{и}$$

$$(SO_0(p,\infty),\ SO(p)\times SO(\infty))$$

показано, как из описания ручных и допустимых представлений извлекается описание сферических функций. В итоге получаются обобщения классических теорем Шенберга [111] и Крейна [26] о сферических функциях на бесконечномерной сфере и бесконечномерном пространстве Лобачевского.

3.6.1. Пусть $\mathcal{G}$ – топологическая группа и $\mathcal{K}$ – ее подгруппа. Для произвольного унитарного представления T группы $\mathcal{G}$ условимся обозначать через $H(T)^{\mathcal{K}}$ подпространство $\mathcal{K}$-инвариантных векторов в $H(T)$, а через $P_{\mathcal{K}}$ – проектор на это подпространство. Заметим, что $P_{\mathcal{K}}$ принадлежит алгебре фон Неймана T'', так что $P_{\mathcal{K}} T'' P_{\mathcal{K}}$ является подалгеброй в T''.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что $(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ является парой Гельфанда, если для любого унитарного представления T группы $\mathcal{G}$ алгебра $P_{\mathcal{K}} T'' P_{\mathcal{K}}$ коммутативна.

В случае, когда $\mathcal{G}$ является локально компактной группой, а $\mathcal{K}$ – ее компактной подгруппой, это условие равносильно коммутативности подалгебры двусторонне $\mathcal{K}$-инвариантных функций в групповой алгебре $L^1(G)$, т.е. обычному определению пары Гельфанда, см. [78].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть сферическим представлением пары Гельфанда $(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ всякое неприводимое унитарное представление T группы $\mathcal{G}$, для которого $H(T)^{\mathcal{K}}$ нетривиально.

Если T – сферическое представление, то $H(T)^{\mathcal{K}}$ одномерно. Выберем тогда в нем вектор ξ единичной длины. Он называется сферическим вектором, а соответствующий матричный элемент $(T(\cdot)\xi, \xi)$ – сферической функцией. Последняя не зависит от произвола в выборе вектора ξ и полностью определяет собой исходное представление.

Сферические функции пары Гельфанда $(\mathcal{G}, \mathcal{K})$, отвечающие всевозможным ее сферическим представлениям, можно охарактеризовать следующим образом: это в точности крайние точки выпуклого множества, образованного всеми неприводимыми положительно определенными функциями на группе $\mathcal{G}$, двусторонне инвариантными относительно $\mathcal{K}$ и принимающими значение 1 в единице группы.

3.6.2. Следующая простая теорема позволяет построить множество примеров пар Гельфанда $(\mathcal{G},\mathcal{K})$, в которых $\mathcal{G}$ не является локально компактной группой.

ТЕОРЕМА. Пусть α пробегает некоторое направленное множество индексов. Предположим, что пара $(\mathcal{G},\mathcal{K})$ является индуктивным пределом пар Гельфанда $(\mathcal{G}_\alpha,\mathcal{K}_\alpha)$. Тогда $(\mathcal{G},\mathcal{K})$ сама является парой Гельфанда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – произвольное унитарное представление группы $\mathcal{G}$, P – проектор на $H(T)^{\mathcal{K}}$ и P_α – проектор на $H(T)^{\mathcal{K}_\alpha}$. Проекторы P_α образуют невозрастающее семейство и, тем самым, сильно сходятся к некоторому проектору. Последний совпадает с P, , ибо $\mathcal{K}$-инвариантность вектора из $H(T)$ равносильна его $\mathcal{K}_\alpha$-инвариантности для всех α. Пусть теперь g, h – произвольные элементы группы $\mathcal{G}$ и α настолько велико, что они лежат в $\mathcal{G}_\alpha$. Поскольку $(\mathcal{G}_\alpha,\mathcal{K}_\alpha)$ является парой Гельфанда, имеем

$$P_\alpha T(g) P_\alpha T(h) P_\alpha = P_\alpha T(h) P_\alpha T(g) P_\alpha .$$

В этом равенстве можно перейти к пределу по α, поскольку в алгебре операторов операция умножения сильно непрерывна по совокупности переменных, пробегающих ограниченное подмножество. В пределе получаем

$$PT(g)PT(h)P = PT(h)PT(g)P \qquad \forall g,h\in\mathcal{G},$$

что и означает коммутативность алгебры $PT''P$.

3.6.3. Один из возможных способов использования теоремы 3.6.2 состоит в следующем. Предположим, что задана последовательность $\{X(n) : n \geq n_0\}$ римановых симметрических пространств некомпактного или компактного типа, причем $X(n)$ вложено в $X(n+1)$ в качестве вполне геодезического подмногообразия. Зафиксируем точку $x \in X(n_0)$ и обозначим через $G(n)$ группу движений пространства $X(n)$, а через $K(n)$ – стабилизатор точки x_0 в $G(n)$. Тогда возникают естественные вложения $G(n) \to G(n+1)$ и $K(n) \to K(n+1)$, что позволяет ввести группы $G = \bigcup G(n)$ и $K = \bigcup K(n)$.

Согласно классической теореме И.М.Гельфанда [12], все $(G(n), K(n))$ суть пары Гельфанда. Отсюда и из теоремы 3.6.2 следует, что (G, K) также является парой Гельфанда.

Полезно отметить, что теорема Гельфанда верна не только для полной группы движений симметрического пространства, но и для некоторых локально изоморфных ей групп; аналогичное замечание можно сделать и по поводу стационарной подгруппы.

ПРИМЕР 1. Положим $X(n) = S^n$, $G(n) = SO(1+n)$, $K(n) = SO(n)$; тогда $K = SO(\infty)$, а группу G удобно обозначить через $SO(1+\infty)$. Согласно вышесказанному, $(SO(1+\infty), SO(\infty))$ является парой Гельфанда.

ПРИМЕР 2. Пусть $X(n)$ – двойственное к сфере S^n некомпактное симметрическое пространство, т.е. n-мерное пространство Лобачевского. Ему отвечает пара Гельфанда $(SO_0(1,n), SO(n))$. Индуктивный предел этих пар, т.е. $(SO_0(1,\infty), SO(\infty))$ является снова парой Гельфанда.

Более общие примеры пар Гельфанда, получаемые изложенной процедурой, приведены в таблицах 1 и 2 (с другой точки зрения эти примеры обсуждаются в § 4.1).

3.6.4. Для пар Гельфанда имеется естественная задача: описать все сферические представления и их сферические функции. В контексте конечномерных пар Гельфанда, связанных с симметрическими пространствами, это одна из основных тем теории представлений. Для бесконечномерных пар Гельфанда первые результаты о сферических функциях были получены в старых работах Шенберга [III] и М.Г.Крейна [26]. Я сформулирую их сейчас на языке настоящей работы.

ТЕОРЕМА ШЕНБЕРГА. Сферические функции для примера I из 3.6.3 суть в точности функции вида

$$\varphi_m(g) = g_{11}^{m} \qquad (g \in SO(1+\infty),\ \ m = 0, 1, 2, \ldots).$$

ТЕОРЕМА КРЕЙНА. Сферические функции для примера 2 из 3.6.3 суть в точности функции

$$\varphi_s(g) = g_{11}^{-s} \qquad (g \in SO_0(1, \infty),\ \ s \geq 0).$$

Рассмотрим теперь более общий случай: произвольную пару Гельфанда (G, K) компактного или некомпактного типа из таблицы I. Всякое сферическое представление автоматически является ручным представлением или допустимым представлением (первое – для пар компактного типа, второе – для пар некомпактного типа). Результаты глав I и 3 доставляют полную классификацию неприводимых ручных и допустимых представлений T групп G из таблицы I. Поэтому описание сферических представлений сводится к выделению тех T, которые обладают K-инвариантным вектором. В итоге мы получаем довольно сильные обобщения классических теорем Шенберга и Крейна.

Я приведу сейчас точные формулировки этих обобщений для ортогональной и псевдоортогональных групп. Для $p = 1, 2, \ldots$ пусть K есть $SO(p) \times SO(\infty)$, тогда как G есть либо $SO(p+\infty)$, либо

$SO_0(p,\infty)$. Напомню, что неприводимые ручные представления группы $SO(p+\infty)$ параметризуются элементами $\lambda\in\mathbb{Y}$, а неприводимые допустимые представления группы $SO_0(p,\infty)$ – элементами $\lambda\in\mathbb{Y}_p$ ($\mathbb{Y}_p$ определено в 3.3.2).

ТЕОРЕМА. В рассматриваемом случае сферические представления выделяются следующими условиями на параметр λ:

$$\lambda_{p+1}=\lambda_{p+2}=\ldots=0$$

$$\lambda_1-\lambda_2\in 2\mathbb{Z}_+,\ \ldots,\ \lambda_{p-1}-\lambda_p\in 2\mathbb{Z}_+ .$$

Заметим, что в случае $p=1$ условия на $\lambda_1-\lambda_2$ и т.д. отпадают, и мы получаем то же множество параметров, что в теореме Шенберга $(m=\lambda_1)$ и в теореме Крейна $(-s=\lambda_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – неприводимое ручное или допустимое представление группы G и T^* – его голоморфное расширение на группу G^*, которая есть либо $U(p+\infty)$, либо $U(p,\infty)^\sim$. Подпространство $SO(\infty)$-инвариантов в $H(T)$ совпадает с подпространством $U(\infty)$-инвариантов в $H(T^*)=H(T)$. Последнее нетривиально в точности тогда, когда $\lambda_{p+1}=\lambda_{p+2}=\ldots=0$. Коль скоро это так, это подпространство отождествляется с пространством неприводимого (конечномерного) представления группы $U(p)$ или $U(p)^\sim$ со старшим весом $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$. Как хорошо известно, это конечномерное представление обладает $SO(p)$-инвариантным вектором тогда и только тогда, когда разности $\lambda_1-\lambda_2,\ldots,\lambda_{p-1}-\lambda_p$ четны. Это завершает доказательство.

3.6.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Несколько слов о сферических функциях. Обозначим через φ сферическую функцию группы G из 3.6.4, интерпретируемую как функцию на полугруппе вещественных сжимающих или растягивающих матриц формата $p\times p$, а через φ^* – сферическую функцию указанного выше конечномерного представления пары Гельфанда $(U(\rho), SO(\rho))$ или $(U(\rho)^{\sim}, SO(\rho))$. Тогда вычисление функции φ сводится к вычислению функции φ^*, ибо они получаются друг из друга аналитическим продолжением в комплексную область. Точнее, обе суть сужения одной и той же голоморфной функции, определенной на полугруппе комплексных сжатий $\rho \times \rho$ или на универсальной накрывающей полугруппы комплексных растяжений $\rho \times \rho$. Функции φ^* являются частным случаем так называемых многочленов Джека. Их определение и свойства приводятся в обзоре Макдональда [30].

Все сказанное здесь и в 3.6.4 переносится на другие пары Гельфанда из таблицы 1, причем в случае групп $U(\rho+\infty)$ и $U(\rho,\infty)$ для сферических функций имеется явная формула: она легко получается из формулы Г.Вейля для характеров группы $U(\rho)$.

§ 3.7. Формализм Гельфанда-Цетлина и особые унитарные представления групп $U(\rho,q)$

В этом параграфе будут построены "особые" неприводимые унитарные представления групп $U(\rho,q)$, которые при $q\to\infty$ аппроксимируют неприводимые допустимые представления группы $U(\rho,\infty)$. Существование таких представлений обеспечивается абстрактной аппроксимационной теоремой, доказанной в работе автора [49]. Их возможный вид удается угадать, исходя из реализации допустимых представлений группы $U(p,\infty)$, полученной в § 3.4, и анализируя предельный переход от конечномерных представлений групп $U(n)$ к ручным представлениям группы $U(\infty)$.

Термин "особые представления" призван подчеркнуть то обстоятельство, что мы имеем дело (при $p>1$) с представлениями не общего положения, не принадлежащими к хорошо изученным основным, дополнительным или дискретным сериям. Ярким свойством особых представлений, демонстрирующим их "нетипичность", является то, что при редукции на подгруппу $U(q)\subset U(p,q)$ у них все кратности конечны. С точки зрения "бесконечномерного" подхода, это не удивительно, ибо то же самое имеет место при редукции неприводимых допустимых представлений группы $U(p,\infty)$ на подгруппу $U(\infty)$.

Существование у групп $U(p,q)$, $p>1$, серии неприводимых унитарных представлений с подобными свойствами априори совершенно не очевидно. Таким образом, мы получаем интересный пример приложения бесконечномерных групп к конечномерным.

Основным результатом параграфа является теорема 3.7.12. В ней предъявляются особые представления групп $U(p,q)$, отвечающие "невырожденным" допустимым представлениям группы $U(p,\infty)$. Особые представления явно реализуются в базисе типа Гельфанда-Цетлина. Проверяется, что полученные формулы для инфинитезимальных матричных элементов в пределе $q\to\infty$ дают соответствующие формулы для допустимых представлений группы $U(p,\infty)$ (теорема 3.7.14).

Эти результаты достигаются в итоге довольно длинного ряда построений. Я опишу вкратце основные промежуточные результаты, поскольку они представляют и самостоятельный интерес.

В теореме 3.7.6 анализируется, как в базисе Гельфанда-Цетлина происходит предельный переход от конечномерных представлений групп $U(n)$ к ручным представлениям группы $U(\infty)$.

В теореме 3.7.8 дается явная реализация невырожденных унитарных представлений групп $U(p,\infty)^{\sim}$ со старшим весом в базисе типа Гельфанда-Цетлина. Доказательство проводится методом, использованным автором в работе [44] .

В разделе 3.7.9 этот результат переносится на голоморфные представления группы $U(p,\infty)^{\sim}$. Тем самым получается явная реализация "невырожденных" неприводимых допустимых представлений группы $U(p,\infty)$.

3.7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем схемой порядка n набор $\Lambda=\{\Lambda_{ij}\}$ из $n(n+1)/2$ чисел, занумерованных индексами $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq \leq n+1-i$ и размещенных в виде треугольной таблицы острием вниз: в первой строке, обозначаемой далее через Λ_1 , находятся числа $\Lambda_{11},\dots,\Lambda_{1n}$, во второй строке Λ_2 – числа $\Lambda_{21},\dots,\Lambda_{2\,n-1}$ и т.д., при этом элемент $\Lambda_{i+1,\,j}$ располагается между элементами Λ_{ij} и $\Lambda_{i\,j+1}$, но ниже.

Рассуждения этого параграфа в значительной мере будут основаны на анализе выражений следующего вида:

$$a_{ij}(\Lambda)=-\frac{\prod\limits_{\tau=1}^{n-i}(\Lambda_{i+1,\tau}-\Lambda_{ij}-\tau+j-1)\prod\limits_{\tau=1}^{n-i+2}(\Lambda_{i-1,\tau}-\Lambda_{ij}-\tau+j)}{\prod\limits_{\substack{1\leq\tau\leq n+1-i\\ \tau\neq j}}(\Lambda_{i\tau}-\Lambda_{ij}-\tau+j-1)(\Lambda_{i\tau}-\Lambda_{ij}-\tau+j)}. \qquad (1)$$

В (I) предполагается, что $i\geq 2$, причем при $i=n$ первое произведение в числителе и весь знаменатель пропадает.

ЛЕММА О СОКРАЩЕНИИ. Предположим, что внутри схемы Λ можно выделить подсхему $\tilde{\Lambda}$ меньшего порядка, в которой все элементы равны друг другу. Допустим, что элемент Λ_{ij} находится вне подсхемы $\tilde{\Lambda}$ и лежит не выше второй строки подсхемы $\tilde{\Lambda}$ и не ниже ее последней строки. Тогда скобки в (I), отвечающие элементам подсхемы $\tilde{\Lambda}$, в числителе и в знаменателе взаимно сокращаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $m+1$ количество элементов подсхемы $\tilde{\Lambda}$, находящихся в $(i-1)$-й строке схемы Λ. По условию, $m+1 \geqslant 2$. Обозначим через C значение скобки $(\Lambda_{i-1,r}-\Lambda_{ij}-r+j)_{\tilde{}}$, где $\Lambda_{i-1,r}$ первый элемент $(i-1)$-й строки, попадающий в $\tilde{\Lambda}$. Тогда вклад подсхемы $\tilde{\Lambda}$ в (I) равен

$$\frac{[(C-1)\ldots(C-m+1)]\,[C(C-1)\ldots(C-m)]}{[(C-1)\ldots(C-m)]\,[C(C-1)\ldots(C-m+1)]},$$

откуда видно, что все скобки в числителе и в знаменателе действительно взаимно сокращаются.

3.7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Схему Λ порядка n назовем $U(n)$-допустимой, если все элементы Λ_{ij} суть целые числа, не возрастающие по направлениям "$\longrightarrow$", "$\searrow$" и "$\nearrow$". Иными словами, выполняются неравенства

$$\Lambda_{ij} \geqslant \Lambda_{i,j+1}, \quad \Lambda_{ij} \geqslant \Lambda_{i+1,j}, \quad \Lambda_{i+1,j} \geqslant \Lambda_{i,j+1}.$$

Для любой схемы Λ условимся обозначать через $\Lambda \pm \varepsilon_{ij}$ схему, получаемую из Λ заменой элемента Λ_{ij} на $\Lambda_{ij} \pm 1$ (остальные элементы не меняются).

ЛЕММА. Если Λ и $\Lambda+\varepsilon_{ij}$ обе суть $U(n)$-допустимые схемы

$(i\geqslant 2)$, то в выражении 3.7.1(1) для $a_{ij}(\Lambda)$ знаменатель отличен от нуля, так что $a_{ij}(\Lambda)$ корректно определено. Более того, $a_{ij}(\Lambda)>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $U(n)$-допустимости схемы $\Lambda+\varepsilon_{ij}$ показывает, что

$$\Lambda_{i-1,j}\geqslant\Lambda_{ij}+1,\quad \Lambda_{i,j-1}\geqslant\Lambda_{ij}+1,\quad \Lambda_{i+1,j-1}\geqslant\Lambda_{ij}+1.$$

Отсюда следует, что в первом произведении, находящемся в числителе формулы 3.7.1(1), первые $j-1$ скобок положительны, а последующие – отрицательны; во втором произведении числителя первые j скобок положительны, а остальные отрицательны; наконец, скобки, находящиеся в знаменателе, не обращаются в нуль, причем обе скобки с одинаковым i имеют одинаковый знак. Отсюда видно, что знаменатель положителен, а количество отрицательных скобок в числителе нечетно. Значит, $a_{ij}(\Lambda)>0$.

3.7.3. Рассмотрим цепочку групп $U(n)\supset U(n-1)\supset\ldots\supset U(1)$, где $U(n-k)$ отождествляется в подгруппой $U_k(n)$ в $U(n)$, фиксирующей первые k базисных векторов в тождественном представлении группы $U(n)$ в $\mathbb{C}^n$.

С другой стороны, введем множество $S(n|\nu)$, состоящее из всех $U(n)$-допустимых схем Λ , у которых первая строка Λ_1 совпадает с $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$. Ясно, что тогда ν является старшим весом неприводимого унитарного представления группы $U(n)$. Как хорошо известно, см. Желобенко [18] , в пространстве этого представления существует ортонормированный базис $\{\xi_\Lambda\}$, параметризованный схемами $\Lambda\in S(n|\nu)$ и такой, что каждый ξ_Λ преобразуется под действием подгруппы $U(n-i+1)$ по неприводимому представлению со старшим весом Λ_i $(i=1,\dots,n)$. Этот базис, впервые введенный в [14] , называется базисом Гельфанда-Цетлина. Он определен однозначно, с точностью до нормировки, т.е. с точностью до умножения базисных векторов на комплексные числа c_Λ , по модулю равные единице.

Рассмотрим базис $\{e_{ik}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, состоящий из стандартных матричных единиц, и заметим, что элементы e_{ik} с $|i-k|\leqslant 1$ являются образующими алгебры $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Обозначим через E_{ik} соответствующие операторы в пространстве представления.

ТЕОРЕМА ГЕЛЬФАНДА-ЦЕТЛИНА [14,18] . При подходящей нормировке базиса $\{\xi_\Lambda\}$ справедливы формулы

$$E_{ii}\,\xi_\Lambda=\left(\sum_{r=1}^{n+1-i}\Lambda_{ir}-\sum_{r=1}^{n-i}\Lambda_{i+1,r}\right)\xi_\Lambda, \qquad i=1,\dots,n; \tag{I}$$

$$E_{i,i-1}\,\xi_\Lambda=\sum_j\left(a_{ij}(\Lambda)\right)^{1/2}\xi_{\Lambda+\varepsilon_{ij}}, \qquad i=2,\dots,n; \tag{2}$$

$$E_{i-1,i}\,\xi_\Lambda=\sum_j\left(a_{ij}(\Lambda-\varepsilon_{ij})\right)^{1/2}\xi_{\Lambda-\varepsilon_{ij}}, \qquad i=2,\dots,n. \tag{3}$$

ПОЯСНЕНИЕ. Если $i=n$, то вторая сумма в (I) пропадает. Суммирование в (2) ведется по тем j , для которых $\Lambda+\varepsilon_{ij}$ является $U(n)$-допустимой схемой, а в (3) - по тем Λ , для которых $U(n)$-допустима схема $\Lambda-\varepsilon_{ij}$. В силу леммы 3.7.2 тогда $a_{ij}(\Lambda)>0$ и $a_{ij}(\Lambda-\varepsilon_{ij})>0$ соответственно; знак у корня выбирается положительным.

Формулы (1), (2), (3) называются формулами Гельфанда-Цетлина. Они полностью задают представление. Отметим, что операторы $E_{i,i-1}$ и $E_{i-1,i}$, определенные формулами (2) и (3), сопряжены друг другу, как и должно быть.

3.7.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, переводящий e_{ik} в $-e_{ki}$. Под действием этого автоморфизма исходное представление со старшим весом ν переходит в сопряженное представление, имеющее старший вес $\nu^* = (-\nu_n, \ldots, -\nu_1)$, а формулы Гельфанда-Цетлина превращаются в аналогичные формулы для представления со старшим весом ν^* с небольшим отличием, вызванным появлением знака "минус" в правой части формулы для $E_{i,i-1}$ и $E_{i-1,i}$. Чтобы избавиться от него, достаточно сделать следующую перенормировку:

$$\xi_\Lambda \longmapsto \hat{\xi}_\Lambda = c(\Lambda)\xi_\Lambda, \quad c(\Lambda) = \pm 1,$$

где числа $c(\Lambda)$ подобраны так, чтобы выполнялись соотношения $c(\Lambda \pm \varepsilon_{ij}) = -c(\Lambda)$, чего всегда можно добиться. Например, можно положить

$$c(\Lambda) = (-1)^{\sum_{i,j} \Lambda_{ij}}.$$

3.7.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Условимся называть схемой бесконечного порядка набор $\Lambda = \{\Lambda_{ij}\}$, где оба индекса пробегают $\{1, 2, \ldots\}$ и только конечное число элементов Λ_{ij} отлично от нуля. По-прежнему удобно располагать элементы Λ_{ij} в воображаемой таблице так, чтобы элемент $\Lambda_{i+1,j}$ находился между Λ_{ij} и $\Lambda_{i,j+1}$, но в нижележащей строке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Схему Λ бесконечного порядка назовем $U(\infty)$-допустимой, если все Λ_{ij} суть целые числа, подчиняющиеся условиям невозрастания из 3.7.2 (откуда видно, что все Λ_{ij} должны быть неотрицательны).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если Λ - схема бесконечного порядка или конечного порядка $>n$, условимся обозначать через ${}^{n}\Lambda$ схему порядка n, расположенную в левом верхнем углу схемы Λ.

Из леммы 3.7.1 о сокращении следует, что если схемы Λ и $\Lambda+\varepsilon_{ij}$ являются обе $U(\infty)$-допустимыми, то $a_{ij}({}^{n}\Lambda)$ стабилизируется при $n\to\infty$; примем это стабильное значение за определение для $a_{ij}(\Lambda)$.

Зафиксируем произвольную диаграмму Юнга $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ и условимся обозначать через λ^{n} вес $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, где $n=1,2,\ldots$. Рассмотрим неприводимое голоморфное представление ρ_λ группы $U(\infty)$, являющееся индуктивным пределом неприводимых полиномиальных представлений ${}^{n}\rho_\lambda$ групп $U(n)$ со старшими весами λ^{n}. Если $n\geqslant \ell(\lambda)$, то, как легко проверить, каноническое вложение пространства $H({}^{n}\rho_\lambda)$ в пространство $H({}^{n+1}\rho_\lambda)$ согласовано с их базисами Гельфанда-Цетлина. Более точно, базисный вектор ξ_Λ, где $\Lambda\in S(n\mid\lambda^{n})$ отождествляется с базисным вектором представления ${}^{n+1}\rho_\lambda$, схема которого получается окаймлением схемы Λ нулями справа.

Теперь ясно, что в пространстве $H(\rho_\lambda)$ существует базис типа Гельфанда-Цетлина $\{\xi_\Lambda\}$, отвечающий бесконечной цепочке подгрупп $U(\infty)\supset U_1(\infty)\supset\ldots$, параметризуемый всевозможными $U(\infty)$-допустимыми схемами Λ с $\Lambda_1=\lambda$ и такой, что действие образующих e_{ik}, $|i-k|\leqslant 1$, алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$ описывается по-прежнему формулами Гельфанда-Цетлина.

3.7.6. Рассмотрим теперь произвольное неприводимое ручное представление $\rho_{\lambda,\mu}=\rho_\lambda\otimes\bar{\rho}_\mu$ группы $U(\infty)$. Оно обладает базисом типа Гельфанда-Цетлина, состоящим из векторов вида $\xi_\Lambda\otimes\xi_M$, где Λ и M суть $U(\infty)$-допустимые схемы такие, что $\Lambda_1=\lambda$ и $M_1=\mu$ (предполагается, что $\bar{\rho}_\mu$ действует в пространстве представления ρ_μ по формуле $\bar{\rho}_\mu(u)=\rho_\mu(\bar{u})$, $u\in U(\infty)$).

Учитывая замечание 3.7.4, удобно заменить ξ_M на $\hat{\xi}_M$. Тогда операторы $E_{ik}, |i-k|\le 1$, отвечающие образующим алгебры $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$, будут задаваться следующими формулами:

$$E_{ii}\cdot\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_M=$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}(\Lambda_{ir}-\Lambda_{i+1,r}-M_{ir}+M_{i+1,r})\cdot\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_M\ ; \tag{1}$$

$$E_{i,i-1}\cdot\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_M= \tag{2}$$

$$=\sum_j(a_{jj}(\Lambda))^{1/2}\xi_{\Lambda+\varepsilon_{ij}}\otimes\hat{\xi}_M+\sum_j(a_{ij}(M-\varepsilon_{jj}))^{1/2}\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_{M-\varepsilon_{ij}}\ ;$$

$$E_{i-1,1}\cdot\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_M= \tag{3}$$

$$=\sum_j(a_{ij}(\Lambda-\varepsilon_{ij}))^{1/2}\xi_{\Lambda-\varepsilon_{ij}}\otimes\hat{\xi}_M+\sum_j(a_{ij}(M))^{1/2}\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_{M+\varepsilon_{ij}}\ .$$

Напомню, что представление $\rho_{\lambda,\mu}$ группы $U(\infty)$ является индуктивным пределом неприводимых представлений ${}^{n}\rho_{\lambda,\mu}$ ее подгрупп $U(n)$. Если $\mu=0$, то как было только что показано, базис Гельфанда-Цетлина допредельного представления отождествляется с частью базиса Гельфанда-Цетлина предельного представления. То же самое будет, конечно, и при $\lambda=0$. Однако в общем случае, когда $\lambda\neq 0$ и $\mu\neq 0$, столь простой ситуации уже нет: вложения $H({}^{n}\rho_{\lambda,\mu})\to H({}^{n+1}\rho_{\lambda,\mu})$ уже не согласованы с базисами Гельфанда-Цетлина. Вместо этого можно утверждать следующее.

ТЕОРЕМА. Если $\lambda,\mu\in\mathbb{Y}$ фиксированы, то при $n\to\infty$ формулы Гельфанда-Цетлина, написанные для представления ${}^{n}\rho_{\lambda,\mu}$ группы $U(n)$, стремятся к формулам (1), (2), (3) для представления $\rho_{\lambda,\mu}$ группы $U(\infty)$ (точный смысл этого утверждения будет прояснен в ходе доказательства).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Напомню, что старший вес ν представления ${}^{n}\rho_{\lambda,\mu}$ имеет вид

$$\nu=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,0,\dots,0,\dots,-\mu_2,-\mu_1).$$

Заметим, что в середине веса ν имеется $m=n-\ell(\lambda)-\ell(\mu)$ нулей. Отсюда видно, что в любой схеме $\Xi\in S(n|\nu)$ выделяется подсхема $\tilde{\Xi}$ порядка m, состоящая целиком из нулей и начинающаяся с первой строки схемы Ξ. При большом n подсхема $\tilde{\Xi}$ занимает "почти всю" часть схемы Ξ. Заметим еще, что если $\Xi+e_{ij}$ является $U(n)$-допустимой схемой, то элемент Ξ_{ij} обязательно находится вне подсхемы $\tilde{\Xi}$; если $i\leq m$, то он лежит либо на левом, либо на правом краю схемы Ξ. Аналогичное утверждение справедливо и в предположении $U(n)$-допустимости схемы $\Xi-e_{ij}$. Отсюда следует, что если написать формулы Гельфанда-Цетлина из 3.7.3 для $E_{i,i-1}$ или $E_{i-1,i}$ в базисе

$\{\xi_\Xi\}$ представления ${}^n\rho_{\lambda,\mu}$, то, считая i фиксированным, а n большим, мы получим: суммирование будет вестись лишь по значениям индекса j, близким к 1 или к $n+1-i$. Сейчас будет показано, что в пределе $n\to\infty$ матричные элементы, отвечающие значениям, близким к 1, зависят только от левого края схемы Ξ тогда как вблизи $n+1-i$ они зависят лишь от ее правого края.

