Группы и алгебры Ли и их представления*

Григорий Иосифович Ольшанский

Содержание

*При обнаружении ошибок в лекциях просьба присылать замечания по e-mail: matushkom@mail.ru и nasta.trofimova@gmail.com

1 Лекция 1

1.1 Основные определения: группа Ли, подгруппа Ли. Примеры.

Начнем с напоминания про гладкие многообразия. Пусть M^n — гладкое многообразие размерности n. Прежде всего это топологическое пространство. Для каждой точки $x \in M^n$ можно говорить о координатной окрестности, это значит, что задано отображение $f : U \to M^n$ из открытой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$, которое непрерывно и не склеивает точки, то есть является гомеоморфизмом на свой образ $f(U)$, и $f(0) = x$. Пусть образы окрестностей U и V пересекаются $f(U) \cap g(V) = W$, тогда между прообразами $f^{-1}(W)$ и $g^{-1}(W)$ существует биекция (в силу гомеоморфизмов). Это биективное соответствие двух кусочков $f^{-1}(W)$ и $g^{-1}(W)$ является диффеоморфизмом, то есть бесконечно гладким отображением в обе стороны.

Определение 1.1. *Группа G называется **группой Ли**, если*

- *G есть гладкое многообразие*
- *отображения произведения $G \times G \to G : g_1 \times g_2 \to (g_1 g_2)$ и взятия обратного элемента $G \to G : g \to g^{-1}$ являются гладкими.*

В частности, группа Ли есть топологическая группа.

Главный пример. Группа $GL(N, \mathbb{R})$ вещественных невырожденных матриц $N \times N$ является открытым подмножеством евклидова пространства $GL(N, \mathbb{R}) \subset Mat(N, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{N^2}$, так как выделяется полиномиальным условием $det(\cdot) \neq 0$. Чтобы убедиться, что это группа Ли, нужно проверить две аксиомы:

1. Операция умножения $(A, B) \to AB$ является гладким оторажением. Это легко увидеть: координатная функция $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} B_{kj}$ есть полиномиальная, а следовательно гладкая.

2. Взятие обратного элемента $A \to A^{-1}$ является гладким отображением. Пользуясь формулами через алгебраические дополнения для обратной матрицы, получаем $A^{-1}_{ij} = \frac{A^{ji}}{detA}$ — рациональная функция, не обращающаяся в ноль, следовательно, это гладкое отображение.

Определение 1.2. *$G' \subset G$ называется **подгруппой Ли** группы Ли G, если*

- *G' является подгруппой группы G*

- *$G' \subset G$ является подмногообразием G.*

Последнее означает, что для любой точки $g \in G'$ найдется такая координатная окрестность U_g, что $G' \cap U_g$ устроено как линейное подпространство.

Утверждение 1.1. *Подгруппа Ли есть группа Ли.*

Для доказательства утверждения потребуется следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть задано гладкое отображение многообразий*

$$\varphi : M \to N.$$

M' и N' — подмногообразия в M и N соответственно, и $\varphi(M') \subset N'$. Тогда индуцированное отображение $\varphi|_{M'}$ является гладким.

Теперь доказательство утверждения становится очевидным, если взять $M = G \times G$ и $N = G$, а $M' = G' \times G'$ и $N' = G'$.

Следующая лемма говорит о том, что свойство "быть подмногообразием"достаточно проверять локально.

Лемма 1.2. *Пусть G— группа Ли, $G' \subset G$ — подгруппа, и существует окрестность единичного элемента $U \ni e$ с таким свойством, что $U \cap G'$ есть подмногообразие, тогда G' есть подмногообразие.*

Доказательство. Для доказательство нам потребуются групповые сдвиги. Правый сдвиг $r_g : G \to G$ и левый сдвиг $l_g : G \to G$ на элемент g определяются следующим образом:

$$r_g : h \to hg, \quad l_g : h \to gh.$$

Для групп Ли сдвиги суть диффеоморфизмы. Рассмотрев сдвиг на элемент $g \in G'$, мы получим, что $l_g(U) \cap G'$ тоже является подмногообразием. ■

Пример 1.1. *Ортогональная группа $O(N)$ является подгруппой Ли в группе Ли $GL(N, \mathbb{R})$.*

Доказательство. Мы знаем, что $O(N)$ является подгруппой, осталось проверить, что это подмногообразие. В силу леммы 1.2 будем проверять это свойство в окрестности единичного элемента. Рассмотрим преобразование Кэли:

$$X \to \frac{1 - X}{1 + X} = g,$$

где $X, g \in Mat(N, \mathbb{R})$. В данном случае все равно, как определять деление на матрицу $1 + X$, так как она коммутирует с $1 - X$, поэтому формально можно записать $g = (1 - X)(1 + X)^{-1} = (1 + X)^{-1}(1 - X)$. Отображение Кэли определено, если матрица $1 + X$ не вырождена. Обратное отображение задается такой же формулой

$$g \to \frac{1-g}{1+g} = X.$$

Мораль: преобразование Кэли дает локальную карту в единице e для $GL(N, \mathbb{R})$. Рассмотрим множество кососимметрических матриц

$$\mathfrak{o}(N) = \{X \in Mat(N, \mathbb{R}) : X^T = -X\}.$$

Это линейное пространство. При преобразовании Кэли $X \in \mathfrak{o}(N)$ переходит в ортогональную матрицу g(т.е. $g^T g = 1$), и наоборот. Преобразование Кэли и обратное к нему определены и устанавливают биективное соответствие между $X \in \mathfrak{o}(N)$ близкими к 0 и $g \in O(N)$ близкими к 1. Тем самым ортогональная группа $O(N)$ в окрестности единицы моделируется линейным пространством $\mathfrak{o}(N)$, то есть локально $O(N)$ является подмногообазием. ■

Пример 1.2. *(Упражнение) Как вложить $GL(N, \mathbb{C}) \to GL(2N, \mathbb{R})$ и увидеть, что это подмногообразие?*

Пример 1.3. *(Упражнение) Группа унитарных матриц $U(N)$ — группа Ли.*

Теорема 1.1. *Пусть G — группа Ли, а $G' \in G$ — замкнутая подгруппа. Тогда G' — это подруппа Ли.*

Доказательство будет для случая $G = GL(N, \mathbb{R})$. Для доказательства нам потребуется понятие нормы матрицы и экспоненциального отображения.

Определение 1.3. *Нормой Гильберта-Шмидта называется*

$$||A||_2 = (trAA^T)^{1/2}, \tag{1}$$

где $A \in Mat(N, \mathbb{R})$.

Условие (1) можно записать $||A||_2^2 = \sum_{i,j} A_{ij}^2$.

Определение 1.4. *Пусть $\mathfrak{g} = Mat(N, \mathbb{R})$. Определим экспоненциальное отбражение* $\exp : \mathfrak{g} \to G$

$$X \to \exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}. \tag{2}$$

Полезно проверить, что это отображение является гладким. Существует и обратное отображение:

$$\log(1+Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}Y^n}{n}.$$

Лемма 1.3. *Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$. Тогда для малого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ верно следующее равенство*

$$\exp(\varepsilon X)\exp(\varepsilon Y) = \exp(\varepsilon(X+Y)) + O(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Доказательство. Так как ε мало, распишем левую часть 3:

$$(1+\varepsilon X + O(\varepsilon^2))(1+\varepsilon Y + O(\varepsilon^2)) = 1 + \varepsilon(X+Y) + O(\varepsilon^2).$$

Прологарифмируем полученное равенство:

$$\log(\exp(\varepsilon X)\exp(\varepsilon Y)) = \varepsilon(X+Y) + O(\varepsilon^2),$$

что и доказывает 3. ∎

Следствие 1.1. *Пусть $G = GL(N, \mathbb{R})$ — группа Ли, и пусть касательное пространство $\mathfrak{g} = Mat(N, \mathbb{R})$ является прямой суммой подпространств*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''.$$

Тогда локально $G = \exp(\mathfrak{g}')\exp(\mathfrak{g}'')$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'' \to G$, которое переводит $(X, Y) \to \exp(X)\exp(Y)$. Дифференциал этого отображения является невырожденным по лемме 1.3, поэтому в силу теоремы о неявной функции отображение локально является диффеоморфизмом. ∎

Доказательство. (теоремы 1.1)

Пусть снова $G = GL(N, \mathbb{R})$, $G' \subset G$ — замкнутая подгруппа и $\mathfrak{g} = Mat(N, \mathbb{R})$. Определим

$$\mathfrak{g}' := \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in G', \forall t \geq 0\}.$$

1. $\mathfrak{g}'$ — конус.

   Это означает, что $\mathfrak{g}'$ выдерживает гомотетию, более того выдерживает отражения: $\mathfrak{g}' = -\mathfrak{g}'$ (взятие обратого элемента в G').

2. $\mathfrak{g}'$ есть линейное подпространство.

   Нужно доказать, что если $X, Y \in \mathfrak{g}'$, то $X + Y \in \mathfrak{g}'$, а для этого достаточно показать, что $\exp(X+Y) \in G'$.

   Верен следующий факт

$$\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{n}X\right)\exp\left(\frac{1}{n}Y\right)\right)^n. \qquad (4)$$

   Для коммутирующих X, Y это утверждение очевидно. Для доказательства факта пользуемся леммой 1.3:

$$\exp\left(\frac{1}{n}X\right)\exp\left(\frac{1}{n}Y\right) = \exp\left(\frac{1}{n}(X+Y) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\left(X+Y+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

   Теперь возводим в n-ю степень и получаем (4).

   В правой части (4) написан элемент принадлежащий G', следовательно $\exp(X+Y) \in G'$, что и требовалось.

3. Локально $G' = \exp(\mathfrak{g}')$.

   Предположим противное, тогда существует последовательность $g_n \subset G'$, $g_n \to e$, причем $g_n = \exp(x_n)$, где $x_n \notin \mathfrak{g}'$. Сначала воспользуемся следствием 1.1: рассмотрим дополнение $\mathfrak{g}''$ к $\mathfrak{g}'$, так что касательное пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$. Тогда локально $G = \exp(\mathfrak{g}')\exp(\mathfrak{g}'')$ и $g_n = g'_n g''_n$. Подкрутим нашу последовательность $\widetilde{g_n} = {g'}_n^{-1} g_n$. Последовательность $\widetilde{g_n}$ лежит в транверсальном подпространстве $\exp(\mathfrak{g}'')$ и $\widetilde{g_n} \to 0$. Тем самым мы провели редукцию к ситуации, когда $g_n \in \exp(\mathfrak{g}'')$.

4. Наконец покажем, что существует $X \in \mathfrak{g}''$ такой, что $\exp(tX) \in G'$, это и приведет нас к противоречию.

   Существует последовательность $x_n \in \mathfrak{g}''$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ и $\exp(x_n) \in G'$, также верно, что $\exp(mx_n) \in G'$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Обозначим ненулевую норму $\varepsilon_n := ||x_n||$, тогда $||mx_n|| = m\varepsilon_n$. Возьмем $m_n = [1/\varepsilon_n]$, тогда $||m_n x_n|| \approx 1$. “Раздуем” последовательность $\widetilde{x_n} := m_n x_n$, так что $||\widetilde{x_n}|| \approx 1$. Мы можем выбрать из $\widetilde{x_n}$ подпоследовательность, которая сходится к некоторому X. С одной стороны, X лежит в трансверсали $\mathfrak{g}''$, а, с другой стороны, $\exp(tX) \in G'$ в силу замкнутости G'. Получили противоречие.

∎

Определение 1.5. *Группа Ли G — **линейная**, если она изоморфна подгруппе Ли в $GL(N,\mathbb{R})$.*

Следствие 1.2. *Понятие экспоненциального отображения действует и в линейной группе Ли.*

2 Лекция 2

2.1 Координаты первого и второго рода. Однопараметрические подгруппы.

Пусть G — это группа Ли, а $\mathfrak{g} = T_eG$ — касательное пространство в единице.

Определение 2.1. ***Каноническая система координат*** *в единице e (система координат первого рода) — это отображение* $\exp : \mathfrak{g} \to GL(N,\mathbb{R})$.

В прошлой лекции мы научились определять экспоненциальное отображение 1.4 для $G = GL(N,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{g} = Mat(N,\mathbb{R})$, и, как следствие, для линейных групп Ли. Возникает вопрос: как ввести экспоненциальное отображение для произвольной группы Ли?

