Алгебра Вейля

Зафиксируем поле k характеристики 0.

Определение. Алгебра Вейля с 2 образующими есть

$$\mathbb{A} := k\langle p, q\rangle/(pq - qp = 1),$$

где $k\langle p, q\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра с 2 образующими.

В $\mathbb{A}$ вводится фильтрация по степени.

Упражнение. Присоединенная градуированная алгебра $\operatorname{gr}\mathbb{A}$ изоморфна алгебре многочленов $k[x, y]$. Указание: использовать реализацию

$$\mathbb{A} \to \operatorname{End} k[t], \qquad p \to \frac{d}{dt}, \quad q \to t.$$

Упражнение (следствие). Алгебра $\mathbb{A}$ изоморфна алгебре обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.

Упражнение (следствие). Алгебра $\mathbb{A}$ не имеет делителей нуля.

Упражнение. Всякое дифференцирование алгебры $\mathbb{A}$ — внутреннее.

Упражнение. Алгебра $\mathbb{A}$ проста, т.е. не имеет нетривиальных двусторонних идеалов.

Упражнение. Всякий линейный оператор из $\operatorname{End} k[t_1, \dots, t_N]$ можно записать как формальный дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами и возможно бесконечным числом слагаемых.

Пусть $\widetilde{k} \supset k$ — расширение поля k и $\phi : \widetilde{k} \to \widetilde{k}$ — автоморфизм поля $\widetilde{k}$, тривиальный на k. (Например, $\widetilde{k} = k(s)$ (поле рациональных функций) и $\phi : g(s) \mapsto g(as + b)$, где $a, b \in k$, $g \in k[s]$.)

Определение (тело Гильберта). Построим по тройке $(k, \widetilde{k}, \phi)$ новую алгебру F, элементы которой суть формальные степенные ряды

$$f(t) = \sum_{n > -\infty} c_n t^n, \qquad c_n \in \widetilde{k},$$

буква t не коммутирует с коэффициентами, но подчиняется соотношениям

$$tc = \phi(c)t, \qquad c \in \widetilde{k}.$$

Упражнение. F является телом, т.е. алгеброй с делением. Оно называется телом Гильберта.

Упражнение. Пусть $\widetilde{k} = k(s)$, $\phi : g(s) \mapsto g(s+1)$ и F — соответствующее тело Гильберта. Соответствие $p \to t$, $pq \to s$ задает вложение $\mathbb{A} \to F$. Таким образом, алгебра Вейля обладает телом частных.

Определение. Алгебра Вейля с $2n$ образующими получается из свободной алгебры $k\langle p_1, \dots p_n; q_1, \dots, q_n\rangle$ наложением соотношений

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij}1$$

Теорема. $\mathbb{A}_n$ вкладывается в некоторое тело.

Идея доказательства.

1. По полю $\widetilde{k}$ и набору попарно коммутирующих автоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ этого поля строим тело формальных степенных рядов от n переменных $t_1, \dots, t_n$, взаимодействующих с элементами поля $\widetilde{k}$ согласно

$$t_i c = \varphi_i(c) t_i, \qquad c \in \widetilde{k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это делается последовательным применением конструкции Гильберта: сначала тело формальных рядов от t_1, затем формальные ряды от t_2, коэффициенты которых суть элементы предыдущего тела и т. д.

2. Вложение алгебры Вейля в такого рода тело определяется тем, что в качестве $\widetilde{k}$ берется поле рациональных функций от n переменных

$$s_i = p_i q_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

а элементы t_i отождествляются с элементами p_i.

Определение. Нетерово (слева, справа) кольцо — это такое кольцо, в котором всякий (левый или соотв. правый) идеал конечно порожден.

Теорема Гильберта о базисе. Кольцо многочленов над полем нетерово.

Упражнение. Алгебра Вейля $\mathbb{A}_n$ является нетеровой слева и справа.

Идея доказательства: присоединенная алгебра является алгеброй многочленов.

Предложение. Если A — нетерово слева кольцо без делителей нуля, то любые два ненулевых элемента имеют общее левое кратное.

Идея доказательства: см. статью Гельфанда и Кириллова.

Предложение. Пусть A — нетерово слева кольцо без делителей нуля, содержащееся в некотором теле Q. Существует наименьшее подтело в Q, содержащее A, и всякий его элемент можно представить в виде левой дроби $a^{-1}b$, где $a, b \in A$, $a \neq 0$.

Идея доказательства: см. статью Гельфанда и Кириллова.

Определение размерности Гельфанда-Кириллова. См. их статью.

Упражнение. Алгебра Вейля $\mathbb{A}_n$ имеет размерность такую же, как алгебра многочленов от $2n$ переменных, а именно, $2n$.

Следствие. Алгебры Вейля $\mathbb{A}_n$ с различными n попарно не изоморфны.