б) Чтобы довести это высказывание до уровня строгого утверждения, введем следующие обозначения. Зафиксируем две $U(\infty)$-допустимые схемы Λ и M такие, что $\Lambda_1=\lambda$, $M_1=\mu$. Рассмотрим два конечных множества индексов:

$$A=\{(i,j):\Lambda_{ij}\neq 0\},\quad B=\{(i,j):M_{ij}\neq 0\}.$$

Для достаточно большого n следующие условия корректно определяют схему $\Xi\in S(n|\nu)$, где ν – старший вес представления ${}^n\rho_{\lambda,\mu}$:

$$(i,j)\in A\Rightarrow\ \Xi_{ij}=\Lambda_{ij};$$

$$(i,j)\in B\Rightarrow\ \Xi_{ik}=-M_{ij},$$

где $k=n+2-i-j$;

остальные элементы Ξ равны нулю.

Для доказательства теоремы достаточно проверить следующие два утверждения:

- если $\Lambda+\varepsilon_{ij}$ является $U(\infty)$-допустимой схемой, то

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}(\Xi)=a_{ij}(\Lambda); \tag{9}$$

- если $M-e_{ij}$ является $U(\infty)$-допустимой схемой, то

$$\lim_{n\to\infty} a_{ik}(\Xi) = a_{ij}(M-\varepsilon_{ij}), \quad k = n+2-i-j. \tag{10}$$

В самом деле, из этих утверждений будет следовать, что матричные элементы операторов $E_{i,i-1}$ и $E_{i-1,i}$ в представлении ${}^{n}\rho_{\lambda,\mu}$ сходятся при $n\to\infty$ к матричным элементам этих операторов в представлении $\rho_{\lambda,\mu}$. Что же касается диагональных операторов E_{ii}, то для них это очевидно.

в) Для проверки (9) напишем формулу для $a_{ij}(\Xi)$, следуя определению, данному в 3.7.1(1), и сопоставим получившееся выражение с тем, которое было бы в случае $M=0$. Различие между обоими выражениями сказывается лишь для скобок вида

$$(\Xi_{\tilde{i}\tau} - \Xi_{ij} - \tau + j + \delta), \quad \text{где}$$

$$\tilde{i} = i-1,\ i,\ i+1 \quad \text{и} \quad \delta = 0, -1$$

и где $\Xi_{\tilde{i}\tau}$ близко к правому краю схемы, т.е. $\tau \geqslant n+1-i-$ $-const$ (константа здесь не зависит от n). Ясно, что все эти скобки ведут себя как $-n+O(1)$, т.е. с точностью до $O(1)$ не зависят от $\Xi_{\tilde{i}\lambda}$. Отсюда сразу следует (9).

Формула (10) проверяется аналогично. Можно заметить также, что (9) и (10) фактически эквивалентны друг другу.

3.7.7. В этом пункте излагается подготовительный материал, необходимый для реализации унитаризуемых $u(p,q)$-модулей со старшим весом в формализме Гельфанда-Цетлина.

Зафиксируем вес $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $n=p+q$, со следующими свойствами (ср.3.2.2):

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p, \quad (\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^q; \tag{1}$$

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{для } i=1,\dots,p-1,p+1,\dots,n-1 \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \lambda_n - \lambda_1 > p + b(\lambda) - 1 \qquad , \text{ где} \\ b(\lambda) = card\{j : p+1 \leq j < n,\ \lambda_j \neq \lambda_n\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Будем рассматривать схемы Λ порядка n. Каждая такая схема разделяется на две части: подсхему ${}^{p}\Lambda$ порядка p, лежащую в левом верхнем углу схемы Λ, и дополнение к ней.

Обозначим через $S(p,q|\lambda)$ множество всех схем Λ порядка $n = p+q$, удовлетворяющих следующим условиям:

- первая строка схемы равна λ;
- внутри ${}^{p}\Lambda$ имеем $\Lambda_{ij} - \lambda_1 \in \mathbb{Z}$; вне ${}^{p}\Lambda$ имеем $\Lambda_{ij} \subset \mathbb{Z}$;
- внутри ${}^{p}\Lambda$ и вне нее выполняются обычные условия невозрастания по направлениям "$\longrightarrow$", "$\searrow$" и "$\nearrow$" (см. 3.7.2), однако никаких связей между элементами в разных частях схемы нет.

Отметим, что множество $S(p,q|\lambda)$ бесконечно (при $p \geq 1$, $q \geq 1$), поскольку элемент $\Lambda_{p+1,1}$ не связан никакими ограничениями сверху.

Для произвольного $s \in \mathbb{C}$ обозначим через $\Lambda(s)$ схему, получающуюся из Λ в результате прибавления числа s ко всем Λ_{ij} из ${}^{p}\Lambda$.

Предположим, что Λ и $\Lambda + \varepsilon_{ij}$ лежат в $S(p,q|\lambda)$. Если λ_1 не является целым числом, то выражение $a_{ij}(\Lambda)$ корректно определено, ибо его знаменатель не обращается в нуль. Если же $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$, то у выражения $a_{ij}(\Lambda)$ возможно появление нулевых скобок в числителе и знаменателе; в этом случае определим $a_{ij}(\Lambda)$ как $\lim\limits_{s \to 0} a_{ij}(\Lambda(s))$, коль скоро этот предел существует.

ЛЕММА. Пусть Λ, $\Lambda + \varepsilon_{ij} \in S(p,q|\lambda)$, где λ удовлетворяет условиям (I), (2), (3). Тогда $a_{ij}(\Lambda)$ корректно определено и отлично от нуля. Более того, $a_{ij}(\Lambda)>0$, если $i\neq\rho+1$, и $a_{ij}(\Lambda)<$ <0 , если $i=\rho+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Покажем, что если $\rho\geqslant 2$, то вторая строка Λ_2 любой схемы $\Lambda\in S(\rho,q\,|\,\lambda)$ удовлетворяет условиям (I), (2), (3), в которых ρ заменено на $\rho-1$ и n – на $n-1$. Условия (I) и (2) очевидны, а условие (3) принимает вид

$$\Lambda_{2,n-1}-\Lambda_{21}>\rho-1+b(\lambda_2)-1. \qquad (4)$$

В силу неравенств

$$\Lambda_{21}\leqslant\Lambda_{11}=\lambda_1 \quad , \quad \Lambda_{2,n-1}\geqslant\Lambda_{1n}=\lambda_n ,$$

левая часть в (4) не меньше $\lambda_n-\lambda_1$. С другой стороны, $b(\Lambda_2)$ не больше, чем $b(\Lambda_1)+1=b(\lambda)+1$. Таким образом, (4) следует из (3).

б) Утверждение леммы достаточно проверить для $i=2,\dots,\rho+1$, ибо при $i\geqslant\rho+2$ ситуация будет такой же, как в случае $U(n)$-допустимых схем. Далее, результат пункта а) позволяет ограничиться разбором случая $i=2$. Основная идея дальнейших рассуждений состоит в сравнении знака каждой скобки в формуле для $a_{ij}(\Lambda)$ с тем знаком, который она имела бы в ситуации $U(n)$ -допустимых схем, а также в применении леммы о сокращении.

Рассмотрим последовательно несколько возможных вариантов.

в) Предположим сперва, что Λ_{2j} лежит в подсхеме ${}^{\rho}\Lambda$, причем $b(\lambda)=q-1$. Тогда условие (3) означает $\lambda_n-\lambda_1>n-2$. Рассмотрим произвольную скобку в выражении 3.7.7(I) для $a_{ij}(\Lambda)$. Поскольку $i=2$, наша скобка связана с некоторым $\Lambda_{\tilde{i}r}$, где $\tilde{i}=1,2,3$. Если $\Lambda_{\tilde{i}r}$ лежит в ${}^{\rho}\Lambda$, то скобка не обращается в нуль и имеет тот же знак, что в ситуации $U(n)$-допустимых схем. Пусть $\Lambda_{\tilde{i}\tau}$ лежит вне ${}^{\rho}\Lambda$. В ситуации $U(n)$-допустимых схем такая скобка была бы отрицательна. Покажем, что теперь она положительна.

В самом деле, значение скобки тем меньше, чем меньше j и чем больше τ. Отметим, что

$$\Lambda_{2j} - j \leqslant (\lambda_1 - 1) - 1,$$

ибо в противном случае нарушалось предположение $\Lambda + \varepsilon_{2j} \in \in S(\rho, q \mid \lambda)$. Отметим еще, что $\Lambda_{\tilde{i}\tau} \geqslant \lambda_n$ и что τ не превышает $n, n-1, n-2$ соответственно для $\tilde{i} = 1, 2, 3$. Отсюда получаем оценки:

$$\Lambda_{1\tau} - \Lambda_{2j} - \tau + j \geqslant \lambda_n - (\lambda_1 - 1) - n + 1 = \lambda_n - \lambda_1 - (n-2) > 0$$

$$\Lambda_{2\tau} - \Lambda_{2j} - \tau + j - 1 \geqslant \lambda_n - (\lambda_1 - 1) - (n-1) = \lambda_n - \lambda_1 - (n-2) > 0$$

$$\Lambda_{3\tau} - \Lambda_{2j} - \tau + j - 1 \geqslant \lambda_n - (\lambda_1 - 1) - (n-2) > 0.$$

Таким образом, все скобки, отвечающие элементам вне ${}^{\rho}\Lambda$, имеют знак противоположный тому, который был бы в ситуации $U(n)$-допустимых схем. Количество таких скобок (при фиксированном j) четно, если $\rho \geqslant 2$, и нечетно, если $\rho = 1$, что доказывает утверждение леммы в рассматриваемом варианте.

г) Теперь возьмем случай, когда Λ_{2j} по-прежнему лежит в ${}^{\rho}\Lambda$, но $b(\lambda) < q - 1$. Тогда в правом верхнем углу схемы Λ можно выделить подсхему $\tilde{\Lambda}$ порядка $q - b(\lambda) \geqslant 2$, в которой все элементы равны λ_n. Учитывая определение $a_{ij}(\Lambda)$ как предела $\lim\limits_{s \to 0} a_{ij}(\Lambda(s))$, мы можем применить лемму о сокращении к подсхеме $\tilde{\Lambda}$ и, тем самым, игнорировать скобки, отвечающие элементам из $\tilde{\Lambda}$. Теперь мы можем повторить рассуждения пункта в), используя тот факт, что $r \leqslant p + b(\lambda), \Lambda_{\tilde{i}r} \geqslant \lambda_n$, и опираясь на неравенство (3).

д) Наконец, разберем вариант, когда Λ_{2j} лежит вне ${}^p\Lambda$. Здесь ключевую роль играет тот факт, что должно выполняться неравенство $j \leqslant p + b(\lambda)$ (в противном случае замена Λ_{2j} на Λ_{2j+1} выводила бы схему из $S(p,q\,|\,\lambda)$). Используя это неравенство вместе с (3), мы легко получаем, что все скобки, отвечающие элементам из ${}^p\Lambda$, будут отрицательны, тогда как в ситуации $U(n)$-допустимых схем они положительны. Количество таких скобок четно при $p \geqslant 2$ и нечетно при $p = 1$, откуда следует утверждение леммы.

3.7.8. В этом пункте λ – тот же вес, что в 3.7.7.

Отметим следующее важное обстоятельство: для любой схемы $\Lambda \in S(p,q\,|\,\lambda)$ схема $\Lambda(s)$ становится $U(n)$-допустимой для всех s вида $c, c+1, c+2, \ldots$, где $c = c(\Lambda) > 0$ достаточно велико и таково, что $\lambda_1 + c \in \mathbb{Z}$.

Предполагая, что Λ и $\Lambda + \varepsilon_{ij}$ лежат в $S(p,q\,|\,\lambda)$, определим $a_{ij}(\Lambda)^{1/2}$ следующим образом. Заметим, что $a_{ij}(\Lambda(s)) > 0$ при достаточно больших $s > 0$ и что $a_{ij}(\Lambda(s))$ корректно определено и отлично от нуля в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} s > 0$. Рассмотрим ту ветвь корня $a_{ij}(\Lambda(s))^{1/2}$ в верхней полуплоскости, которая при приближении к точкам $s > 0$, достаточно далеким от нуля, дает положительное значение, и положим

$$a_{ij}(\Lambda)^{1/2} = \lim_{s \to 0,\ \operatorname{Im} s > 0} a_{ij}(\Lambda(s))^{1/2}. \tag{I}$$

В силу вышесказанного и леммы 3.7.7 это определение корректно, причем (I) вещественно при $i \neq \rho+1$ и чисто мнимо при $i=\rho+1$.

Рассмотрим векторное пространство формальных линейных комбинаций символов ξ_Λ, где Λ пробегает $S(p,q\,|\,\lambda)$. Введем в него скалярное произведение, объявив векторы ξ_Λ попарно ортонормированными и имеющими единичную норму. Зададим в нем операторы E_{ii}, $E_{i,i-1}$, $E_{i-1,i}$ обычными формулами Гельфанда-Цетлина (см. 3.7.3), учитывая определение (I). Отметим, что

$$(E_{i,i-1})^* = E_{i-1,i} \quad \text{для} \quad i \neq \rho+1;$$
$$(E_{\rho+1,\rho})^* = -E_{\rho,\rho+1}. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА. Для любого веса λ, удовлетворяющего условиям (I), (2), (3) из 3.7.7, описанная процедура реализует унитаризуемый $\mathcal{U}(p,q)$ -модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Покажем, что операторы E_{ii}, $E_{i,i-1}$, $E_{i-1,i}$ определяют представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, т.е. удовлетворяют всем необходимым соотношениям между образующими e_{ii}, $e_{i,i-1}$, $e_{i-1,i}$ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$. Определяющие соотношения для этих образующих хорошо известны, но я не буду их выписывать, поскольку их явный вид неважен для дальнейшего. Пусть $P(\cdot)$ – произвольное соотношение между образующими. Заменяя в формулах Гельфанда-Цетлина Λ на $\Lambda(s)$, мы можем считать, что операторы E_{ii}, $E_{i,i-1}$, $E_{i-1,i}$ зависят от параметра s, где $\operatorname{Im} s>0$. Подставим эти операторы в $P(\cdot)$ и рассмотрим получившийся оператор как функцию параметра s. Любой матричный элемент нашего оператора является алгебраической функцией от s, регулярной в верхней полуплоскости. Замечание, сделанное в самом начале этого пункта, показывает, что в точках вида $c, c+1, c+2, \ldots$ рассматриваемая алгебраическая функция не имеет особенности и обращается в нуль. Здесь используется тот факт, что соотношение $\rho(\cdot)=0$ выполнено в конечномерных представлениях, а также тот факт, что $\rho(\cdot)\xi_\Lambda$ разлагается априори по конечному множеству базисных векторов, не зависящих от $\mathfrak{z}$. Приведенное рассуждение показывает, что $\rho(\cdot)\equiv 0$ для всех $\mathfrak{z}$ из верхней полуплоскости, откуда следует, что это верно и для $\mathfrak{z}=0$.

б) Итак, мы действительно получаем некоторый $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ -модуль. Ввиду (2) этот модуль унитаризуем относительно $U(p,q)$.

в) Рассмотрим граф, вершины которого суть схемы $\Lambda\in S(p,q\,|\,\lambda)$, а ребра отвечают парам (Λ,M) таким, что $M=\Lambda+\varepsilon_{ij}$. Легко проверяется, что этот граф связен. После этого индукцией по $\rho=0,1,\ldots$ легко показать, что наш модуль неприводим.

г) Определим Λ следующим образом:

$$\Lambda_{ij}=\Lambda_{i-1,j+1}=\ldots=\Lambda_{1,i+j-1}=\lambda_{i+j-1}\,.$$

Легко проверяется, что $\Lambda\in S(p,q\,|\,\lambda)$ и что

$$E_{i-1,i}\,\xi_\Lambda=0 \qquad (i=2,\ldots,n)$$

$$E_{ii}\,\xi_\Lambda=\lambda_i\,\xi_\Lambda \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Стало быть, ξ_Λ является старшим вектором с весом λ.

3.7.9. Зафиксируем бесконечную последовательность

$$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p\,;\,\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+b(\lambda)},0,0,\ldots)\,; \tag{1}$$

такую, что

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p,\ (\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+b(\lambda)})\in\mathbb{Z}^{b(\lambda)}; \tag{2}$$

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+ \text{ для } i \neq p\,, \quad \lambda_{p+b(\lambda)} > 0\,; \tag{3}$$

$$-\lambda_1 > p + b(\lambda) - 1\,. \tag{4}$$

Обозначим через $S(p,\infty|\lambda)$ множество всех схем Λ, удовлетворяющих условиям, перечисленным в 3.7.7 при определении множества $S(p,q|\lambda)$; однако теперь предполагается, что схемы имеют бесконечный порядок.

Положим $\lambda^n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $n = p+q$, $q > b(\lambda)$. В теореме 3.7.8 была получена явная реализация $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$-модулей $L(\lambda^n)$ в формализме Гельфанда-Цетлина. Рассмотрим теперь канонические вложения $L(\lambda^n) \to L(\lambda^{n+1})$, проистекающие из отождествления старших векторов. Легко проверить, что эти вложения согласованы с базисами Гельфанда-Цетлина (ср.3.7.5, где обсуждалась та же ситуация в контексте конечномерных модулей). Так же, как в 3.7.5, определим $a_{ij}(\Lambda)$ для $\Lambda \in S(p,\infty|\lambda)$ как $a_{ij}({}^n\Lambda)$, где n достаточно велико(это выражение стабилизируется при $n \to \infty$). В итоге мы получаем, что обычные формулы Гельфанда-Цетлина определяют реализацию $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$-модуля

$$L(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind} L(\lambda^n)$$

в базисе Гельфанда-Цетлина $\{\xi_\Lambda\}$, где Λ пробегает $S(p,\infty|\lambda)$. Поскольку $L(\lambda)$ совпадает с $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$-модулем, реализующимся в пространстве $H_\infty(\cdot)$ неприводимого голоморфного представления $V(\lambda)$ группы $U(p,\infty)^\sim$ (см. § 3.3), результаты этого раздела можно рассматривать как явную инфинитезимальную реализацию представлений $V(\lambda)$ группы $U(p,\infty)^\sim$, где λ удовлетворяет условию невырожденности $-\lambda_1 > p + b(\lambda) - 1$.

3.7.10. Зафиксируем два веса λ, μ – такие, как в 3.7.9, и предположим, что $\lambda_1 + \mu_1 \in \mathbb{Z}$. Будем считать, что q настолько велико, что $q - p > b(\lambda) + b(\mu)$. Рассмотрим вес длины $n = p + q$

$$\nu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p ; \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+b(\lambda)} ;$$

$$0, \ldots, 0 ; -\mu_{p+b(\mu)}, \ldots, -\mu_{p+1} ; -\mu_p, \ldots, -\mu_1), \qquad (1)$$

где количество нулей в середине равно $q - p - b(\lambda) - b(\mu)$.

В этом разделе будут рассматриваться схемы Ξ порядка n. Условимся обозначать через ${}^p\Xi$ и Ξ^p подсхемы порядка p, находящиеся в левом и правом углах схемы Ξ. Удобно считать Ξ состоящей из трех частей: подсхем ${}^p\Xi$, Ξ^p и дополнения к ним.

Обозначим через $S(p, q \mid \lambda, \mu)$ множество всех схем Ξ порядка $n = p + q$ со следующими свойствами:

- первая строка Ξ_1 схемы Ξ равна весу ν;
- внутри ${}^p\Xi$ имеем $\Xi_{ij} - \lambda_1 \in \mathbb{Z}$, внутри Ξ^p имеем $\Xi_{ij} + \mu_1 \in \mathbb{Z}$, вне ${}^p\Xi$ и Ξ^p имеем $\Xi_{ij} \in \mathbb{Z}$;
- внутри ${}^p\Xi$, внутри Ξ^p и вне обеих подсхем выполняются обычные условия невозрастания по направлениям "$\rightarrow$", "$\searrow$" и "$\nearrow$", однако никаких связей между отдельными частями нет.

Для произвольного $s \in \mathbb{C}$ будем обозначать через $\Xi(s)$ схему, получающуюся из Ξ прибавлением числа s ко всем элементам из ${}^p\Xi$ и его вычитанием из всех элементов из Ξ^p.

Предположим, что Ξ и $\Xi + \varepsilon_{ij}$ лежат в $S(p, q \mid \lambda, \mu)$. Если λ_1 (а тем самым и μ_1) не является ни целым, ни полуцелым числом, то разности элементов, находящихся в различных частях схемы Ξ, будут не целыми, откуда видно, что $a_{ij}(\Xi)$ корректно определено. В общем случае определим $a_{ij}(\Xi)$ как предел $\lim\limits_{\delta\to 0} a_{ij}(\Xi(\delta))$, коль скоро он существует.

ЛЕММА (ср.Лемма 3.7.7). Существует константа q_0, зависящая только от ρ, λ, μ, со следующими свойствами. Пусть $q \geqslant q_0$; тогда, если Ξ и $\Xi + \varepsilon_{ij}$ лежат в $S(\rho, q \mid \lambda, \mu)$, то $a_{ij}(\Xi)$ корректно определено. Более того, $a_{ij}(\Xi)$ положительно при $i \neq \rho+1$ и отрицательно при $i = \rho+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости

$$m = q - \rho - b(\lambda) - b(\mu).$$

Внутри схемы $\Xi \in S(\rho, q \mid \lambda, \mu)$ выделяется подсхема $\tilde{\Xi}$ порядка m, состоящая целиком из нулей и располагающаяся в строках с номерами $1, \ldots, m$. Будем считать, что q заведомо настолько велико, что $m \geqslant \rho+1$ (в дальнейшем появятся и другие ограничения).

Нетривиален лишь случай $i \leqslant \rho+1$. Заметим, что Ξ_{ij} лежит вне подсхемы $\tilde{\Xi}$, коль скоро $\Xi + \varepsilon_{ij} \in S(\rho, \lambda \mid \lambda, \mu)$. Стало быть, Ξ_{ij} лежит либо левее, либо правее подсхемы $\tilde{\Xi}$.

Разберем первый вариант, когда Ξ_{ij} лежит слева от $\tilde{\Xi}$. Рассмотрим скобки, фигурирующие в формуле для $a_{ij}(\Xi)$ и сопоставим их значения с теми значениями, которые они имели бы в ситуации леммы 3.7.7, когда исследовались схемы из $S(\rho, q \mid \lambda)$. Ясно, что нам необходимо проанализировать лишь те скобки, которые отвечают элементам $\Xi_{\tilde{i}r}$, находящимся справа от подсхемы $\tilde{\Xi}$. Заметим, что все эти $\Xi_{\tilde{i}r}$ ограничены сверху константой, зависящей только от μ, тогда как все элементы Ξ_{ij}, находящиеся слева от $\tilde{\Xi}$, ограничены снизу константой, зависящей только от λ . Кроме того, мы имеем $j \leq const$ и $r \geq q - const$. Отсюда видно, что существует такое q_0 , что при $q \geq q_0$ все рассматриваемые скобки будут отрицательны (причем такая же картина будет и в ситуации леммы 3.7.7, когда $\Xi_{\tilde{i}r} = 0$). Таким образом, по сравнению с леммой 3.7.7, у нас не возникнут какие-либо изменения в знаках или новые нули в числителе и знаменателе.

Второй вариант, когда Ξ_{ij} лежит справа от $\widetilde{\Xi}$ сводится к первому по соображениям симметрии.

3.7.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что утверждение леммы 3.7.10 справедливо при следующих условиях:

– если $\rho = 1$, то

$$q \geq b(\lambda) + b(\mu) + 2, \quad q > -\lambda_1 + b(\mu), \quad q > -\mu_1 + b(\lambda); \tag{1}$$

– если $\rho \geq 2$, то

$$q \geq b(\lambda) + b(\mu) + 2\rho, \quad q > -\lambda_\rho - \mu_\rho + \rho - 2. \tag{2}$$

Эти оценки, вообще говоря, не оптимальны. Например, если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_\rho$ и $\mu_1 = \ldots = \mu_\rho$, то последнее неравенство в (2) можно заменить двумя более слабыми (в духе (1)):

$$q > -\lambda_\rho + b(\mu) + \rho - 1, \quad q > -\mu_\rho + b(\lambda) + \rho - 1.$$

3.7.12. Зафиксируем λ и μ – такие, как в 3.7.10. Будем считать, что q настолько велико, чтобы выполнялась лемма 3.7.10. Заметим, что для всякой схемы $\Xi \in S(\rho, q \mid \lambda, \mu)$ найдется такое $c > 0$, что схема $\Xi(s)$ будет $U(n)$-допустимой при $s = c$, $c+1$, $c+2$, ... (ср. начало в 3.7.8).

Далее будем действовать по аналогии с 3.7.8. Устраним неопределенность в выборе корня из $a_{ij}(\Xi)$ посредством выхода в верхнюю полуплоскость по параметру $\mathfrak{z}$. Рассмотрим векторное пространство с базисом $\{\xi_\Xi\}$, где Ξ пробегает $S(p,q|\lambda,\mu)$, и введем в него скалярное произведение, объявив наш базис ортонормальным. Определим операторы $E_{ii}, E_{i,i-1}, E_{i-1,i}$ обычными формулами Гельфанда-Цетлина из 3.7.3, заменив там Λ на Ξ.

ТЕОРЕМА (ср. теорема 3.7.8). Описанная процедура определяет неприводимый унитаризуемый $\mathfrak{u}(p,q)$-модуль Хариш-Чандры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так же, как в теореме 3.7.8 (со ссылкой на лемму 3.7.10 вместо леммы 3.7.7), проверяется, что мы действительно получаем неприводимый унитаризуемый $\mathfrak{u}(p,q)$-модуль.

б) Заметим теперь, что число схем из $S(p,q|\lambda,\mu)$ с фиксированной $(p+1)$-й строкой конечно. Отсюда следует, что при редукции на подалгебру $\mathfrak{u}(q)$ наш модуль разлагается по конечномерным неприводимым $\mathfrak{u}(q)$-модулям с конечными кратностями. Тем более это верно для редукции на подалгебру $\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(q)$. Стало быть, наш модуль является модулем Хариш-Чандры.

3.7.13. Условимся обозначать $\mathfrak{u}(p,q)$-модули, построенные в теореме 3.7.12, через $V(p,q|\lambda,\mu)$.

Из условий, наложенных в 3.7.10 на схемы $\Xi\in S(p,q|\lambda,\mu)$ (в частности, из предположения $\lambda_1+\mu_1\in\mathbb{Z}$), видно, что каждый базисный вектор ξ_Ξ является весовым вектором для диагональной картановской подалгебры в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, причем все координаты веса целочисленны. Отсюда следует, что неприводимому унитаризуемому модулю Хариш-Чандры $V(p,q|\lambda,\mu)$ отвечает неприводимое унитарное представление группы $U(p,q)$; обозначим его через $T(p,q|\lambda,\mu)$.

Возникает естественный вопрос: что можно сказать об этих унитарных представлениях?

В случае $p=1$ все неприводимые унитарные представления группы $U(p,q)=U(1,q)$ хорошо изучены. Известно, что они исчерпываются представлениями основной, дополнительной и дискретной серий [89] . Более того, для всех представлений известна явная реализация в базисе Гельфанда-Цетлина [89] . Из сопоставления с этими известными результатами нетрудно заключить, что представления $T(1,q|\lambda,\mu)$ относятся к дополнительной серии.

Рассмотрим теперь случай $p\geqslant 2$ (напомню, что q заведомо превосходит p). Из доказательства теоремы 3.7.12, пункт б), следует, что в разложении представлений $T(p,q|\lambda,\mu)\,|\,U(q)$ все кратности конечны. При $q\geqslant p\geqslant 2$ такое свойство представлений группы $U(p,q)$ не является типичным. По этой причине я буду называть представления $T(p,q|\lambda,\mu)$, $p\geqslant 2$ особыми.

В работе автора [56] показано, что представления $T(p,q|\lambda,\mu)$ индуцированы с максимальной параболической подгруппы $P(p,q)\subset\subset U(p,q)$, сохраняющей p-мерное изотропное подпространство в $\mathbb{C}^{p+q}$, причем индуцирующее представление конечномерно и неунитарно.

Более точно, индуцирующее представление подгруппы $P(p,q)$ тривиально на ее унипотентном радикале, а на ее редуктивной части, изоморфной $GL(p,\mathbb{C})\times U(q-p)$, оно имеет вид

$$(\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_p})\otimes\bar{\pi}_{\mu_1\ldots\mu_p})\times\sigma,$$

где $\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ обозначает конечномерное голоморфное представление универсальной накрывающей группы $GL(p,\mathbb{C})$;

$\bar{\pi}_{\mu_1\ldots\mu_p}$ – аналогичное, но антиголоморфное представление (ввиду условия $\lambda_1+\mu_1\in\mathbb{Z}$ их произведение однозначно на $GL(p,\mathbb{C})$); наконец, σ обозначает унитарное представление группы $U(q-p)$ со старшим весом

$$(\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+b(\lambda)};\ 0,\ldots,0;\ -\mu_{p+b(\mu)},\ldots,-\mu_1).$$

Следует подчеркнуть, что при $p\geqslant 2$ унитаризуемость такого индуцированного представления является совершенно не очевидным фактом.

3.7.14. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $p=2$ особые представления были обнаружены Нэппом и Шпе [92], но их унитаризуемость устанавливалась совершенно иными методами.

По-видимому, часть особых представлений можно отождествить с представлениями из "дискретной серии" Шлихткрулля [109]. Но здесь следует подчеркнуть, что представления Шлихткрулля определяются чисто дискретными параметрами, тогда как особые представления зависят еще и от одного непрерывного параметра (в качестве такового можно взять, например, $\lambda_1-\mu_1$).

3.7.15. Зафиксируем λ и μ - такие же, как в 3.7.10. Тогда определено неприводимое допустимое представление $T(\lambda,\mu)$ группы $U(p,\infty)$, см. 3.4.5. Пространство $H_\infty(T(\lambda,\mu))$ отождествляется с $L(\lambda)\otimes\overline{L(\mu)}$, где $L(\lambda)$ и $L(\mu)$ суть неприводимые $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$ -модули со старшими весами λ и μ соответственно (см. 3.7.9). Из 3.7.9 видно, что $L(\lambda)\otimes\overline{L(\mu)}$ обладает базисом $\{\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_M\}$ Гельфанда-Цетлина, где Λ и M пробегают $S(p,\infty|\lambda)$ и $S(p,\infty|\mu)$ соответственно.