Пусть $X \in \mathfrak{g}$ — касательный вектор в единице e. Пользуясь левыми сдвигами $l_g : h \to gh$, мы можем разнести этот вектор по всей группе. Таким образом, меняя точку g мы получаем векторное поле, которое левоинвариантно по построению. Применительно к $GL(N,\mathbb{R})$:

$$\frac{d}{dt}\exp(tX) = \exp(tX)X,$$

где в правой части и есть левоинвариантное векторное поле.

Кривые $\exp(tX)$ можно охарактеризовать следующим образом:

Определение 2.2. ***Однопараметрическая подгруппа*** *в группе Ли G — это морфизм $\varphi : \mathbb{R} \to G$.*

Предложение 2.1. *Пусть G — группа Ли, тогда $\varphi : \mathbb{R} \to G$ является однопараметрической подгруппой в G тогда и только тогда, когда* $\varphi = \exp(tX)$ *для некоторого $X \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство. (в случае линейных групп $G = GL(N, \mathbb{R})$)

Если $\varphi = \exp(tX)$, то очевидно, что φ — однопараметричекая подгруппа. Обратно, пусть $\varphi(t)$ — это морфизм. Достаточно доказать это локально: $\varphi(t) = \exp(tX)$ для малых t. Введем отображение $\psi(t) = \log \varphi(t)$. Что означает морфизм:

- непрерывность
- $\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$

Следовательно, $\psi(t_1 + t_2) = \psi(t_1) + \psi(t_2)$. Всякая векторнозначная функция, удовлетворяющая такому уравнению имеет вид $\psi(t) = tX$. ∎

Фиксируем базис $(X_1, \dots X_n)$ в $\mathfrak{g}$, где $n = dim(\mathfrak{g})$. Пусть $(t_1, \dots, t_n)$ — координаты вблизи 0 в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.3. ***Координатами второго рода*** *называется локальная карта в единице, которая задается гладким отображением* $f : \mathbb{R}^n \to G$

$$f(t_1, \dots, t_n) = \exp(t_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n X_n).$$

Легко увидеть, что дифференциал этого отображения в нуле не вырожден: $df : e_i \to X_i$, где $e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0)$.

Определение 2.4. *Линейное предсталение топологической группы H — это непрерывный морфизм $H \to GL(N, \mathbb{R})$ (или $H \to GL(N, \mathbb{C})$).*

Теорема 2.1. *Если $\varphi : H \to G$ — непрерывный гомоморфизм групп Ли, то φ— гладкое отображение.*

Следствие 2.1. *Линейное представление — морфизм в категории групп Ли.*

Доказательство. (теоремы 2.1) Мы уже доказали теорему в случае $H = \mathbb{R}$ в предложении 2.1. Достаточно проверить гладкость вблизи единицы, а затем воспользоваться однородностью групп Ли. Снова выберем базис $(X_1, \dots X_n)$ в $\mathfrak{h} = T_e H$. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\exp(tX_i) \subset H$, ее образ $\varphi(\exp(tX_i))$ является однопараметричекой подгруппой в G, а значит,

$$\varphi(\exp(tX_i)) = \exp(tY_i), \quad Y_i \in \mathfrak{g}.$$

Пусть $(t_1, \dots t_n)$ — локальная система координат второго рода. Тогда получим сквозное отображение:

$$(t_1, \dots t_n) \to \exp(t_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n X_n) \xrightarrow{\varphi} \exp(t_1 Y_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n Y_n),$$

которое является гладким отображением. ∎

2.2 Связные и линейно связные пространства.

Определение 2.5. *Топологическое пространство X называется связным, если не существует представления вида $X = U_1 \sqcup U_2$, где U_1, U_2 - открытые множества.*

Определение 2.6. *Топологическое пространство X называется линейно связным, если любые две точки можно соединить непрерывной кривой.*

Задача 2.1. *В случае многообразий свойства связности и линейно связности эквивалентны.*

Предложение 2.2. *Пусть G — связная группа Ли, тогда G, как абстрактная группа, порождается любой окрестностью единицы $U \ni e$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную окрестность $e \in U \subset G$ и такое множество $\tilde{U} = U \cup U^2 \cup U^3 \ldots$, где

$$U^n = U \cdot U \ldots \cdot U = \{g : g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n, \quad g_i \in U\}.$$

Докажем, что $\tilde{U}$ открыто. Это следует из простой леммы: пусть $A, B \subset G$ — множества, и хотя бы одно из них открыто, тогда $AB = \cup_{b \in B} Ab$ — открытое множество. Покажем, что $\tilde{U}$ — замкнуто. Пусть точка g лежит в замыкании $\tilde{U}$, значит, любая ее окрестность пересекается с $\tilde{U}$. Возьмем в качестве окрестности $gU^{-1} \ni g$, тогда существует такой элемент $u \in U$, что $gu^{-1} \in \tilde{U}$. Тогда $g \in \tilde{U}u$ и, следовательно, $g \in \tilde{U}$. Получаем, что $\tilde{U}$ открыто и замкнуто, а G связна, следовательно, $\tilde{U} = G$. ∎

Теорема 2.2. *Пусть $\varphi : H \to G$ — морфизм групп Ли, H - связна. Отображение φ однозначно задается своим дифференциалом*

$$d\varphi : T_e H = \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{линейно}} \mathfrak{g} = T_e G.$$

Доказательство. Достаточно доказать это "локально", так как в силу предложения 2.2 группа H порождается окрестностью единицы. Рассмотрим каноническую систему координат для H и для G, получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\log} \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{\varphi'} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Тогда локально определяется отображение $\varphi' = \log \circ \varphi \circ \exp$ из условия коммутативности диаграммы. Отображение φ' — гладкое. При отображении φ' параметризованные прямые переходят в параметризованные прямые, а следовательно $\varphi' = d\varphi$. ∎

2.3 Локальный изоморфизм. Локальные группы Ли.

Пример 2.1. *В окрестности единицы группы $SO(N)$ и $O(N)$ неотличимы, хотя $SO(N)$ открыто вложено в $O(N)$.*

Пример 2.2. *(более тонкий) Можно доказать, что как топологическое пространство $SU(2) = S^3$, а $SO(3) = S^3/\mathbb{Z}_2$. Группа $SU(2)$ накрывает $SO(3)$, и снова в окрестности единицы группы неотличимы.*

Определение 2.7. *Группы G_1 и G_2 называются **локально изомоморфными**, если существует биекция f между окрестностями едининых элеменов $U_1 \subset G_1$ и $U_2 \subset G_2$, которое переводит единицу в единицу и сохраняет закон умножения внутри окрестностей:*

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2), \quad x_1, x_2, x_1 x_2 \in U_1,$$

и то же верно для обратного отображения f^{-1}, определенного на окрестности U_2.

Если две группы Ли локально изоморфны, то они имеют одну и ту же алгебру Ли.

Определение 2.8. ***Локальная топологическая группа** G — это объект, в котором для элементов достаточно близких к единице определены умножение, обратный элемент и выполняется ассоциативность.*

Пусть G — связная группа Ли. Универсальное накрытие G обозначим $\tilde{G}$, оно тоже является группой Ли. $\tilde{G}$ — это самая большая связная группа, которая локально изоморфна группе G. Заметим, что может быть много групп Ли локально изоморфных G, однако в классе локально изоморфных связных групп Ли есть единственная (с точностью до изоморфизма) односвязная группа. Локальная группа Ли однозначно определяется своей алгеброй Ли.

3 Лекция 3

3.1 Векторные поля на многообразиях.

Пусть есть многоообразие M и на M действует аддитивная группа вещественных чисел $\mathbb{R}$(задан поток):

$$M \times \mathbb{R} \to M.$$

Будем интерпретировать стандартную координату в $\mathbb{R}$ как время. Если мы начинаем с какой-то точки x_0, то через некоторое время мы окажемся в точке $x(t, x_0)$. Взяв производную в 0, получим касательный вектор $v(x_0) = \dot{x}(0, x_0) \in T_{x_0}M$. Таким же образом, в каждой точке можно построить касательный вектор $v(x)$ и так задать векторное поле. Вектор $v(x)$ гладко зависит от x_0.

Пусть, наоборот, задано векорное поле $v(x_0), x \in M$. Можно ли сказать, что оно определяет действие группы $\mathbb{R}$?

Можно. Если M компакто, то существует действие $M \times \mathbb{R}$ в M. Для этого нужно рассмотреть интегральные кривые так, что производная к каждой точке задает касательный вектор. Если M не компакто, то векторное поле порождает действие локальной группы $\mathbb{R}$.

Пример 3.1. *Пусть $M = \mathbb{R}$, а векторное поле задано $v(x) = (1 + x^2)\frac{d}{dx}$. Тогда, решая дифференциальное уравнение $\dot{x} = (1 + x^2)$, можно получить интегральные кривые $x(t) = tg(t + C)$, где $x(0) = x_0, tg(C) = x_0$. Легко заметить, что за конечное время значение $x(t)$ достигает бесконечности, поэтому решение существует локально, но не глобально.*

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g} = T_eG$. Выберем и зафиксируем вектор $Y \in \mathfrak{g}$. Мы знаем, что существует однопараметрическая подгруппа $\exp(tY) \subset G$. Используем эту однопараметрическую подруппу, чтобы организовать действие. Рассмотрим правые сдвиги на группе:

$$g \to g \exp(tY).$$

Тогда возникнет векторное поле, которое хочется вычислить в канонической локальной карте. Сфокусируемся на группе $GL(N, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl} = Mat(N, \mathbb{R})$. Правые сдвиги на группе в окрестости единицы(то есть при малых сдвигах) переводят точку $g \in G$ в

$$g \exp(tY) = g(1 + \epsilon Y + O(\epsilon^2)) = g + \epsilon g Y + O(\epsilon^2),$$

задавая таким образом сдвиг на gY. Экпоненциальное отображение ставит в соответствие элементу $X \in \mathfrak{g}$ элемент $g \in G$(диффеоморфизм в окрестности 0). Пусть задано векторное поле $v(g)$ в G, мы хотим определить соответствие $\tilde{v}(X) \leftrightarrow v(g)$. Для этого определим линейные операторы на $\mathfrak{g}$:

$$A = A_X : Z \to XZ - ZX = [X, Z]$$

$$L = L_X : Z \to XZ, \quad R = R_X : Z \to ZX$$

и заметим, что R и L коммутируют. Верно также, что $A = L - R$.

Теорема 3.1. *Пусть X, Y - фиксированные вектора в $\mathfrak{g}$.*

$$\tilde{v}(X) = \frac{A}{1-e^{-A}}Y.$$

Доказательство. Обозначим $Z = \tilde{v}(X)$ касательный вектор в точке X, тогда нужно доказать

$$\frac{1-e^{-A}}{A}Z = Y, \tag{5}$$

где слева стоит оператор:

$$\frac{1-e^{-A}}{A} = \sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{A^k}{(k+1)!} = 1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{6} + \dots$$

Утверждение теоремы эквивалетно равенству:

$$exp(X + eZ + O(\epsilon^2)) = exp(X)(1 + eY + O(\epsilon^2)),$$

где задан Y и неизвестен X. Вычисляем левую часть уравнения с точностью до малых по ϵ первого порядка:

$$\exp(X+eZ) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X+eZ)^n}{n!} = \exp X + \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}X^{n-j-1}ZX^j + ... =$$

$$= \exp X + \epsilon\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\sum L^{n-j-1}R^jZ + ... =$$

Подставим $R = L - A$, а затем переставим суммирование:

$$= \exp X + \epsilon\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}L^{n-j-1}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^iL^{j-i}A^iZ + \dots =$$

$$= \exp X + \epsilon\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i[\sum_{j=i}^{n-1}\binom{j}{i}]L^{n-i-1}A^iZ =$$

$$\{\text{Вычисляем: }\sum_{j}^{n-1}\binom{j}{i} = \binom{n}{i+1} = \frac{n!}{(n-i-1)!(i+1)!}, \quad p = n-i-1\}$$

$$= \exp X + \epsilon\sum_{p\geq 0}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{p!}\frac{(-1)^i}{(i+1)!}L^pA^iZ + \dots =$$

$$= \exp X + \epsilon\exp L\cdot\frac{1-e^{-A}}{A}Z + \dots =$$

$$= \exp X + \epsilon\exp X\cdot\frac{1-e^{-A}}{A}Z + \dots =$$

$$= \exp X(1 + \epsilon\frac{1-e^{-A}}{A}Z + \dots$$

В итоге при Z возникает тот самый ряд из теоремы и теорема доказана. ■

3.2 Алгебры Ли. Примеры.