Следующий результат полностью аналогичен теореме 3.7.6 и доказывается точно так же.

ТЕОРЕМА. При $q\to\infty$ матричные элементы генераторов алгебры $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ n=p+q$, для представления $V(p,q|\lambda,\mu)$

в базисе $\{\xi_{\Xi}\}$ аппроксимируют матричные элементы представления $L(\lambda)\otimes\overline{L(\mu)}$ алгебры $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{C})$ в базисе $\{\xi_\Lambda\otimes\hat{\xi}_M\}$

3.7.15. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3.7.14 показывает, что неприводимые представления $T(p,q|\lambda,\mu)$ групп $U(p,q)$ в определенном смысле аппроксимируют при $q\to\infty$ неприводимые представления $T(\lambda,\mu)$ группы $U(p,\infty)$. Этот результат был получен на "инфинитезимальном уровне", но его можно установить и на "глобальном уровне", т.е. доказать сходимость матричных элементов на группе, как это требуется в работе [49].

Я напомню, что на веса λ и μ было наложено условие 3.7.9(4), тогда как представления $T(\lambda,\mu)$ группы $U(p,\infty)$ определены при несколько более слабых ограничениях на λ и μ (см. определение множества $\mathcal{V}_p$ в 3.3.2). В соответствии с определением 3.2.3 можно сказать, что был разобран невырожденный случай. Можно предположить, что аналогичные результаты имеют место и в вырожденном случае, т.е. когда выполняется хотя бы одно из условий

$$-\lambda_1\in\{a(\lambda)+b(\lambda),\ a(\lambda)+b(\lambda)+1,\dots,b(\lambda)+p-1\}$$

$$-\mu_1\in\{a(\mu)+b(\mu),\ a(\mu)+b(\mu)+1,\dots,b(\mu)+p-1\}.$$

В этом случае аналог особого представления $T(p,q|\lambda,\mu)$ группы $U(p,q)$, по-видимому, является под-или фактор-представлением подходящего индуцированного представления.

Глава 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ (G,K)-ПАР БЕСКОНЕЧНОГО РАНГА

§ 4.1. Допустимые представления (G,K)-пар и метод голоморфных расширений

В этом параграфе обсуждается определение (G,K)-пар и их допустимых представлений (разделы 4.1.1 - 4.1.3); выявляется связь с фактор-представлениями (раздел 4.1.4); объясняется основная идея метода голоморфных расширений (раздел 4.1.4); указывается "правильный" вариант топологизации групп G.

4.1.1. Я начну с общей идеи, которая затем будет конкретизирована.

Пусть G - некоторая топологическая группа и K - ее подгруппа. Предположим, что мы располагаем некоторым семейством унитарных представлений подгруппы K, в дальнейшем именуемых ручными представлениями (в этом термине содержится намек на то, что речь идет о достаточно просто устроенных представлениях).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть допустимым представлением данной пары (G,K) всякое унитарное представление T группы G такое, что $T|K$ является ручным.

Назначение этого определения состоит в выделении "разумной" категории унитарных представлений группы G в ситуации, когда обозрение всех вообще ее представлений является "дикой" задачей.

Данное определение построено по образцу определения $(\mathfrak{g},K)$-модулей Хариш-Чандры. Понятие модулей Хариш-Чандры, предложенное И.М.Гельфандом и В.А.Пономаревым [13], преследовало аналогичную цель, хотя и в ином контексте (выделение "разумной" категории модулей над полупростыми алгебрами Ли). Как известно, оно оказалось исключительно удачным.

4.1.2. Наиболее интересными и важными представляются (G,K)-пары, связанные с бесконечномерными аналогами классических римановых симметрических пространств. Эти (G,K)-пары получаются следующей процедурой. Возьмем какую-нибудь из классических серий $\{X(n)\}$ римановых симметрических пространств. Пространство $X(n)$ имеет вид $G(n)/K(n)$, где $G(n)$ - классическая вещественная или комплексная группа движений пространства $X(n)$, а $K(n)$ - ее компактная подгруппа, выделяемая инволютивным автоморфизмом. Далее, рассматриваем естественные вложения $G(n)\to G(n+1)$ (типа $GL(n,\mathbb{R})\longrightarrow GL(n+1,\mathbb{R})$) и $K(n)\to K(n+1)$ (типа $O(n)\to O(n+1)$). Переходя к индуктивным пределам по этим вложениям, получаем (G,K)-пару, связанную с данной серией. Будем говорить, что (G,K) -пара имеет некомпактный тип (соответственно, компактный тип), если исходная серия $\{X(n)\}$ состоит из некомпактных (соответственно, компактных) пространств.

Глядя на известный список римановых симметрических пространств (см., например, [63]), можно легко выписать все (G,K)-пары некомпактного и компактного типа, получаемые указанной процедурой. Результат приведен в таблицах 1 и 2.

В таблицу 1 выделены (G,K)-пары конечного ранга $\rho=1,2,\ldots$. Они отвечают сериям $\{X(n)\}$, в которых ранг симметрического пространства $X(n)$ с ростом n стабилизируется (простейший пример: n-мерные пространства Лобачевского и n-мерные сферы). В этом случае подгруппа K, с точностью до конечномерной добавки, является одной из групп $SO(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$; ее ручные представления определяются в соответствии с определением 1.1.5. Допустимые представления (G,K)-пар конечного ранга и некомпактного типа были изучены в главе 3. Что же касается пар конечного ранга и компактного типа, то их допустимые представления суть попросту ручные представления группы G , и в этом случае мы не получаем ничего нового (выделение подгруппы $K\subset G$ полезно лишь для изучения сферических функций).

В таблице 2 представлены (G,K)-пары бесконечного ранга, т.е. такие пары, для которых ранг пространства $X(n)$ неограниченно растет при $n\to\infty$. В качестве K появляется одна из групп $O(\infty)$, $SO(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$ или произведение двух экземпляров этих групп, так что мы снова можем определить ручные представления, следуя I.I.5. Теперь уже в случае (G,K)-пар компактного типа ручные представления группы G составляют лишь очень малую часть допустимых представлений. Более того, для пар компактного типа теория допустимых представлений оказывается богаче, чем для пар некомпактного типа.

4.I.3. Небольшой комментарий к таблице 2. Обозначения групп G и K в таблице 2 выбраны с тем расчетом, чтобы при формальной замене символа "∞" на "n" получались допредельные классические группы $G(n)$ и $K(n)$.

Некоторые из пар компактного типа отличаются только подгруппой K . Например, в одной и той же группе $G=U(\infty)=U(2\infty)$ выделяются три подгруппы: $O(\infty)$, $Sp(\infty)$ и $U(\infty)\times U(\infty)$. Можно показать, что при этом получаются совершенно различные категории допустимых представлений (они пересекаются только по ручным представлениям группы G).

Напротив, имеется глубокая аналогия в свойствах допустимых представлений двух (G,K)-пар, связанных с двойственными друг другу сериями симметрических пространств некомпактного и компактного типа.

Все (G,K) -пары из таблицы 2 являются парами Гельфанда: это следует из теоремы 3.6.2 (см. 3.6.3).

4.1.4. В таблице 2 фигурируют три (G,K)-пары компактного типа, у которых G совпадает с $K\times K$ (и тогда K отождествляется с диагональю в G). Сейчас будет показано, что теория допустимых представлений для этих трех пар переплетается с теорией фактор-представлений групп K.

Я напомню основные понятия, относящиеся к фактор-представлениям групп (см. [119, 123]).

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть $\mathcal{K}$ - произвольная группа.

1) Фактор-представлением группы $\mathcal{K}$ называется ее унитарное представление Π такое, что алгебра фон Неймана Π'' является фактором (т.е. $\Pi'\cap\Pi''$ состоит из скалярных операторов).

2) Фактор- представления Π_1 и Π_2 называются квазиэквивалентными, если они переводятся друг в друга подходящим изоморфизмом $\Pi_1'\to\Pi_2''$ алгебр фон Неймана; при этом Π_1 и Π_2 интерпретируются как морфизмы группы $\mathcal{K}$ в группы унитарных операторов факторов.

3) Фактор-представление Π называется конечным, если Π'' является конечным фактором, т.е. принадлежит типу I_n или II_1.

4) Характером конечного фактор-представления Π называется функция $\chi_\Pi(\cdot)=\mathrm{tr}\,\Pi(\cdot)$ на $\mathcal{K}$, где tr обозначает канонический нормированный след на Π'' .

Известно, что χ_Π определяет Π однозначно, с точностью до квазиэквивалентности, и что характеры конечных фактор-представлений допускают следующую абстрактную характеризацию: это в точности крайние точки выпуклого множества, состоящего из центральных положительно определенных функций χ на $\mathcal{K}$ таких, что $\chi(1)=1$.

ТЕОРЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для произвольной группы $\mathcal{K}$ имеется биективное соответствие между классами квазиэквивалентности конечных фактор-представлений группы $\mathcal{K}$ и классами эквивалентности таких неприводимых унитарных представлений группы $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, у которых есть ненулевой вектор, инвариантный относительно диагонали $\mathcal{K}\subset\mathcal{K}\times\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть T – неприводимое унитарное представление группы $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ и ξ – единичный вектор, инвариантный относительно диагонали. Положим

$$\Pi_{left}=T\,|\,\mathcal{K}\times\{1\}\,,\quad \Pi_{right}=T\,|\,\{1\}\times\mathcal{K}\,. \tag{I}$$

Унитарные представления Π_{left} и Π_{right} группы $\mathcal{K}$ в $H(T)$ оба являются фактор-представлениями. Это видно из того, что, во-первых, они перестановочны, и, во-вторых, пересечение $\Pi_{left}'\cap\Pi_{right}'$ сводится к скалярным операторам (поскольку оно совпадает с T', а T неприводимо).

Далее, функция

$$A\mapsto(A\xi,\xi)\quad,\ \text{где } A\in\Pi_{left}''\quad \text{или}\quad A\in\Pi_{right}''\,,$$

является следом на факторе Π_{left}'' или Π_{right}'', так что наши фактор-представления являются конечными.

Итак, мы определили соответствие $T\to\Pi$ (в качестве Π берется, для определенности, Π_{left}).

а) Обратно, пусть Π – конечное фактор-представление группы $\mathcal{K}$ и tr – канонический след на Π''. Пусть H – гильбертово пополнение предгильбертова пространства Π'' со скалярным произведением $(A,B)=\mathrm{tr}(AB^*)$. В H действует унитарное представление T группы $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, однозначно определенное из условия

$$T(u,v)A=\Pi(u)A\Pi(v)^{-1}\ ,\ A\in\Pi''.$$

Рассмотрим унитарные представления Π_{left} и Π_{right} в H, определенные по T формулой (I). Тогда Π и Π_{left} квазиэквивалентны. С другой стороны, по известной теореме о гильбертовых алгебрах (см. [75]), Π_{left} и Π_{right} порождают взаимные коммутанты. Но пересечение этих коммутантов сводится к скалярам, поскольку Π_{left} есть фактор. Значит, T неприводимо. Наконец, единичный элемент $1\in\Pi''$ является единичным вектором в H, инвариантным относительно диагонали.

Мы построили соответствие $\Pi\mapsto T$, которое является обратным для соответствия $T\mapsto\Pi$, построенного в пункте а).

в) Биекция $\Pi\leftrightarrow T$ особенно просто выглядит на уровне "характеры - сферические функции". А именно, она сводится к тому, что характеру χ группы $\mathcal{K}$ отвечает сферическая функция $\varphi(u,v)=\chi(uv^{-1})$ на $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$.

Если группа $\mathcal{K}$ является топологической, то все сказанное в этом разделе остается в силе, коль скоро рассматриваются непрерывные представления Π и T.

4.I.5. Я опишу сейчас основную идею метода голоморфных расширений допустимых представлений. Пусть (G,K)-произвольная пара из таблицы 2. Погрузим группу K в группу K^* : если K совпадает с $O(\infty)$, $SO(\infty)$, $U(\infty)$ или $Sp(\infty)$, то K^* выбирается так же, как в I.4.5, если же K является произведением двух экземпляров группы $O(\infty)$ и т.д., то K^* также удваивается. Таким образом, K^* изоморфна либо группе $U(\infty)$, либо прямому произведению двух или четырех экземпляров группы $U(\infty)$.

Предположим, что нам удалось построить некоторую группу G^*, которая содержит G и K^* и порождается ими (алгебраически или топологически, все равно), и что мы располагаем некоторой категорией $\mathfrak{A}^*$ унитарных представлений группы G^*, голоморфных в том смысле, что сужение представления на подгруппу $K^* \subset G^*$ голоморфно в смысле определения I.4.I.

Тогда, сопоставляя голоморфному представлению $T^* \in \mathfrak{A}^*$ представление $T = T^* | G$, мы получаем категорию $\mathfrak{A}$ допустимых представлений группы G, эквивалентную исходной категории $\mathfrak{A}^*$: это утверждение проверяется в точности так же, как теорема 3.4.4, все утверждения которой остаются в силе в рассматриваемой ситуации.

Так же,как в главе 3. будем называть T^* голоморфным расширением допустимого представления T. Возможность замены T на T^* оказывается мощным средством изучения допустимых представлений, поскольку голоморфные представления устроены существенно проще.

Обозначим через $G^*[T]$ группу унитарных операторов в $H(T)$, порожденную образами групп G и K^*. Как следует из теоремы 3.5.I, в контексте (G,K)-пар конечного ранга группа $G^*[T]$, с точностью до некоторых мелочей, не зависит от T. В контексте (G,K)-пар бесконечного ранга ситуация оказывается более сложной и интересной. Группа $G^*[T]$ теперь существенно зависит от T: грубо говоря, если T_1 и T_2 находятся "в общем положении", то $G^*[T_1 \otimes T_2] = G^*[T_1] \times G^*[T_2]$. Это приводит к тому, что в качестве G^* берется некоторая группа токов.

4.1.6. В настоящей главе будут изучены допустимые представления двух модельных (G,K)-пар бесконечного ранга: пары $(GL(\infty,\mathbb{C}), U(\infty))$ некомпактного типа и двойственной ей пары $(U(\infty)\times U(\infty), U(\infty))$ компактного типа. Для всех остальных пар из таблицы 2 теория может быть построена по той же схеме, см. [43, 48] .

4.1.7. В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о непрерывном продолжении допустимых представлений (G,K)-пар бесконечного ранга на подходящие пополнения группы G . В принципе, можно предложить много различных вариантов пополнения индуктивного предела классических групп, см. [81, 94] . В [107] исследован вопрос о непрерывном продолжении сферических представлений (G,K)-пар на различные топологические пополнения группы G : некоторые топологии заведомо не годятся, иные пригодны для всех сферических представлений, но не являются "оптимальными", наконец, есть вариант, являющийся "оптимальным" для части представлений, но не годящийся для других представлений.

По моему убеждению, правильный подход состоит в следующем. Вернемся к процедуре построения (G,K)-пары по классической серии $\{X(n)\}$ симметрических пространств. Согласуем римановы метрики пространств $X(n)$ так, чтобы вложения $X(n)\to X(n+1)$ были изометричны. Отсюда возникает риманова метрика на пространстве $X = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{ind} X(n)$.

Рассмотрим пополнение $\overline{X}$ пространства X по этой метрике. $\overline{X}$ является бесконечномерным римановым многообразием, моделируемым гильбертовым пространством $\mathcal{P}$, образованным матрицами Гильберта-Шмидта бесконечного формата (над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$; с возможным дополнительным условием симметричности, антисимметричности, эрмитовости или антиэрмитовости). Обозначим через $\bar{G}_2$ связную компоненту единицы в группе $\mathrm{Aut}\,\bar{X}$ автоморфизмов пространства $\bar{X}$, где индекс " 2 " напоминает о норме Гильберта-Шмидта $\|\cdot\|_2$ на $\mathcal{P}$. Группа $\bar{G}_2$ локально изоморфна $\bar{K}\times\mathcal{P}$, где $\bar{K}$ – пополнение группы K в сильной=слабой операторной топологии, см. I.I.I. Для некоторых (G,K)-пар компактного типа надо затем взять $\mathbb{Z}$-накрывающую группу над $\bar{G}_2$.

§ 4.2. Бозонная реализация представлений со старшим весом

Цель этого параграфа – построение неприводимых представлений $W(k,\pi)$ группы $U(\infty,\infty)$, с помощью которых в § 4.3 и 4.5 будут конструироваться допустимые представления. Каждое из $W(k,\pi)$ является индуктивным пределом неприводимых унитарных представлений со старшим весом $W(p,q\,|\,k,\pi)$ групп $U(p,q)$ при $p\to\infty$, $q\to\infty$.

Параграф начинается с описания известной реализации представлений $W(p,q\,|\,k,\pi)$ как неприводимых компонент в разложении тензорных степеней $W(p,q)^{\otimes k}$, $k=1,2,\dots$, так называемого представления Вейля $W(p,q)$ группы $U(p,q)$. Разложение представления $W(p,q)^{\otimes k}$ "управляется" группой $U(k)$: неприводимые компоненты параметризуются неприводимыми представлениями π этой группы. Эта реализация удобна, в частности, тем, что позволяет сразу установить закон разложения тензорных произведений представлений со старшим весом.

Представление Вейля $W(p,q)$ задается реализацией генераторов алгебры Ли $\mathfrak{u}(p,q)$ в виде квадратичных выражений от $p+q$ бозонных операторов рождения и уничтожения, откуда и происходит термин "бозонная реализация".

4.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Бозонной реализацией алгебры Ли $\mathfrak{u}(p,q)$ называется ее реализация дифференциальными операторами порядка ≤ 2 от $p+q$ переменных z_{1i}, z_{2k} $(1\leq i\leq p,\ 1\leq k\leq q)$, которая на базисе комплексифицированной алгебры $\mathfrak{u}(p,q)\otimes\mathbb{C}=\mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{C})$ выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto -z_{1j}\frac{\partial}{\partial z_{1i}} - \delta_{ij}\cdot 1, \quad 1\leq i,j\leq p \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{k\ell} \end{bmatrix} \longmapsto z_{2k}\frac{\partial}{\partial z_{2\ell}}, \qquad 1\leq k,\ell\leq q \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & e_{ik} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \frac{\partial}{\partial z_{1i}}\frac{\partial}{\partial z_{2k}}, \qquad 1\leq i\leq p,\ 1\leq k\leq q \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_{ki} & 0 \end{bmatrix} \longmapsto -z_{2k}z_{1i}, \qquad 1\leq i\leq p,\ 1\leq k\leq q. \tag{4}$$

Как обычно, символом $e_{..}$ обозначаются матричные единицы.

Рассмотрим гильбертово пространство Сигала-Баргмана $L^2_{hol}(\mathbb{C}^{p+q})$, которое было определено в 1.4.7, и выделим в нем плотное подпространство $\mathcal{W}(p,q)$, образованное всеми многочленами от z_{1i}, z_{2k}. Формулы (1)-(4) определяют в $\mathcal{W}(p,q)$ структуру унитаризуемого $\mathfrak{u}(p,q)$-модуля: унитаризуемость является простым следствием того факта, что в $L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)$ операторы умножения на какую-либо координату и дифференцирования по ней же формально сопряжены друг другу.

Термин "бозонная реализация" мотивирован тем, что $L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)$ можно рассматривать как бозонное пространство Фока с n степенями свободы.

4.2.2. Для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathcal{W}(p,q\,|\,m) = \{ f \in \mathcal{W}(p,q) : f(\bar{u} z_1, u z_2) = u^m f(z_1, z_2) \}, \tag{1}$$

где $u \in U(1)$, $z_1 = (z_{11}, \ldots, z_{1p}) \in \mathbb{C}^p$, $z_2 = (z_{21}, \ldots, z_{2q}) \in \mathbb{C}^q$.

Пространство $\mathcal{W}(p,q)$ является прямой суммой подпространств (1), каждое из которых является $\mathfrak{u}(p,q)$-подмодулем.

ТЕОРЕМА (КАШИВАРА и ВЕРНЬ [86]). Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ подпространство $\mathcal{W}(p,q|m)$ является неприводимым $\mathfrak{u}(p,q)$-модулем со старшим весом следующего вида:

$$(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{p}\ ;\ m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{q-1}) \qquad \text{, если } m \geq 0 \tag{2}$$

$$(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{p-1}, -1+m\ ;\ \underbrace{0, \ldots, 0}_{q}) \qquad \text{, если } m \leq 0. \tag{3}$$

Из этой теоремы следует, что бозонная реализация алгебры $\mathfrak{u}(p,q)$ порождает унитарное представление группы $U(p,q)$ в пространстве $L^2_{hol}(\mathbb{C}^{p+q})$. Это представление будет обозначаться через $W(p,q)$. Оно хорошо известно, но различными авторами именуется по-разному (представление Вейля, осцилляторное представление, гармоническое представление , см. [83, 86]). Я буду использовать первый термин.

Условимся обозначать через $[m]$, где $m=0,1,\ldots$, диаграмму Юнга $(m,0,\ldots)$, а через ${}^{\rho}\rho_{[m]}$ – неприводимое полиномиальное представление группы $U(\rho)$ со старшим весом $(m,0,\ldots,0)$;в этих обозначениях имеем:

$$W(\rho,q)\mid U(\rho)\times U(q)\sim$$
$$\sim\bigoplus_{m,\ell=0}^{\infty}\left(\overline{{}^{\rho}\rho_{[m]}}\otimes \det(\cdot)^{-1}\right)\times {}^{q}\rho_{[\ell]}\,. \tag{4}$$

Ясно, что $\mathcal{W}(\rho,q)$ можно охарактеризовать как подпространство $[U(\rho)\times U(q)]$ – конечных векторов представления $W(\rho,q)$.

Представление Вейля $W(\rho,q)$ является прямой суммой неприводимых унитарных представлений со старшим весом $W(\rho,q\mid m)$, отвечающих модулям $\mathcal{W}(\rho,q\mid m)$. Каждое из них разлагается по представлениям группы $U(\rho)\times U(q)$ вида $\overline{{}^{\rho}\rho_{[m_1]}}\otimes\det(\cdot)^{-1}\times{}^{q}\rho_{[m_2]}$, где $m_2-m_1=m$.

4.2.3. Для более явного описания представления Вейля удобен язык символов [2, 3] . Достаточно хороший оператор A в пространстве Сигала-Баргмана $L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)$, в частности, любой ограниченный оператор, определяется своим символом $K_A(z,w)$, который есть функция, голоморфная по $z\in\mathbb{C}^n$ и антиголоморфная по $w\in\mathbb{C}$. Имеем

$$(Af)(z)=\int_{\mathbb{C}^n}K_A(z,w)f(w)\,d\nu^{\otimes n}(w),$$
$$f\in L^2_{hol}(\mathbb{C}^n), \tag{1}$$

где $\nu^{\otimes n}$ – гауссова мера (см. I.4.7).

ТЕОРЕМА. Символ оператора $[W(p,q)](g)$, где $g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – матрица из $U(p,q)$, имеет вид

$$K(z,w)=(\det a)^{-1} \exp\{[\bar{w}_1 \oplus (-z_2)]\, \Omega_g\, [z_1 \oplus (-\bar{w}_2)]'\}, \qquad (2)$$

$$\Omega_g = \begin{bmatrix} a & -a^{-1}b \\ ca^{-1} & d-ca^{-1}b \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь $z=z_1\oplus z_2$ и $w=w_1\oplus w_2$ – векторы-строки длины $p+q$, штрих означает транспонирование.

Доказательство имеется в статье Давидсона [74]. Аналогичное утверждение для симплектической группы впервые было получено Ф.А.Березиным [2].

4.2.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $f_0 \in L^2_{hol}(\mathbb{C}^{p+q})$ – вакуумный вектор, т.е. функция $f_0(z)\equiv 1$. Тогда

$$(W(p,q)(g)f_0, f_0) = (\det a)^{-1}, \quad g\in U(p,q). \qquad (1)$$

Это хорошо известное утверждение вытекает, например, из формулы 4.2.3(2).

4.2.5. Заметим, что $L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ можно отождествить с $L^2_{hol}(\mathbb{C}^{k\times n})$, где $\mathbb{C}^{k\times n}$ обозначает пространство матриц формата $k\times n$. Будем записывать матрицы $z\in\mathbb{C}^{k\times(p+q)}$ в виде $z_1\oplus z_2$, где $z_1\in\mathbb{C}^{k\times p}$, $z_2\in\mathbb{C}^{k\times q}$. Определим унитарное представление R_k группы $U(k)$ в $L^2_{hol}(\mathbb{C}^{k\times(p+q)})$, где $k=1,2,\dots$, следующим образом:

$$R_k(u)f(z_1 \oplus z_2) = f(u^* z_1 \oplus u' z_2), \quad u \in U(k). \tag{1}$$

С другой стороны, в том же пространстве действует представление $W(p,q)^{\otimes k}$ группы $U(p,q)$. Из определения бозонной реализации следует, что R_k и $W(p,q)^{\otimes k}$ коммутируют друг с другом.

Пусть $\pi \in U(k)^\wedge$ – произвольное неприводимое унитарное представление группы $U(k)$, которое будет записываться как ${}^k\rho_{\lambda,\mu}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$, $\ell(\lambda) + \ell(\mu) \leq k$ (см. I.2.6); $\ell(\lambda)$ означает количество ненулевых строк диаграммы λ.

Обозначим через $W(p,q \mid k, \pi)$ естественное унитарное представление группы $U(p,q)$ в пространстве

$$\mathrm{Hom}_{U(k)}\left(H(\pi), L^2_{hol}(\mathbb{C}^{k\times(p+q)})\right). \tag{2}$$

Оно определено, если пространство (2) отлично от нуля.

ТЕОРЕМА (ХАУ [83], КАШИВАРА и ВЕРНЬ [86]).

1) Представление $W(p,q \mid k,\pi)$ в пространстве (2), где $\pi = {}^k\rho_{\lambda,\mu}$, определено тогда и только тогда, когда $p \geq \ell(\mu)$, $q \geq \ell(\lambda)$.

2) Если это условие выполнено, то $W(p,q \mid k,\pi)$ является неприводимым унитарным представлением группы $U(p,q)$ со старшим весом

$$(-k-\mu_p, \ldots, -k-\mu_1,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_q). \tag{3}$$

3) Представление $W(p,q)^{\otimes k}$ является прямой суммой представлений $W(p,q \mid k,\pi)$ с кратностями $\dim \pi$.

Ясно, что в частном случае $k=1$ этот результат согласуется с теоремой 4.2.2.

4.2.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Представлениями вида $W(p,q|k,\pi)\otimes$ $\otimes \det(\cdot)^m$, где $m\in\mathbb{Z}$, исчерпываются все неприводимые унитарные представления со старшим весом групп $U(p,q)$. Это утверждение вытекает из сопоставления теорем 4.2.5 и 3.2.2.

4.2.7. Как показано Сигалом [113] , понятие пространства Сигала-Баргмана сохраняет силу при замене $\mathbb{C}^n$ произвольным комплексным гильбертовым пространством $\mathcal{E}$. Гильбертово пространство $L^2_{hol}(\mathcal{E})$ по-прежнему состоит из некоторых целых функций на $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}$ – произвольное замкнутое подпространство, то $L^2_{hol}(\mathcal{F})$ канонически отождествляется с подпространством в $L^2_{hol}(\mathcal{E})$, состоящим из функций, которые явно зависят лишь от проекции аргумента $z\in\mathcal{E}$ на подпространство $\mathcal{F}$. Это позволяет отождествить $L^2_{hol}(\mathcal{E})$ с индуктивным пределом (в категории гильбертовых пространств) $\lim\operatorname{ind} L^2_{hol}(\mathcal{F}_\alpha)$, где $(\mathcal{F}_\alpha)$ – произвольная сеть подпространств в $\mathcal{E}$ такая, что $\bigcup\mathcal{F}_\alpha$ плотно в $\mathcal{E}$. В частности, $L^2_{hol}(E)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{ind} L^2_{hol}(\mathbb{C}^n)$, где $E=E(\mathbb{C})$, см. 1.1.1. Отмечу еще, что понятие символа остается в силе и для бесконечномерных $\mathcal{E}$.

4.2.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2_{hol}(\mathbb{C}^p\oplus\ell_2)$ – индуктивный предел пространств $L^2_{hol}(\mathbb{C}^{p+q})$ при $q\to\infty$. В нем реализуется унитарное представление группы $U(p,\infty)$, являющееся индуктивным пределом представлений $W(p,q)$. Назовем его представлением Вейля группы $U(p,\infty)$ и обозначим через $W(p)$. Повторяя конструкцию 4.2.5, мы получим, что $W(p)^{\otimes k}$ разлагается по неприводимым представлениям $W(p\,|\,k,\pi)$, где $\pi={}^k\rho_{\lambda,\mu}$, $\ell(\lambda)+\ell(\mu)\le k$, $\ell(\mu)\le p$. В свою очередь, каждое $W(p|k,\pi)$ является индуктивным пределом представлений $W(p,q|k,\pi)$ при $q\to\infty$. Сопоставление этого построения с леммой – определением 3.3.2 показывает, что $W(p\,|\,k,\pi)$ является неприводимым унитарным представлением группы $U(p,\infty)$ со старшим весом $(-k-\mu_p,\ldots,-k-\mu_1;\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots)$; то, что вес именно такой, следует из 4.2.5(3). Более того, сопоставляя наши ограничения $\ell(\lambda)+\ell(\mu)\leqslant k$, $\ell(\mu)\leqslant p$ с определением множества $\mathcal{Y}_p$ старших весов в 3.3.2, легко проверить, что представлениями вида $W(p\,|\,k,\pi)$ исчерпываются все неприводимые унитарные представления со старшим весом группы $U(p,\infty)$; здесь следует подчеркнуть, что речь идет именно о группе $U(p,\infty)$, а не о $U(p,\infty)^{\sim}$, как в § 3.3.

Таким образом, мы получаем явную реализацию тех унитарных представлений со старшим весом из § 3.3, которые однозначны на группе $U(p,\infty)$, как неприводимых компонент представлений $W(p)^{\otimes k}$, $k=1,2,\ldots$, где разложение определяется, как в теореме 4.2.5, группой $U(k)$. Отмечу ёще, что одно и то же неприводимое представление может содержаться в нескольких тензорных степенях.

4.2.9. Определим группу $U(\infty,\infty)$ как индуктивный предел конечномерных групп $U(p,q)$ при $p\to\infty$, $q\to\infty$. Элементы этой группы можно рассматривать как J-унитарные операторы в $E\oplus E$, (где $E=E(\mathbb{C})$, см. I.I.I), фиксирующие почти все базисные векторы. Разумеется, $U(\infty,\infty)$ можно представить также как индуктивный предел групп $U(n,n)$, где $n\to\infty$.

Определим представление Вейля W группы $U(\infty,\infty)$ как индуктивный предел представлений Вейля групп $U(p,q)$ (или $U(n,n)$), где $p,q,n\to\infty$. Представление W реализуется в $L^2_{hol}(E\oplus E)$.

Заменив в конструкции 4.2.5 представление $W(p,q)$ на представление W , мы получим, что $W^{\otimes k}$, где $k\in\{1,2,\ldots\}$ разлагается по неприводимым представлениям $W(k,\pi)$, где $\pi \in U(k)^\wedge$. Каждое $W(k,\pi)$ есть индуктивный предел представлений $W(p,q\,|\,k,\pi)$ групп $U(p,q)$; последние определены, если p и q достаточно велики.

ЛЕММА. Представления группы $U(\infty,\infty)$ вида $W(k,\pi)$, где $k=1,2,\ldots$, $\pi \in U(k)^\wedge$, попарно не эквивалентны друг другу. Более того, их сужения на подгруппу $SU(\infty,\infty)$ неприводимы и попарно не эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Представление $W(k,\pi)\,|\,SU(\infty,\infty)$ является индуктивным пределом представлений $W(p,q\,|\,k,\pi)\,|\,SU(p,q)$. Последние всегда неприводимы, так что $W(k,\pi)\,|\,SU(\infty,\infty)$ тоже неприводимо.

б) Надо показать, что если $\pi \in U(k)^\wedge$, $\pi' \in U(k')^\wedge$, причем $\{k,\pi\} \neq \{k',\pi'\}$, то сужения представлений $W(k,\pi)$ и $W(k',\pi')$ на $SU(\infty,\infty)$ не эквивалентны. В силу сказанного в I.2.4 для этого достаточно проверить, что представления

$$W(p,q\,|\,k,\pi)\,|\,SU(p,q), \quad W(p,q\,|\,k',\pi')\,|\,SU(p,q)$$

не эквивалентны друг другу, если p и q достаточно велики. Но это вытекает из формулы 4.2.5(3) для старшего веса. В самом деле, все сводится к тому факту, что коль скоро $p>\ell(\mu)$, $q>\ell(\lambda)$, мы можем восстановить параметр k по сужению веса 4.2.5(3) на подалгебру диагональных матриц алгебры $\mathfrak{su}(p,q)$.

4.2.10. Из 4.2.2(4) вытекает, что

$$W\,|\,U(\infty)\times U(\infty) \sim \bigoplus_{m,\ell=0}^{\infty} \left(\overline{\rho_{[m]} \otimes \det(\cdot)}\right) \times \rho_{[\ell]}\,, \qquad (1)$$

откуда видно, что $W^{\otimes k} \mid U(\infty)\times U(\infty)$ разлагается по представлениям вида $(\bar{V}_1 \otimes \det(\cdot)^{-k}) \times V_2$, где V_1, V_2 – неприводимые голоморфные представления группы $U(\infty)$, тогда как нам будут нужны такие представления, которые разлагаются по голоморфным представлениям группы $U(\infty)\times U(\infty)$.

Чтобы избавиться от множителя $\det(\cdot)$ в (I) и добиться голоморфности, заменим группу $U(\infty,\infty)$ на $S^1 \times U(\infty,\infty)$, где S^1 обозначает единичную окружность $|z|=1$ в $\mathbb{C}^*$. Обозначим эту группу через $EU(\infty,\infty)$, где буква "E" происходит от слова "*extension*" и продолжим представление Вейля W на $EU(\infty,\infty)$, сопоставляя элементу $z\in S^1$ скалярный оператор $z\cdot 1$. Произвольный элемент группы $EU(\infty,\infty)$ будем обозначать через $\langle z, g\rangle$, где $z\in S^1$, $g\in U(\infty,\infty)$.

Зададим вложение группы $U(\infty)\times U(\infty)$ в группу $EU(\infty,\infty)$ следующим образом:

$$d : \langle u_1, u_2\rangle \mapsto \langle \det \bar{u}_2, \begin{bmatrix} \bar{u}_2 & 0 \\ 0 & u_1 \end{bmatrix} \rangle . \qquad (2)$$

Далее, продолжим все представления $W(k,\pi)$ группы $U(\infty,\infty)$ на $EU(\infty,\infty)$, предполагая, что $z\in S^1$ действует умножением на z^k.

ЛЕММА. Если отождествить $U(\infty)\times U(\infty)$ с ее образом в $EU(\infty,\infty)$ относительно вложения (2), то сужение любого $W(k,\pi)$ на $U(\infty)\times U(\infty)$ будет голоморфным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $W(k,\pi)$ входит в разложение представления $W^{\otimes k}$, достаточно проверить аналогичное утверждение для представления W. А это вытекает из сопоставления

(I) и (2): видно, что

$$W \circ d \sim \bigoplus_{l,m=0}^{\infty} \rho_{[l]} \times \rho_{[m]} . \tag{3}$$

4.2.II. Из определения представлений $W(k,\pi)$ вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА. Для любых $\pi' \in U(k')^{\wedge}$, $\pi'' \in U(k'')^{\wedge}$ тензорное произведение $W(k',\pi') \otimes W(k'',\pi'')$ разлагается в дискретную прямую сумму неприводимых представлений вида $W(k,\pi)$, где $k=k'+k''$, $\pi \in U(k)^{\wedge}$, причем кратность компоненты $W(k,\pi)$ равна кратности, с которой $\pi' \times \pi''$ входит в разложение представления $\pi \mid U(k') \times U(k'')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для упрощения обозначений $EU(\infty, \infty) = L$. Из теоремы 4.2.5 и определения представления Вейля W группы L следует, что представление $R_k \times W^{\otimes k}$ группы $U(k) \times L$ в пространстве $H(W^{\otimes k})$ имеет следующий вид:

$$R_k \times W^{\otimes k} \sim \bigoplus_{\pi \in U(k)^{\wedge}} \pi \times W(k,\pi). \tag{4}$$

Тот факт, что отсюда формально следует утверждение теоремы, является, несомненно, известным; совершенно аналогичная картина возникает, например, в двойственности Шура-Вейля между симметрической и унитарными группами. Для полноты изложения я приведу доказательство.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} U(k) \arrow[dr, dash] & L\times L \\ U(k')\times U(k'') \arrow[u] \arrow[ur, dash] & L \arrow[u] \end{tikzcd}, \tag{5}$$

где $k=k'+k''$ и $L\to L\times L$ - диагональное вложение. Все четыре группы из диаграммы (5) действуют в пространстве

$$H(W^{\otimes k}) = H(W^{\otimes k'}) \otimes H(W^{\otimes k''}), \tag{6}$$

причем группы, соединенные в (5) косой чертой, находятся в "двойственности" друг к другу.

Обозначим через V представление группы $U(k')\times U(k'')\times L$ в пространстве (6). Мы можем написать тогда

$$V \sim \bigoplus_{\pi',\pi'',\pi} N(\pi,\pi',\pi'')\cdot \pi'\times\pi''\times W(k,\pi),$$

где $N(\pi,\pi',\pi'')$ суть некоторые кратности. Рассматривая $U(k')\times \times U(k'')$ как подгруппу в $U(k)$ и соответственно V - как результат редукции представления (4), мы получим, что $N(\pi, \pi',\pi'')$ есть кратность вхождения $\pi'\times\pi''$ в π. С другой стороны, рассматривая L как подгруппу в $L\times L$ и соответственно - как результат редукции представления

$$R_{k'}\times R_{k''}\times W^{\otimes k'}\times W^{\otimes k''},$$

мы получим, что то же самое $N(\pi,\pi',\pi'')$ равно кратности, с которой $W(k,\pi)$ входит в $W(k',\pi')\otimes W(k'',\pi'')$, что и требовалось доказать.

§ 4.3. Допустимые представления (G,K) -пары $(GL(\infty,\mathbb{C}),\ U(\infty))$

Цель параграфа - построение семейства $\{T_{\mathcal{M}}\}$ неприводимых допустимых представлений для $(GL(\infty,\mathbb{C}),\ U(\infty))$. Символ $\mathcal{M}$ обозначает набор параметров, определяющих представление: конечное множество точек $x_1,\dots,x_m$ на прямой и набор $\pi_1,\dots,\pi_m$, где каждое π_i является неприводимым представлением какой-либо из групп $U(1)$, $U(2),\dots$.

Основным результатом параграфа является теорема 4.3.4, утверждающая, что представления $T_{\mathcal{M}}$ неприводимы и попарно не эквивалентны.

Другой результат параграфа - теорема 4.3.8 о возможности продолжения всех представлений $T_{\mathcal{M}}$ на гильберт-шмидтовское пополнение $\overline{G}_2$ группы $G=GL(\infty,\mathbb{C})$. Результаты такого сорта важны, например, для приложений к группе диффеоморфизмов окружности (см. Ю.А.Неретин [36, 38]).

Представления $T_{\mathcal{M}}$ получаются в результате разложения всевозможных тензорных произведений так называемых фундаментальных представлений T_x , зависящих от непрерывного параметра
Фундаментальные представления вводятся в разделе 4.3.3. Они имеют следующий вид:

$$T_x(g)=\theta_x(g)\,W(t_x(g)),\quad g\in GL(\infty,\mathbb{C}),$$

где $t_x: GL(\infty,\mathbb{C})\to U(\infty,\infty)$ - некоторое вложение, переводящее подгруппу $U(\infty)$ в подгруппу $U(\infty)\times U(\infty)$; W - представление Вейля группы $U(\infty,\infty)$, рассмотренное в § 4.2; $\theta_x: GL(\infty,\mathbb{C})\to$

$U(1)$ - некоторое одномерное представление, выбор которого диктуется леммой 4.3.3 и особенно теоремой 4.3.8.

Доказательство основной теоремы 4.3.4 основано на результатах § 4.2 о разложении представлений $W^{\otimes k}$, методе голоморфных расширений и важной подготовительной теореме 4.3.2 об алгебрах Ли полиномиальных токов.

4.3.1. В этом параграфе используются следующие обозначения: $G = GL(\infty, \mathbb{C})$ и $G(n) = GL(n, \mathbb{C})$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\infty, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ - их алгебры Ли, которые всегда рассматриваются как алгебры над $\mathbb{R}$; $K = U(\infty)$ и $K(n) = U(n)$; $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(\infty)$ и $\mathfrak{k}(n) = \mathfrak{u}(n)$ - их алгебры Ли; $K^* = U(\infty) \times U(\infty)$ и $K^*(n) = U(n) \times U(n)$; $\mathfrak{k}^* = \mathfrak{u}(\infty) \oplus \mathfrak{u}(\infty)$ и $\mathfrak{k}^*(n) = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)$ - их алгебры Ли.

Произвольный элемент $A \in \mathfrak{g}$ запишем в виде $A = X + Y$, где $X = (A - A^*)/2 \in \mathfrak{k}$, $Y = (A + A^*)/2$, и положим

$$\tau_x(A) = \begin{bmatrix} X + ixY & (1 - ix)Y \\ (1 + ix)Y & X - ixY \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Матрица (1) лежит в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(2\infty, \mathbb{C})$ - комплексификации алгебры Ли $\mathfrak{u}(\infty, \infty)$ группы $U(\infty, \infty)$.

Непосредственная проверка показывает, что τ_x является морфизмом $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(2\infty, \mathbb{C})$ алгебр Ли для любого $x \in \mathbb{C}$, причем $\tau_x(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{u}(\infty, \infty)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Следует отметить, что

$$\tau_x(A) = h_x \tau_0(A) h_x^{-1},$$

$$h_x \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \left(1-\frac{ix}{2}\right)\cdot 1 & \frac{ix}{2}\cdot 1 \\ \frac{-ix}{2}\cdot 1 & \left(1-\frac{ix}{2}\right)\cdot 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

причем h_x является J-унитарной матрицей для $x\in\mathbb{R}$. Ясно, что $\tau_x(\mathfrak{g}(n))\subset\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$ для любого $n=1,2,\dots$.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(2\infty,\mathbb{C}[x])$ полиномиальных $\mathfrak{gl}(2\infty,\mathbb{C})$-значных токов, т.е. полиномиальных функций со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(2\infty,\mathbb{C})$. Погрузим в нее алгебру Ли $\mathfrak{g}$ посредством отображения τ:

$$\tau(A)(x)=\tau_x(A),\quad A\in\mathfrak{g},\qquad x\in\mathbb{C}. \qquad (3)$$

Зададим еще вложение $\delta\colon k^*\longrightarrow\mathfrak{gl}(2\infty,\mathbb{C}[x])$:

$$\delta(X_1\oplus X_2)(x)=\begin{bmatrix} \overline{X}_2 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix},\quad X_1\oplus X_2\in k^*. \qquad (4)$$

Ясно, что $\tau(\mathfrak{g}(n))$ и $\delta(k^*(n))$ лежат в $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}[x])$.

4.3.2. Зафиксируем $n\in\{1,2,\dots\}$ и обозначим через $\mathfrak{g}^*(n)$ подалгебру в $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}[x])$, порожденную над $\mathbb{R}$ подалгебрами $\tau(\mathfrak{g}(n))$ и $\delta(k^*(n))$. Условимся записывать элементы алгебры $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}[x])$ в виде матриц-функций $F=F(x)$, разбитых на блоки $F_{ab}=F_{ab}(x)$, где $a,b=1,2$ и каждый блок имеет формат $n\times n$.

ТЕОРЕМА. Алгебра Ли характеризуется следующими условиями на

$F \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}[x])$:

$$F(x) \in \mathfrak{u}(n,n) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{I}$$

$$F_{12}(-i) = F_{21}(i) = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{tr}\, F(x) \equiv const. \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из формулы 4.3.I(I) и 4.3.I(4) видно, что элементы подалгебр $\tau(\mathfrak{g}(n))$ и $\delta(\mathfrak{k}^*(n))$ удовлетворяют условиям (I)-(3). Стало быть, это верно и для всех $F \in \mathfrak{g}^*(n)$.

б) Проверим обратное утверждение: если F удовлетворяет (I)-(3), то $F \in \mathfrak{g}^*(n)$. Положим $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}[x])$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}^*(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{b}}$ – комплексификация подалгебры в $\mathfrak{a}$, описываемой условиями (I)-(3). Ясно, что $\tilde{\mathfrak{b}}$ характеризуется условиями (2)-(3). Достаточно проверить, что $\tilde{\mathfrak{b}} \subseteq \mathfrak{b}$.

в) Отождествим $\mathfrak{k}^*(n) = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)$ с ее образом в $\mathfrak{a}$. Рассмотрим блочно-треугольное разложение

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{-1} \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1 \overset{def}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Каждая из подалгебр $\mathfrak{a}_j$, где $j = -1, 0, 1$, является $\mathfrak{k}^*(n)$-модулем, и этот модуль можно отождествить с $\mathfrak{a}_j^{(0)} \otimes \mathbb{C}[x]$, где $\mathfrak{a}_j^{(0)} = \mathfrak{a}_j \cap \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$ состоит из постоянных (т.е. не зависящих от x матриц), а $\mathbb{C}[x]$ считается тривиальным $\mathfrak{k}^*(n)$-модулем.

Заметим, что $\mathfrak{k}^*(n)$-модули $\mathfrak{a}_{-1}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ попарно дизъюнктны, т.е. у них нет изоморфных неприводимых подмодулей. В самом деле, достаточно проверить аналогичное утверждение для $k^*(n)$-модулей $\mathfrak{A}_{-1}^{(0)}$, $\mathfrak{A}_0^{(0)}$, $\mathfrak{A}_1^{(0)}$. Пусть V обозначает тождественное представление алгебры $\mathfrak{u}(n)$ в $\mathbb{C}^n$; $\bar{V}$ – сопряженный $\mathfrak{u}(n)$-модуль; $\mathbb{1}$ – тривиальный одномерный $\mathfrak{u}(n)$-модуль; $\otimes$ и $\times$ – символы внутреннего и внешнего тензорного произведения. В этих обозначениях имеем:

$$\mathfrak{A}_{-1}^{(0)} = V \times V, \quad \mathfrak{A}_1^{(0)} = \bar{V} \times \bar{V},$$
$$\mathfrak{A}_0^{(0)} = [(V \otimes \bar{V}) \times \mathbb{1}] \oplus [\mathbb{1} \times (V \otimes \bar{V})], \tag{5}$$

причем $\mathfrak{u}(n)$-модуль $V \otimes \bar{V}$ есть прямая сумма неприводимых модулей $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ и $\mathbb{1}$. Теперь наше утверждение становится очевидным.

г) Поскольку $\mathfrak{b}$ содержит $k^*(n)$, она является $k^*(n)$-подмодулем в $\mathfrak{A}$. Результат пункта в) показывает тогда, что $\mathfrak{b}$ согласована с разложением (4), и можно написать

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{-1} \oplus \mathfrak{b}_0 \oplus \mathfrak{b}_1, \text{ где } \quad \mathfrak{b}_j = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}_j. \tag{6}$$

Сопоставив (6) с 4.3.I(I), мы получим, что $\mathfrak{b}$ содержит вместе с $\tau(Y)$ ее три компоненты в разложении (5):

$$\tau_{-1}(Y) = (1 + ix)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_1(Y) = (1 - ix)\begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_0(Y) = ix \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Очевидно, что условие $Y = Y^*$ несущественно (поскольку мы перешли к комплексификациям), так что Y можно считать произвольной $n\times n$-матрицей над $\mathbb{C}$.

д) Рассмотрим разложение типа (6) алгебры $\tilde{\mathfrak{b}}$ и заметим, что $\tilde{\mathfrak{b}}_{\pm1}=\mathfrak{b}_{\pm1}$. В самом деле, результат пункта г) показывает, что $\mathfrak{b}_{\pm1}$ содержит

$$ad^m(\tau_0(1))\cdot\tau_{\pm1}(Y)=(-1)^m x^m\tau_{\pm1}(Y)\quad,\quad m=1,2,\dots,$$

а значит, ввиду условия (2), любую матрицу из $\tilde{\mathfrak{b}}_{\pm1}$.

е) Остается показать, что $\tilde{\mathfrak{b}}_0\subseteq\mathfrak{b}_0$. Из результата пункта д) следует, что $\mathfrak{b}_0$ содержит $[\tilde{\mathfrak{b}}_1,\tilde{\mathfrak{b}}_{-1}]$, что совпадает с подпространством всех матриц $F\in\mathfrak{A}_0$, делящихся на $1+x^2$ и имеющих нулевой след; обозначим его через $\tilde{\mathfrak{b}}_0^{(2)}$. Ввиду условия (3) имеем

$$\tilde{\mathfrak{b}}_0=\{F\in\mathfrak{A}_0 : \operatorname{tr}F=const\}=\tilde{\mathfrak{b}}_0^{(0)}\oplus\tilde{\mathfrak{b}}_0^{(1)}\oplus\tilde{\mathfrak{b}}_0^{(2)},$$

где $\tilde{\mathfrak{b}}_0^{(0)}$ состоит из постоянных матриц в $\mathfrak{A}_0$ (т.е. совпадает с $k^*(n)\otimes\mathbb{C}$) и $\tilde{\mathfrak{b}}_0^{(1)}$ состоит из матриц вида $\begin{bmatrix} xY_1 & 0\\ 0 & xY_2\end{bmatrix}$, где Y_1 и Y_2 постоянны, $\operatorname{tr}(Y_1+Y_2)=0$. Но как $k^*(n)$-модуль, $\tilde{\mathfrak{b}}_0^{(1)}$ порождается элементами (7) и, тем самым, лежит в $\mathfrak{b}_0$, что завершает доказательство.

4.3.3. Пусть $x\in\mathbb{R}$. Вложение $\tau_x:\mathfrak{g}\to u(\infty,\infty)$ алгебр Ли порождает вложение t_x группы G в группу $U(\infty,\infty)$:

$$t_x(g)=$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{g+g^{*-1}}{2} + ix\,\dfrac{g-g^{*-1}}{2} & (1-ix)\,\dfrac{g-g^{*-1}}{2} \\ \hline (1+ix)\,\dfrac{g-g^{*-1}}{2} & \dfrac{g+g^{*-1}}{2} - ix\,\dfrac{g-g^{*-1}}{2} \end{array} \right]. \tag{I}$$

Отметим, что $t_x(g)=h_x t_0(g) h_x^{-1}$, см. 4.3.I(2).

Введем унитарный характер группы G :

$$\theta_x(g)=|\det g|^{1+ix}\ \det(g^{*-1}), \quad g\in G, \tag{2}$$

и определим вложение $\tilde{t}_x : G\to EU(\infty,\infty)$ (см. 4.2.IO):

$$\tilde{t}_x(g)=\langle \theta_x(g)\,,\ t_x(g)\rangle\ , \quad g\in G. \tag{3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фундаментальными представлениями группы G будем называть ее унитарные представления $T_x=W\circ\tilde{t}_x$ в гильбертовом пространстве $H(W)=L^2_{hol}(E\oplus E)$, $x\in\mathbb{R}$, где W – продолжение представления Вейля группы $U(\infty,\infty)$ на $EU(\infty,\infty)$.

Запись $T_x = W\circ\tilde{t}_x$ означает, что

$$T_x(g)=W(\tilde{t}_x(g)) = \theta_x(g)\,W(t_x(g)) \quad , \ g\in G.$$

Более общо, для $k\in\{1,2,\dots\}$ и $\pi\in U(k)^\wedge$ положим $T_x(k,\pi)= =W(k,\pi)\circ\tilde{t}_x$, где $W(k,\pi)$ суть неприводимые представления группы $EU(\infty,\infty)$, введенные в 4.2.9–4.2.IO.

Ясно, что

$$T_x^{\otimes k}\sim \bigoplus_{\pi\in U(k)^\wedge} (\dim\pi)\, T_x(k,\pi). \tag{4}$$

ЛЕММА. Все унитарные представления $T_x(k,\pi)$ группы G суть допустимые представления для (G,K) в смысле определения 4.I.I. Более того, голоморфное расширение на группу K^* ручного представления $T_x(k,\pi)|K$ совпадает с $W(k,\pi)\circ d$, где $d: K^*\to$ $\to EU(\infty,\infty)$ - вложение, определенное в 4.2.IO(2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.2.IO, достаточно проверить, что вложение $\tilde{t}_x|K$ группы K в $EU(\infty,\infty)$ не зависит от $x\in\mathbb{R}$ и совпадает с $d|K$. Из (I)-(3) видно, что

$$\tilde{t}_x(u)\equiv\langle \det u, \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}\rangle \qquad \forall u\in K. \tag{5}$$

Сопоставляя (5) с 4.2.IO(2) и учитывая, что каноническое вложение $K\to K^*$ имеет вид $u\mapsto\langle u,\bar{u}\rangle$, получаем требуемый результат.

4.3.4. Возьмем произвольное непустое конечное множество точек $\mathfrak{X}\subset\mathbb{R}$, затем для каждой точки $x\in\mathfrak{X}$ выберем число $k_x\in\{1,2,\dots\}$ и неприводимое представление $\pi_x\in U(k_x)^\wedge$. Обозначим для краткости весь этот набор данных через $\mathcal{M}$ и рассмотрим представление группы G

$$T_{\mathcal{M}}=\bigotimes_{x\in\mathfrak{X}} T_x(k_x,\pi_x). \tag{I}$$

В силу леммы 4.3.4 представления $T_{\mathcal{M}}$ допустимы.

ТЕОРЕМА. Всякое представление вида $T_{\mathcal{M}}$ неприводимо. Если T_N - другое представление того же сорта и $\mathcal{M}\neq N$, то $T_{\mathcal{M}}$ и T_N не эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Положим для краткости $L=EU(\infty,\infty)$,

$m = \operatorname{card}\mathfrak{X}, L^m = L\times\ldots\times L$ (m раз). Рассмотрим представление группы

$$V_{\mathcal{M}} = \mathop{\times}_{x\in\mathfrak{X}} W(k_x, \pi_x). \tag{2}$$

Определим вложения $\tilde{t}_{\mathfrak{X}}: G \to L^m$ и $d_{\mathfrak{X}}: K^* \to L^m$ так:

$$\tilde{t}_{\mathfrak{X}}(\cdot) = \mathop{\times}_{x\in\mathfrak{X}} \tilde{t}_x(\cdot)\ , \quad d_{\mathfrak{X}}(\cdot) = \mathop{\times}_{x\in\mathfrak{X}} d_x(\cdot)\ ,$$

где d определено в 4.2.10(2). Ясно, что $T_{\mathcal{M}} = V_{\mathcal{M}}\circ\tilde{t}_{\mathfrak{X}}$. Из леммы 4.3.3 следует, что

$$(T_{\mathcal{M}} \mid K)^* = V_{\mathcal{M}}\circ d_{\mathfrak{X}}\,.$$

Далее, группа $[L,L]$ совпадает с образом подгруппы $SU(\infty,\infty)$ при каноническом вложении $U(\infty,\infty)\longrightarrow L$, и из леммы 4.2.9 следует, что представление $V_{\mathcal{M}} \mid [L,L]^m$ неприводимо.

Все это вместе с рассуждениями раздела 4.1.5 показывает, что утверждение о неприводимости $T_{\mathcal{M}}$ редуцируется к следующему утверждению: подгруппа $G^*_{\mathfrak{X}}$ в L^m , натянутая на $\tilde{t}_{\mathfrak{X}}(G)$ и $d_{\mathfrak{X}}(K^*)$, содержит $[L,L]^m$.

б) Для произвольного $n\in\{1,2,\ldots\}$ обозначим через $G^*_{\mathfrak{X}}(n)$ подгруппу в L^m , натянутую на $\tilde{t}_{\mathfrak{X}}(G(n))$ и $d_{\mathfrak{X}}(K^*(n))$. Для доказательства высказанного утверждения достаточно проверить, что $G^*_{\mathfrak{X}}(n)$ содержит $SU(n,n)^m$.

Рассмотрим подгруппу $L(n) = S^1\times U(n,n)\subset L$ и ее алгебру Ли $\mathfrak{l}(n) = i\mathbb{R}\oplus\mathfrak{u}(n,n)$. Пусть $\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{X}}(n)$ - подалгебра Ли в $\mathfrak{l}(n)\oplus\ldots$ $\ldots\oplus\mathfrak{l}(n)$ (m раз), натянутая на образы алгебр $\mathfrak{g}(n)$ и $\mathfrak{k}^*(n)$ относительно их вложений, происходящих из $\tilde{t}_{\mathfrak{X}}$ и $d_{\mathfrak{X}}$. В силу леммы 3.4.3 достаточно проверить, что $\mathcal{G}^*_{\mathfrak{X}}(n)$ содержит $su(n,n)\oplus\ldots\oplus su(n,n)$.

Поскольку $su(n,n)=[\ell(n),\ell(n)]$, мы можем забыть теперь о расширении $\ell(n)$ алгебры $u(n,n)$ и работать только с алгеброй $u(n,n)$. Иными словами, достаточно установить, что подалгебра в $u(n,n)\oplus\ldots\oplus u(n,n)$, натянутая на $\left(\bigoplus\limits_{x\in\mathfrak{X}}\tau_x\right)(\mathcal{G}(n))$ и на образ подалгебры $k^*(n)$ при ее диагональном вложении, содержит $su(n,n)\oplus\ldots\oplus su(n,n)$. А это уже немедленно следует из описания алгебры $\mathcal{G}^*$ в теореме 4.3.2.

в) Итак, мы доказали утверждение пункта а) и, тем самым, неприводимость представления $T_{\mathcal{M}}$. Из этого же утверждения и раздела 4.I.5 вытекает также неэквивалентность представлений $T_{\mathcal{M}}$ и $T_{\mathcal{N}}$ при $\mathcal{M}\neq\mathcal{N}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{X}'$ – конечное множество, фигурирующее в наборе $\mathcal{N}$, и $m'=\operatorname{card}\mathfrak{X}'$, $n=\operatorname{card}(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{X}')$. Заметим, что представление $V_{\mathcal{M}}$ группы $L^m=\times_{x\in\mathfrak{X}} L$ можно продолжить до некоторого представления группы $L^n=\times_{x\in\mathfrak{X}\cup\mathfrak{X}'} L$, добавив в (2) $n-m$ штук тривиальных сомножителей (по одному единичному представлению на каждую точку из $\mathfrak{X}'\setminus\mathfrak{X}$). Ту же самую процедуру проделаем затем с $V_{\mathcal{N}}$. В результате мы получим два неприводимых представления одной и той же группы L^n, которые будут неэквивалентны, ибо $\mathcal{M}\neq\mathcal{N}$. Более того, они останутся неприводимыми и неэквивалентными после сужения на подгруппу $G^*_{\mathfrak{X}\cup\mathfrak{X}'}$, содержащую $[L,L]^n$. (Здесь используется лемма 4.2.9, а также тот факт, что никакое из представлений $W(k,\pi)\mid SU(\infty,\infty)$ не может оказаться единичным.) Теперь остается воспользоваться рассуждением раздела 4.I.5.