Определение 3.1. *Алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется векторное пространство над полем k, $char(k) = 0$, такое что задано*

- $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *билинейное отображение* $X, Y \to [X, Y]$
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- *выполнено тождество Якоби* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Главный пример: A-ассоциативная алгебра над k,

$$[X, Y] = XY - YX$$

Тогда все аксиомы выполнены.

Пример 3.2. *Пусть $A = Mat(\mathbb{N}, k)$. Вычислим скобку в базисе матричных единиц E_{ij}*

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$$

Пример 3.3. *Рассмотрим область $U \subset \mathbb{R}^n$ и дифференциальный оператор*

$$X = \sum_{\alpha} c_\alpha(x)\partial_\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Пусть $|a| = \sum a_i$, тогда оператор частных производных $\partial_\alpha = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1{}_1^\alpha \dots \partial x_n{}_n^\alpha}$, а $c_\alpha(\cdot) \in C^\infty(U)$ - гладкая функция от x, причем ряд конечен, то есть оператор X имеет порядок $\leq k$. При$|\alpha| > k$, $c_\alpha \equiv 0$.

Дифференциальные операторы задают ассоциативную алгебру, где порядок задает фиьтрацию: $ord(XY) \leq ord(X)ord(Y)$. Причем

$$ord([X, Y]) \leq ord(X) + ord(Y) - 1. \tag{6}$$

Рассмотрим частный случай дифференциального оператора порядка ≤ 1 без свободного члена $\sum_{k=1}^n c_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}$. Он является векторным полем. Векторные поля образуют алгебру Ли, благодаря 6.

Пусть G-группа Ли, $\mathfrak{g}$-касательное пространство. Хочется ввести каноническую структуру в касательном пространстве.

Утверждение 3.1. *Существует биекция между*

$$\mathfrak{g} \leftrightarrow \{\textit{левоинвариантные векторные поля на } G\}$$

Доказательство. Поясним это утверждение: пусть M-многооообразие, $v(m)$-векторное поле и задан диффеоморфизм $\varphi : M \to M$. Тогда он преобразует одно векторное поле в другое. Если векторное поле инвариантно относительно диффеоморфизма, это значит, что оно не меняется при действии φ. Группа Ли действует на себе левыми сдвигами. Левый сдвиг на группе есть по сути диффеоморфизм, значит он определяет векторное поле инвариантное относительно этого сдвига.

Обратно, левоинвариантное векторное поле полностью определяеся своим значением в единице, поэтому пространство левоинвариантных полей изоморфно касательному пространству к группе в единице. ■

Теорема 3.2. *Пусть G_1 и G_2 группы Ли. Если алгебры Ли $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$, то локальные группы Ли изоморфны.*

4 Лекция 4

Пусть M - гладкое многообразие класса C^∞, $Vect(M)$-пространство векторных полей на M. Оно вкладвается в пространство дифференциальных операторов $D(M)$(ассоциативная алгебра), так как векторные поля - это дифференциальные операторы первого порядка, аннулирующие константу. Векторные поля образуют подалгебру Ли в пространстве дифференциальных операторов, потому что замкнуты относительно операции взятия коммутатора.

Пусть G - группа Ли, в частности - это гладкое многообразие. Обозначим подпространство левоинвариантных векторных полей ${}^G Vect(G)$:

$$\{\text{левоинвариантные векторные поля}\} =^G Vect(G) \subset Vect(G)$$

Пусть $\mathfrak{g} = T_e g$ - касательное пространство в единице, тогда определим дифференциальный оператор первого порядка (инфинитезимальный правый сдвиг):

$$(R_X f)(g) = \frac{\partial}{\partial t} f(g \exp(tX))\Big|_{t=0}, \tag{7}$$

где f - произвольная гладкая функция. Очевидно, что R_X - левоинвариантное векторное поле.

Лемма 4.1. • *Соответсвие $X \to R_X$ есть биекция между касательным пространством и левоинвариантными векторными полями $\mathfrak{g} \leftrightarrow^G Vect(G)$.*

- *$R_X \in Vect(G)$, то есть гладко.*
- *${}^G Vect(G)$- подалгебра Ли.*

Доказательство. Чтобы доказать первое свойство проверяем, что (7) задает левоинвариантное векторное поле. Теперь рассмотрим окрестность точки $g \in \mathfrak{g}$ и введем в ней систему координат. Окрестность точки g мы представляем как область в линейном пространстве размерности равной размерности группы, тогда i-ая координата вектора $R_X(g)$:

$$R_X(g)_i = \frac{\partial}{\partial t}(g\exp(tX)_i)\Big|_{t=0}$$

- это гладкая числовая функция на $G \times \mathbb{R}$(локально). Для доказательства третьего свойства сделаем более общее утверждение: так как левоинвариантные дифференциальные операторы ${}^G D(G)$ коммутируют с операторами левого сдвига, то они образуют подалгебру в ассоциативной алгебре $D(G)$. ■

Пусть G-группа Ли, $\mathfrak{g} = T_e G$.

Определение 4.1. ***Скобкой в*** $\mathfrak{g}$ *называется скобка, которая наследуется из алгебры Ли ${}^G Vect(G)$ благодаря соответствию $\mathfrak{g} \leftrightarrow {}^G Vect(G)$.*

Пример 4.1. *Рассмотрим группу $GL(N, \mathbb{R})$, её алгебра Ли $\mathfrak{g} = Mat(N, \mathbb{R})$.*

Предложение 4.1. *Скобка в смысле определения 4.1 совпадает со скобкой, приходящей из ассоциативной алгебры $Mat(N, \mathbb{R})$.*

Доказательство. Базисом в алгебре $Mat(N, \mathbb{R})$ является базис матричных единиц E_{ij}. Пусть векторное поле $R_{E_{ij}}$ действует на функцию f в точке $x \in GL(N, \mathbb{R}) \subset Mat(N, \mathbb{R})$ и по определению мы получаем

$$R_{E_{ij}} f(x) = \frac{\partial}{\partial t} f(x\exp(tE_{ij}))\Big|_{t=0}.$$

Тогда точка $x \to x\exp(tE_{ij}) = x(1 + tE_{ij})$. Обозначим x_{kl} - это элемент матрицы x, тогда они преобразуются следующим образом:

$$x_{kl} \to x_{kl}, \quad l \neq j;$$

$$x_{kl} \to x_{kl} + tx_{ki}, \quad l = j.$$

Следовательно векторное поле $R_{E_{ij}}$ можно записать в явном виде:

$$R_{E_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \frac{\partial}{\partial x_{kj}}.$$

Упражнение: Теперь надо проверить, что соответствие $E_{ij} \to R_{E_{ij}}$ согласовано с обеими скобками (со скобкой из $Mat(N, \mathbb{R})$ и скобкой из векторных полей). ■

Предложение 4.2. *Пусть G-группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Скобка из определения 4.1 совпадает со следующим определением:*

$$[X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \varphi(t, s)\Big|_{t=s=0},$$

где

$$\varphi(t, s) = \exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX)\exp(-sY)$$

- отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to G$.

Доказательство. Пусть $G \subset GL(N, \mathbb{R})$, $Z \in \mathfrak{g}$ - правая часть в предложении 4.2. Мы хотим доказать, что $R_Z = R_{[X,Y]}$. По определению 7 в окрестности единицы с точностью до малых второго порядка по s и t мы получаем:

$$R_Z f(e) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} f(g\varphi(t, s))\Big|_{t=s=0} = g(1 + tX)(1 + sY)(1 - tS)(1 - sY) =$$
$$= g(1 + tX + sY + tsXY)(1 - tX - sY + tsXY) = g(1 + ts[X, Y]) \quad (8)$$

■

Лемма 4.2. *Если $G_1 \subset G_2$ - подгруппа Ли, то $\mathfrak{g}_1$ есть подалгебра Ли в $\mathfrak{g}_2$.*

Доказательство. Когда у нас есть $X, Y \in \mathfrak{g}_1$, то мы рассматриваем векторные поля $R_X^{G_1}, R_Y^{G_1} \in Vect(G_1)$ и $R_X^{G_2}, R_Y^{G_2} \in Vect(G_2)$ и замечаем, что первые ограничение вторых, так как гладкие функции на многообразии можно интерпретировать как гладкие функции на объемлющем пространстве. Поясним это

- 1 шаг: скобка в $\mathfrak{gl}$ происходит из матричного коммутатора
- 2 шаг: то же верно для $\mathfrak{g} = Lie(G)$, где $G \subset GL(N, \mathbb{R})$
- 3 шаг: скобка в $\mathfrak{gl}$ согласована и дается через $\varphi(t, s)$, которая дает матричную скобку(это мы уже доказали)

- 4 шаг : то же верно для $\mathfrak{g} = Lie(G)$, где $G \subset GL(N, \mathbb{R})$

$\blacksquare$

Следствие 4.1. *Пусть есть морфизм групп Ли $\psi : G_1 \to G_2$, тогда $d\psi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ есть морфизм алгебр Ли.*

Доказательство. 1 способ: если $\psi : X \to Y$ - отображение множеств, то полезно мыслить это как график $graph(\psi) \subset X \times Y$, где

$$graph(\psi) = \{(g, \psi(g)) : g \in G_1\} \subset G_1 \times G_2.$$

Это будет подгруппа(образ группы G_1 при ее вложении в $G_1 \times G_2$). Однако мы не можем утверждать, что образ будет группой Ли. Покажем это, используя второй способ доказательства:

2 способ: Пусть $X, Y \in Lie(G_1)$, тогда их скобка вычисляется:

$$[X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \varphi(t, s)\Big|_{t=s=0}.$$

Рассмотрим еще $\tilde{X}, \tilde{Y} \in Lie(G_2)$, которые являются образами при отображении $d\psi$: $\tilde{X} = d\psi(X), \tilde{Y} = d\psi(Y)$. Тогда их скобка задается таким же образом:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \tilde{\varphi}(t, s)\Big|_{t=s=0}.$$

Заметим, что $\tilde{\varphi}(t, s) = \psi(\varphi(t, s))$. $\blacksquare$

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли.

Определение 4.2. ***Присоединенным представлением*** *элемента $X \in \mathfrak{g}$ называется линейный оператор на $\mathfrak{g}$: $adX \in End(\mathfrak{g})$,*

$$adX \cdot Z := [X, Z].$$

Утверждение 4.1. *Отображение*

$$ad : X \to adX, \quad \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$$

есть морфизм алгебр Ли. Причем в алгебре $End(\mathfrak{g})$ выполнено

$$ad[X, Y] = [adX, adY] \Leftrightarrow \text{Тождество Якоби.}$$

Когда у нас есть группа Ли G, то мы ставим ей в соответствие чисто алгебраический объект алгебру Ли $\mathfrak{g} = Lie(G)$ - векторное пространство со скобкой. Отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$ локально обратимо и обратное задается функцией log. Умножение на группе вблизи единицы однозначно определяется алгеброй $\mathfrak{g}$ и может быть локально задано:

$$F(X, Y) = \log(\exp X \cdot \exp Y).$$

Следствие 4.2. *Локально закон умножения в G однозначно определяется алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Снова рассмотрим элементы $X, Y \in \mathfrak{gl}$. Пусть v_Y - векторное поле на $GL(N, \mathbb{R})$, происходящее из Y, образом этого векторного поля в алгебре $\mathfrak{g}$ будет поле $\tilde{v}_Y$ (согласно теореме 3.1), где $A = adX$:

$$\tilde{v}(Y) = \frac{adX}{1 - e^{-adX}}Y.$$

Под локальным законом умножения мы понимаем те правила, по которым мы можем умножить элемент g на $\exp(tY)$, где t - мало, а Y произвольно. Тогда интегральная кривая векторного поля $v_Y = R_Y$ на G задается:

$$t \to g \exp(tY).$$

Таким образом группа $\mathbb{R}$ действует на G. Такое действие однозначно определяется векторным полем, которое определяется оператором ad. Таким образом векторное поле вычислено в канонических координатах в теореме 3.1. ∎

5 Лекция 5

5.1 Универсальная обертывающая алгебра

Пусть A — ассоциативная алгебра, тогда мы можем превратить ее в алгебру Ли, введя скобку

$$[a, b] := ab - ba.$$

Это позволяет нам определить морфизм из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в ассоциативную алгебру:

$$\mathfrak{g} \to A, [\cdot, \cdot]. \tag{9}$$

В частности, если $A = End(V)$ — множество операторов, действующих в пространстве V, то морфизм (9) называется представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 5.1. *Присоединенное представление 4.2 ad — это представлние алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве $\mathfrak{g}$.*

Рассмотрим морфизмы a и b из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в ассоциативные алгебры A, B такие, что они порождены соответствующим образом $a(\mathfrak{g})$ и $b(\mathfrak{g})$

алгебры Ли $\mathfrak{g}$. И будем считать, что морфизм a мажорирует морфизм b, если верна коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & A \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}.$$

Возникает вопрос, можно ли построить универсальный объект $U(\mathfrak{g})$, то есть "самую большую"ассоциативную алгебру, в которую можно отправить нашу алгебру Ли. Оказывается, такой объект всегда можно построить. Рассмотрим тензорну алгебру :

$$T\mathfrak{g} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\oplus n}.$$

Зафиксируем базис в $\mathfrak{g}$: $X_1, X_2, \dots X_d$, где $d = dim(\mathfrak{g})$, тогда $T\mathfrak{g}$ — свободная алгебра, которая натянута на произвольные слова $X_{i_1}X_{i_2}\dots X_{i_k}$. (Конечная размерность d не является обязательной.) Наложим соотношения $XY - YX = [X, Y]$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$, получим алгебру

$$U(\mathfrak{g}) = T\mathfrak{g}/I_{X,Y}, \tag{10}$$

где $I_{X,Y}$ — двусторонний идеал, порожденный выражениями вида $XY - YX - [X, Y]$.