4.3.5. ЛЕММА. Для произвольного $x\in\mathbb{R}$ фундаментальное представление T_x группы G обладает единственным, с точностью до множителя, единичным K-инвариантным вектором. Соответствующая сферическая функция имеет следующий вид:

$$\varphi_x(g)=\left[\det(gg^*)\right]^{\frac{1+ix}{2}}\left[\det\left(1+\frac{1+ix}{2}(gg^*-1)\right)\right]^{-1},\ g\in G. \quad (\mathrm{I})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, следует отметить, что определители, фигурирующие в (I), имеют смысл ввиду финитности матрицы gg^*-1 . Далее, из доказательства леммы 4.3.3, и из 4.2.I0(3) вытекает, что представление $T_x|K$ в пространстве $L^2_{hol}(E\oplus E)$ является однократной прямой суммой ручных представлений $\rho_{[\ell],[m]}$ группы $K=U(\infty)$, так что единичное представление группы K встречается ровно один раз, а именно, когда $\ell=m=0$. Ясно,что K-инвариантный вектор - это вакуумный вектор $f_0(z)\equiv 1$ в $L^2_{hol}(E\oplus E)$. Формула 4.2.4(I), очевидно, сохраняет смысл для представления W группы $U(\infty,\infty)$. Сопоставляя ее с определением представления T_x в разделе 4.3.3, получаем:

$$(T_x(g)f_0, f_0) = \theta_x(g)(\det a)^{-1},$$

где a - левый верхний блок матрицы $t_x(g)$, см. 4.3.3(I). После простого преобразования получаем (I).

4.3.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что представление $T_{\mathcal{M}}$, определенное в 4.3.4(I), обладает единичным K-инвариантным вектором в точности тогда, когда все π_x суть единичные представления групп $U(k_x)$. Если это условие выполнено, то сферическая функция представления $T_{\mathcal{M}}$ равна произведению функций вида $\varphi_x^{k_x}$, взятому по всем $x\in\mathfrak{X}$.

4.3.7. Будем рассматривать элементы группы $G=GL(\infty,\mathbb{C})$ как обратимые операторы в координатном комплексном гильбертовом пространстве $E=\ell_2$. Пусть $\mathfrak{S}_2$ – идеал операторов Гильберта-Шмидта в E. Легко проверить, что для обратимого оператора g в E следующие четыре условия эквивалентны:

$$g-g^{*-1}\in\mathfrak{S}_2, \quad gg^*-1\in\mathfrak{S}_2, \quad g^*g-1\in\mathfrak{S}_2$$

и, наконец, $g=u\exp A$, где $u\in\bar{K}=\bar{U}(\infty)$ – произвольный унитарный оператор, $A=A^*\in\mathfrak{S}_2$. Множество всех операторов g, удовлетворяющих этим условиям, образует группу. Обозначим ее через $\bar{G}_2$ или, подробнее, через $\overline{GL}(\infty,\mathbb{C})_2$. Введем в $\overline{GL}(\infty,\mathbb{C})_2$ топологию, которая в терминах полярного разложения $g=u\exp A$ определяется как произведение слабой (=сильной) операторной топологии группы $\bar{K}$ и топологии на эрмитовых операторах в $\mathfrak{S}_2$, задаваемой нормой $\|\cdot\|_2$ Гильберта-Шмидта. В результате получается топологическая группа. Это несложное утверждение проверяется точно так же, как аналогичное утверждение в вещественном случае, см. [115].

Очевидно, G является плотной подгруппой в $\bar{G}_2$. Отметим, что топологическое пространство $\bar{G}_2$ является односвязным и даже стягиваемым в точку. В самом деле, легко проверить, что $\bar{G}_2$ стягивается на $\bar{K}$. С другой стороны, $\bar{K}$ стягиваемо по известной теореме Диксмье-Дуади [76].

4.3.8. ТЕОРЕМА. Все представления T_M, определенные в 4.3.4, непрерывны в топологии группы $\bar{G}_2$ и, тем самым, допускают непрерывное продолжение на эту группу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку всякое T_M содержится в тензорном произведении нескольких фундаментальных представлений, достаточно проверить, что всякое фундаментальное представление T_x, $x \in \mathbb{R}$ непрерывно в топологии группы $\bar{G}_2$.

б) Покажем, что сферическая функция φ_x представления T_x, вычисленная в лемме 4.3.5, непрерывна на групе G относительно топологии группы $\bar{G}_2$. В самом деле, ввиду положительной определенности функции φ_x, достаточно установить ее непрерывность в точке $g=1$. Запишем g в виде $exp(A/2)\cdot u$, где $A = A^*$ – финитная матрица, $u \in K$. Тогда $gg^* = exp\, A$ и

$$\varphi_x(g) = \det \left\{ \frac{exp\left(\frac{1+ix}{2} A\right)}{1 - \frac{1+ix}{2}(exp\, A - 1)} \right\} . \tag{I}$$

Разложив операторную функцию, стоящую под знаком $\det$, в степенной ряд по A, мы увидим, что член первой степени пропадает. Отсюда следует, что функция (I) стремится к 1, коль скоро $\|A\|_2 \to 0$, т.е. $\varphi_x(g)$ непрерывна в точке $g=1$.

в) Представление T_x группы G является однократной прямой суммой неприводимых представлений $T_x(1,\pi)$, где π пробегает множество характеров группы $U(1)$ (это частный случай формулы 4.3.3(4)). Результат пункта б) доказывает непрерывность лишь одного из представлений $T_x(1,\pi)$ – того, которое отвечает единичному π, ибо именно оно содержит вакуумный вектор f_0. Обозначим единичное π символом $\mathbb{1}$.

Чтобы установить непрерывность всех других $T_x(1,\pi)$, проделаем следующий трюк. Рассмотрим подгруппу G' в G, состоящую из таких матриц $g=[g_{ij}]\in G$, для которых $g_{11}=1$, $g_{1i}=g_{i1}=0$ при $i=2,3,\ldots$. Игра будет идти на том, что подгруппа G' естественным образом изоморфна исходной группе G.

Обозначим через $T_x(1,\pi)'$ неприводимое представление группы G', получающееся в результате композиции представления $T_x(1,\pi)$ группы G с изоморфизмом $G'\to G$.

Покажем, что в разложении представления $T_x(1,\mathbb{1})|G'$ участвуют все представления $T_x(1,\pi)'$. В самом деле, переформулируем сперва это утверждение на языке представлений группы $U(\infty,\infty)$.

Рассмотрим подгруппу $U(\infty,\infty)'$ в $U(\infty,\infty)$, состоящую из таких блочных матриц $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, у которых каждый блок удовлетворяет таким же условиям, что и матрицы из G', т.е. $(\cdot)_{1i}=(\cdot)_{i1}=\delta_{1i}$. Будем обозначать через $W(1,\pi)'$ неприводимое представление группы $U(\infty,\infty)'$, получающееся в результате композиции представления $W(1,\pi)$ группы $U(\infty,\infty)$ с очевидным изоморфизмом $U(\infty,\infty)'\to$ $\to U(\infty,\infty)$.

Из 4.3.3(I) видно, что $t_x(G')$ лежит в $U(\infty,\infty)'$. Вспомнив, что $T_x(g)$ совпадает с $\theta_x(g)\,W(t_x(g))$ (см. 4.3.3), мы редуцируем наше утверждение к следующему: в разложении представления $W(1,\mathbb{1})\,|\,U(\infty,\infty)'$ участвуют все $W(1,\pi)'$, где $\pi\in U(1)^\wedge$.

Но это утверждение легко следует из описания структуры представлений Вейля группы $U(p,q)$, данного в 4.2.2, ибо представление W имеет точно такую же структуру.

А именно, будем параметризовать $\pi\in U(1)^\wedge$ числами $m\in\mathbb{Z}$: $\pi(\cdot)=(\cdot)^m$. Согласно сказанному в 4.2.2, представление $W(1,(\cdot)^m)$ реализуется в функциях от $z_1=(z_{1i})$ и $z_2=(z_{2i})$, где $i=1,2,\ldots$, имеющих степень однородности m, где под степенью монома от z_{1i}, z_{2j} понимается разность обычных степеней по группе переменных (z_{2j}) и по группе переменных (z_{1i}). Представления $W(1, (\cdot)^m)'$ реализуются аналогичным образом; надо только считать $i \geqslant 2, j \geqslant 2$.

Теперь остается заметить, что редукция с $U(\infty,\infty)$ на $U(\infty,\infty)'$ сводится к замораживанию переменных z_{11} и z_{21}, откуда видно, что в $W(1,(\cdot)^0) \mid U(\infty,\infty)'$ входят, притом с бесконечной кратностью, все $W(1, (\cdot)^m)'$, $m \in \mathbb{Z}$.

г) Результат пункта в) позволяет завершить доказательство следующим образом. Мы знаем, что представление $T_x(1, \mathbb{1})$ группы G непрерывно в топологии группы $\overline{G}_2$. Его сужение на G' также непрерывно. Стало быть, все $T_x(1, \pi)'$ непрерывны. Возвращаясь от G' к G, получаем, что все $T_x(1, \pi)$ непрерывны, т.е. T_x непрерывно.

4.3.9. Объединяя теоремы 4.3.4 и 4.2.II, мы легко получаем описание структуры кольца допустимых представлений группы G, порожденного неприводимыми представлениями вида $T_{\mathcal{M}}$.

В самом деле, зафиксируем два набора параметров

$$\mathcal{M}' = \left\{ \{k'_x\}, \{\pi'_x\}, x \in \mathfrak{X}' \right\}, \quad \mathcal{M}'' = \left\{ \{k''_y\}, \{\pi''_y\}, y \in \mathfrak{X}'' \right\}$$

и будем рассматривать всевозможные наборы $\mathcal{M}$ со следующими свойствами:

I) $\mathcal{M} = \{\{k_z\}, \{\pi_z\}, z \in \mathfrak{X}\}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}' \cup \mathfrak{X}''$;

2) если $z = x \in \mathfrak{X}' \setminus \mathfrak{X}''$, то $k_z = k'_x$ и $\pi_z = \pi'_x$;

3) если $z = y \in \mathfrak{X}'' \setminus \mathfrak{X}'$, то $k_z = k''_y$ и $\pi_z = \pi''_y$;

4) если $z \in \mathfrak{X}' \cap \mathfrak{X}''$, то $k_z = k'_z + k''_z$ и $\pi_z \in \widehat{U(k_z)}$.

Таким образом, $\mathcal{M}$ единственно, если $\mathfrak{X}'\cap\mathfrak{X}''=\emptyset$; в противном случае все возможные варианты наборов $\mathcal{M}$ определяются перебором представлений π_z для всех $z\in\mathfrak{X}'\cap\mathfrak{X}''$.

Напомню, что в доказательстве теоремы 4.2.II фигурировало число $N(\pi,\pi',\pi'')$: это кратность вхождения представления $\pi'\times\pi''$ группы $U(k')\times U(k'')$ в разложение представления π группы $U(k'+k'')$ и одновременно – кратность вхождения представления $W(k,\pi)$ в разложение представления $W(k',\pi')\otimes W(k'',\pi'')$. Положим теперь

$$N(\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}'')=\prod_{z\in\mathfrak{X}'\cap\mathfrak{X}''}N(\pi_z,\pi_z',\pi_z'').$$

ТЕОРЕМА. Если $\mathfrak{X}'\cap\mathfrak{X}''=\emptyset$, то $T_{\mathcal{M}'}\otimes T_{\mathcal{M}''}$ эквивалентно $T_{\mathcal{M}}$ (в частности, неприводимо). Если $\mathfrak{X}'\cap\mathfrak{X}''\neq\emptyset$, то

$$T_{\mathcal{M}'}\otimes T_{\mathcal{M}''}\sim\bigoplus_{\mathcal{M}}N(\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\,T_{\mathcal{M}}.$$

Этот результат является прямым следствием теорем 4.3.4 и 4.2.II.

§ 4.4. Фермионная реализация представлений со старшим весом и конструкция, связанная с экспонентой гильбертова пространства

Этот параграф, наряду в § 4.2, содержит необходимый вспомогательный материал, который понадобится в § 4.5.

В первой части параграфа (разделы 4.4.1 - 4.4.5) строятся представления $S(k,\pi)$ группы $U(2\infty)$, являющиеся неприводимыми компонентами тензорных степеней ее "спинорного" представления. Схема получения представлений $S(k,\pi)$ - такая же, как для представлений $W(k,\pi)$ из § 4.2. Исходным пунктом служит хорошо известная реализация генераторов алгебры Ли $\mathfrak{u}(p+q)$ квадратичными выражениями от $p+q$ фермионных операторов рождения и уничтожения.

Во второй части параграфа (разделы 4.4.6 - 4.4.8) вводится серия неприводимых представлений $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ группы $\mathcal{L}$. Последняя является полупрямым произведением группы

$$U(\infty)\times U(\infty)=U(\infty,\infty)\cap U(2\infty)$$

на группу Гейзенберга $Heis(\mathcal{P})$, построенную по пространству $\mathcal{P}$ финитных комплексных матриц формата $\infty\times\infty$. Пространство $\mathcal{P}$ можно отождествить с касательным пространством в базисной точке для двойственных друг другу эрмитовых симметрических пространств

$$U(\infty,\infty)/U(\infty)\times U(\infty) \quad \text{и} \quad U(2\infty)/U(\infty)\times U(\infty),$$

а группу $\mathcal{L}$ можно получить из $U(\infty,\infty)$ или из $U(2\infty)$ (точнее, из их одномерных центральных расширений) посредством "сжатия к подгруппе $U(\infty)\times U(\infty)$ ".

4.4.1. Пространство Баргмана-Сигала $L^2_{hol}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ - гильбертово пространство, канонически изоморфно симметрической алгебре $S(\overline{\mathcal{E}})$ сопряженного пространства $\overline{\mathcal{E}}$. Фермионным аналогом этого объекта является гильбертово пространство $\Lambda(\overline{\mathcal{E}})$ - внешняя алгебра пространства $\overline{\mathcal{E}}$. Скалярное произведение в $\Lambda(\overline{\mathcal{E}})$

определяется тем, что если $e_1, e_2, \ldots$ – произвольный ортонормальный базис в $\bar{\mathcal{E}}$, то простые поливекторы $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ образуют ортонормальный базис в $\Lambda(\bar{\mathcal{E}})$. Как известно, между $L^2_{hol}(\mathcal{E}) = S(\bar{\mathcal{E}})$ и $\Lambda(\bar{\mathcal{E}})$ существует глубокая и далеко идущая аналогия. В частности, элементы пространства $\Lambda(\bar{\mathcal{E}})$ можно рассматривать как "функции" на $\mathcal{E}$, скалярное произведение в $\Lambda(\bar{\mathcal{E}})$ задавать "гауссовым интегралом", а операторы в $\Lambda(\bar{\mathcal{E}})$ задавать символами (см. Березин [2]).

Если в качестве $\mathcal{E}$ взять пространство n-мерных векторов-строк, то $\bar{\mathcal{E}}$ отождествляется с пространством n-мерных векторов-столбцов; обозначим его через $\mathbb{C}^n$. Условимся обозначать через $z_1, \ldots, z_n$ канонический базис в $\mathbb{C}^n$; $z_1, \ldots, z_n$ являются одновременно координатами в сопряженном пространстве. (Я хотел бы подчеркнуть, что тщательное разграничение пространств $\mathcal{E}$ и $\bar{\mathcal{E}}$ не является излишним педантизмом, поскольку в дальнейшем будет важно разграничивать голоморфные и антиголоморфные представления группы $U(\infty)$, отличающиеся друг от друга автоморфизмом $u \mapsto \bar{u}$.) Пространство $\Lambda(\mathcal{E}) = \Lambda(\mathbb{C}^n)$ отождествляется с грассмановой алгеброй от образующих $z_1, \ldots, z_n$. Как и в бозонном случае, оператор (левого) умножения на z_k и оператор (левой) производной $\partial/\partial z_k$ сопряжены друг другу, $k=1, \ldots, n$. Напомню определение оператора $\partial/\partial z_k$: если f – моном от образующих $z_1, \ldots, z_n$, то $(\partial/\partial z_k) f = 0$, когда f не содержит буквы z_k; если же f содержит букву z_k, и она стоит на j-ом месте, то $(\partial/\partial z_k) f$ получается в результате вычеркивания этой буквы и умножения на $(-1)^{j-1}$.

Положим теперь $n = p+q$ и обозначим канонический базис в $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$ через $z_{11}, \ldots, z_{1p}, z_{21}, \ldots, z_{2q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. определение 4.2.1). Фермионной реализацией алгебры Ли $\mathfrak{u}(n)=\mathfrak{u}(p+q)$ называется ее вложение в алгебру Ли $\mathrm{End}(\Lambda(\mathbb{C}^{p+q}))$, которое на генераторах комплексификации $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ задается формулами 4.2.1(1)-(3) со следующими изменениями: в 4.2.1(1) надо изменить знак перед δ_{ij}, а в 4.2.1(4) - изменить знак перед $z_{2k}z_{1i}$.

4.4.2. Фермионная реализация алгебры $\mathfrak{u}(n)=\mathfrak{u}(p+q)$ определяет унитарное представление группы $U(n)=U(p+q)$ в конечномерном гильбертовом пространстве $\Lambda(\mathbb{C}^{p+q})$. Я буду называть его спинорным представлением, поскольку его можно получить из спинорного представления группы $Spin(2n)$ посредством подходящего вложения $U(p+q)\to Spin(2n)$. Спинорное представление будет обозначаться через $S(p,q)$. Имеем (ср. 4.2.2(4)):

$$S(p,q)\,|\,U(p)\times U(q)\sim\bigoplus_{m=0}^{p}\bigoplus_{\ell=0}^{q}\left(\overline{{}^{p}\rho_{[1^m]}}\otimes\det(\cdot)\right)\otimes{}^{q}\rho_{[1^\ell]}, \qquad (1)$$

где $[1^m]$ обозначает диаграмму Юнга, состоящую из одного столбца длины m.

4.4.3. Отождествим $\Lambda(\mathbb{C}^{p+q})^{\otimes k}$ с $\Lambda(\mathbb{C}^k\otimes\mathbb{C}^p\oplus\mathbb{C}^k\otimes\mathbb{C}^q)$ и зададим в этом пространстве представление R_k группы $U(k)$, считая, что она действует в $\mathbb{C}^k\otimes\mathbb{C}^p\oplus\mathbb{C}^k\otimes\mathbb{C}^q$ по представлению $\bar\rho\otimes\mathbb{1}\oplus\rho\otimes\mathbb{1}$, где ρ обозначает тождественное представление группы $U(k)$ в $\mathbb{C}^k$. Введем представление $S(p,q|k,\pi)$ группы $U(p+q)$ в пространстве

$$\mathrm{Hom}_{U(k)}\left(H(\pi),\Lambda(\mathbb{C}^{p+q})^{\otimes k}\right),\ \pi\in U(k)^{\wedge} \qquad (1)$$

(ср. 4.2.2(2)). Оно определено, когда пространство (I) отлично от нуля.

Условимся обозначать символом $\tilde{\lambda}$, где $\lambda \in \mathbb{Y}$, дуальную к λ диаграмму Юнга. Заметим, что $\ell(\lambda) = (\tilde{\lambda})_1$.

ТЕОРЕМА (ср. теорема 4.2.2). I) Пусть $\pi = {}^k\rho_{\lambda,\mu}$, где $\ell(\lambda) + \ell(\mu) \leq k$. Представление $S(p,q|k,\pi)$ определено (т.е. (I) отлично от нуля) тогда и только тогда, когда $p \geq \ell(\tilde{\mu}) = \mu_1$, $q \geq \ell(\tilde{\lambda}) = \lambda_1$.

2) Если это условие выполнено, то $S(p,q|k,\pi)$ неприводимо, и его старший вес равен

$$(k-\tilde{\mu}_p, \ldots, k-\tilde{\mu}_1, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_q). \tag{2}$$

3) Представление $S(p,q)^{\otimes k}$ является прямой суммой представлений $S(p,q|k,\pi)$ с кратностями $\dim \pi$.

Следует подчеркнуть, что неравенство $k-\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\lambda}_1$, которое должно выполняться постольку, поскольку (2) есть старший вес группы $U(n)$, эквивалентно неравенству $\ell(\lambda) + \ell(\mu) \leq k$.

Легко видеть, что в частном случае $k=1$ утверждение теоремы сводится к тому, что $S(p,q)$ является однократной прямой суммой представлений со старшими весами

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, 0, \ldots, 0), \quad 0 \leq r \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Основная часть теоремы содержится в работе Хау [83]. А именно, там доказано, что представление R_k группы $U(k)$ порождает коммутант представления $S(p,q)^{\otimes k}$ группы $U(n)$ и, наоборот, второе представление порождает коммутант первого. Отсюда следует, в частности, что для каждого неприводимого π, входящего в разложение представления R_k, соответствующее представление $S(p,q|k,\pi)$ неприводимо.

б) Покажем, что условия $\lambda_1 \leq q, \mu_1 \leq p$ являются необходимыми условиями вхождения неприводимого представления $\pi = {}^k\pi_{\lambda,\mu}$ в представление R_k. В самом деле, обозначим через V тождественное представление группы $U(k)$ в $\mathbb{C}^k$, а через $\bar{V}$ - сопряженное представление. По определению R_k, имеем

$$R_k \sim \Lambda\ (\underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{q} \oplus \underbrace{\bar{V} \oplus \ldots \oplus \bar{V}}_{p}) =$$

$$= \oplus (\Lambda^{l_1}(V) \otimes \ldots \otimes \Lambda^{l_q}(V) \otimes \Lambda^{m_1}(\bar{V}) \otimes \ldots \otimes \Lambda^{m_p}(\bar{V})),$$

где сумма берется по всем индексам $l_1, \ldots, l_q, m_1, \ldots, m_p$, принимающим значения $0, 1, \ldots, k$. Теперь наше утверждение становится очевидным, если воспользоваться известным правилом разложения тензорного произведения представления $\Lambda^{l}(V)$ или $\Lambda^{m}(\bar{V})$ на произвольное неприводимое представление группы $U(k)$, см. Желобенко [18], § 79, пример 3. Кстати, из этого же правила можно извлечь и достаточность условий $\lambda_1 \leq q, \mu_1 \leq p$; однако достаточность будет установлена в следующем пункте.

в) Положим для упрощения обозначения $\Lambda = \Lambda(\mathbb{C}^{p+q})^{\otimes k}$. Пространство Λ можно отождествить с грассмановой алгеброй от образующих $z_{1,ai}$ и $z_{2,bj}$, где $1 \leq a, b \leq k$.

Рассмотрим представление $\pi = {}^k\pi_{\lambda,\mu}$ такое, что $\lambda_1 \leq q, \mu_1 \leq p$, и покажем, что в Λ существует ненулевой вектор ξ, являющийся старшим вектором для $U(k)$ с весом

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, -\mu_2, -\mu_1)$$

(напомню, что это старший вес представления π) и одновременно старшим вектором для $U(n)$ с весом (2).

Предположим сперва, что $p=0$ и, значит, $\mu=0$. Условимся писать $(b,j)\in\lambda$, если в диаграмме Юнга λ присутствует клетка с координатами (b,j), т.е. если $\lambda_b \geqslant j$. Обозначим через $z_{2,\lambda}$ поливектор из Λ, являющийся внешним произведением тех образующих $z_{2,bj}$, для которых $(b,j)\in\lambda$. Тогда

$$z_{2,aj}\frac{\partial}{\partial z_{2,bj}}z_{2,\lambda}=0, \quad 1\leqslant a<b\leqslant k, \; j=1,\dots,q$$

$$z_{2,ai}\frac{\partial}{\partial z_{2,aj}}z_{2,\lambda}=0, \quad a=1,\dots,k, \; 1\leqslant i<j\leqslant q.$$

Значит, $z_{2,\lambda}$ является старшим вектором одновременно для $U(k)$ и $U(n)=U(q)$. Нетрудно проверить, что соответствующие веса являются такими, как нужно.

Предположим теперь, что $q=0$ и, значит, $\lambda=0$. Обозначим через $z_{1,\mu}$ произведение тех образующих $z_{1,ai}$, для которых $(k+1-a,p+1-i)\in\mu$. Легко проверить, что $z_{1,\mu}$ обладает нужными свойствами.

В общем случае положим $\xi=z_{1,\mu}\wedge z_{2,\lambda}$. Этот вектор является старшим одновременно для $U(k)$ и для подгруппы $U(p)\times U(q)\subset U(n)$ и имеет нужные веса. Заметим теперь, что из условия $\ell(\lambda)+\ell(\mu)\leqslant k$, входящего в определение представления π, и из построения векторов $z_{1,\mu}$ и $z_{2,\lambda}$ вытекает следующий факт: не существует такой тройки (a,i,j), что $z_{1,ai}$ входит в $z_{1,\mu}$ и одновременно $z_{2,aj}$ входит в $z_{2,\lambda}$. Отсюда видно, что

$$\frac{\partial}{\partial z_{1,ai}} \frac{\partial}{\partial z_{2,aj}} \xi = 0 \quad \forall (a,i,j).$$

Это показывает, что ξ является старшим вектором для всей группы $U(n)$.

г) Тем самым, мы проверили все утверждения теоремы: первое утверждение следует из пунктов б) и в); второе следует из а) и в); третье формально следует из первых двух.

4.4.4. Определим группу $U(2\infty)$ как индуктивный предел групп $U(p+q)$, где $p,q \to \infty$. Ее элементы суть унитарные операторы в гильбертовом пространстве $E \oplus E$ (где $E = E(\mathbb{C})$, см. I.I.I), фиксирующие почти все базисные векторы.

Действуя в полной аналогии с 4.2.9, определим спинорное представление S группы $U(2\infty)$ как индуктивный предел представлений $S(p,q)$ групп $U(p+q)$, где последовательность вложений определяется каноническими вложениями

$$\Lambda(\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q) \hookrightarrow \Lambda(\mathbb{C}^{p'} \oplus \mathbb{C}^{q'}), \quad p' \geq q, \quad q' \geq q.$$

Далее, для произвольных $k \in \{1,2,\ldots\}$ и $\pi \in U(k)$ определяем представление $S(k,\pi)$ группы $U(2,\infty)$, естественно реализующееся в гильбертовом пространстве

$$Hom_{U(k)}(H(\pi),\ H(S)^{\otimes k}).$$

Оно неприводимо, будучи индуктивным пределом неприводимых (конечномерных) представлений $S(p,q|k,\pi)$ подгрупп $U(p+q)$; последние представления определены, если p и q достаточно велики.

ЛЕММА (ср. лемма 4.2.9). Все представления группы $U(2\infty)$ вида $S(k,\pi)$, где $k=1,2,\dots$, $\pi\in U(k)^{\wedge}$, попарно не эквивалентны. Более того, их сужения на $SU(2\infty)$ неприводимы и попарно не эквивалентны.

Доказательство такое же, как для леммы 4.2.9.

4.4.5. Будем записывать элементы группы $U(2\infty)$ (а также ее подгрупп $U(p+q)$) в виде блочных матриц $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Пусть f – общий вакуумный вектор пространств $H(S(p,q))$ и $H(S)$, т.е. единица грассмановой алгебры. Из определения фермионной реализации (см. 4.4.I) следует, что (ср. 4.2.4(I))

$$\left(S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) f_0, f_0\right) = \det a, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2\infty). \qquad (\mathrm{I})$$

Далее, из 4.4.2(I) следует, что $S^{\otimes k} \mid U(\infty)\times U(\infty)$ разлагается по представлениям вида $(\bar V_1 \otimes \det(\cdot)^k)\times V_2$, где V_1 и V_2 – неприводимые голоморфные представления группы $U(\infty)$.

Действуя по аналогии с 4.2.10, введем группу $EU(2\infty)= = S^1\times U(2\infty)$ и продолжим на нее представление S, сопоставляя элементу $z\in S^1$ скалярный оператор $z^{-1}\cdot 1$ в $H(S)$. Тем самым, на группу $EU(2\infty)$ продолжаются и все представления $S(k,\pi)$; окружность S^1 действует в $H(S(k,\pi))$ по характеру $z\mapsto z^{-k}$.

Определим вложение $d: U(\infty)\times U(\infty)\to EU(2\infty)$ так же, как в 4.2.10(2). Тогда получаем следующий аналог леммы 4.2.10:

ЛЕММА. Отождествим $U(\infty)\times U(\infty)$ с ее образом в $EU(2\infty)$ относительно вложения d. Тогда $S(k,\pi)\mid U(\infty)\times U(\infty)$ голоморфно для всех k и π.

4.4.6. Пусть $\mathcal{P}$ - произвольное гильбертово или предгильбертово пространство над $\mathbb{C}$. Свяжем с ним нильпотентную группу $\mathrm{Heis}(\mathcal{P})$ типа Гейзенберга. Ее элементы суть пары $\langle P, is\rangle$ из $\mathcal{P}\times i\mathbb{R}$ с законом умножения

$$\langle P, is\rangle\langle Q, it\rangle = \langle P+Q, is+it+\frac{1}{2}((P,Q)-(Q,P))\rangle, \tag{I}$$

где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $\mathcal{P}$.

Следуя [80] , обозначим через $\mathrm{EXP}(\mathcal{P})$ гильбертово пространство, являющееся пополнением симметрической алгебры $S(\mathcal{P})$, и введем в нем тотальное семейство векторов

$$\mathrm{EXP}(P) = 1 \oplus \bigoplus_{m=1}^{\infty}\left((m!)^{-1/2} P^{\otimes m}\right), \quad P \in \mathcal{P}.$$

Тогда (см. [80])

$$(\mathrm{EXP}(P), \mathrm{EXP}(Q)) = \exp((P,Q)), \quad P, Q \in \mathcal{P}.$$

Известно (см. [80]) и легко проверяется, что для $\varkappa > 0$ в $\mathrm{EXP}(\mathcal{P})$ существует неприводимое унитарное представление $U(\varkappa)$ группы $\mathrm{Heis}(\mathcal{P})$, однозначно определяемое из условия

$$U(\varkappa)(\langle P, is\rangle)\,\mathrm{EXP}(Q) =$$

$$= \exp\left[-\frac{\varkappa}{2}(P,P) - \sqrt{\varkappa}(Q,P) + i\varkappa s\right]\cdot \mathrm{EXP}(Q+\sqrt{\varkappa}P). \tag{2}$$

До сих пор $\mathcal{P}$ было произвольно, а с этого места будем считать, что $\mathcal{P}$ есть пространство всех финитных матриц формата $\infty\times\infty$ со скалярным произведением $(P,Q)=\operatorname{tr} PQ^*$. Определим действие группы $U(\infty)\times U(\infty)$ на $\mathcal{P}$ так:

$$U(\infty)\times U(\infty)\ni\langle u,v\rangle:\ P\mapsto uPv'. \tag{3}$$

Это действие определяет действие группы $U(\infty)\times U(\infty)$ автоморфизмами группы $\mathrm{Heis}\,(\mathcal{P})$, тривиальное на ее одномерном центре. Оно, в свою очередь, позволяет определить полупрямое произведение групп $U(\infty)\times U(\infty)$ и $\mathrm{Heis}\,(\mathcal{P})$, которое я для краткости буду обозначать символом $\mathcal{L}$.

Легко проверить, что представление $U(\varkappa)$ продолжается на группу $\mathcal{L}$: это продолжение определяется тем, что

$$U(\varkappa)(\langle u,v\rangle)\,\mathrm{EXP}(P)=\mathrm{EXP}\,(uPv'),\ \forall\varkappa>0,\ \ P\in\mathcal{P}. \tag{4}$$

Представление $U(\varkappa)$ группы $\mathcal{L}$ неприводимо (ибо неприводимо уже его сужение на подгруппу $\mathrm{Heis}\,(\mathcal{P})$).

ЛЕММА. Сужение представления $U(\varkappa)$ на подгруппу $U(\infty)\times U(\infty)$ эквивалентно однократной прямой сумме представлений вида $\rho_\nu\times\rho_\nu$, где ν пробегает $\mathbb{Y}$. В частности, оно является голоморфным представлением.

Доказательство вытекает из хорошо известного (см. Желобенко [18, § 56]) аналогичного конечномерного утверждения, относящегося к разложению представления группы $U(p)\times U(q)$ в пространстве $S(\mathbb{C}^p\otimes\mathbb{C}^q)$.

4.4.7. Возьмем произвольные $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$, образуем неприводимое голоморфное представление $\rho_\lambda \times \rho_\mu$ группы $U(\infty)\times U(\infty)$, продолжим его на группу $\mathcal{L}$, полагая его тривиальным на нормальном делителе $\mathrm{Heis}(\mathcal{P})$, и, наконец, перемножим его тензорно с $U(\infty)$ обозначив получившееся в итоге представление группы $\mathcal{L}$ через $U(\varkappa, \lambda, \mu)$. Из леммы 4.4.6 видно, что $U(\varkappa,\lambda,\mu) \mid U(\infty)\times U(\infty)$ голоморфно.

ТЕОРЕМА. Все представления $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ группы $\mathcal{L}$, где $\varkappa>0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$, неприводимы и попарно не эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО . а) Покажем, что $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ неприводимо. Положим для краткости $V=\rho_\lambda \times \rho_\mu$. Из леммы 4.4.6 и определения представления $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ видно, что V входит в разложение представления $U(\varkappa,\lambda,\mu) \mid U(\infty)\times U(\infty)$ ровно один раз, причем реализуется в подпространстве $EXP(0)\otimes H(V)$. Это подпространство является циклическим, поскольку $EXP(0)$ является циклическим вектором для представления $U(\varkappa)$ подгруппы $\mathrm{Heis}(\mathcal{P})$ и поскольку $\mathrm{Heis}(\mathcal{P})$ действует в $H(V)$ тривиально. Значит, $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ неприводимо.

б) Остается проверить, что параметры $\varkappa, \lambda, \mu$ суть инварианты представления $U(\varkappa,\lambda,\mu)$. Для $\varkappa$ это очевидно, ибо он восстанавливается по действию одномерного центра группы. Далее, предположим, что $\rho_{\lambda'} \times \rho_{\mu'}$ есть некоторое отличное от $\rho_\lambda \times \rho_\mu$ представление, входящее в разложение представления $U(\varkappa,\lambda,\mu)$. Тогда из леммы 4.4.6 видно, что ρ' содержится в $\rho_\lambda \otimes \rho_\nu$, а $\rho_{\mu'}$ – в $\rho_{\mu}\otimes \rho_\nu$, где ν – некоторая ненулевая диаграмма Юнга. А тогда, обозначая через $\|\cdot\|$ количество клеток диаграммы, получаем:

$$|\lambda'| = |\lambda| + |\nu| > |\lambda|, \quad |\mu'| = |\mu| + |\nu| > |\mu|.$$

Отсюда видно, что параметры λ и μ восстанавливаются по представлению $U(\varkappa, \lambda, \mu)$, ибо $\rho_\lambda \times \rho_\mu$ является "минимальным $U(\infty)\times U(\infty)$ -типом".

4.4.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Доопределим $U(\varkappa, \lambda, \mu)$ при $\varkappa=0$, считая его в этом случае просто представлением $\rho_\lambda \times \rho_\mu$. Легко видеть, что утверждение теоремы 4.4.7 останется в силе, если считать $\varkappa \geqslant 0$. Для приложения теоремы 4.4.7 в § 4.5 будет важно еще, что эта теорема остается в силе после замены группы $\mathcal{L}$ ее коммутантом $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$, который есть не что иное, как полупрямое произведение группы $SU(\infty)\times SU(\infty)$ на $Heis\,(\mathcal{P})$. Справедливость этого утверждения легко выводится из того факта, что всякое представление ρ_λ однозначно определяется своим ограничением на подгруппу $SU(\infty) \subset U(\infty)$.

4.4.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Между группами $EU(\infty,\infty)$ и $EU(2\infty)$, с одной стороны, и группой $\mathcal{L}$, с другой стороны, имеется тесная связь. А именно, можно показать, что $\mathcal{L}$ является "сжатием" группы $EU(\infty,\infty)$ в духе Иноню-Вигнера [84]. Это означает, что существует семейство $\{\mu_\varepsilon\}$ отображений пространства $\mathcal{L}$ в пространство $EU(\infty,\infty)$ такое, что если перенести с помощью μ_ε групповой закон из $EU(\infty,\infty)$ в $\mathcal{L}$, а затем устремить ε к 0, то в пределе получится групповой закон группы $\mathcal{L}$. Более того, представление $U(\varkappa, \lambda, \mu)$ группы $\mathcal{L}$ можно получить некоторым предельным переходом из представлений $W(k,\pi)$ группы $EU(\infty,\infty)$, если k сделать зависящим от ε $(k \sim \varkappa\varepsilon^{-2})$ и положить $\pi = {}^k\rho_{\lambda,\mu}$. Аналогичные утверждения справедливы и для группы $EU(2\infty)$ и ее представлений $S(k,\pi)$. Я не буду углубляться в подробности, однако покажу, каким образом алгебра Ли ℓ группы $\mathcal{L}$ получается "сжатием" алгебр Ли $eu(\infty,\infty)$ и $eu(2\infty)$ групп $EU(\infty,\infty)$ и

$EU(2\infty)$. Описываемая ниже процедура будет затем использована в § 4.5.

Алгебра Ли ℓ является полупрямой суммой алгебры Гейзенберга $heis(\mathcal{P})$ и алгебры Ли $u(\infty)\oplus u(\infty)$. Как векторное пространство, $heis(\mathcal{P})$ отождествляется с $\mathcal{P}\oplus i\mathbb{R}$, а скобка имеет вид

$$[P\oplus is,\ Q\oplus it] = 0 \oplus 2i\,\mathrm{Im}(\mathrm{tr}\,PQ^*). \tag{1}$$

Действие алгебры $u(\infty)\oplus u(\infty)$ на $heis(\mathcal{P})$ задается так:

$$[X_1\oplus X_2,\ P\oplus is] = (X_1P + PX_2')\oplus is, \tag{2}$$

где $X_1\oplus X_2 \in u(\infty)\oplus u(\infty)$, $P\oplus is \in heis(\mathcal{P})$.

Алгебра Ли $eu(\infty,\infty)$ отождествляется с прямой суммой $i\mathbb{R}\oplus$ $\oplus u(\infty,\infty)$, а алгебра Ли $eu(2\infty)$ – с прямой суммой $i\mathbb{R}\oplus u(2\infty)$. Их общая комплексификация есть $\mathbb{C}\oplus gl(2\infty,\mathbb{C})$.

Для произвольного $\varepsilon\in\mathbb{C}^*$ рассмотрим линейное отображение из ℓ в $\mathbb{C}\oplus gl(2\infty,\mathbb{C})$:

$$P\oplus is\oplus X_1\oplus X_2 \longmapsto$$

$$\longrightarrow(\varepsilon^2 is + \mathrm{tr}\,\bar{X}_2)\oplus\begin{bmatrix}\bar{X}_2 & \varepsilon P^* \\ -\varepsilon P & X_1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Отображение (3) индуцирует изоморфизм векторного пространства $\ell\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ на векторное пространство $\mathbb{C}\oplus gl(2\infty,\mathbb{C})$, причем при вещественных ε оно отображает ℓ на $\mathfrak{eu}(2\infty)$, а при чисто мнимых ε – на $\mathfrak{eu}(\infty,\infty)$. Перенося в ℓ скобку алгебры $\mathbb{C}\oplus\mathfrak{gl}(2\infty,\mathbb{C})$ посредством отображений (3), мы получим в ℓ однопараметрическое семейство скобок. Несложное вычисление показывает, что у этих скобок существует предел при $\varepsilon\to 0$, причем результат совпадает со скобкой алгебры Ли ℓ, определенной формулами (I) и (2).

§ 4.5. Характеры группы $U(\infty)$ и допустимые представления (G,K)-пары $(U(\infty)\times U(\infty),U(\infty))$

Начало параграфа посвящено фактор-представлениям группы $U(\infty)$. В теореме 4.5.2 показано, что всякое конечное фактор-представление группы $U(\infty)$ становится непрерывным в метрике Гильберта-Шмидта, будучи домножено на подходящее одномерное представление универсальной накрывающей группы $U(\infty)^{\sim}$. Этот результат мотивирует введение $\mathbb{Z}$-накрытия $G^{\sim}$ над группой $G=U(\infty)\times U(\infty)$. Основную часть параграфа (разделы 4.5.4 – 4.5.I8) занимает распространение конструкции допустимых представлений параграфа 4.3 на рассматриваемую теперь пару $(G^{\sim},K)$ компактного типа. Принципиальная схема рассуждений остается в силе. Однако появление в конструкции бесконечных тензорных произведений заметно утяжеляет доказательство основной теоремы 4.5.I4.

4.5.I. Напомню, что определение характера группы было приведено в разделе 4.I.4.

ТЕОРЕМА [I26, 8, 68] . Характеры группы $U(\infty)$ суть в точности функции вида

$$\chi(u)=\det\left\{\prod_{k=1}\frac{[1+\beta_k(u-1)][1+\tilde{\beta}_k(u^{-1}-1)]}{[1-\alpha_k(u-1)][1-\tilde{\alpha}_k(u^{-1}-1)]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp[\gamma\operatorname{tr}(u-1)+\tilde{\gamma}\operatorname{tr}(u^{-1}-1)],\quad u\in U(\infty), \tag{I}$$

где $\alpha_k,\tilde{\alpha}_k,\gamma,\tilde{\gamma}\geqslant 0$; $\beta_k,\tilde{\beta}_k\in[0,1]$ $(k=1,2,\ldots)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k+\tilde{\alpha}_k+\tilde{\beta}_k)<+\infty . \tag{2}$$

Этот замечательный результат был достигнут благодаря усилиям ряда математиков. Изучение характеров группы $U(\infty)$ было начато Войкулеску [I25,I26] . Он показал, в частности, что все функции вида (I) являются характерами, и свел проблему их описания к некоторой задаче теории функции. Вершик и Керов [8] и, независимо, Бойер [68] обнаружили, что задача Войкулеску была решена в 50-х годах Эдрейи. Тем самым, была установлена полнота списка Войкулеску. Кроме того, Вершик и Керов [8] предложили новое доказательство этого результата.

Характеры вида

$$\det[(1-\alpha(u-1))^{-1}],\ \det(1+\beta(u-1)),\ \exp(\gamma\operatorname{tr}(u-1)), \tag{3}$$

а также сопряженные к ним характеры, получающиеся при подстановке в (3) u^{-1} (или, что сводится к тому же, $\overline{u}$) вместо u , назовем элементарными. Теорема утверждает, что всякий характер есть произведение элементарных; условие (2) обеспечивает сходимость.

Запись характера в виде (I) становится однозначной, если каждая из последовательностей параметров $\{\alpha_k\},\{\beta_k\},\{\tilde\alpha_k\},\{\tilde\beta_k\}$ расположена в невозрастающем порядке и выполнено дополнительное условие $\beta_1+\tilde\beta_1\leq 1$. Этого условия всегда можно добиться, пользуясь тождеством

$$\det(1+\beta(u-1))\det(1+\tilde\beta(\bar u^{-1}-1))=\det(1+(1-\tilde\beta)(u-1))\det(1+(1-\beta)(\bar u^{-1}-1)).$$

4.5.2. Реализуем $U(\infty)$ как некоторую группу унитарных операторов в координатном гильбертовом пространстве $E=E(\mathbb{C})$ (см. I.I.I). Для $p\geq 1$ обозначим $U(\infty)_p$ группу всех унитарных операторов в E , принадлежащих $1+\mathfrak{S}_p$, где $\mathfrak{S}_p$ обозначает идеал Неймана-Шэттена (в частности $\mathfrak{S}_1$ – идеал ядерных операторов, а $\mathfrak{S}_2$ – идеал операторов Гильберта-Шмидта). Банахова норма $\|\cdot\|_p$ в $\mathfrak{S}_p$ определяет топологию в $\mathfrak{S}_p$.

Легко проверить, что все характеры 4.5.I(I) допускают непрерывное продолжение на группу $U(\infty)_1$. Войкулеску [I26] дал априорное доказательство этого факта, не зависящее от классификации. Некоторые (но не все) характеры продолжаются на большую группу $U(\infty)_2$; эти характеры были выделены Бойером [67] . Сейчас будет показано, что все характеры можно "сделать" непрерывными в метрике Гильберта-Шмидта, если перейти к универсальным накрывающим группам.

Обозначим через $U(\infty)^{\sim}$ универсальное накрытие над $U(\infty)$. Эту группу удобно реализовать следующим образом:

$$U(\infty)^{\sim} = \{ \langle u, is \rangle \in U(\infty) \times i\mathbb{R} : \det u = \exp is \}. \tag{I}$$

Известно [8I], что для любого $p \geqslant 1$ топологическая группа $U(\infty)_p$ тоже обладает универсальным накрытием $U(\infty)^{\sim}$ со слоем $\mathbb{Z}$, в котором $U(\infty)^{\sim}$ является плотной подгруппой. Реализация (I) буквально пригодна только для $U(\infty)^{\sim}_1$. Однако ее можно обобщить на все группы $U(\infty)^{\sim}_p$, вводя в (I) подходящую модификацию определителя. Например, на группе $U(\infty)_2$ корректно определена функция (ср. [I5])

$$\det_2 (u) = \det [u \exp ((u^{-1} - u)/2)].$$

Это позволяет реализовать топологическое пространство $U(\infty)^{\sim}_2$ так:

$$U(\infty)^{\sim}_2 = \{ \langle u, z \rangle \in U(\infty)_2 \times \mathbb{C} : \det u_2 = \exp z \}.$$

ТЕОРЕМА. Всякий характер χ группы $U(\infty)$, будучи поднят на группу $U(\infty)^{\sim}$ и затем домножен на подходящий одномерный характер $\sigma_\chi : U(\infty)^{\sim} \longrightarrow U(1)$, становится непрерывным в метрике $\|\cdot\|_2$ и, тем самым, его можно непрерывно продолжить на группу $U(\infty)^{\sim}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.5.I χ дается формулой 4.5.I(I). Используя реализацию (I), положим

$$\sigma_\chi(\langle u, is\rangle) = \exp is\left[-\gamma+\tilde{\gamma}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k-\beta_k-\tilde{\alpha}_k+\tilde{\beta}_k)\right].$$

Ряд сходится в силу (4.5.I(2). Легко проверяется, что характер $\sigma_\chi \chi$ группы $U(\infty)^\sim$ непрерывен в единице в метрике $\|\cdot\|_2$, откуда следует утверждение теоремы.

Небольшая модификация рассуждения Войкулеску ([I26], теорема 3) позволяет получить доказательство теоремы, не зависящее от классификации характеров.

4.5.3. ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМЕ 4.5.2. I) Множитель σ_χ, существование которого установлено в теореме 4.5.2, определен по χ однозначно. Исходный характер χ продолжается на группу $U(\infty)_2$ тогда и только тогда, когда $\sigma_\chi = 1$. Это согласуется с результатом Бойера [67].

2) Теорему 4.5.2 можно сформулировать еще и так: всякое фактор-представление типа II_1 группы $U(\infty)$ продолжается до непрерывного проективного фактор-представления группы $U(\infty)_2$.

3) Условимся называть $\sigma_\chi \chi$ нормализованным характером группы $U(\infty)_2^\sim$. Переход к нормализованным характерам стирает различие между параметрами $\{\beta_k\}$ и $\{\tilde{\beta}_k\}$ в 4.5.I(I). В самом деле, если χ – элементарный характер $\det(1+\beta(u-1))$, то характер, сопряженный к $\sigma_\chi \chi$, получается просто заменой β на $1-\beta$.

4.5.4. Далее в этом параграфе $G=U(\infty)\times U(\infty)$ и $K=U(\infty)$, причем K отождествляется с диагональю в G. По аналогии с 4.5.2(I) определим $\mathbb{Z}$-накрытие $\tilde{G}$ над G так:

$$G^\sim=\{\langle g_1, g_2, is\rangle \in U(\infty)\times U(\infty)\times i\mathbb{R}: \det(g_1 g_2^{-1}) = e^{is}\}. \tag{I}$$

Из (I) видно, что K допускает поднятие в группу $G^{\sim}$.

Оставшаяся часть параграфа посвящена изучению неприводимых допустимых представлений пары $(G^{\sim}, K)$: как и в 4.I.I, определение допустимости состоит в том, что сужение представления на K должно быть ручным. Целесообразность перехода к накрывающей групше видна уже из теоремы 4.5.2. Впрочем, всякое неприводимое представление группы $G^{\sim}$ после домножения на подходящий характер $\sigma : G^{\sim} \to U(1)$ становится однозначным на групше G , так что при желании можно всегда опуститься с $G^{\sim}$ на G.

Основной ход изложения будет такой же, как в § 4.3, причем аналогия с представлениями дуальной пары $(GL(\infty,\mathbb{C}), U(\infty))$ будет играть исключительно важную роль. В то же время обнаружится и ряд новых эффектов.

4.5.5. Этот раздел параллелен 4.3.I - 4.3.2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(\infty)\oplus\mathfrak{u}(\infty)$ – алгебра Ли группы G ; ее следует отличать от изоморфной ей алгебры Ли $\mathfrak{k}^*$ группы K^*. Для $A\in\mathfrak{g}$ будем писать $A = A_1 \oplus A_2$ и полагать $X=(A_1+A_2)/2$, $Y=(A_1-A_2)/2$. Положим (ср. 4.3.I(I))

$$\tau_x(A)=\begin{bmatrix} X - xY & (1-x^2)^{1/2} Y \\ (1-x^2)^{1/2} Y & X + xY \end{bmatrix}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}. \tag{I}$$

Для $x\notin[1,1]$ в (I) можно использовать любую ветвь корня из $1-x^2$; для определенности можно считать, что аргумент корня равен $\pi/2$. Легко видеть, что τ_x является вложением алгебр Ли $\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{u}(2\infty)$, если $x\in[-1,1]$, и вложением $\mathfrak{g}\to\mathfrak{u}(\infty,\infty)$, если $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Если продолжить $\tau_x(\cdot)$ по непрерывности в точки $x = \pm 1$, то мы получим два различных изоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{u}(2\infty) \cap \mathfrak{u}(\infty,\infty)$.

Семейство $\{\tau_x\}$ определяет вложение τ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли функций $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{gl}(2\infty, \mathbb{C})$. Эти функции принимают значения в $\mathfrak{u}(2\infty)$ на $[-1,1]$ и в $\mathfrak{u}(\infty,\infty)$- вне $(-1,1)$. Рассмотрим еще "постоянное вложение" δ алгебры $\mathfrak{k}^*$ в алгебру Ли функций, определенное в 4.3.I(4).

Пусть $\mathfrak{g}(n)$ и $\mathfrak{k}^*(n)$ суть очевидные подалгебры в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}^*$, изоморфные $\mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)$. Ясно, что функции из $\tau(\mathfrak{g}(n))$ и из $\delta(\mathfrak{k}^*(n))$ принимают значения в $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$.

Зафиксируем $n \in \{1, 2, \dots\}$ и обозначим через $\mathfrak{g}^*(n)$ алгебру Ли функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$, порожденную алгебрами $\tau(\mathfrak{g}(n))$ и $\delta(\mathfrak{k}^*(n))$ (ср. 4.3.2). Как и в 4.3.2, наши матрицы-функции $F(x)$ будем записывать в блочной форме.

ТЕОРЕМА (ср. теорема 4.3.2). Алгебра Ли $\mathfrak{g}^*(n)$ состоит в точности из всех непрерывных функций $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$ таких, что (ср. 4.3.2(I) - (3))

I) $F(x) \in \mathfrak{u}(2n)$ для $|x| \leq 1$,
$F(x) \in \mathfrak{u}(n,n)$ для $|x| \geq 1$.

2) Блоки F_{11} и F_{22} суть полиномиальные функции на $\mathbb{R}$, а блоки F_{12} и F_{21} суть полиномиальные функции, умноженные на $(1-x^2)^{1/2}$.

3) $\operatorname{tr} F(x) \equiv \mathrm{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И КОММЕНТАРИЙ. Если внимательно проследить за доказательством теоремы 4.3.2, то можно убедиться в том, что оно без каких-либо изменений переносится на рассматриваемую здесь ситуацию. Это обстоятельство на случайно: я покажу сейчас, что рассматриваемая теорема не просто аналогична теореме 4.3.2, а фактически идентична ей.

В самом деле, перейдем сперва к комплексификациям алгебр $\mathfrak{g}(n)$ и $\mathfrak{k}^*(n)$ в контекстах обеих теорем, отчего исчезнут условие 4.3.2 (I) и условие (I) выше. Далее, рассмотрим следующее преобразование алгебры функций $\mathbb{R} \to \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$, сохраняющее скобку. В контексте теоремы 4.3.2 разделим блок $F_{21}(x)$ на $1+ix$, а блок F_{12} умножим на $1+ix$ (см. 4.3.I(I)). В контексте настоящего параграфа проделаем то же самое, но с функцией $(1-x^2)^{1/2}$ вместо $1+ix$, в результате чего $\tau(\mathfrak{g}^*(n)\otimes\mathbb{C})$ будет состоять уже из полиномиальных функций. От этого преобразования вложение δ не изменится, условие 4.3.2(2) сведется к тому, что F_{12} делится на $1+x^2$, а условие (2) превратиться в условие "F_{12} делится на $1-x^2$". Но это сводится к тому же самому заменой переменной $x \mapsto ix$. Более того, с учетом сделанного преобразования, эта же замена переменной отождествляет обе версии вложения τ, что видно из сопоставления формул 4.3.I(I) и (I). Таким образом, мы действительно имеем дело с одним и тем же объектом.

Это рассуждение показывает, в частности, что обе версии алгебры $\mathfrak{g}^*(n)$ суть различные вещественные формы одной и той же комплексной алгебры Ли.

Я хотел бы еще обратить внимание на тот факт, что две выделенные точки $\pm i$, которые в контексте теоремы 4.3.2 лежали вне прямой, с которой мы работали, теперь в результате замены переменной $x \mapsto ix$ попадают на эту "рабочую прямую", совмещаясь с точками ± 1. Как будет видно из дальнейшего, именно отсюда проистекают определенные различия в поведении допустимых представлений обеих рассматриваемых пар и большая сложность теории в "компактном варианте".

4.5.6. Вложения τ_x алгебр Ли, введенные в 4.5.5(I), определяют вложения t_x группы $G=U(\infty)\times U(\infty)$ в $U(\infty,\infty)$ или в $U(2\infty)$ (первый вариант – для $|x|>1$, второй вариант – для $|x|<1$)

$$t_x(\langle g_1,g_2\rangle)=\left[\begin{array}{c|c} \frac{1-x}{2}g_1+\frac{1+x}{2}g_2 & \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}(g_1-g_2) \\ \hline \frac{1}{2}(1-x)^{1/2}(g_1-g_2) & \frac{1+x}{2}g_1-\frac{1-x}{2}g_2 \end{array}\right], \tag{I}$$

$$\langle g_1,g_2\rangle\in G, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}.$$

Нетрудно проверить, что $t_x(\cdot)=h_x t_0(\cdot)h_x^{-1}$, где h_x – некоторая блочная матрица со скалярными блоками, ср. 4.3.I(2).

Используя реализацию 4.5.4(I) группы $G^\sim$, условимся обозначать через $g^\sim=\langle g_1,g_2,is\rangle$ произвольный элемент группы $G^\sim$, а через $g=\langle g_1,g_2\rangle$ – его проекцию в G. Введем одномерные представления $G^\sim\to U(1)$ группы $G^\sim$:

$$\sigma_\omega(\tilde{g})=e^{i\omega s}, \quad \omega\in\mathbb{R} \tag{2}$$

$$\theta_x(\tilde{g})=\sigma_{\pm(1-x)/2}(\tilde{g})(\det g_2)^{\pm1}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \tag{3}$$

(условимся, что везде, где имеется произвол в выборе знака, верхний знак берется в случае $|x|>1$, а нижний знак – в случае $|x|<1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. определение 4.3.3) Фундаментальными представлениями группы $G^{\sim}$ будем называть ее унитарные представления

$$T_x(\tilde{g}) = \theta_x(g)\, W(t_x(g)) \quad , \quad |x|>1 , \tag{4}$$

$$T_x(\tilde{g}) = \theta_x(g)\, S(t_x(g)) \quad , \quad |x|<1 . \tag{5}$$

Представления T_x при $|x|>1$ назовем бозонными, а при $|x|<1$ – фермионными.

Определим морфизм $\tilde{t}_x$ группы $G^{\sim}$ в группу $EU(\infty,\infty)$ или $EU(2\infty)$ следующей формулой (ср.4.3.3(3)):

$$\tilde{t}_x(\tilde{g}) = \langle \theta_x(\tilde{g})^{\pm 1}, t_x(g)\rangle , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\} . \tag{6}$$

Учитывая определение действия S^1 в $H(W)$ и $H(S)$, см.4.2.10 и 4.4.5, получаем:

$$T_x = W \circ \tilde{t}_x \ (|x|>1), \quad T_x = S \circ \tilde{t}_x \ (|x|<1). \tag{7}$$

Более общо, для $k \in \{1,2,\dots\}$ и $\pi \in U(k)^{\wedge}$ положим

$$T_x(k,\pi) = \begin{cases} W(k,\pi)\circ \tilde{t}_x , & |x|>1 \\ S(k,\pi)\circ \tilde{t}_x , & |x|<1 . \end{cases} \tag{8}$$

Ясно, что (ср.4.3.3(4))

$$T_x^{\otimes k} \sim \bigoplus_{\pi \in U(k)^\wedge} (\dim \pi)\, T_x(k,\pi). \tag{9}$$

ЛЕММА (ср. лемма 4.3.3). Все унитарные представления $T_x(k,\pi)$ группы $G^\sim$ суть допустимые представления пары $(G^\sim, K)$. Более того, голоморфное расширение на группу K^* ручного представления $T_x(k,\pi)|K$ совпадает с $W(k,\pi)\circ d$ или $S(k,\pi)\circ d$, где $d: K^* \longrightarrow EU(\infty,\infty)$ определено в 4.2.10(2), а $d: K^* \rightarrow EU(2\infty)$ дается, согласно 4.4.5, той же самой формулой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 4.3.3 все следует из леммы 4.2.10 и ее фермионного аналога – леммы 4.4.5.

4.5.7. До сих пор значения $x=1$ и $x=-1$ исключались. Определим теперь морфизмы $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_{-1}$ группы $G^\sim$ в группу $\mathcal{L}$ (см. 4.4.6) следующим образом:

$$\tilde{t}_1(\tilde{g}) = h(\tilde{g})\cdot\langle g_1, g_2\rangle \in \mathrm{Heis}(\mathcal{P})\cdot(U(\infty)\times U(\infty)), \tag{1}$$

где $h(\tilde{g}) = \langle 1 - g_1 g_2^{-1},\ i\,\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}(g_1 g_2^{-1} - 1) - is\rangle$;

$$\tilde{t}_{-1}(\tilde{g}) = \tilde{t}_{-1}(\langle g_1, g_2, is\rangle) = \tilde{t}_1(\langle g_2, g_1, -is\rangle). \tag{2}$$

Тот факт, что $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_{-1}$ действительно являются морфизмами групп, несложно проверить, исходя из формул 4.4.6(1) и 4.4.6(3), задающих умножение в группе $\mathcal{L}$.

Следует подчеркнуть, что это определение согласовано с процедурой "сжатия", описанной в 4.4.9. В самом деле, обозначим через $\tilde{\tau}_x$, где $x \in \mathbb{R}$, морфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в одну из алгебр Ли $eu(\infty,\infty)$, $eu(2\infty), \ell$, отвечающий морфизму $\tilde{t}_x$ группы $G^{\sim}$. Из определения морфизмов $\tilde{t}_x$ и соотношения 4.5.4(I) получаем:

$$\tilde{\tau}_x(A_1 \oplus A_2) = \mathrm{tr}\left(\frac{1-x}{2}A_1 + \frac{1+x}{2}A_2\right) \oplus$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{1-x}{2}A_1 + \frac{1+x}{2}A_2 & \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}(A_1 - A_2) \\ \hline \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}(A_1 - A_2) & \frac{1+x}{2}A_1 - \frac{1-x}{2}A_2 \end{array}\right], \ |x| \neq 1; \quad (3)$$

$$\tilde{\tau}_1(A_1 \oplus A_2) = (A_2 - A_1) \oplus 0 \oplus A_1 \oplus \bar{A}_2 \ ; \quad (4)$$

$$\tilde{\tau}_{-1}(A_1 \oplus A_2) = (A_1 - A_2) \oplus 0 \oplus A_2 \oplus \bar{A}_1 \ . \quad (5)$$

Будем считать, что $x \longrightarrow 1$ и положим $\varepsilon = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$. Отождествим ε с параметром деформации из 4.4.9. Тогда, если преобразовать правую часть формулы (3) в элемент алгебры Ли ℓ посредством отображения, обратного к 4.4.9(3), то в пределе $\varepsilon \to 0$ мы получим (4). Если же проделать то же самое, считая, что $x \longrightarrow -1$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$, то мы придем к (5).