Определение 5.1. *Алгебра (10) $U(\mathfrak{g})$ называется универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Пример 5.2. *Если $\mathfrak{g}$ — абелева, то $U(\mathfrak{g}) = Sym(\mathfrak{g}) = Pol(\mathfrak{g}^*)$ — симметрическая алгебра (алгебра полиномов на двойственном пространстве для конечномерной $\mathfrak{g}$).*

5.2 Фильтрованные и градуированные алгебры

Определение 5.2. *Алгебра A называется **градуированной**, если $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ и выполнено условие: $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$.*

Примером является алгебра полиномов, где A_n — однородные полиномы степени n.

Определение 5.3. *Алгебра A называется **фильтрованной**, если $A = \cup_{n=0}^{\infty} A_{\leq n}$, где $A_{\leq 0} \subseteq A_{\leq 1} \subseteq A_{\leq 2} \dots$, и выполнено условие*

$$A_{\leq n} A_{\leq m} \subseteq A_{\leq n+m}.$$

Утверждение 5.1. *Всякая градуированная алгебра является фильтрованной.*

Доказательство. Можно ввести фильтрацию $A_{\leq n} = \oplus_{k=0}^{n} A_k$. ∎

Утверждение 5.2. *Пусть A — фильтрованная алгебра, тогда можно получить присоединенную градуированную алгебру следующим образом*

$$(grA)_n := A_{\leq n}/A_{\leq n-1}, \quad A_{-1} = \{0\}.$$

Доказательство. Нужно показать, что $(grA)_n(grA)_m \subseteq (grA)_{n+m}$. Возьмем элементы $a \in (grA)_n$ и $b \in (grA)_m$, тогда

$$a \cdot b = \tilde{a}\tilde{b} \mod A_{n+m-1},$$

где $\tilde{a} \in A_{\leq n}$ и $\tilde{b} \in A_{\leq m}$. ∎

Пример 5.3. *Если $\mathfrak{g}$ — абелева, то $U(\mathfrak{g}) = Sym(\mathfrak{g})$ — градуированная.*

В общем случае на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ нет градуировки. (Хотя тензорная алгебра $T\mathfrak{g}$ градуирована, идеал $I_{X,Y}$, по которому мы факторизуем, не является однородным.) Зато $U(\mathfrak{g})$ — фильтрованная алгебра:

$$U(\mathfrak{g})_{\leq n} = span\left(X_{i_1}X_{i_2}\dots X_{i_k}\right), \quad k \leq n, \quad X_{i_l} \in \mathfrak{g}.$$

Утверждение 5.3. *Присоединенная градуированная алгебра $gr\,(U(\mathfrak{g}))$ коммутативна.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$, тогда $XY - YX = [X, Y]$ является элементом степени 1 и принадлежит $\mathfrak{g}$. В $gr\,(U(\mathfrak{g}))$ мы факторизуем их по $\mathfrak{g}$, и следовательно $\tilde{X}\tilde{Y} = \tilde{Y}\tilde{X}$, где $\tilde{X}, \tilde{Y} \in gr\,(U(\mathfrak{g}))$. ∎

Сюръектвный морфизм $S\mathfrak{g} \to gr(U(\mathfrak{g}))$

Теорема 5.1. *(Poincare,Birkhoff, Witt) — это изоморфизм.*

Как доказывать такие вещи: Berman Diamond lemma Есть доказательство в лекциях прошлого года для $\mathfrak{gl}(N, k)$

Доказательство. (для алгебр Ли, которые происходят из групп Ли $\mathfrak{g} = Lie(G)$)

Выберем базис $X_1, \dots X_n$. Любой элемент из $U(\mathfrak{g})$ есть линейная комбинация упорядоченных мономов $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$, где $k_1, \dots k_n \geq 0$. Нужно доказать, что эта запись единственна, то есть такие мономы линейно независимы. Алгебра Ли — это левоинвариантные векторные поля, вкладываются в дифференциальные операторы. ${}^{G}Vect(G) \subset D(G)$, $X \to R_X$

$R_{X_1}^{k_1} \dots R_{X_n}^{k_n}$ линейно независимы в $D(G)$. $D(G)$ фильтрована

$$\sum f_{k_1 \dots k_n}(x) \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \dots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}}$$

Присоединенная градуированная алебра к $D(G)$ коммутативна. $gr(D(M)) =$ Понятие символа от $D \in D(M)_{\leq k}$ — это $\sigma(D) \in \Gamma(S^k(TM))$. $\sigma(D)$ — это образ в $gr(D(M))_k$

$\sigma(g) \in S^k T_g G$. Нам достаточно все рассмотреть в единице e, так как у нас есть левоинвариантные сдиги. $\sigma(e) \in S^k T_e G = S^k \mathfrak{g}$, а это упорядоченные мономы $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$. ■

Предложение 5.1. *Пусть у нас есть фильтрованнная алгебра* $A = U_{k=0}^{\infty} A_{\leq k}$, $grA = \oplus_{k=0}^{\infty} A_k, A_k := A_{\leq k}/A_{k-1}$. *Если* grA *порождена элементами* $x_1 \dots x_n \in A$, *то эти же элемнты порождают фильтрованную алгебру Ли* A.

Доказательство. Докажем по индукции. Это верно в разм 0, единицу мы включили в число образующих. В градуированной алгебре все порождается мономом первой степени Пусть $f \in A_{\leq k}, f =$ моном степени $\leq kmod(A_{k-1})$ от $x_1 \dots x_n$, тогда ■

6 Лекция 6

Если $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ - универсальная обертывающая алгебра. Мы доказали в прошлый раз, что

$$grU(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$$

Утверждение теоремы Пуанкаре-Бергофо-Витте можно понимать следующим образом: если $x_1, \dots . x_d$ - базис в $\mathfrak{g}$, тогда $x_1^{k_1} \dots \dots x_d^{k_d}$ - базис в $U(\mathfrak{g})$. В частности $\mathfrak{g}$ является подпространством в $U(\mathfrak{g})$.

Замечание: Универсальная обертывающая алгебра может быть реализованна как алгебра левоинвариантных дифференциальных операторов над группой Ли.

$$U(\mathfrak{g}) =^G D(G),$$

где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли над $\mathbb{R}$.

Центр универсальной обертывающей алгебры

$$Z(\mathfrak{g}) =^G D(G) \cap D(G)^G.$$

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ и найдем её центр. В алгебре есть базис матричных единиц $\{E_{ij} : i, j = 1, ...N\}$, тогда универсальную обертывающую алгебру можно представлять себе так:

$$U(\mathfrak{gl}(N)) =< \{E_{ij}\}/(*) >,$$

где $(*)$ обозначает фактор по соотношениям:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}.$$

Дальше нам будет полезно правило Лейбница для коммутаторов:

$$[x, yz] = [x, y]z + y[x, z].$$

Простейший центральный элемент $C_1 = \sum_{i=1}^{N} E_{ii}$. Проверим, что он центральный, то есть коммутирует со всеми образующими:

$$[E_{ab}, C_1] = \sum_i [E_{ab}, E_{ii}] = \sum_i \{\delta_{bi}E_{ai} - \delta_{ia}E_{ib}\} = 0.$$

Рассмотрим следующий элемент $C_2 = \sum_{i,j} E_{ij}E_{ji}$, проверим его центральность:

$$[E_{ab}, C_2] = \sum_{i,j} [E_{ab}, E_{ij}E_{ji}] = \sum_{i,j} ([E_{ab}, E_{ij}]E_{ji} + E_{ij}[E_{ab}, E_{ji}]) =$$

$$\sum_{i,j} ((\delta_{bi}E_{aj} - \delta_{ja}E_{ib})E_{ji} + E_{ij}(\delta_{bj}E_{ai} - \delta_{ia}E_{jb})) = 0.$$

Общий рецепт:

$$C_n = \sum_{i_1,...i_n=1}^{N} E_{i_1i_2}E_{i_2i_3} \dots E_{i_Ni_1}$$

Теорема 6.1.

$$C_n \in Z(\mathfrak{gl}(N))$$

Доказательство. Определим такие элементы

$$E_{ij}^{(n)} := \sum_{i_2,...i_n=1}^{N} E_{ii_2}E_{i_2i_3} \dots E_{i_nj}. \tag{11}$$

Докажем следующее утверждение: элемент вида $E_{ij}^{(n)}, i, j = 1, ...N$ преобразуется под действием элементов E_{ab} также как E_{ij}, то есть

$$[E_{ab}, E_{ij}^{(n)}] = \delta_{bi}E_{aj}^{(n)} - \delta E_{ib}^{(n)}.$$

Докажем это по индукции, воспользовавшись следующим фактом

$$E_{ij}^{(n)} = \sum_k E_{ik} E_{kj}^{(n-1)}$$

и вычислим

$$[E_{ab}, E_{ij}^{(n)}] = \sum_k [E_{ab}, E_{ik} E_{kj}^{(n-1)}] = \delta_{bi} E_{aj}^{(n)} - \delta E_{ib}^{(n)},$$

где мы опускаем подробные выкладки. Теперь можно переписать центральные элементы $C_n = \sum_{i=1}^{N} E_{ii}^{(n)}$ и их центральность очевидна. ■

Рассмотрим матрицу T размера $n \times n$.

$$T = \begin{pmatrix} E_{11} & \dots & E_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{N1} & \dots & E_{NN} \end{pmatrix}$$

Матрица $T \in Mat(N, U(\mathfrak{gl}(N)) = U(gl(N)) \otimes Mat(N, C)$. Элементы центра C_n и элементы $E_{ij}^{(n)}$ в терминах матрицы T можно записать

$$C_n = tr(T^n), \quad E_{ij}^n = (T^n)_{ij}$$

Теорема 6.2. *Элементы $C_1, \dots C_N$ - алгебраически независимы и порождают весь центр $Z(\mathfrak{gl}(N))$.*

Доказательство. Стандартное доказательство алгебраической независимости строится так: пусть элемент a из фильтрованной алгебры $A_{\le k}$, тогда берем его образ в однородной компоненте $[a] \in A_{\le k}/A_{\le k-1} = gr(A_k)$. Теперь мы хотим доказать, что если старшие члены какого-то семейства $a_1, \dots a_n$ алгебраически независимы, то и само семейство алгебраически независимо.

Центральные элементы C_i лежат в фильтрованной алгебре, мы переходим к присоединенной градуированной алгебре. Так как элементы C_i уже однородные, то нам не нужно брать их старшие компоненты. Рассматриваем элементы $C_i = [C_i]$ как элементы в $S(gl(N))$ и строим гомоморфизм между симметрической алгеброй $S(gl(N))$ и симметрической алгеброй полиномов $\mathfrak{h} = span\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}$:

$$S(gl(N)) \to S(\mathfrak{h})$$

$$E_{ab} \underset{a \neq b}{\to} 0.$$

При таком отображении из "гиганского паровоза слагаемых"останутся: $C_n \to E^n_{11} + \dots E^n_{NN}$, а они уже будут алгебраически независимы. Следовательно, семейство C_i - алгебраически независимо(если бы было нетривиальное соотношение в $S(gl(N))$, то оно сохранилось бы и в $S(\mathfrak{h})$). ■

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли над полем k. Пусть есть конечномерное векторное пространство V над большим полем $\tilde{k}$ (Например, $k = \mathbb{R}, \tilde{k} = \mathbb{C}$).

Определение 6.1. ***Представление*** *- - это k-линейный морфизм*

$$\varphi : \mathfrak{g} \to End(V),$$

сохраняющий скобку:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]).$$

Такое представление канонически продолжается на алгебру, полученную расширением поля скаляров $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \circ_k \tilde{k}$.

6.1 Язык модулей

Зададим алгебру Ли $\mathfrak{g}$, векторное пространство V и отображение $\mathfrak{g} \to End(V)$.

Определение 6.2. *Будем говорить, что V есть $\mathfrak{g}$-модуль, если задано линейное отображение*

$$\mathfrak{g} \times V \to V,$$

причем выполнена аксиома

$$XYv - YXv = [X, Y]v. \tag{12}$$

Если у нас есть два $\mathfrak{g}$-модуля V_1 и V_2, то можно взять их прямую сумму $V_1 \oplus V_2$ и снова получить $\mathfrak{g}$-модуль, где элемент $X \in \mathfrak{g}$ действует:

$$X(v_1 \oplus v_2) = Xv_1 \oplus Xv_2.$$

Тензорное произведение двух $\mathfrak{g}$-модулей $V_1 \otimes V_2$ также будет $\mathfrak{g}$-модулем, причем будет выполнено правило Лейбница:

$$X(v_1 \otimes v_2) = Xv_1 \oplus v_2 + v_1 \oplus Xv_2.$$

Почему оно возникает? Заметим, что благодаря правилу Лейбница будет выполнена аксиома (12). Но дело еще и в том, что представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = Lie(G)$ согласованы с представлениями группы G и $g(v_1 \otimes v_2) =$

$gv_1 \otimes gv_2$. Рассмотрим кривую $g(t) = exp(tX)$ на группе G, где $X \in \mathfrak{g}$. Чтобы увидеть, как действует элемент алгебры Ли нужно подействоать элементом $g(t)$ и продифференцировать:

$$\frac{d}{dt}\, g(t)v_1 \otimes g(t)v_2\Big|_{t=0} = Xg(t)v_1 \otimes g(t)v_2\Big|_{t=0} + g(t)v_1 \otimes Xg(t)v_2\Big|_{t=0}$$

Таким образом, если у нас есть $\mathfrak{g}$ - модуль, то он порождает структуру $\mathfrak{g}$-модуля в любой тензорной степени $V^{\otimes n}$.

Задача 6.1. *Рассмотрим алгебру тензоров: $T(V) = \oplus_n V^{\oplus n}$. Симметрическая $S(V)$ и внешняя $\Lambda(V)$ степени - тоже $\mathfrak{g}$ модули.*

Определение 6.3. *$\mathfrak{g}$-модуль(представление) называется **простым**, если у него нет нетривиальных подмодулей(инвариантных подпространств).*

Пример 6.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть модуль над самой собой, присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $adX \cdot Y = [X, Y]$ будет удовлетворять аксиоме 12. Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ - тоже $\mathfrak{g}$-модуль.*

Пример 6.2. *Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ - это фильтрованная алгебра. В градуированной алгебре $grU(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ структура $\mathfrak{g}$-модуля из $U(\mathfrak{g})$ совпадает со структурой, происхододящей из присоеддиненного представления $ad\mathfrak{g}$.*

6.2 Структура sl_2- модуля

Алгебра матриц $sl(2) = sl(2, C)$ имеет стандартный базис:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H. \tag{14}$$

Какие есть неприводимые конечномерные представления алгебры sl_2?

Пример 6.3. *Рассмотрим набор двух переменных x_1, x_2, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ и отображение*

$$H \to x_1\partial_1 - x_2\partial_2,$$

$$E \to x_1\partial_2,$$

$$F \to x_2\partial_1$$

задает представление. Можно проверить соотношения 14. Если теперь мы рассмотрим пространство полиномов $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, то операторы H, E, F сохраняют степень мономов и уважают градуировку. Таким образом, подпространство однородных полиномов степени $m = 0, 1, 2\dots$ есть sl_2-модуль.

У однородных полиномов степени $m = k + l$ есть базис $x_1^k x_2^l$, который называют весовым, так как этот базис $x_1^k x_2^l$ - собственный для оператора H с собственным значением $k - l$.

$$H(x_1^k x_2^l) = (k-l)x_1^k x_2^l$$

$$kx_1^{k-1}x_2^{l+1} \xleftarrow{\text{F}} x_1^k x_2^l \xrightarrow{\text{E}} lx_1^{k+1}x_2^{l-1}$$

Этот модуль мы будем обозначать $V^{(m)}$, $dimV^{(m)} = m$, весовой базис $v_{-m}\dots.v_{m-4}\dots..v_m$, где F-понижающий оператор, а E - повышающий оператор.

Утверждение 6.1. *Модули $V^{(m)}$ - неприводимы и это все неприв представления. (док-во в след лекции)*

7 Лекция 7

В разработке

8 Лекция 8

8.1 Мера Хаара, интегрирование на группах Ли

Три этажа меры:

- абстрактная теория меры на пространстве X, в котором фиксирована $\sigma-$алгебра, и мера - это счетно-аддитивная функция, которая определена на этой σ-алгебре
- меры на локально компактных топологических пространствах
- меры на многообразиях, предполагается, что они локально устроены, как Лебеговы меры: есть локальная карта, в которой вводятся координаты, кроме того, есть функция плотности $\varphi(x)dx_1 \dots dx_n$

Нас будут интересовать инвариантные меры. Пусть G - группа, которая действует на множестве X(левое действие):

$$G \times X \to X,$$

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x).$$

Заметим, что чтобы перейти к правому действию $X \times G \to X$, нужно отождествить $x \cdot g := g^{-1}x$. Итак, действие задано, нас интересует существование G-инвариантной меры на множестве E, то есть

$$\mu(gE) = \mu(E), \quad \forall g \in G.$$

Рассмотрим специальный случай, левое действие группы G на себе:

$$g \cdot x = gx, g \in G, x \in G.$$

Теорема 8.1. *(Хаара) Пусть G - локально компактная группа(задана топология, согласованная с действием группы), тогда существует единственная с точность до скаляра левоинвариантная мера μ_L на стандартной σ-алгебре борелевских множеств такая, что μ_L(компакт) $<\infty$(мера Радона).*[1]

Пример 8.1. *Мера Хаара на прямой (в $\mathbb{R}^n$) - это мера Лебега.*

Пример 8.2. *Для группы $GL(N,\mathbb{R}) \subset Mat(N,\mathbb{R})$ мерой должна быть такая функция $f \in C_0(G)$- непрерывная и на компактном носителе*

$$\int_G f(gx)\mu_L(dx) = \int_G f(x)\mu_L(dx), \quad x, g \in GL(N,\mathbb{R}). \tag{15}$$

Увидим, что такая мера есть, будем рассматривать $GL(N,\mathbb{R})$ как открытое подмножество в пространстве $Mat(N,\mathbb{R})$:

$$\mu_L(dx) = const \times |detx|^{-N}dx,$$

где $dx = \prod_{i,j} dx_{ij}$ - мера Лебега.

Подставим и проверим, что будет выполнено условие 15:

$$\int f(gx)|detx|^{-N}dx = \int f(x)|detx|^{-N}dx. \tag{16}$$

Сделаем замену переменной $x = gy$, тогда $|detx|^{-N} = |detg|^{-N}|dety|^{-N}$. Правая часть соотношения 16:

$$\int f(gy)|detg|^{-N}|dety|^{-N}dx, \quad dx = |detg|^N dy$$

[1] В случае компактных групп Ли рекомендуется посмотреть доказательство в [4] и [2]

Пример 8.3. *Рассмотрим группу аффинных преобразований прямой:* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *где* $a \in \mathbb{R}*, b \in \mathbb{R}$, *тогда мера может быть записана* $\mu_L(dg) = \varphi(a,b)dadb$. *Подействуем на произвольный элемент матрицей параллельного переноса.*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, функция $\varphi(a,b)$ *не должна зависеть от* b, *то есть* $\varphi(a,b) = \varphi(a)$. *Подействуем матрицей гомотетии:*

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a & a'b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Происходит растяжение в a' *раз, тогда мера* $\varphi(a) = 1/a^2$.

В общем случае таким образом меру не найти. Для этого есть теорема.

Теорема 8.2. *Пусть* G *- группа Ли. Тогда существует левоинвариантная мера* μ_L.

Доказательство. Пусть ω - дифференциальная форма старшей степени, $n = dim(G)$, тогда в системе координат $\omega = \varphi dx_1....dx_n$. При замене координат $x = \Phi(y)$, дифференциал домножается на Якобиан:

$$dx = det[\frac{d\phi}{dy}]dy$$

.

Нас будет интересовать только модуль Якобиана, так как мы будем рассматривать неориентированный объем. Заметим, что если в какой-то карте задана форма старшей степени и $\phi \geq 0$, то у нас задана мера и мы рассмотрим модуль $|\omega|$ и тогда у нас корректно определена мера на всем многообразии (более формальное изложение можно найти в [13])

Теперь мы хотим доказать, что если G- группа Ли, то на ней существует единственная левоинвариантная форма старшей степени. Понимать это нужно так, что если на многообразии задана форма, то это значит, что заданы реперы во всех касательном пространствах. Зная форму, мы знаем объем паралеллиппида, натянутого на эти реперы, единичный репер $\phi^{-1/n}e_1.....\phi^{-1/n}e_n$. Построим репер в единице группы G, разнесем реперы во все точки левыми сдвигами, получим гладкое инвариантное поле реперов. ∎

Пример 8.4. *Рассмотрим $G = SU(2)$. Как многообразие, это сфера $S^3 \subset R^4$. Любой элемент записывается в виде $g = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{C}$, тогда определитель матрицы $|a|^2 + |b|^2 = 1$, что и задает единичную сферу в двумерном комплексном пространстве. Тогда левоинвариантная мера $\mu_L(dg)$ - это мера инвариантная относительно вращений S^3. Увидеть это можно так, группа G порождена элементами такого вида $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, Эти матрицы переводят элементы группы G в элементы $SO_(4)$. Левоинвариантные меры при отображении $G \to G^{-1}$ переходят в правоинвариантные меры $\mu_L \to \mu_R$. Какая связь между левой и правой инвариантной мерой?*

Определение 8.1. *Модулярной функцией на борелевском множестве E называется такое отображение $\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$, что*

$$\mu_L(Eg) = \Delta(g)\mu_L(E), \Delta(g_1 g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2) \tag{17}$$

Утверждение 8.1.

- *Δ гомоморфизм*
- *Δ непрерывна на G*
- *если рассматривать меру как функционал на функциях, то 17 эквивалентно*

$$\int f(xg^{-1})\mu_L(dx) = \Delta(g) \int f(x)\mu_L(dx) \tag{18}$$

Рассмотрим интегрируемую функцию на компакте $f \in C_0, f \geq 0$, тогда $\Delta(g)$ можно выразить как отношение интегралов. Это отношение будет непрерывно по g. Для гомоморфима достаточно доказать непрерывность в единице, которая следует из оценки для равномерно непрерывной функции: $|f(xg) - f(x)| \leq \epsilon(g), \forall x$.

Предложение 8.1. $\mu_R(dx) = \Delta(x)^{-1}\mu_L(dx)$

Доказательство. Правая инвариантная мера должна иметь плотность по левой мере

$$\mu_R(dx) = \phi(x)\mu_L(dx).$$

Свойство правой инвариантной меры тогда запишется

$$\int f(xg^{-1})\mu_R(dx) = \int f(x)\mu_R(dx),$$

выполним подстановку

$$\int f(xg^{-1})\phi(x)\mu_L(dx) = \int f(x)\phi(x)\mu_L(dx).$$

Представим $\phi(x) = \phi(xgg^{-1})$ и воспользуемся равенством 18. Тогда левая часть имеет вид

$$\Delta(g) \int f(x)\phi(xg)\mu_L(dx) = \int f(x)\phi(x)\mu_L(dx),$$

так как $\Delta(g)\phi(xg) = \phi(x)$, при $\phi(x) = \Delta(x)^{-1}$ и Δ-гомоморфизм. ■

Определение 8.2. *Группа G - унимодулярна, если существует биинвариантная мера μ такая, что $\Delta(g) = 1$, $\mu_R = \mu_L$.*

Следствие 8.1. *Если группа G - компактна, то она унимодулярна.*

Для компактной группы нельзя построить такую функцию гомоморфизм $\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$, так как если бы она существовала, то она бы достигала своего максимума $max \geq 1$, потому что область значений инвариантна относительно инверсии. Если есть число большее 1, то есть и его квадрат, следовательно, максимума не может быть. Можно еще сказать и так: не существует компактных подгрупп $\mathbb{R}_{>0}$.