Введем теперь новые унитарные представления группы $G^{\sim}$:

$$T_1(\varkappa) = U(\varkappa)\circ\tilde{t}_1 , \quad T_{-1}(\varkappa) = U(\varkappa)\circ\tilde{t}_{-1} \quad (\varkappa > 0) ; \quad (6)$$

$$T_1(\varkappa,\lambda,\mu) = U(\varkappa,\lambda,\mu)\circ\tilde{t} , \quad T_{-1}(\varkappa,\lambda,\mu) = U(\varkappa,\lambda,\mu)\circ\tilde{t}_{-1} . \quad (7)$$

Здесь $U(\varkappa)$ и $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ суть представления, введенные в 4.4.6 и 4.4.7. В (7) допускается $\varkappa=0$, но исключается случай, когда $\varkappa=0$ и $\lambda=\mu=0$ одновременно.

Очевидно, что (7) сводится к некоторому ручному представлению группы $U(\infty)\times U(\infty)$, если $\varkappa=0$; если же $\varkappa>0$, то представление (7) является тензорным произведением представления (6) на некоторое ручное представление.

ЛЕММА. Представления (6) и (7) группы $G^{\sim}$ являются допустимыми представлениями пары $(G^{\sim}, K)$. Более того, голоморфное расширение ручного представления $T_1(\varkappa,\lambda,\mu)|K$ или $T_{-1}(\varkappa,\lambda,\mu)|K$ на группу K^* совпадает с сужением представления $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ группы $\mathcal{L}$ на ее подгруппу $U(\infty)\times U(\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально следует из определений.

4.5.8. ЛЕММА (ср. лемма 4.3.5). I) Сферическая функция φ_x фундаментального представления T_x группы $G^{\sim}$, отвечающая вакуумному вектору f_0 , такова:

$$\varphi_x(\tilde{g})=\sigma_{\pm(1-x)/2}(\tilde{g})\left[\det\left(1+\frac{1-x}{2}(g_1g_2^{-1}-1)\right)\right]^{\mp 1}. \tag{I}$$

2) Сферические функции $\varphi_{1,\varkappa}$ и $\varphi_{-1,\varkappa}$ представлений $T_1(\varkappa)$ и $T_{-1}(\varkappa)$, отвечающие вектору $f_0=EXP(0)$ в пространстве $EXP(\mathcal{P})$, таковы:

$$\varphi_{1,\varkappa}(\tilde{g})=\sigma_{-\varkappa}(\tilde{g})\exp(\varkappa\operatorname{tr}(g_1g_2^{-1}-1)) \tag{2}$$

$$\varphi_{-1,\varkappa}(\tilde{g})=\sigma_{\varkappa}(\tilde{g})\exp(\varkappa\operatorname{tr}(g_2g_1^{-1}-1)). \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул 4.2.4(I) и 4.4.5(I) для матричных элементов представлений W, S и из формул (I), (3), (4), (5) раздела 4.5.6 следует:

$$\varphi_x(\tilde{g}) = \theta_x(\tilde{g})\left[\det \frac{1-x}{2} g_1 + \frac{1+x}{2} g_2\right]^{\mp 1},$$

что простым преобразованием сводится к (I).

Формулы (2) и (3) легко выводятся из сопоставления формул (I), (2), (6) раздела 4.5.7 с определением представления $U(\varkappa)$ в 4.4.6(2), (4).

4.5.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко убедиться в справедливости соотношений

$$\varphi_{-x}(\tilde{g}) = \overline{\varphi_x(\tilde{g})}, \quad \varphi_{-1,\varkappa}(\tilde{g}) = \overline{\varphi_{1,\varkappa}(\tilde{g})}. \tag{I}$$

Далее, зададим отображение $G^{\sim} \longrightarrow U(\infty)^{\sim}$ формулой

$$\langle g_1, g_2, is\rangle \longmapsto \langle g_1 \cdot g_2^{-1}, is\rangle. \tag{2}$$

Легко видеть, что сферические функции φ_x, $\varphi_{\pm 1,\varkappa}$ получаются в результате композиции подходящего нормализованного элементарного характера $\sigma_\chi \chi$ группы $U(\infty)^{\sim}$ с отображением (2). А именно, для φ_x, $x>1$, надо взять характер χ с параметром $\alpha = (x-1)/2$; для φ_x, $|x|<1$, надо взять $\tilde{\alpha}=(|x|-1)/2$; для φ_x, $|x|<1$, надо взять характер χ с параметром $\beta=(1-x)/2$ или, что сводится к тому же в силу замечания 4.5.3(пункт 3)), с параметром $\tilde{\beta}=(x-1)/2$. Наконец, функциям $\varphi_{1,\varkappa}$ и $\varphi_{-1,\varkappa}$ отвечают элементарные характеры с параметрами $\gamma=\varkappa$ и $\tilde{\gamma}=\varkappa$ соответственно.

4.5.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\pi \in U(k)^\wedge$ является единичным представлением, то представление $T_x(k,\pi)$ содержит K-инвариантный вектор $f_0^{\otimes k}$ (это единственный, с точностью до множителя, ненулевой K-инвариант в $T_x^{\otimes k}$), и соответствующая сферическая функция равна φ_x^k.

4.5.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Из 4.5.8(1), (2) вытекает:

$$\lim_{x\to 1} \varphi_x^{k(x)} = \varphi_{1,\varkappa} \qquad , \text{ если } k(x) \sim 4\varkappa |1-x^2|^{-1}. \qquad (1)$$

Аналогичное соотношение имеет место при $x \to -1$; тогда получается $\varphi_{-1,\varkappa}$. Это согласуется с замечанием 4.4.9.

4.5.12. Я приведу сейчас в удобной для дальнейшего применения форме некоторые известные факты о бесконечных тензорных произведениях в смысле фон Неймана [32, 119] .

Предположим, что для некоторой топологической группы $\mathcal{G}$ задано семейство $\{T_\alpha\}$ ее унитарных представлений, где индекс α пробегает счетное множество $\mathcal{A}$. Допустим, что для всех $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$, где $\mathcal{A}_0$ конечно, в $H(T_\circ)$ выделен единичный вектор ξ_α , и обозначим через φ_α соответствующий матричный элемент. Предположим, наконец, что для любого конечного $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, содержащего $\mathcal{A}_0$, произведение функций φ_α , взятое по $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, сходится, причем результат этого произведения, обозначаемый через $\psi_{\mathcal{B}}$, является непрерывной функцией на $\mathcal{G}$.

При этих допущениях можно корректно определить унитарное представление $T_{\mathcal{A}} = \bigotimes\limits_{\mathcal{A}} T_\alpha$ следующим образом. Для произвольного конечного $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, содержащего $\mathcal{A}_0$, обозначим через $S_{\mathcal{B}}$ циклическое унитарное представление, порожденное непрерывной функцией $\psi_{\mathcal{B}}$, которая, очевидно, положительно определена на $\mathcal{G}$,и рассмотрим унитарное представление

$$\left(\bigotimes_{\alpha \in \mathcal{B}} T_\alpha \right) \otimes S_{\mathcal{B}} . \tag{I}$$

Для произвольного $\beta \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ имеется очевидное вложение $S_{\mathcal{B}} \hookrightarrow T_\beta \otimes S_{\mathcal{B} \cup \{\beta\}}$. Отсюда видно, что представления (I) составляются в индуктивный предел, результат которого и есть $T_{\mathcal{A}}$.

Следует подчеркнуть, что эта конструкция существенно зависит от выбора векторов ξ_α.

Представление $T_{\mathcal{A}}$ можно реализовать в счетном тензорном произведении (по фон Нейману [32]) гильбертовых пространств T_α с отмеченными векторами ξ_α.

Очевидно, что для любого конечного $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ имеем:

$$T_{\mathcal{A}} = \left(\bigotimes_{\alpha \in \mathcal{B}} T_\alpha \right) \otimes T_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}} . \tag{2}$$

4.5.I3. В этом разделе излагается конструкция допустимых представлений пары $(G^{\sim}, K)$, параллельная конструкции 4.3.4.

Возьмем непустое конечное или счетное множество точек $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$, затем для каждой точки $x \in \mathfrak{X} \setminus \{1,-1\}$ выберем число $k_x \in \{1,2,\dots\}$ и представление $\pi_x \in U(k_x)^{\wedge}$. Положим для краткости $T(x) = T_x(k_x, \pi_x)$. Далее, если $\mathfrak{X}$ содержит точку 1, то сопоставим ей представление вида $T_1(\varkappa, \lambda, \mu)$, где $(\varkappa, \lambda, \mu) \neq (0,0,0)$, которое обозначим через $T(1)$. Если $\mathfrak{X}$ содержит -1, то возьмем еще представление $T(-1)$ вида $T_{-1}(\varkappa', \lambda', \mu')$, где $(\varkappa', \lambda', \mu') \neq (0,0,0)$.

Далее, предположим, что π_x является единичным представлением для всех $x \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_0$, где $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}$ конечно и содержит

$\mathfrak{X}\cap\{1,-1\}$. Для каждого $x\in\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}_0$ выделим в $H(T_x)$ единичный K-инвариантный вектор ξ_x (см. замечание 4.5.10).

Наконец, предположим, что

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}\setminus\{1,-1\}} k_x\cdot|1-x^2|<+\infty \tag{I}$$

и обозначим через $\mathcal{M}$ набор всех этих данных.

ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В указанных предположениях существует унитарное представление $T_{\mathcal{M}}$, являющееся тензорным произведением представлений $T(x), x\in\mathfrak{X}$, в смысле определения, данного в 4.5.12. Представление $T_{\mathcal{M}}$ допустимо для $(G^{\sim},K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{X}$ конечно, то существование представления $T_{\mathcal{M}}$ не нуждается в обосновании. Если $\mathfrak{X}$ бесконечно, то выполнение условий, требуемых в 4.5.12, обеспечивается предположением (I). Это легко выводится из формул 4.5.8(I)-(3) для сферических функций. Здесь уместно еще отметить, что если перейти от сферических функций к характерам группы $U(\infty)^{\sim}$, следуя замечанию 4.5.9, то условие (I) превратится в условие 4.5.I(2), обеспечивающее сходимость бесконечного произведения элементарных характеров.

Второе утверждение леммы легко вытекает из допустимости перемножаемых представлений, которая обеспечена леммами 4.5.6 и 4.5.7. В случае бесконечного $\mathfrak{X}$ здесь следует подчеркнуть то, что выделенные векторы являются K-инвариантами.

4.5.14. ТЕОРЕМА (ср. теорема 4.3.4). Всякое представление вида $T_{\mathcal{M}}$ неприводимо. Если $T_{\mathcal{N}}$ – другое представление того же сорта и $\mathcal{M}\neq\mathcal{N}$, то $T_{\mathcal{M}}$ и $T_{\mathcal{N}}$ не эквивалентны.

В случае, когда $\mathfrak{X}$ конечно и не содержит точек ± 1, доказательство идентично доказательству теоремы 4.3.4 (роль теоремы 4.3.2 при этом играет ее аналог – теорема 4.5.5). Но в общем случае возникают технические осложнения, вызванные, главным образом, необходимостью работать с бесконечными тензорными произведениями.

После ряда приготовлений доказательство излагается в 4.5.18.

4.5.15. Зафиксируем произвольный компакт $\Delta \subset \mathbb{R}$, который содержит точки 1 и -1, причем эти две точки не изолированы в Δ. Пусть $\mathfrak{g}^*(n,\Delta)$, где $n \in \{1,2,\dots\}$, обозначает множество всех $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$-значных функций F на Δ со следующими свойствами (ср. предпосылки теоремы 4.5.5):

1) Пусть $x \in \Delta$. Тогда $F(x)$ лежит в $\mathfrak{u}(2n)$, если $|x| \leq 1$ и в $\mathfrak{u}(n,n)$, если $|x| \geq 1$.

2) Функция $F(x)$ непрерывна на Δ, причем ее блоки $F_{12}(x)$ и $F_{21}(x)$ остаются непрерывными, будучи поделены на $(1-x^2)^{1/2}$.

3) $\operatorname{tr} F(x) \equiv const$.

4) Функция $\operatorname{tr} F_{11}(x)$ дифференцируема в точках $x=1$, $x=-1$.

Очевидно, $\mathfrak{g}^*(n, \Delta)$ является алгеброй Ли относительно поточечных операций. Введем в $\mathfrak{g}^*(n,\Delta)$ топологию, определяемую равномерной сходимостью на компакте Δ функций

$$F_{11}\,,\ F_{22},\ (1-x^2)^{-1/2}F_{12}(x)\,,\quad (1-x^2)^{-1/2}F_{21}(x)$$

плюс сходимостью значений производных от $\operatorname{tr} F_{11}(x)$ в $x=\pm 1$. Эту топологию можно задать нормой, относительно которой $\mathfrak{g}^*(n,\Delta)$ станет банаховой алгеброй Ли.

Очевидно, что алгебру Ли $\mathfrak{g}^*(n)$ из теоремы 4.5.5 можно интерпретировать как подалгебру в $\mathfrak{g}^*(n,\Delta)$.

ЛЕММА. $\mathfrak{g}^*(n)$ является плотной подалгеброй в банаховой алгебре Ли $\mathfrak{g}^*(n,\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к применению теоремы Стоуна- Вейерштрасса (точнее, ее очевидному обобщению, позволяющему учесть условие (4)).

4.5.I6. Пусть Δ – такое, как в 4.5.I5. Введем группу $G^*(n,\Delta)$, состоящую из матричнозначных функций f на Δ, удовлетворяющих очевидным аналогам условий I) – 4) из 4.5.I5. А именно, в I) надо заменить $\mathfrak{u}(2n)$ на $U(2n)$ и $\mathfrak{u}(n,n)$ на $U(n,n)$; в 3) надо заменить $\operatorname{tr} F(x)$ на $\det f(x)$; в 4) надо заменить $\operatorname{tr} F_{11}(x)$ на $\det f_{11}(x)$. Нетрудно проверить, что $G^*(n,\Delta)$ действительно является группой относительно поточечного умножения. Следует подчеркнуть, что сохранение условия 4) при перемножении двух функций f и g обеспечено условием 2), ибо равенство

$$(fg)_{11} = f_{11}\, g_{11} + f_{12}\, g_{21} \tag{I}$$

показывает, что второе слагаемое, будучи произведением непрерывной функции на $1-x^2$, дифференцируемо в точках $x=\pm 1$.

Полезно отметить еще, что из условий 2) и 3) следует, что $\det f_{22}$ также дифференцируема в точках ± 1 и что $\det f_{11}\neq 0$ и $\det f_{22}\neq 0$ в этих точках.

Нетрудно проверить, что $G^*(n,\Delta)$ можно наделить структурой банаховой группы Ли такой, что соответствующей банаховой алгеброй Ли будет $\mathfrak{g}^*(n,\Delta)$.

Обозначим через $G^*(\Delta)$ объединение групп $G^*(n,\Delta)$ с топологией индуктивного предела.

Семейство отображений t_x, введенных в 4.5.6, задает вложение t группы G в группу $G^*(\Delta)$. Далее, отождествим K^* с подгруппой в $G^*(\Delta)$ посредством отображения

$$K^* = U(\infty) \times U(\infty) \ni \langle u, v \rangle \longmapsto f = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

ЛЕММА. Подгруппа в $G^*(\Delta)$, натянутая на $t(G)$ и K^*, плотна в $G^*(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что $t(G(n))$ и $K^*(n)$ топологически порождают $G^*(n, \Delta)$. А это следует из теоремы 4.5.5, леммы 4.5.15 и элементарного свойства банаховых групп Ли, указанного в ([4] , гл.Ш, § 6, предложение 8).

4.5.17. ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа $G^*(\Delta)$, введенная в 4.5.16, обладает $\mathbb{Z}$-накрытием $G^*(\Delta)$ таким, что:

1) Вложение $t: G \to G^*(\Delta)$ порождает вложение $\tilde{t}$ группы $G^\sim$ в группу $G^*(\Delta)^\sim$.

2) Подгруппа $K^* \subset G^*(\Delta)$ допускает поднятие в $G^*(\Delta)^\sim$.

3) Для любого $x \in \Delta$ существует такой морфизм a_x группы $G^*(\Delta)^\sim$ в $EU(\infty,\infty)$, $EU(2\infty)$ или в $\mathcal{L}$ (соответственно, при $|x|>1, |x|<1, |x|=1$), что $a_x \circ \tilde{t} = \tilde{t}_x$, где $\tilde{t}_x$ обозначает морфизм, введенный в 4.5.6(6) и в 4.5.7(I)-(3). Кроме того, $a_x | K^*$ совпадает с каноническим вложением группы $K^* = U(\infty) \times U(\infty)$ в $EU(\infty,\infty)$, $EU(2\infty)$ или $\mathcal{L}$ (см. 4.2.10 и 4.4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Заметим, что ввиду условий $f_{12}(\pm 1) = = f_{21}(\pm 1) = 0$, заложенных в определении группы $G^*(\Delta)$, отображения

$$f \longmapsto \det f_{11}(\pm 1) \ , \quad f \longmapsto \det f_{22}(\pm 1)$$

являются одномерными унитарными представлениями группы $G^*(\Delta)$.

Далее, если $f = t(\langle g_1, g_2\rangle)$, то из 4.5.6(I) вытекают следующие соотношения:

$$g_1 = f_{11}(-1) = f_{22}(1), \quad g_2 = f_{11}(1) = f_{22}(-1). \tag{I}$$

б) Положим, следуя аналогии с 4.5.4(I),

$$G^*(\Delta)^{\sim} = \{\langle f, is\rangle \in G^*(\Delta) \times i\mathbb{R} :$$

$$\det f_{11}(-1)\,(\det f_{11}(1))^{-1} = e^{is}\} \tag{2}$$

и зададим вложение $\tilde{t}$ так:

$$\tilde{t}(\langle g_1, g_2, is\rangle) = \langle t(\langle g_1, g_2\rangle), is\rangle \in G^*(\Delta)^{\sim}. \tag{3}$$

Далее, элементу $\langle u, v\rangle \in K^*$ сопоставим пару $\langle f, 0\rangle$, где f дается формулой 4.5.I6(2). Мы получаем в итоге первые два утверждения.

в) Для $x \neq 1,\ x \neq -1$ полагаем

$$a_x(\langle f, is\rangle) = \langle e^{is(1-x)/2} \det f_{11}(1),\ f(x)\rangle. \tag{4}$$

Сопоставив (4) с 4.5.7(2)-(6) и учтя (I), получим равенство $a_x \circ \tilde{t} \doteq \tilde{t}_x$ для $|x| \neq 1$.

Если $\langle f, is\rangle$ в (4) лежит в подгруппе K^*, т.е. является образом элемента $\langle u, v\rangle$, то $s=0$, $f_{11}(1) = \bar{v}$, откуда следует, что $a_x | K^*$ совпадает с каноническим вложением группы K^* в $EU(\infty,\infty)$ или в $EU(2\infty)$.

г) Выпишем морфизм α_x алгебры Ли $\mathfrak{g}^*(\Delta)$ в алгебру Ли $\mathfrak{eu}(\infty,\infty)$ или $\mathfrak{eu}(2\infty)$, отвечающий морфизму (4):

$$\alpha_x(F) = \operatorname{tr}\left(\frac{1-x}{2} F_{11}(-1) + \frac{1+x}{2} F_{11}(1)\right) \oplus F(x), \tag{5}$$

где при переходе от (4) к (5) было использовано соотношение (2).

Морфизмы a_1 и a_{-1} группы $G^*(\Delta)^\sim$ в группу $\mathcal{L}$ удобно определить через соответствующие морфизмы α_1 и α_{-1} алгебры Ли $\mathfrak{g}^*(\Delta)$ в алгебру Ли ℓ группы $\mathcal{L}$. Для этого будем действовать так же, как в 4.5.7, руководствуясь идеей "сжатия".

Пусть $x \to 1$ и $\varepsilon = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$. Применив к (5) преобразование, обратное к 4.4.9(3), и перейдя затем к пределу по $\varepsilon \to 0$, получим после простого вычисления

$$\begin{gathered} \alpha_1(F) = \left[-2(1-x^2)^{-1/2} F_{21}(x)\right]\Big|_{x=1} \oplus \\ \oplus \left[\operatorname{tr} F_{11}(-1) - \operatorname{tr} F_{11}(1) + 2\frac{d}{dx}\operatorname{tr} F_{11}(x)\Big|_{x=1}\right] \oplus \\ \oplus F_{22}(1) \oplus \overline{F_{11}(1)}. \end{gathered} \tag{6}$$

Первая квадратная скобка в (6) есть элемент из $\mathcal{P}$; он корректно определен ввиду свойства 2) функций F, оговоренного в 4.5.15. Вторая квадратная скобка в (6) есть скаляр из $i\mathbb{R}$; его существование обеспечено дифференцируемостью функции $\operatorname{tr} F_{11}(x)$ в $x=1$, см. свойство 4) в 4.5.15. Используя формулы 4.5.7(3)-(4), легко проверяем, что $\alpha_1 \circ \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_1$, где $\tilde{\tau}$ обозначает вложение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*(\Delta)$, происходящее из морфизма $\tilde{t}: G^\sim \to G^*(\Delta)^\sim$. Из (6) видно также, что если F лежит в алгебре Ли $\mathfrak{k}^*$ подгруппы $K^* \subset G^*(\Delta)^\sim$, то обе квадратные скобки в (6) обращаются в 0, и мы получаем каноническое вложение алгебры Ли k^* в ℓ. Впрочем, справедливость этих утверждений и без всякой проверки становится очевидной, если вспомнить, что определение морфизмов $\tilde{t}$ и $\tilde{t}_{-1}$ в 4.5.17 было согласовано с процедурой "сжатия".

Морфизм α_{-1} строится аналогично: считая $x \longrightarrow -1$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$, получаем после предельного перехода

$$\alpha_{-1}(F) = \left[2(1-x^2)^{-1/2} F_{21}(x)\big|_{x=1}\right] \oplus$$

$$\oplus \left[-\mathrm{tr}\, F_{11}(-1) + \mathrm{tr}\, F_{11}(1) - 2\frac{d}{dx}\,\mathrm{tr}\, F_{11}(x)\big|_{x=-1}\right] \oplus \tag{7}$$

$$\oplus F_{22}(-1) \oplus \overline{F_{11}(-1)}.$$

4.5.18. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.5.14. а) Из условия 4.5.13 (1) видно, что предельными точками множества $\mathfrak{X}$ могут быть только 1 и -1. Поэтому существует компакт $\Delta \subset \mathbb{R}$, содержащий $\mathfrak{X}$ и удовлетворяющий условиям, перечисленным в 4.5.15. Зафиксируем произвольный такой Δ.

б) Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ обозначим через $W(x)$ неприводимое представление вида $W(k,\pi)$, $S(k,\pi)$ или $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ группы $EU(\infty,\infty)$, $EU(2\infty)$ или $\mathcal{L}$ (соответственно, при $|x|>1$, $|x|<1$ или $|x|=1$), которое отвечает $T(x)$, т.е. такое, что $T(x)=W(x)\circ\tilde{t}_x$.

Положим затем $V(x)=W(x)\circ a_x$, где a_x было введено в 4.5.17. $V(x)$ является неприводимым представлением группы $G^*(\Delta)^\sim$ таким, что $V(x)\circ\tilde{t} = T(x)$, где $\tilde{t}: G \to G^*(\Delta)^\sim$ – вложение, определенное в 4.5.17; кроме того, $V(x)\,|\,K^*$ совпадает с голоморфным расширением ручного представления $T(x)\,|\,K$.

в) Покажем, что существует представление $\otimes V(x)$ группы $G^*(\Delta)^\sim$, где произведение берется по $x \in \mathfrak{X}$, в смысле определения, данного в 4.5.12, причем в качестве выделенных векторов в

$H(V(x))$ взяты те же векторы ξ_x, что при определении произведения представлений $T(x)$ в 4.5.13. Разумеется, обоснование этого утверждения нужно лишь в случае бесконечного $\mathfrak{X}$.

Пусть ψ_x - матричный элемент представления $V(x)$, отвечающий вектору ξ_x, $x \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_0$, где $\mathfrak{X}_0$ - то же, что в 4.5.13. Из определения a_x для $x \neq \pm 1$ (см. 4.5.17(4)) видно, что если $\langle f, is \rangle$ - элемент группы $G^*(\Delta)^\sim$, то

$$\psi_x(\langle f, is \rangle) = \left[e^{is(1-x)/2} \frac{\det f_{11}(1)}{\det f_{11}(x)} \right]^{\pm k_x}, \tag{1}$$

где, как обычно, $\pm = \operatorname{sgn}(x^2-1)$. Более того, согласно 4.5.17(2), (1) можно переписать еще и так:

$$\psi_x(\langle f, is \rangle) = \left[e^{-is(1+x)/2} \frac{\det f_{11}(-1)}{\det f_{11}(x)} \right]^{\pm k_x}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) видно, что сходимость произведения функций ψ_x обеспечивается условием 4.5.13(1), а также условием дифференцируемости функции $\det f_{11}(x)$ в точках $x = \pm 1$; именно с этой целью последнее условие и было включено в определение групп $G^*(n, \Delta)$, данное в 4.5.15.

г) Положим $V_{\mathcal{M}} = \otimes V(x)$ и покажем, что это представление группы $G^*(\Delta)^\sim$ неприводимо. Положим для упрощения обозначений $\mathcal{G} = G^*(\Delta)^\sim$. Для $\varepsilon > 0$ обозначим через Δ_ε конечное подмножество в Δ, выделяемое условием $|x^2-1|>\varepsilon$, а через $\mathcal{G}_\varepsilon$ – подгруппу тех $\langle f, is\rangle \in \mathcal{G}$, для которых $f(x)=1$ вне Δ_ε и $s=0$. Ввиду условия $\det f \equiv const$ в определении группы $G^*(\Delta)$ имеем $\det f \equiv const$ для элементов подгруппы $\mathcal{G}_\varepsilon$, так что $\mathcal{G}_\varepsilon$ изоморфна произведению $\operatorname{card}\Delta_\varepsilon$ групп, каждая из которых есть либо $SU(\infty,\infty)$, либо $SU(2\infty)$.

Положим $\mathcal{G}_0=\bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{G}_\varepsilon$; это нормальный делитель в группе $\mathcal{G}$. Запишем $V_{\mathcal{M}}$ в виде $V_1\otimes V_0$, где

$$V_1=\bigotimes_{x\in\mathfrak{X}\cap\{1,-1\}} V(x),\qquad V_0=\bigotimes_{x\in\mathfrak{X}\setminus\{1,-1\}} V(x)$$

и покажем, что, во-первых, представление $V_0\,|\,\mathcal{G}_0$ неприводимо, и, во-вторых, представление V_1 (которое, очевидно, тривиально на нормальной подгруппе $\mathcal{G}_0$) также неприводимо. Отсюда будет следовать неприводимость представления $V_{\mathcal{M}}$.

Пусть V_ε обозначает произведение представлений $V(x)$, где x пробегает конечное множество Δ_ε. Группу $\mathcal{G}_0$ можно представить как индуктивный предел групп $\mathcal{G}_\varepsilon$, где $\varepsilon\to 0$, а ее представление V_0 – как индуктивный предел представлений V_ε групп $\mathcal{G}_\varepsilon$. Каждое из V_ε неприводимо, будучи внешним тензорным произведением нескольких неприводимых представлений вида $W(k,\pi)$ или $S(k,\pi)$ групп $SU(\infty,\infty)$ или $SU(2\infty)$ (здесь используются леммы 4.2.9 и 4.4.4). Значит, V_ε также неприводимо.

Займемся теперь представлением V_1. Оно является фактически представлением подгруппы в $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$, которая есть образ группы $\mathcal{G}$ при ее отображении $a_1\times a_{-1}$. Как видно из построения a_1 и a_{-1} в 4.5.17, пункт г), a_1 зависит только от значения матричнозначной функции $f \in \mathscr{G}$ в точке $x=1$, а также некоторых производных в этой же точке, тогда как a_{-1} определяется аналогично по отношению к точке $x=-1$. Отсюда и из явного вида морфизмов α_1 и α_{-1} легко получить, что подгруппа в $\mathscr{L}\times\mathscr{L}$, о которой идет речь, содержит $[\mathscr{L},\mathscr{L}]\times[\mathscr{L},\mathscr{L}]$.

Поскольку любое представление вида $U(\varkappa,\lambda,\mu)$ группы $\mathscr{L}$ остается неприводимым при сужении на $[\mathscr{L},\mathscr{L}]$ (см. 4.4.8), мы получаем неприводимость представления V_1 .

Итак, неприводимость представления $V_{\mathcal{M}}$ группы $G^*(\Delta)^\sim$ доказана.

д) Покажем, что представление $T_{\mathcal{M}}$ группы $G^\sim$ неприводимо. Рассмотрим вложение $\tilde{t}: G^\sim \to G^*(\Delta)^\sim$, а также вложение $K^* \to G^*(\Delta)^\sim$; оба они были определены в лемме-определении 4.5.I7. Из построения представления $V_{\mathcal{M}}$ группы $G^*(\Delta)^\sim$ видно, что его композиция с вложением $\tilde{t}$ совпадает с представлением $T_{\mathcal{M}}$, а его сужение на K^* совпадает с голоморфным расширением ручного представления $T_{\mathcal{M}}\,|\,K$. С другой стороны, из леммы 4.5.I6 вытекает, что образы групп $G^\sim$ и K^* порождают плотную подгруппу в группе $G^*(\Delta)^\sim$. Сужение на эту подгруппу представления $V_{\mathcal{M}}$, неприводимость которого только что была доказана, разумеется, также неприводимо. А теперь остается сослаться на общий принцип раздела 4.I.5.