Предложение 8.2. *Если группа обладает тем свойством, что ее коммутатор $[\bar{G}, G] := ghg^{-1}h^{-1} = G$ плотен в G, то G - унимодулярна.*

Например, для группы $SL(N, \mathbb{R})$ можно доказать, что она совпадает со своим коммутатором и, следовательно, унимодулярна. Группа $GL(N, \mathbb{R})$ будет тоже унимодулярна, биинвариантная мера на ней $\mu_L(dx) = |detx|^{-N}dx$, хотя у нее существует нетривиальный гомоморфизм

$$|det(\cdot)| : GL(N, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{>0}.$$

9 Лекция 9 и 10

9.1 Применение меры Хаара

Пусть G-компактная группа Ли, тогда существует двусторонне инвариантная мера μ:

$$\int_G f(xg^{-1})\mu(dx) = \int_G f(x)\mu(dx), \quad \forall g \in G.$$

Лемма 9.1. *Если G компактна, то $\mu(G)$ - конечна.*

Доказательство.

Для произвольной точки x группы G определим окрестность $U(x)$, которая будет диффеоморфна некоторой окрестности точки $y \in \mathbb{R}^n, n = dim(G)$ евклидова пространства, с мерой dy. Ограничение меры Хаара на окрестность $U(y)$ даст нам снова меру dy с некоторой плотностью $f(y) > 0$, где $f(y)$ - гладкая функция. Если мы теперь уменьшим окрестность $U(x)$ до некоторой окрестности $U_0(x)$, мы заведомо будем знать, что $f(y)$ ограничена, тогда $\mu(U_0(x)) < \infty$. Выделив конечное покрытие, мы докажем конечность меры $\mu(G)$. ■

С этого момента мы будем нормировать меру, так чтобы $\mu(G) = 1$.

9.2 Представления в комплексном пространстве

Пусть G - группа Ли(топологическая группа). Представление в конечномерном пространстве над $\mathbb{C}$ - это непрерывный гомоморфизм в группе невырожденных операторов пространства V

$$T : G \longrightarrow GL(V).$$

Если G - группа Ли, то T-гладкое отображение.

Определение 9.1. *Представление T - **унитарно**, если его образ лежит в унитарной группе $U(V, (\cdot, \cdot))$, где задано полуторалинейное скалярное произведение.*

Теорема 9.1. *Всякая конечномерное представление компактной группы Ли унитаризуемо(то есть найдется такое скалярное произведение, в котором представление унитарно).*

Доказательство. Рассмотрим произвольное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$. Мы его усредняем по группе, то есть для произвольных векторов $\zeta, \eta \in V$ вводим новое скалярное произведение по такому правилу:

$$(\zeta, \eta)' = \int_{x \in G} (T(x)\zeta, T(x)\eta)\mu(dx).$$

Полученное отображение будет полуторалинейно, невырождено и положительно определено. В силу правоинвариантности $T(x)(T(g)\zeta) = T(xg)\zeta$ новое скалярное произведение будет инвариантно:

$$(T(g)\zeta, T(g)\eta)' = (\zeta, \eta)'$$

■

Следствие 9.1. *Конечномерные представления компактных групп вполне приводимы.*

Пусть G-группа Ли, (T, V) ее представление в пространстве V.

$$T : G \to GL(V)$$

$$dT : Lie(G) \to gl(V)$$

Возникает такое соответсвие, которое задает переход от представления группы к представлению алгебры, затем можно перейти к комплексификации $(G, T, V) \to (\mathfrak{g}, T, V) \to (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, T, V)$.

Определение 9.2. ***Сплетающий оператор*** *(на языке модулей - это морфизм $\mathfrak{g}$-модулей)- это такой оператор*

$$A : V_1 \to V_2,$$

действие которого согласовано с действием:

$$AT_1(g)\zeta = T_2(g)A\zeta, \quad \zeta \in V_1. \tag{19}$$

Если A-обратим, то тогда он осуществляет эквивалентность представлений.

Предложение 9.1. *Пусть G-группа Ли и заданы два ее предсталения: $(G, T_1, V_1), (G, T_2, V_2)$.*

- *Если A - сплетающий оператор для G, то он будет сплетающим оператором для соответствующих представлений алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.*
- *Если G - связна, то верно и обратное.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\tilde{T}(X)$-сплетающий оператор для $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, а $T(x)$ для $\mathfrak{g}$.

$$\tilde{T}(X) = \frac{d}{dt}T(exp\ tX)$$

Продифференцируем уравнение 19 и получим соответствующее уравнение для $\tilde{T}(X)$.

Если верно утверждение о том, что

$$A\tilde{T}_1(X) = \tilde{T}_2(X)A,\ \forall x, \tag{20}$$

мы хотим доказать, что

$$A\tilde{T}(exp\ tX) = \tilde{T}(exp\ tX)A.$$

Так как в окрестности единицы

$$\tilde{T}(exp\ tX) = exp(tT(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n T_1^n(X)}{n!},$$

а из верности 20 следует верность такого же соотношения для любой степени T^n, то утверждение доказано в окрестности единицы. Группа связна, следовательно, соотношение будет верно для любой точки. ■

Предложение 9.2. *Пусть G - связна. Представления группы эквивалентны $(G, T_1, V_1) \sim (G, T_2, V_2) \Leftrightarrow (\mathfrak{g}, T_1, V_1) \sim (\mathfrak{g}, T_2, V_2)$ представления алгебры эквивалентны. Представления (G, T, V) и $(\mathfrak{g}, T, V)$ имеют общие инвариантные подространства.*

9.3 Неприводимые представления группы $U(\mathbb{N})$

Мы перейдем к комплексифицированным представлениям

$$T : gl(N, \mathbb{C}) \to gl_{\mathbb{C}}(V),$$

так что при этом уважается скобка Пуассона: $T([X,Y]) = [T(X), T(Y)]$. Мы начинаем с треугольного разложения. Комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ может быть разложена:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

где $\mathfrak{h}$ - диагональные матрицы, $\mathfrak{n}_- = span(E_{ij}, i < j), \mathfrak{n}_+ = span(E_{ij}, i > j)$.

Определение 9.3. *Вектор ζ называется **весовым**, если существует такой функционал $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N), \lambda_i \in \mathbb{C}$, что для всех элементов алгебры $\mathfrak{h}$:*

$$T(E_{ii})\zeta = \lambda_i \zeta.$$

*Вектор $\lambda \in \mathfrak{h}*$ называется **весом**.*

Определение 9.4. *Весовой вектор ζ называется **особым**, если он аннулируется подалгеброй $\mathfrak{n}_+$:*

$$T(X)\zeta = 0,\ \forall X \in \mathfrak{n}_+.$$

Определение 9.5. *Весовой модуль - пространство в $\mathfrak{g}$, которое допускает базис из весовых векторов.*

Тогда всё пространство V может быть разложено на весовые компоненты:

$$V = \oplus_\mu V_\mu,$$
$$\forall \zeta \in V_\mu : \ T(E_{ii})\zeta = \mu_i \zeta, \quad i = 1, \ldots, N, \ \mu \in \mathbb{C}^N.$$

Пример 9.1. *Рассмотрим тавтологический модуль $\mathfrak{gl}$, там есть топологический базис e_k, у которого единица на k-ом месте.*

$$E_{ii}e_k = \begin{cases} 0, i \neq k \\ e_k, i = k \end{cases} \tag{21}$$

Есть и особый вектор e_1.

Фундаментальное представление(модуль) - это действие в пространстве $\Lambda^k \mathbb{C}^N, k = 0, \ldots, N$:

$$\Lambda^k T(g) : \ \zeta_1 \wedge \cdots \wedge \zeta_k \to T(g)\zeta_1 \wedge \cdots \wedge T(g)\zeta_k$$

Продифференцируем выражение вдоль гладкой кривой, тогда по правилу Лейбница мы получим k слагаемых:

$$T(X)\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \zeta_k + \ldots + \zeta_1 \wedge \cdots \wedge T(X)\zeta_k.$$

Весовым базисом будет $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, I = \{i_1 < i_2 < \ldots i_k\}$. А вектор $e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_k$ будет особым.

Есть два особых случая, если $k = 0$, $\Lambda^0 C^N = \mathbb{C}$ - тривиальное одномерное представление, $T(X) = 0$, $T(g) = 1$. Если $k = N$, $\Lambda^N C^N = \mathbb{C}$ - нетривиальное одномерное представление, $T(X) \to tr(X), T(g) \to det(g)$.

Рассмотрим тензорное произведение представлений $T_1 \otimes T_2$ в тензорном произведении пространств. На уровне группы мы пишем

$$(T_1 \otimes T_2)(g) = T_1(g) \otimes T_2(g),$$

на уровне алгебры

$$(T_1 \otimes T_2)(X) = T_1(X) \otimes 1 + 1 \otimes T_2(X)$$

Пример 9.2. *Рассмотрим m-ую степень одномерного представления: $det^m, m \in \mathbb{Z}$. Пусть $u \in U(N)$, тогда $u \to det(u)^m$, $X \to mtrX$*

Определим подкрутку на det^m: для произвольного представления T рассматриваем тензорное произведение $T \otimes det^m$. Представлением алгебры должно быть $\tilde{T}(X) = T(X) + m\ trX$. Надо проверить, что

$$\tilde{T}([X, Y]) = [\tilde{T}(X), \tilde{T}(Y)].$$

Это выполнено в силу того, что след коммутатора ноль.

Теорема 9.2. *(описание неприводимых представлений $U(N)$)*

- *(i) T - неприводимое представление $\to$ весовой модуль веса $\mu \in \mathbb{Z}$;*
- *(ii) существует единственный с точностью до множителя особый вектор λ;*
- *(iii) T однозначно определяется этим весом λ(он называется старшим весом);*
- *(iv) получающиеся веса - это в точности векторы с*

$$\lambda : \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N \in \mathbb{Z}^N.$$

Доказательство. (i)Посмотрим сначала на простейшую ситуацию $N = 1, U(1) = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$. Все неприводимые представления одномерны

$$u \to u^l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим диагональную подгруппу в $U(N)$, $U(1) \times \ldots \times U(1)$. Здесь действует тот же принцип. Эта группа коммутативна, значит в любом представлении всегда есть общий собственный вектор, кроме того группа компактна, значит имеет место полная приводимость, всякое представление есть прямая сумма неприводимых. Мы представление сужаем на каждую компоненту и получаем $(u^{l_1}, \ldots, u^{l_N})$, где $\mu = (l_1, \ldots l_N)$.

(ii)Пусть $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ - канонический базис в $\mathbb{Z}^N$. Тогда можно заметить, что матричные единицы весовые пространства переводят в весовые:

$$E_{ij} : V(\mu) \to V(\mu + \epsilon_i - \epsilon_j).$$

Это следует из коммутационных соотношений

$$[E_{kk}, E_{ij}] = \begin{cases} 0,\ k \neq i, j \\ 1,\ k = i \\ -1,\ k = j \end{cases}.$$

Определение 9.6. *Будем говорить, что вектора упорядочены* ***лексикографически*** *$\lambda > \mu$, если $\lambda_1 > \mu_1$ или $\lambda_1 = \mu_1$, но $\lambda_2 > \mu_2$ или и тд.*

Предложение 9.3. *Любой конечномерный весовой $\mathfrak{gl}$-модуль(мы рассматриваем только те, которые происходят из группы) содержит особый вектор.*

Доказательство. Все пространство V может быть разложено

$$V = \oplus_\mu V_\mu.$$

Повышающие операторы E_{ij} будут повышать вес. Однако есть наибольший вес относительно лексикографического порядка, все операторы E_{ij} будут обнулять компоненту с таким весом. Следовательно, нашелся особый вектор. ∎

Лемма 9.2. *Пусть V - весовой $\mathfrak{gl}$-модуль. Всякий его подмодуль тоже весовой.*

Всякий $\mathfrak{gl}$-модуль есть автоматически модуль над универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{gl}) = A$. Пусть ζ - особый вектор, тогда $A\zeta$ - A-инвариантное подпространство, тогда по неприводимости $A\zeta = V$, тогда ζ - циклический. Теперь по теореме Пуанкаре-Бирхгофа-Витте в A можно выбрать базис с любым упорядочением, например, $\{E_{ij}\}$ с упорядочением $\mathfrak{n}_-, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+$. Применение монома от матричных единиц к весовому вектору ζ дает снова весовой вектор, причем

$$V = A\zeta = U(\mathfrak{n}_-)\zeta.$$

Применение генераторов из $E_{ij} \in \mathfrak{n}_-$ понижает вес. Теперь мы видим, что, если $\zeta \in V(\lambda)$, где λ — максимальный вес, то $V(\lambda)$ - одномерно. Пусть есть два особых вектора с весами $\mu < \lambda$, $\eta \in V(\mu)$, рассуждая точно также, мы получим, что пространство $A\eta = V$ не пересекается с $V(\lambda)$.

(iii) Пусть есть два представления V и V' с весом $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Докажем тогда, что $V \sim V'$.

Определение 9.7. ***Модулем Верма*** *M_λ называется алгебра Ли, полученная как фактор пространство*

$$M_\lambda = A/I_\lambda,$$

где I_λ - левый идеал, порожденный элементами $E_{ij} \in \mathfrak{n}_+$ и $E_{ii} - \lambda_i$.

Обозначим 1_λ - образ единицы при проекции $A \to A/I_\lambda$. Тогда

$$E_{ij}1_\lambda = 0,$$

$$E_{ii}1_\lambda = \lambda_i 1_\lambda.$$

Если V - неприводимо, а λ - его старший вес, то особый вектор $\zeta \in V(\lambda), A\zeta = V$. Существует гомоморфизм

$$M_\lambda \to V,$$

$$1_\lambda \to \zeta,$$

причем M_λ - универсальный модуль, который накрывает все циклические. Заметим, что M_λ - тоже весовой модуль. Более того, пространство A/I_λ 'имеет размер' алебры полиномов от $E_{ij}, i > j$. Пусть K_λ - некоторое ядро в точной последовательности, тогда

$$0 \to K_\lambda \to M_\lambda \to V \to 0.$$

Можно заключить, что $V = M_\lambda/K_\lambda$. Докажем, что K_λ - наибольший собственный подмодуль. Разложим модуль Верма $M_\lambda = \oplus_\mu M_\lambda(\mu)$ и воспользуемся леммой 9.2: $K = \oplus_\mu K(\mu)$. Если K содержит компоненту $M_\lambda(\lambda), dim(\lambda) = 1$, то он сразу содержит все пространство, но этого никак не может быть. Тогда берем все подмодули, которые эту компоненту не содержат и берем их прямую сумму, теперь понятно, что K - максимальный, иначе M/K - не был бы неприводим. Мы получили, что старший вес λ неприводимого весового конечномерного $\mathfrak{gl}$-модуля есть полный инвариант.

(iv) какие веса могут возникнуть? Пока мы знаем, что $\lambda \in \mathbb{Z}^N$. Но на самом деле все веса будут **доминантными**, то есть

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N.$$

В алгебре $sl(2,\mathbb{C})$ три базисных элемента F, H, E, которые и задают $\mathfrak{n}_-, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+$.

Мы строим неприводимые представления $V_n,\ dimV_n = n+1, n = 0, 1, 2 \dots$. Все неприводимые представления происходят из группы $SU(2)$. И у нас снова возникает описание в терминах старших весов n, то есть $H\zeta = n\zeta$. Теперь мы хотим рассмотреть корневое вложение и доказать, что $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Рассмотрим вложение $SU(2) \to U(N)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & d & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Для всякого конечномерного $sl(2,\mathbb{C})$-модуля W, происходящего из представления $SU(2)$, определим подпространсво инвариантное относительно элемента E

$$W^E = \{w \in W : Ew = 0\}$$

В силу полной приводимости мы можем написать

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$$

То есть существуют $V_{n_1} \oplus V_{n_2} \oplus V_{n_3} \oplus \dots$ В каждом из этих модулей подпространсво E-инвариантов одномерно. Если ζ-весовой вектор в W^E, то $H\zeta = n\zeta, n \in Z_+$. Такой вектор ζ должен лежать только в одной компоненте V_{n_k}, так что его вес будет n_k. Рассмотри сужение представления на $SU(2)$.

$$\mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$$

$$H \to E_{11} - E_{22}$$

$$E \to E_{12}$$

$$F \to E_{21}$$

Значение для H будет $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$. Также можно доказывать, что $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, тогда нужно действовать группой $SU(2)$ на линейной оболочке $\mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_{i+1}$. Итак, все старшие веса являются доминантными.

Почему все доминантные веса получатся?

Пусть Λ - множество всех старших весов

$$\Lambda \subseteq \{\lambda \in \mathbb{Z}^N : \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \forall i = 1, \dots, N-1\}.$$

Множество Λ инвариантно относительно сдвигов $\lambda \to \lambda + (k, \dots, k), k \in \mathbb{Z}$ и является полугруппой по сложению.

Пусть у нас есть два модуля V и V' и их особые вектора ζ и ζ'. Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V'$, тогда весом $\zeta \otimes \zeta'$ будет сумма $\lambda + \lambda'$(замкнутость относительно сложения). Теперь нам нужно набрать достаточно большое количество векторов из Λ, которые после применения сдвигов и сложения задают всё множество доминанных весов. Для этого мы рассмотрим фундаментальное представление T, полученное тавтологическим действием $U(N)$ на $\mathbb{C}^N$, элемент переходит сам в себя. Мы можем рассмотреть внешнюю степень $\Lambda^k T$ и взять там особый вектор $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k$, его весом будет $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, где k единиц и $N-k$ нулей, $k = 0, \dots, N$. Из таких векторов с помощь сдвигов и сложения можно получить все доминантные веса. ■

9.4 Характер представления

Определение 9.8. ***Характером*** χ_V *неприводимого* $U(N)$*-модуля*

$$V = \oplus_{\mu \in \mathbb{Z}^N} V(\mu)$$

называется симметричный полином Лорана от $z_1, \dots, z_N$

$$\chi_V(z_1, \dots, z_N) = \sum_{\mu} dim V(\mu) z^{\mu}, \tag{22}$$

где $z^{\mu} := z_1^{\mu_1} \dots z_N^{\mu_N}$.

Так как симметрическая группа $S_N \subset U(N)$, то действие перестановочными матрицами дает перестановки координат весов.

Определение 9.9. *(второе определение) Будем считать, что* $z_1, \dots, z_N \in T = U(1)$. *Тогда диагональная матрица* $g_Z = diag(z_1, \dots, z_N) \in U(N)$. ***Характером*** *представления* V *является*

$$\chi_V(z_1, \dots, z_N) = tr_V g_Z. \tag{23}$$

Оператор g_Z *действует на* $V(\mu)$ *умножением на* z^{μ}.

Предложение 9.4. *Характер - полный инвариант.*

Свойства характеров:

$$\chi_{V \oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$$

$$\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \chi_{V'}$$

Пример 9.3. *В* $SU(2)$ *диагональне матрицы устроены так*

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

Характером будет полином $f(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ *симметричный относительно замены* $z \to z^{-1}$.

10 Лекция 11

Метод Германа-Вейля позволяет не только описать представления, но и явно вычислить характеры представлений. В прошлой лекции мы дали два определения характера. Второе 23 показывает, что след является так называемой $'class function'$ или центральной функцией, то есть постоянной на классах сопряженных элеменов.

$$\chi(vuv^{-1}) = \chi(u)$$

$$\chi(uv) = \chi(vu), u, v \in U(N)$$

Характер однозначно определяется своими значениями на диагональной матрице $Z = diag(z_1, z_2, \dots, z_n), z_i \in U(1)$. Тогда мы можем просто ограничить характер и перейти к функциям на $U(1)^N$

$$\chi_T(z_1, z_2, \dots, z_n) := \chi_T\Big|_Z.$$

Эквивалентное представление характера 22 показывает, что характер - симметрический полином Лорана $\mathbb{Z}_+[z_1^{\pm}, z_2^{\pm}, \dots, z_n^{\pm}]^{sym}$.

Пусть $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n) \in \mathbb{Z}$. Введем полиномы Шура

$$s_\lambda = \frac{det[z_j^{\lambda_i + N - i}]_{i,j=1}^N}{det[z_j^{N-i}]_{i,j=1}^N}, \tag{24}$$

где в знаменателе стоит определитель Вандермонда

$$V(z_1, \dots, z_N) = det[z_j^{N-i}]_{i,j=1}^N.$$

Заметим, что отношение детерминантов действительно является полиномом. Так как определитель в числителе обнуляется, если любые z_i, z_j совпадают, то он делится на определитель Вандермонда.

10.1 Неприводимые характеры группы U(N)

Теорема 10.1. *(H.Weyl) Неприводимые характеры группы $U(N)$ - есть в точности полиномы Шура.*

Доказательство. Будем использовать следующие факты:

- Если χ-неприводимый характер, то он симметрический полином Лорана.
- Если G-компактная группа, T, S - два неприводимых характера, тогда рассмотрим меру Хаара $\mu(dx)$. Характеры будут ортогональны и нормированы относительно меры Хаара [2].

$$\int_G \chi_T(u)\overline{\chi_S(u)}\mu(du) = \begin{cases} 0, \ T \sim S \\ 1, \ T = S \end{cases} \tag{25}$$

Еще нам понадобиться мостик, чтобы перейти от интегралов на группе к характерам, которые возникают как функции на группе. Это делается с помощью конструкции, которая называется радиальная часть.

[2] Почитать об этом можно в [4]

Пример 10.1. *Рассмотрим* $\mathbb{R}^2$ *с координатами* (x, y) *с одной стороны и полярными координатами* (r, ϕ) *с другой стороны. Пусть функция* f *- радиальна, то есть зависит только от* r*, тогда двумерный интеграл можно свести к одномерному:*

$$\int f(x,y)\ dxdy = \int \tilde{f}(r) r\ drd\phi,$$

а меру rdr *называют радиальной частью меры.*

В нашем случае вместо плоскости мы берем группу $U(N)$. Характеры инвариантны на классах(аналог вращения плоскости), тогда интегрирование сводится к интегрированию по $U(1)^N$. Можно сказать и так: рассмотрим проекцию $U(N) \to U(1)^N/S_N$, которая каждой матрице сопоставляет набор собственных значений. При этом мера μ перейдет в некоторую меру на торе $\tilde{\mu}$. Приведем результат:

$$\int_G f(u)\mu(du) = \frac{1}{N!}\int \tilde{f}(z_1, \ldots, z_N)\ |V(z_1, \ldots, z_n)|^2 \prod_{i=1}^{N} \nu(dz_i),$$

где $\prod_{i=1}^N \nu(dz_i)$ - нормированная мера Лебега на торе [3]. Поясним откуда появляется нормировка $1/N!$. Покажем, что

$$\int_{U(1)^N} |V(z_1, \ldots, z_N)|\nu(dz) = N!$$

$$\int_{U(1)^N} |V(z_1, \ldots, z_N)|\nu(dz) = \int_{U(1)^N} V(z_1, \ldots, z_N)\overline{V(z_1, \ldots, z_N)}\nu(dz) =$$
$$= \int_{U(1)^N} \sum_{\sigma \in S_N} sgn(\sigma) z_1^{N-\sigma(1)} \ldots z_N^{N-\sigma(N)} \sum_{\tau \in S_N} sgn(\tau) \bar{z}_1^{N-\tau(1)} \ldots \bar{z}_N^{N-\tau(N)}$$

Теперь переставляем суммирование и интегрирование и пользуемся фактом

$$\int_{U(1)} z^k \bar{z}^l = \delta_{kl}.$$

После интегрирования ненулевой вклад возникнет в случаях, когда $\sigma = \tau$, таких слагаемых $N!$.