е) Докажем теперь второе утверждение теоремы: $T_{\mathcal{M}}$ и $T_{\mathcal{N}}$ не эквивалентны, если $\mathcal{M}\neq\mathcal{N}$. Идея здесь, по существу, та же,что в случае группы $GL(\infty,\mathbb{C})$, см. пункт в) доказательства теоремы 4.3.4. А именно, можно подобрать компакт Δ с нужными свойствами так, чтобы сделать $V_{\mathcal{M}}$ и $V_{\mathcal{N}}$ представлениями одной и той же группы. Теперь все редуцируется к доказательству неэквивалентности представлений $V_{\mathcal{M}}$ и $V_{\mathcal{N}}$ группы $\mathcal{G}=G^*(\Delta)^\sim$.

Чтобы проверить это, достаточно лишь слегка модифицировать рассуждение пункта г). А именно, мы записываем $V_{\mathcal{M}}$ и $V_{\mathcal{N}}$ в виде $V_1 \times V_0$ и $\widetilde{V}_1 \times \widetilde{V}_0$ соответственно; здесь V_0 и $\widetilde{V}_0$ суть фактически неприводимые представления нормального делителя $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$, а V_1 и $\widetilde{V}_1$, наоборот, тривиальны на $\mathcal{G}_0$, см. пункт г).

Из предположения $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ и определения всех этих представлений легко вывести следующее: либо V_0 и $\widetilde{V}_0$ не эквивалентны; либо, если это не так, V_1 и $\widetilde{V}_1$ не эквивалентны.

Нам надо показать, что всякий оператор A, сплетающий представления $V_{\mathcal{M}}$ и $V_{\mathcal{N}}$, равен нулю. Заметим, что A сплетает представления $V_{\mathcal{M}} \mid \mathcal{G}_0$ и $V_{\mathcal{N}} \mid \mathcal{G}_0$, которые кратны V_0 и $\widetilde{V}_0$ соответственно. В первом варианте, когда V_0 и $\widetilde{V}_0$ не эквивалентны, отсюда сразу следует $A=0$. Во втором варианте, когда $V_0 \sim \widetilde{V}_0$, мы получаем, что A представим в виде $A_1 \otimes 1$, где A_1 сплетает V_1 и $\widetilde{V}_1$. Но поскольку в этом варианте V_1 и $\widetilde{V}_1$ не эквивалентны, мы получаем $A_1 = 0$, откуда снова $A=0$.

Теорема полностью доказана.

4.5.I9. ЗАМЕЧАНИЕ. Вернемся к нормализованным характерам $\sigma_\chi \chi$ группы $U(\infty)^\sim$, обсуждавшимся в начале этого параграфа. Им отвечают фактор-представления Π типа II_1 группы $U(\infty)^\sim$, допускающие непрерывное продолжение на топологическую группу $U(\infty)_2^\sim$. С другой стороны, теорема 4.5.I4 доставляет, в частности, семейство $\{T^\cdot\}$ сферических представлений пары $(G^\sim, K)$. Между этими объектами имеется биективное соответствие $\Pi \leftrightarrow T$, которое определяется путем тривиальной модификации общей конструкции раздела 4.I.4.

Подробнее, мы рассматриваем, с одной стороны, вложение $U(\infty)^{\sim} \to G^{\sim}$, а с другой стороны, проекцию $\rho : G^{\sim} \to U(\infty)^{\sim}$. Первое имеет вид $\langle u, is\rangle \longmapsto \langle u, 1, is\rangle$, вторая имеет вид

$$\rho : \langle g_1, g_2, is\rangle \longmapsto \langle g_1 g_2^{-1}, is\rangle .$$

Фактор-представление Π является тогда сужением сферического представления T на подгруппу $U(\infty)^{\sim}$, а сферическая функция φ совпадает с поднятием $(\sigma_\chi \chi)\circ\rho$ нормализованного характера. Справедливость этого утверждения следует из сопоставления формул для сферических функций, приведенных в 4.5.8 с описанием характеров χ и нормализованных характеров $\sigma_\chi \chi$, см. 4.5.I-4.5.3, а также замечание 4.5.9.

Обсуждаемое соответствие $\Pi \leftrightarrow T$ вместе с теоремой 4.5.I4 доставляет явное описание гильбертова пространства $H(\Pi)$, в котором реализуется Π. Это является новым результатом. Ранее (см. [I26, 8]) $H(\Pi)$ определялось как циклическая оболочка выделенного вектора, а точное описание этой циклической оболочки удавалось получить лишь при дополнительных упрощающих предположениях относительно параметров характера, см. следствие теоремы 6 в [8].

4.5.20. Рассмотрим группу

$$\overline{G}_2 = \{\langle g_1, g_2\rangle \in \overline{U}(\infty)\times\overline{U}(\infty) : g_1 g_2^{-1} \in U(\infty)_2\}.$$

Она содержит в качестве подгруппы $\overline{K} = \overline{U}(\infty)$ (которая выделяется условием $g_1 = g_2$), а фактор-пространство $\overline{G}_2/\overline{K}$ естественно отождествляется с $U(\infty)_2$. Наделим $\overline{G}_2$ соответствующей топологией. Точнее, речь идет о топологии, индуцированной биекцией

$\langle g_1, g_2\rangle \mapsto \langle g_1, g_1 g_2^{-1}\rangle$ множества $\bar{G}_2$ на топологическое пространство $\bar{U}(\infty) \times U(\infty)_2$. Нетрудно проверить, что эта топология согласована с групповой структурой в $\bar{G}_2$ и что G является ее плотной подгрупой.

Поскольку топологическое пространство $\bar{K}$ стягиваемо (теорема Диксмье-Дуади [76]), проекция $\bar{G}_2 \to U(\infty)_2$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Стало быть, $\bar{G}_2$ обладает $\mathbb{Z}$-листной универсальной накрывающей, которая будет обозначаться $\bar{G}_2^{\sim}$ Ясно, что $G^{\sim}$ является плотной подгрупой в $\bar{G}_2^{\sim}$.

Следующий результат параллелен теореме 4.3.8:

ТЕОРЕМА. Все построенные выше неприводимые допустимые представления $T_{\mathcal{M}}$ пары $(G^{\sim}, K)$ допускают непрерывное продолжение на топологическую группу $\bar{G}_2^{\sim}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Предположим вначале, что $T_{\mathcal{M}}$ является сферическим представлением. Тогда достаточно проверить, что его сферическая функция φ допускает непрерывное продолжение на $\bar{G}_2^{\sim}$. Согласно замечанию 4.5.19, $\varphi = (\sigma_\chi \chi) \circ \rho$. С другой стороны, проекция $\rho : G^{\sim} \to U^{\sim}(\infty)$ продолжается до непрерывной проекции $\bar{G}_2^{\sim} \to U(\infty)_2^{\sim}$. Поэтому наше утверждение вытекает из теоремы 4.5.2 о существовании непрерывного продолжения на $U(\infty)_2^{\sim}$ у нормализованного характера $\sigma_\chi \chi$.

б) Рассмотрим теперь общий случай: $T_{\mathcal{M}}$ есть тензорное произведение по $x \in \mathfrak{X}$ представлений $T(x)$, см. 4.5.13. Почти все эти $T(x)$ суть сферические представления. В силу результата пункта а) мы можем отделить их. Тогда у нас останется лишь конечное множество перемножаемых представлений $T(x)$. Стало быть, можно считать, что $\mathfrak{X}$ сводится к единственной точке $\{x\}$. Если $x = \pm 1$, то $T(x)$ имеет вид $T_{\pm 1}(\varkappa, \lambda, \mu)$, т.е. совпадает с тензорным произведением сферического представления $T_{\pm 1}(\varkappa, 0, 0)$ на ручное представление (последнее есть либо $\rho_\lambda \times \bar{\rho}_\mu$, либо $\rho_\mu \times \bar{\rho}_\lambda$, в зависимости от знака перед единицей). В этой случае наличие непрерывного продолжения очевидно, ибо ручные представления непрерывны и в более слабой топологии.

в) В итоге осталось разобрать случай, когда T_μ имеет вид $T_x(k, \pi)$, где $x = \pm 1$. А здесь можно применить тот же прием редукции к сферическим представлениям, который был использован в доказательстве теоремы 4.3.8.

4.5.2I. ЗАМЕЧАНИЕ (о разложении тензорных произведений). Так же, как в ситуации раздела 4.3.9, разложение тензорных произведений $T_{\mu'} \otimes T_{\mu''}$ непосредственно сводится к разложению представлений вида

$$T_x(k', \pi') \otimes T_x(k'', \pi''), \quad x \neq \pm 1 \tag{I}$$

$$T_x(\varkappa', \lambda', \mu') \otimes T_x(\varkappa'', \lambda'', \mu''), \quad x = \pm 1. \tag{2}$$

Разложение представлений (I) повторяет разложение соответствующих голоморфных представлений

$$W(k', \pi') \otimes W(k'', \pi'') \tag{3}$$

$$S(k', \pi') \otimes S(k'', \pi''). \tag{4}$$

Для представлений (3) оно указано в теореме 4.2.II, для представлений (4) оно устроено в точности так же.

Далее, разложение представлений (2) повторяет разложение соответствующих голоморфных представлений

$$U(\varkappa', \lambda', \mu') \otimes U(\varkappa'', \lambda'', \mu'') \tag{5}$$

группы $\mathcal{L}$. Поскольку

$$U(\varkappa, \lambda, \mu) = U(\varkappa, 0, 0) \otimes (\rho_\lambda \times \rho_\mu),$$

все сводится к разложению представлений вида (5) при дополнительном условии $\lambda' = \mu' = \lambda'' = \mu'' = 0$, которое нетрудно получить, исходя из реализации представлений $U(\varkappa, 0, 0)$. Ответ выглядит так:

$$U(\varkappa', 0, 0) \otimes U(\varkappa'', 0, 0) \sim \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}} U(\varkappa' + \varkappa'', \lambda, \lambda).$$

Таблица I

(G, K) -пары конечного ранга $\rho = 1, 2, \ldots$.

G, некомпактный тип	G, компактный тип	K
$SO_0(\rho, \infty)$	$SO(\rho + \infty)$	$SO(\rho) \times SO(\infty)$
$U(\rho, \infty)$	$U(\rho + \infty)$	$U(\rho) \times U(\infty)$
$Sp(\rho, \infty)$	$Sp(\rho + \infty)$	$Sp(\rho) \times Sp(\infty)$

Таблица 2

(G,K) -пары бесконечного ранга

G, некомпактный тип	G, компактный тип	K
$GL(\infty,\mathbb{R})$	$U(\infty)$	$O(\infty)$
$GL(\infty,\mathbb{C})$	$U(\infty)\times U(\infty)$	$U(\infty)$
$GL(\infty,\mathbb{H})$	$U(2\infty)$	$Sp(\infty)$
$SO_0(\infty,\infty)$	$SO(2\infty)$	$SO(\infty)\times SO(\infty)$
$Sp(\infty,\mathbb{R})$	$Sp(\infty)$	$U(\infty)$
$SO(\infty,\mathbb{C})$	$SO(\infty)\times SO(\infty)$	$SO(\infty)$
$Sp(\infty,\mathbb{C})$	$Sp(\infty)\times Sp(\infty)$	$Sp(\infty)$
$U(\infty,\infty)$	$U(2\infty)$	$U(\infty)\times U(\infty)$
$Sp(\infty,\infty)$	$Sp(2\infty)$	$Sp(\infty)\times Sp(\infty)$
$SO^*(2\infty)$	$SO(2\infty)$	$U(\infty)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции II. - М.: Наука, 1974.
2. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. - М.: Наука, 1965.
3. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. - М.: Наука, 1983.
4. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. I - III. - М.: Мир, 1976.
5. Вейль Г. Классические группы. Их инварианты и представления. - М.: ИЛ, 1947.
6. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы // ДАН СССР. - 1981. - Т. 257, № 5. - С. 1037-1040.
7. Вершик А.М., Керов С.В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы // Функцион. анализ и его прил. - 1981. - Т. 15, № 4. - С. 15-27.
8. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы // ДАН СССР. - 1982. - Т. 267, № 2.- С. 272-276.
9. Вершик А.М. Добавление редактора перевода. В кн.: Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. - М.: Мир, 1982. - С. 191-210.
10. Вершик А.М., Керов С.В. К-функтор (группа Гротендика) бесконечной симметрической группы // Зап. научн.семин. ЛОМИ.- 1983. - Т. 123. - С. 126-151.
11. Вершик А.М., Керов С.В. Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и К -функтор. - В кн.: Совр. проблемы матем. Нов. достиж. Т. 26. - М.: ВИНИТИ, 1985. - С. 3-56.

I2. Гельфанд И.М. Сферические функции на симметрических пространствах // ДАН СССР. - I950. - Т. 70, № I. - С. 5-8.

I3. Гельфанд И.М., Пономарев В.А. Категория модулей Хариш-Чандры над алгеброй Ли группы Лоренца // ДАН СССР. - I967. - Т. I76. - С. 243-246.

I4. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. Конечномерные представления группы унимодулярных матриц // ДАН СССР. - I950. - Т. 7I, № 5. - С. 825-828.

I5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. - М.: Наука, I965.

I6. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. - М.: Мир, I978.

I7. Дринфельд В.Г. Квантовые группы // Зап. научн. семин. ЛОМИ. - I986. - Т. I55. - С. I8-49.

I8. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. - М.: Наука, I970.

I9. Исмагилов Р.С. О линейных представлениях групп матриц с элементами из нормированного поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. - I969. - Т. 33, № 6, - С. I296-I323.

20. Исмагилов Р.С. Сферические функции над нормированным полем, поле вычетов которого бесконечно.// Функцион. анализ и его прил. - I970. - Т. 4, № I. - С. 42-5I.

2I. Исмагилов Р.С. Бесконечномерные группы и их представления. - В кн.: Proc. Intern. Congr. Math. (August 16-24, 1983, Warszawa). Warszawa, 1985. p. 861-875.

22. Картье П. Введение в теорию многопараметрического броуновского движения // Математика (сб. переводов). - I974. - Т. I8, № 2. - С. I62-I75.

23. Кириллов А.А. Представления бесконечномерной унитарной группы // ДАН СССР. - 1973. - Т. 212, № 2. - С. 288-290.

24. Кириллов А.А. Унитарные представления группы диффеоморфизмов и некоторых ее подгрупп. - Препринт/ИПМ. - М., 1974. - № 82. - 40 с.

25. Коломыцев В.И., Самойленко Ю.С. О неприводимых представлениях индуктивных пределов групп // Укр. матем. ж. - 1977. - Т. 29. - С. 526-531.

26. Крейн М.Г. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах I // Укр. матем. ж. - 1949. -Т. I, № 4. - С. 64-98.

27. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. - М.: Наука, 1967.

28. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. - М.: Наука, 1972.

29. Ленг С. $SL_2(\mathbb{R})$ - М.: Мир, 1977.

30. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. - М.: Мир, 1985.

31. Малышев В.А., Минлос Р.А. Гиббсовские случайные поля. - М.: Наука, 1985.

32. Нейман Дж. фон. О бесконечных тензорных произведениях. - В кн.: Нейман Дж. фон. Избранные труды по функциональному анализу. - М.: Наука, 1967. - Т. I. - С. 202-276.

33. Неретин Ю.А. Бозонные представления группы диффеоморфизмов окружности // ДАН СССР. -1983. - Т. 272, № 3. - С. 528-531.

34. Неретин Ю.А. Унитарные представления группы диффеоморфизмов p-адической проективной прямой // Функцион. анализ и его прил. - 1984. - Т. 18, № 4. - С. 92-93.

35. Неретин Ю.А. О дискретных вхождениях представлений дополнительной серии в тензорное произведение унитарных представлений

Функцион. анализ и его прил. - 1986. - Т.20, № 1.- С. 79-80.

36. Неретин Ю.А. Почти инвариантные структуры и конструкции унитарных представлений группы диффеоморфизмов окружности // ДАН СССР. - 1987. - Т. 294, № 1. - С. 37-41.

37. Неретин Ю.А. О комплексной полугруппе, содержащей группу диффеоморфизмов окружности // Функцион. анализ и его прил. - 1987. - Т. 21, № 2. - С. 82-83.

38. Неретин Ю.А. Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр. В кн.: Совр. проблемы матем. Фундамент. напр. Т.22. - М.: ВИНИТИ, 1988. - С. 163-224.

39. Неретин Ю.А. Голоморфные продолжения представлений группы диффеоморфизмов окружности // Матем. сб. - 1989. - Т. 180, № 5. - С. 635-657.

40. Нессонов Н.И. Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы // Матем. сб. - 1986. - Т. 130, № 1. - С. 131-150.

41. Ольшанский Г.И. Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений // ДАН СССР. - 1978. - Т. 238, № 6. - С. 1295-1298.

42. Ольшанский Г.И. Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений // Функцион. анализ и его прил. - 1978. - Т. 12, № 3. - С. 32-44.

43. Ольшанский Г.И. Конструкция унитарных представлений бесконечномерных классических групп // ДАН СССР. - 1980. - Т.250, № 2. - С. 284-288.

44. Ольшанский Г.И. Описание унитарных представлений со старшим весом для групп $U(p,q)^{\sim}$ // Функцион. анализ и его прил. -

1980. - Т. 14, № 3. - С. 32-44.

45. Ольшанский Г.И. Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфная дискретная серия // Функцион. анализ и его прил. - 1981. - Т. 15, № 4. - С. 53-66.

46. Ольшанский Г.И. Сферические функции и характеры на группе $U(\infty)^{X}$ // Успехи матем. наук. - 1982. - Т. 37, № 2. - С. 217-218.

47. Ольшанский Г.И. Комплексные полугруппы Ли, обобщенные пространства Харди и программа Гельфанда - Гиндикина. - В кн.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры. - Ярославль: ЯГУ, 1982. - С. 85-98.

48. Ольшанский Г.И. Унитарные представления бесконечномерных пар (G,K) и формализм Р.Хау // ДАН СССР. - 1983. - Т. 269, № 1. - С. 33-36.

49. Ольшанский Г.И. Бесконечномерные классические группы конечного $\mathbb{R}$-ранга: классификация представлений и асимптотическая теория // Функцион. анализ и его прил. - 1984, - Т. 18, № 1. - С. 28-42.

50. Ольшанский Г.И. Унитарные представления группы $SO_0(\infty,\infty)$ как пределы унитарных представлений групп $SO_0(n,\infty)$ при $n\to\infty$ // Функцион. анализ и его прил. - 1986. - Т. 20, № 4. - С. 46-57.

51. Ольшанский Г.И. Янгианы и универсальные обертывающие алгебры // Зап. научн. семин. ЛОМИ. -1987. -Т.164. - С. 142-150.

52. Ольшанский Г.И. Расширение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ для бесконечномерных классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и янгианы $Y(\mathfrak{gl}(m))$ // ДАН СССР. - 1987. - Т. 297, № 5. - С. 1050-1054.

53. Ольшанский Г.И. Компактификация бесконечномерных групп. - В кн.: XII школа по теории операторов. Тезисы докладов. -

Тамбов, 1987. - С. 31.

54. Ольшанский Г.И. Детерминизм случайных полей Леви и унитарные представления бесконечномерных групп. - [illegible] // Успехи матем. наук. - 1988. - Т. 43, № 2, - С. 151-152.

55. Ольшанский Г.И. Метод голоморфных расширений в теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп //Функцион. анализ и его прил. -1988. -Т.22, № 4, - С. 23-37.

56. Ольшанский Г.И. Неприводимые унитарные представления групп $U(p,q)$, выдерживающие предельный переход при $q \to \infty$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. - 1989. - Т.172. - С. 114-120.

57. Ольшанский Г.И. Унитарные представления (G,K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ // Алгебра и анализ. - 1989. - Т. 1, № 4. - С. 178-209.

58. Потапов В.П. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц //Труды Моск. матем.общ. - 1955. - Т. 4. -С. 125-236.

59. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. - М.: Мир, 1979.

60. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга // Успехи матем. наук. - 1979. - Т. 34, № 5. - С. 13-63.

61. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Операторы Казимира в модулях над алгеброй Вирасоро //ДАН СССР - 1983. - Т.269. -№ 5. -С. 1057-1060.

62. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. - М.: Мир, 1968.

63. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964.

64. Чередник И.В. О q-аналогах базисов Гельфанда-Цетлина //Функцион. анализ и его прил. - 1988. Т. 22, № 1. - С. 89-90.

65. Шерешевский И.А. Квантование на бесконечномерных эрмитовых симметрических пространствах //Вестн. МГУ. - 1977, №1.С.28-36.

66. Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part I // Comm.Pure Appl. Math. - 1961. - V.14. - P.187-214.

67. Boyer R.P. Representation theory of the Hilbert-Lie group $U(H)_2$ // Duke Math.J. - 1980. - V.47, N 2. - P.325-344.

68. Boyer R.P. Infinite traces of AF-algebras and characters of $U(\infty)$ // J. Operator Theory. - 1983. - V.9, N 2. - P.205-236.

69. Boyer R.P. Characters of the infinite symplectic group // J.Funct.Anal. - 1987. - V.70. - P.357-387.

70. Boyer R.P. Representation theory of $U_1(H)$ // Proc.Amer. Math.Soc. - 1988. - V.103, N 1. - P.97-104.

71. Boyer R.P. Representation theory of $U_1(H)$ in symmetric tensors // J.Funct.Anal. - 1988. - V.78, N 1. - P.13-23.

72. Carey A.L. Projective representations of the Hilbert Lie group $U(H)_2$ via quasifree states on the CAR algebra // J.Funct.Anal. - 1984. - V.55, N 3. - P.277-296.

73. Cherednik I.V. A new interpretation of Gelfand-Tzetlin bases // Duke Math.J. - 1986. - V.54, N 2. - P.563-577.

74. Davidson M.G. The harmonic representation of $U(p,q)$ and its connection with the generalized unit disk // Pac. J.Math. - 1987. - V.129, N 1. - P.33-55.

75. Dixmier J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien - Paris: Gauthier-Villars, 1969.

76. Dixmier J., Douady A. Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres // Bull.Soc.Math.France. - 1963. - V.91. - P.227-284.

77. Enright T.J., Howe R., Wallach N. A classification of unita-

rizable highest weight modules // Progress in Math. - 1983. - V. 40. - P. 97- 143.

78. Gangolli R., Varadarajan V.S. Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups. - Berlin: Springer, 1988.

79. Godement R. A theory of spherical functions, I // Trans.Amer. Math.Soc. - 1952. - V.73. - P.496-556.

80. Guichardet A. Symmetric Hilbert spaces and related topics. - Berlin: Springer, 1972.

81. Harpe P. de la. Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert spaces. - Berlin: Springer, 1972.

82. Harpe P. de la. Classical groups and classical Lie algebras of operators // Proc.Symp.Pure Math. - 1982. - V.38, Part I. - P.477-513.

83. Howe R. Remarks on classical invariant theory // Trans.Amer. Math.Soc. - 1989. - V.313, Part 2. - P.539-570.

84. Inönü E., Wigner E.P. On the contraction of groups and their representations // Proc.Nat.Ac.Sci.USA. - 1956. - V.39.

85. Kac V.G. Laplace operators of infinite-dimensional Lie algebras and theta functions // Proc.Nat.Ac.Sci.USA. - 1984. - V.81. - P.645-647.

86. Kashiwara M., Vergne M. On the Segal-Shale-Weil representation and harmonic polynomials // Invent.Math. - 1978. - V.44, N 1. - P.1-47.

87. Kerov S.V., Vershik A.M. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson-Schensted-Knuth algorithm // SIAM J.Algebra Discrete Math. - 1986. - V.7. - P.116-124.

88. Kerov S.V., Vershik A.M. Characters, factor representations and K-functor of the infinite symmetric group. - In: Operator algebras and group representations. Vol.2. - N.Y.: Pitman, 1984. - P.23-32.

89. Kirillov A.A. Infinite dimensional groups, their representations, orbits, invariants. - In: Proc.Intern.Congr.of Math. (Helsinki, 1978). Helsinki, 1980. - P.705-708.

90. Kirillov A.N. Reshetikhin N.Yu. The Yangians, Bethe ansatz and combinatorics // Lett.Math.Phys. - 1986. - V.12, N 3. - P.199-208.

91. Klimyk A.V., Gavrilyk A.M. The representations of the groups $U(n,1)$ and $SO_0(n,1)$. Preprint ITP-76-39E. - Kiev: Institute of Theor.Phys., 1976.

92. Knapp A.W., Speh B. The role of basis cases in classification theorems about unitary representations applicable to $SU(N,2)$ // Lect.Notes Math. - 1983. - V.1020. - P.119-160.

93. Kôno N. Spherical functions connected with representations of the infinite dimensional motion group // J.Math.Kyoto Univ. - 1966. - V.6, N 1. - P.61-83.

94. Kosyak A.V. Extension of unitary representations of inductive limits of finite dimensional Lie groups // Repts Math.Phys. - 1988. - V.26, N 2. - P.285-302.

95. Lieberman A. The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups // Trans.Amer.Math.Soc. - 1972. - V.164. - P.189-198.

96. Lüscher M., Mack G. Global conformal invariance in quantum field theory // Comm.Math.Phys. - 1975. - V.41. - P.203-234.

97. Macdonald I.G. Commuting differential operators and zonal spherical functions // Lect.Notes Math. - 1987. - V.1271. - P.189-200.

98. Matsushima H., Okamoto K., Sakurai T. On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite-dimensional rotation group I // Hiroshima Math.J. - 1981. - V.11. - P.181-193.

99. Nelson E. Analytic Vectors // Ann.Math. - 1959. - V.70. - P.572-615.

100. Okamoto K., Sakurai T. On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite-dimensional rotation group II // Hiroshima Math.J. - 1982. - V.12. - P. 385-397.

101. Okamoto K., Sakurai T. An analogue of the Peter-Weyl theorem for the infinite-dimensional unitary group // Hiroshima Math.J. - 1982. - V.12. - P. 529-541.

102. Olshansky G.I. Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach. - In: Representations of Lie groups and Lie algebras. - Budapest: Akad. Kiado, 1985. - P.181-197.

103. Orihara A. Hermite polynomials and infinite dimensional motion group // J.Math.Kyoto Univ. - 1966. - V.6, N 1. - P.1-12.

104. Pickrell D. Decomposition of regular representations for $U(H)_\infty$ // Pac.J.Math. - 1987. - V.128, N 2. - P.319-332.

105. Pickrell D. Measures on infinite dimensional Grassmann manifold // J.Funct.Anal. - 1987. - V.70, N 2. - P.323-356.

106. Pickrell D. The separable representations of $U(H)$ //

Proc.Amer.Math.Soc. - 1988. - V.102, N 2. - P.416-420.

107. Pickrell D. Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces. Preprint. - Tucson: Univ. of Arizona, 1988.

108. Pickrell D. On $U(\infty)$ invariant measures. Preprint. - New Haven: Yale University, 1986.

109. Schlichtkrull H. A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semi-simple Lie groups // Invent.Math. - 1982. - V.68. - P.497-516.

110. Schoenberg I.J. Metric spaces and completely monotonic functions // Ann.Math. - 1938. - V.39, N 4. - P.811-841.

111. Schoenberg I.J. Metric spaces and positive definite functions // Trans.Amer.Math.Soc. - 1938. - V.44. - P.522-536.

112. Segal I.E. The structure of a class of representations of a unitary group on a Hilbert space // Proc.Amer.Math.Soc. - 1958. - V.88, N 1. - P.197-203.

113. Segal I.E. Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field // Illinois J.Math. - 1962. - V.6. - P.500-523.

114. Segal I.E. The complex-wave representation of the free Boson fields // Adv.Math.Syppl.Studies. - 1978. - V.3. - P.321-343.

115. Shale D. Linear symmetries of free boson fields // Trans. Amer.Math.Soc. - 1962. - V.103. - P.149-167.

116. Shale D., Stinespring W.F. States of the Clifford algebra // Ann.Math. - 1964. - V.80, N 2. - P.365-381.

117. Shimomura H. On the construction of invariant measures over the orthogonal group on the Hilbert space by the method of

Cayley transformation // Publ.RIMS Kyoto Univ.Ser.A. - 1975. - V.10, N 2. - P.413-424.

118. Stratila S., Voiculescu D. Sur les representations factorielles infinies de $U(\infty)$ // Comptes Rendus Acad.Sci.Paris. Sér.A. - 1975. - V.280. - P.555-558.

119. Stratila S., Voiculescu D. Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$. - Berlin: Springer-Verlag, 1975.

120. Stratila S., Voiculescu D. On a class of KMS states for the unitary group $U(\infty)$ // Math.Ann. - 1978. - V.235. - P.87-110.

121. Stratila S., Voiculescu D. A survey on representations of the unitary group $U(\infty)$. - In: Spectral theory. Banach Center Publ. Vol.8. - Warsaw: PWN - Polish Sci.Publ., 1982. - P.416-434.

122. Thoma E. Die unzerlegfaren, positive-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe // Math.Zeitschr. - 1964. - V.85. - P.40-61.

123. Thoma E. Characters of infinite groups. - In: Operator algebras and group representations. Vol.2. - N.Y.: Pitman, 1984. - P.211-216.

124. Umemura Y., Kôno N. Infinite dimensional Laplacian and spherical harmonics // Publ.RIMS. Kyoto Univ.Ser.A. - 1966. - V.1, N 2. - P.163-186.

125. Voiculescu D. Sur les représentations factorielles finies de $U(\infty)$ et autres groupes semblables // Comptes Rendus Acad.Sci.Paris. Sér.A. - 1974. - V.279. - P.945-946.

126. Voiculescu D. - Representations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$ // J.Math.pures et appl. - 1976. - V.55, N 1. -

P.1-20.

127. Warner G. Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. Vols. 1, 2. - Berlin: Springer-Verlag, 1972.

128. Yamasaki Y. Invariant measure of the infinite dimensional ration group // Publ. RIMS Kyoto Univ. - 1972/73. - V.8, N 1. - P.131-140.

129. Yamasaki Y. Projective limit of Haar measures on $O(n)$ // Publ. RIMS. Kyoto Univ. - V.8, N 1. - P.141-149.

130. Yamasaki Y. Kolmogorov's extension theorem for infinite measure // Publ. RIMS. Kyoto Univ. - 1975. - V.10. - P. 381-411.