Перепишем определение полиномов Шура в терминах *альтернантов*:

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta},$$

[3] Это вычисление можно прочитать у А.Вейля [3] или [1] или [13]

где

$$\delta = (N-1, N-2, \dots, 0),$$

$$a_\beta(z_1, \dots, z_N) = \sum_{\sigma \in S_N} sgn(\sigma) z_1^{\beta_{\sigma(1)}} \dots z_N^{\beta_{\sigma(N)}},\ \beta \in \mathbb{Z}^N.$$

Мы работаем с двумя пространствами: симметрические многочлены Лорана с неотрицательными коэффициентами, которым принадлежит характер:

$$\chi \in \mathbb{Z}_+[z_1^{\pm}, \dots, z_N^{\pm}]^{sym} \tag{26}$$

и антисимметрические многочлены Лорана, которым принадлежат альтернанты:

$$a_\beta \in \mathbb{Z}_+[z_1^{\pm}, \dots, z_N^{\pm}]^{asym}.$$

Более того, альтернанты образуют $\mathbb{Z}$-базис. Если характер умножить на альтернант $\tilde{\chi} = \chi a_\delta$, то мы снова попадем в пространство антисимметрических многочленов Лорана, причем $\tilde{\chi}$ может разложен по $\mathbb{Z}$-базису альтернантов, то есть

$$\tilde{\chi} = \sum_\beta m(\beta) a_\beta.$$

С другой стороны согласно факту 25:

$$\frac{1}{N!} \int_{U(1)^N} \chi(z)\overline{\chi(z)} a_\delta(z) \overline{a_\delta(z)} \nu(dz) = \frac{1}{N!} \int_{U(1)^N} \chi(z) \widetilde{\chi(z)} \nu(dz) = 1.$$

Заметим, что наши альтернанты обладают свойством

$$(a_\beta, a_{\beta'}) = \begin{cases} 1, & \beta = \beta' \\ 0, & \beta \neq \beta' \end{cases}$$

и тогда

$$\frac{1}{N!} \int_{U(1)^N} \chi(z) \widetilde{\chi(z)} \nu(dz) = \sum_\beta m(\beta)^2 = 1.$$

Следовательно, $\tilde{\chi} = \pm a_\beta$, для некоторого β. Мы выбираем положительный знак, так как 26. Таким образом, мы доказали, что характер обязательно имеет вид

$$\chi = \frac{a_\beta}{a_\delta}, \quad \beta = \lambda + \delta.$$

В обратную сторону, почему всякий полином Шура является характером, можно доказать так: нужно опереться на факт, что характеры параметризуются сигнатурами и образуют базис в пространстве центральных функций. ■

10.2 Формула размерности Вейля

Как только мы вычислили характер, мы можем найти размерность неприводимых представлений:

$$dimV_\lambda = s_\lambda(1,\dots,1) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}\Big|_{z_1=\dots=z_N=1}$$

Идея состоит в том, чтобы вычислить предел при стремлении $z_i \to 1$. Результатом становится формула размерности Вейля.

Теорема 10.2.

$$dimV_\lambda = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i} \tag{27}$$

Доказательство. Будем стремить $z_i \to 1$ особым образом

$$z_i = q^{N-i},\ i = 1,\dots,N.$$

Альтернант тогда преобразуется

$$a_\beta = det[z_j^{\beta_i}]\Big|_{z_j=q^{N-j}} = det[q^{(N-j)\beta_i}] = V(q^{\beta_1},\dots,q^{\beta_N}) =$$
$$= \prod_{i<j}(q^{\beta_i} - q^{\beta_j}) = \prod_{i<j} q^{\lambda_i+N-i} - q^{\lambda_j+N-j}.$$

Тогда многочлен Шура будет равен отношению

$$s_\lambda = \lim_{q=1+\epsilon,\epsilon\to 0} \prod_{i<j} \frac{q^{\lambda_i+N-i} - q^{\lambda_j+N-j}}{q^{N-i} - q^{N-j}} = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}.$$

∎

11 Лекция 12

Напомним, что мы работали с унитарной группой $U(N)$ и показали, что неприводимые представления находятся во взаимно однозначном соотвествии со старшими весами $\lambda = (\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_N)$, которые применительно к унитарной группе называются сигнатурами. Таким образом возникает замечательная функция χ_λ, которая изначально является функцией на унитарной группе, постоянной на классах сопряженных линий. Мы ее можем сузить на подгруппу диагональных матриц. Характером неприводимого представления унитарной группы является полиномом Лорана, который задается формулой 24. Следствием этой формулы является формула 27, которая задает размерность неприводимого представлния унитарной группы. Какую еще информацию можно извлечь?

Поставим следующую задачу. Рассмотрим следующую цепочку модулей

$$U(1) \subset \dots U(N-1) \subset U(N)$$

При вложении матрица $u \in U(N-1)$ на N-ом шаге фиксируется вектор e_N:

$$u \to \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $T_\lambda^{(N)}$ - это представление $U(N)$, $V_\lambda = M_\lambda / K_\lambda$ - модуль. Сузим представление на меньшую подгруппу:

$$T_\lambda^{(N)}\Big|_{U(N-1)}$$

В результате получим вполне приводимое представление

$$T_\lambda^{(N)} = \oplus_\mu \; k_\mu T_\mu^{(N-1)},$$

где $k_\mu = 0, 1, 2, \dots$ - кратности представлений меньших размерностей.

Определение 11.1. *Диаграмма $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$* ***перемежается*** *с диаграммой $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$:*

$$\lambda \succ \mu : \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_{N-1} \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N$$

Утверждение 11.1. *(Правило ветвления Гельфанда-Цетлина 1950)*

$$T_\lambda^{(N)} = \oplus_{\mu \prec \lambda} \; T_\mu^{(N-1)},$$

Пример 11.1. *В самом простом случае правило говорит*

$$T_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)} = \oplus_{\lambda_1 \geq \mu \geq \lambda_2} \; T_\mu^{(1)},$$

Характером такого представления будет согласно формуле Вейля 24(положим $z_2 = 1$ при сужении)

$$s_{\lambda_1, \lambda_2} = z_1^{\lambda_1} + z_1^{\lambda_1 - 1} + \dots + z_1^{\lambda_2}$$

Проделаем это вычисление в общем виде. Посмотрим на формулу 24: в числителе стоит матрица, такая что при сужении ($z_n = 1$) мы получаем последний столбик полностью состоящий их единиц. И понятно, что нужно детать - будем последовательно вычитать строки друг из друга, в результате чего получим определитель порядка $N-1$:

$$\frac{det(\frac{z_j^{\lambda_i+N-i}-z_i^{\lambda_{i+1}+N-i-1}}{z_j-1})_{i,j=1}^{N-1}}{V(z_1,\ldots z_{N-1})}$$

Введем обозначения

$$l_i = \lambda_i + N - i,\ i = 1,\ldots N$$

$$m_i = \mu_i + (N-1) - i,\ i = 1,\ldots N-1.$$

Тогда условия перемежаемости можно переписать в виде

$$\lambda > \mu \Leftrightarrow l_i > m_i \geq l_{i+1}.$$

а определитель запишется

$$\frac{det(\frac{z_j^{l_i}-z_i^{l_{i+1}}}{z_j-1})_{i,j=1}^{N-1}}{V(z_1,\ldots z_{N-1})} = \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n} det(z_j^{m_i})_{i,j=1}^{N-1} = \sum_{\mu} s_\mu(z_1,\ldots,z_{N-1}).$$

Перейдем к рассмотрению пространства

$$V_\lambda^{(N)} = \oplus_{\mu:\mu<\lambda} V_\mu^{(N-1)}$$

и так далее

$$V_\mu^{(N-1)} = \oplus_{\nu<\mu} V_\nu^{(N-2)}$$

Возникает цепочка сигнатур $\omega < .... < \nu < \mu < \lambda$. Переобозначив, получим $\lambda^{(1)} << \lambda^{(N-1)} < \lambda^{(N)} = \lambda$. Результатом разложения будет

$$V_\lambda = \oplus_\Lambda V(\Lambda),$$

где λ фиксирована, $V(\Lambda)$ - одномерно. Сигнатуры записываются в треугольную схему. Можно сказать, что размерность нашего представления - это количество схем Λ с верхней строчкой λ.

Все пространства V_λ весовые и можно найти их вес.

Предложение 11.1. *Вес, отвечающий* Λ*, где*

$$\mu_N = \sum \lambda_i^{(N)} - \sum \lambda_j^{(N-1)}$$

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{(k-1)} \lambda_j^{(k-1)}$$

Заметим, что Λ не востанавливается однозначно по μ. Посмотрим, что происходит на первом этапе:

$$V_\lambda = \oplus_{\lambda^{(N-1)} < \lambda} V_{\lambda^{(N-1)}}$$

$$s_\lambda(z_1, \dots z_N)\Big|_{z_N=1} = \sum_{\lambda^{(N-1)}} s_{\lambda^{(N-1)}}(z_1, \dots, z_N)$$

Без ограничения будет верно

$$s_\lambda(z_1, \dots z_N) = \sum_{\lambda^{(N-1)}} s_{\lambda^{(N-1)}}(z_1, \dots, z_N) z_N^{\sum \lambda_i - \sum \lambda_j^{(N-1)}}$$

так как слева стоит однородный полином степени степени $\sum \lambda_i$ по z_N и нужно вычесть степень определителя Вандермонда. (см формулу $det(z_j^{l_i})/Vand$). Тогда можно записать такую формулу

$$s_\lambda(z_1, \dots z_N) = \sum_{\Lambda} z_1^{\mu_1} \dots z_N^{\mu_N}.$$

Когда сигнатура λ неотрицательна, то есть $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Тогда эту сигнатуру можно представить в виде диаграммы Юнга, в которой число строк $\leq N$. Условие перемежаемости $\mu < \lambda$ диаграмм эквивалетно тому, что

$$\mu = \lambda = (\text{горизонтальная полоска})$$

Пусть λ - диаграмма Юнга.

Определение 11.2. *Полустандартная таблица формы λ — есть заполнение клеток числами $1, \dots, N$, где числа слабо возрастают вдоль строк и строго возрастают вдоль столбцов.*

Когда сигнатура неотрицательна - схема Гельфанда-Цетлна Λ — это то же самое, что полустандартные таблицы.

Предложение 11.2. *Комбинаторная формула ($\lambda_N \geq 0$):*

$$s_\lambda(z_1, \dots z_N) = \sum_{T \in Tab_N(\lambda)} \prod_{D \in \lambda} z_T(D),$$

где D - клетка диаграммы λ (воспринимаем таблицу как отображение клетки в множество $1, \dots, N$).

Неочевидно, что полином в такой записи симметричен(есть красивое рассуждение принадлежащее $Knuth$). Обсудим другое рассуждение: как теория представлений связана с популярной моделью в матфизике, которая называется замощением. Рассмотрим треугольную решетку. И берем ромбики, они бывают трех типов: два наклоненных и один ровный. Рисуем произвольный шестиугольник с паралельными сторонами. Задача ставиться так: необходимо замостить шестиугольник ромбиками трех типов. Легко понять какие треугольники в углах, а дальше замощения могут быть разными.

Предложение 11.3. *Замощения(tiling) шестиугольника со сторонами длин k, l, m находятся во взаимно-однозначном соответствии со схемами Гельфанда-Цетлина сигнатуры длины $N = k+l, \lambda = (m, ..m, 0, .., 0)$(m - k штук, 0 - l штук),*

$$m.....m\ 0.....0$$

$$m...m...0...0$$

$$mmm0000$$

$$mm000$$

$$m0$$

Остальные числа должны удовлетворять условиям перемежаемости. Нарисуем паралеллиппид со сторонами k, l, m и я утверждаю, что заполнение остальной части схемы отвечает схеме Гельфанда-Цетлина. Внутри паралеллиппида нужно построить "мавзолей"(трехмерную диаграмму Юнга). Так соображения теории представлений проникают в модели математической физики(рекомендуется см [16]).

12 Литература

Список литературы

[1] Greg W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, An Introduction to Random Matrices, Cambridge University Press.

[2] А. Вейль Интегрирование в топологических группах и его применения. — М.: ИЛ, 1950. — 222 с.

[3] Г. Вейль, Классические группы. Их инварианты и представления. -М.:Государственной издательство иностранной литературы, 1947.- 404 с.

[4] Э. Б. Винберг, Линейные представления групп, 1985

[5] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, О. В. Шварцман “Дискретные подгруппы групп Ли”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 21, ВИНИТИ, М., 1988, 5–120.

[6] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, “Основы теории групп Ли”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 20, ВИНИТИ, М., 1988, 5–101

[7] Н. Джекобсон Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

[8] Д. П. Желобенко Компактные группы Ли и их представления.

[9] A. A. Kirillov Jr. Introduction to Lie groups and Lie algebras. http://www.math.sunysb.edu/ kirillov/liegroups/

[10] Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М.: Гостехиздат, 1954.

[11] Ж.-П.Серр. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.

[12] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар Софус Ли 1962.

[13] J.Faraut, Analysis on Lie Groups: An Introduction, Cambridge University Press.

[14] Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

[15] Хелгассон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства

[16] V.Gorin, Non-intersecting paths and Hahn orthogonal polynomial ensemble, Functional Analysis and its Applications, 42 (3) (2008), 180-197, arXiv:0708.2349